William H. Hayt, Jr. • Jack E. Kemmerly • Steven M. Durbin



Análisis de circuitos en ingeniería

Octava edición

Mc Graw Hill

ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN INGENIERÍA



ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN INGENIERÍA

OCTAVA EDICIÓN

William H. Hayt, Jr. (finado)

Purdue University

Jack E. Kemmerly (finado)

California State University

Steven M. Durbin

University at Buffalo
The State University of New York

Revisión técnica:

Gloria Mata Hernández

Universidad Nacional Autónoma de México

Nathan Witemberg Wudka

Universidad Iberoamericana, Ciudad de México

Alejandro Vega Salinas

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Querétaro

Mc Graw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA
NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO • SAO PAULO • AUCKLAND
LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO
SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

Director general México: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha Martínez
Editora de desarrollo: Ana Laura Delgado Rodríguez
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traductor: Carlos Roberto Cordero Pedraza / Sergio Sarmiento Ortega

ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN INGENIERÍA
Octava edición

Mc Graw Hill Educación

Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 978-607-15-0802-7
ISBN (edición anterior): 978-970-10-6107-7

ISBN: 978-007-352957-8

1234567890 1345678902

Impreso en México *Printed in Mexico*

Para Sean y Kristi,
la mejor parte de cada día.

ACERCA DE LOS AUTORES

WILLIAM H. HAYT, JR. cursó su licenciatura y su maestría en la Universidad de Purdue, y su doctorado en la Universidad de Illinois. Después de pasar cuatro años en la industria, el profesor Hayt ingresó a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Purdue, donde colaboró como profesor y jefe de la Escuela de Ingeniería Eléctrica y como profesor emérito luego de retirarse en 1986. Además de la obra *Análisis de circuitos en ingeniería*; es autor de otros tres libros, entre los que se incluyen *Teoría electromagnética*, ahora publicado en su octava edición por McGraw-Hill. El profesor Hayt ha pertenecido a las siguientes sociedades profesionales: Eta Kappa Nu, Tau Beta Pi, Sigma Xi, Sigma Delta Chi, miembro del IEEE, ASEE y NAEB. Mientras estuvo en Purdue, recibió varios premios a la enseñanza, entre los que se cuentan el premio al mejor profesor universitario. También se encuentra en la lista del libro de grandes maestros de Purdue, un muro permanente que se exhibe en Purdue Memorial Union, donde quedó inscrito el 23 de abril de 1999. El libro lleva los nombres del grupo inaugural de 225 miembros de la facultad, del pasado y el presente, quienes dedicaron sus vidas a la excelencia en la enseñanza y la erudición. Fueron elegidos por los estudiantes y colegas como los mejores educadores de Purdue.

JACK E. KEMMERLY recibió su licenciatura con grado Magna Cum Laude por parte de la Universidad Católica de América, su maestría por parte de la Universidad de Denver y su doctorado de la Universidad de Purdue. Enseñó primero en esta última universidad y después trabajó como ingeniero en jefe en la Aeronutronic Division de Ford Motor Company. Después ingresó a la Universidad Estatal de California, en Fullerton, donde se desempeñó como profesor, director de la Facultad de Ingeniería Eléctrica, director de la División de Ingeniería y profesor emérito. El profesor Kemmerly ha pertenecido a las siguientes sociedades profesionales: Eta Kappa Nu, Tau Beta Pi, Sigma Xi, ASEE e IEEE (miembro senior). Sus intereses fuera de la academia incluyen ser oficial de la Little Ligue y jefe de grupo de los Boy Scouts.

STEVEN M. DURBIN recibió los grados de licenciatura (B.S.), maestría (M.S.) y doctorado (Ph.D.) en Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Purdue, en West Lafayette, Indiana. Posteriormente trabajó con el Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad del Estado de Florida y en la Universidad A&M de Florida, antes de ingresar a la Universidad de Canterbury, en Nueva Zelanda, en 2000. Desde agosto de 2010, ha trabajado en el Campus Buffalo de la Universidad Estatal de Nueva York, donde tiene una titularidad conjunta entre los departamentos de Ingeniería Eléctrica y Física. Sus intereses académicos incluyen circuitos, electrónica, electromagnetismo, electrónica de estado sólido y nanotecnología. Sus intereses de investigación se enfocan principalmente en el desarrollo de nuevos materiales semiconductores —en especial los basados en compuestos de óxidos y nitruros— así como en nuevas estructuras de dispositivos optoelectrónicos. Es investigador fundador del Instituto MacDiarmid para Materiales Avanzados y Nanotecnología, un centro nacional de excelencia en investigación de Nueva Zelanda, y es coautor de más de 100 publicaciones técnicas. Es miembro numerario de IEEE y miembro de Eta Kappa Nu, Electron Devices Society, la AVS (American Vacuum Society), American Physical Society y Royal Society of New Zealand.

CONTENIDO BREVE

CONTENIDO

PREFACIO

El público al que va dirigido un libro define su contenido, y es un factor importante en las decisiones grandes y pequeñas, especialmente en lo que se refiere tanto al ritmo como al estilo general de escritura. En consecuencia, es primordial observar que los autores han tomado la decisión consciente de escribir este libro para el **estudiante**, y no para el profesor. Nuestra filosofía subyacente es que la lectura del libro debe ser placentera, a pesar del nivel de detalle técnico que deba tener. Cuando vemos en retrospectiva a la primera edición de *Análisis de circuitos en ingeniería*, es claro que se desarrolló específicamente para ser más una conversación que un discurso seco y aburrido acerca de un conjunto de temas fundamentales. Para mantener el estilo conversacional, hemos tenido que trabajar ampliamente en la actualización del libro de modo que siga hablando al grupo cada vez más diverso de estudiantes que lo usan en todo el mundo.

Aunque en muchos programas de ingeniería el curso introductorio de circuitos está precedido o acompañado de un curso introductorio de física en el que se explican la electricidad y el magnetismo (usualmente desde una perspectiva de campo), esto no es necesario para usar este libro. Después de terminar el curso, muchos estudiantes se encuentran verdaderamente asombrados de que un conjunto tan amplio de herramientas analíticas se pueden deducir de **sólo tres sencillas leyes científicas**: la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff de voltaje y corriente. Los primeros seis capítulos suponen que el estudiante está familiarizado solamente con el álgebra y las ecuaciones simultáneas; los capítulos siguientes suponen que se está tomando en paralelo un primer curso de cálculo (derivadas e integrales). Más allá de esto, hemos tratado de incorporar suficientes detalles para permitir que el libro se lea por sí solo.

Entonces, ¿qué rasgos clave se han incluido en el diseño de este libro teniendo en mente al estudiante? Primero, los capítulos individuales se organizan en sub-secciones relativamente cortas, cada una de ellas con un solo tema principal. El idioma se ha actualizado para que siga siendo coloquial y para que fluya con naturalidad. Se usa color para destacar la información importante, y no solamente para mejorar la estética del diseño de página, y se proporciona espacio para escribir notas pequeñas y preguntas. Los términos nuevos se definen cada vez que se introducen, y se incluyen estratégicamente ejemplos para demostrar no únicamente los conceptos básicos, sino también los procedimientos de resolución de problemas. Los problemas se colocan cerca de ejemplos, de modo que los estudiantes puedan probar las técnicas antes de intentar resolver los ejercicios de fin de capítulo. Los ejercicios representan una amplia gama de dificultades, generalmente se ordenan de sencillos a complejos y se agrupan de acuerdo con la sección pertinente de cada capítulo. Las respuestas a los ejercicios de fin de capítulo seleccionados con número impar se publican en el sitio de internet del libro en www.mhhe.com/haytdurbin8e.

La ingeniería es una materia de estudio intenso, y los estudiantes con frecuencia tienen que enfrentarse a fechas límite y a considerables cargas de trabajo. Esto no significa, sin embargo, que los libros de texto tengan que ser secos y solemnes, o que el trabajo de clase no debe contener elementos de diversión. De hecho, resolver victoriosamente un problema con frecuencia *es* divertido, y aprender cómo hacerlo puede también serlo. Determinar cómo lograr esto de la mejor manera dentro del contexto de un libro de texto es un proceso continuo. Los autores siempre se han apoyado en la retroalimentación, a veces muy franca, que reciben de sus propios estudiantes en la Universidad de Purdue, la Universidad Estatal de California en Fullerton, el Colegio Fort Lewis en Durango, el Programa Conjunto de Ingeniería en la Universidad A&M

de Florida y en la Universidad Estatal de Florida, la Universidad de Canterbury (Nueva Zelanda) y la Universidad en Buffalo. Siempre nos apoyamos en los comentarios, correcciones y sugerencias de instructores y estudiantes en todo el mundo y, para esta edición, se ha dado consideración a una nueva fuente de comentarios: las publicaciones semianónimas en diversos sitios de internet.

La primera edición de este libro fue escrita por Bill Hayt y Jack Kemmerly, dos profesores de ingeniería que disfrutaban mucho la enseñanza, la interacción con sus estudiantes y la capacitación de generaciones de futuros ingenieros. Fue bien recibida debido a su estructura compacta, “sin rodeos”, su estilo informal de escritura y su organización lógica. No hay modestia cuando se trata de presentar la teoría subyacente en un tema específico, o de abstenerse de presumir de conocimiento al desarrollar expresiones matemáticas. Todo, sin embargo, se diseñó cuidadosamente para ayudar a los estudiantes en su aprendizaje, para presentar las cosas de una forma sencilla y directa, dejando la teoría pura para otros libros. Ellos le han puesto mucho pensamiento a la escritura del libro, y su entusiasmo por el tema impresiona al lector.

CARACTERÍSTICAS CLAVE DE LA OCTAVA EDICIÓN

Hemos tenido gran cuidado para conservar las características de la séptima edición, que claramente estaban funcionando bien. Esto incluye el diseño general y la secuencia de los capítulos, el estilo sencillo del texto y de las gráficas, el uso de color cuando se requiere, numerosos ejemplos desarrollados y problemas de práctica relacionados, y el agrupamiento de los ejercicios de fin de capítulo de acuerdo con la sección. Los transformadores siguen ameritando un capítulo especial, y la frecuencia compleja se introduce brevemente mediante una extensión de uso fácil para el estudiante de la técnica de fasores, en vez de hacerlo en forma indirecta por la simple enunciación de la integral de la transformada de Laplace. También hemos retenido el uso de iconos, una idea que se había presentado por primera vez en la sexta edición:


Alerta frente a errores comunes.


Indica un punto que vale la pena anotar.



Indica un problema de diseño para el cual no hay una respuesta única.


Indica un problema que necesita un análisis apoyado por computadora.

La introducción del análisis orientado a la ingeniería y del software de diseño en el libro se ha hecho con la convicción de que debe ser un apoyo y no un sustituto del proceso de aprendizaje. En consecuencia, el icono de computadora indica problemas que usualmente se expresan de tal manera que el software se usa para *verificar* las respuestas, y no simplemente para obtenerlas. Tanto MATLAB® como PSpice® se usan en este contexto.

CAMBIOS ESPECÍFICOS PARA LA OCTAVA EDICIÓN INCLUYEN:

- Una nueva sección en el capítulo 16 sobre el análisis y diseño de filtros Butterworth de etapas múltiples.

- Más de 1 000 ejercicios de final de capítulo, nuevos y revisados.
- Una nueva filosofía de cobertura total para los ejercicios de final de capítulo: cada sección contiene problemas similares a los que se han resuelto en los ejemplos desarrollados y en los problemas de práctica, antes de continuar con problemas más complejos para poner a prueba las habilidades del lector.
- Introducción de ejercicios de integración al final de cada capítulo. Para comodidad de los instructores y los estudiantes, los ejercicios de final de capítulo se agrupan por sección. Para dar la oportunidad de asignar ejercicios con menos énfasis en un método explícito de solución (por ejemplo, análisis de malla y de nodos), así como para ofrecer una perspectiva más amplia sobre temas clave dentro de cada capítulo, aparece un número selecto de ejercicios de integración de capítulo al final de cada capítulo.
- Nuevas fotografías para dar una conexión con el mundo real.
- Capturas de pantalla y descripciones de texto de software actualizadas.
- Nuevos ejemplos desarrollados y problemas de práctica.
- Actualizaciones a la sección de aplicación práctica, introducidas para ayudar a los estudiantes a conectar el material de cada capítulo con conceptos más amplios en la ingeniería. Los temas incluyen la distorsión en amplificadores, el modelado de sistemas de suspensión de automóviles, aspectos prácticos de la conexión a tierra, la relación entre polos y estabilidad, la resistividad y el memistor, que algunas veces se llama “el elemento faltante”.
- Reestructuración del texto, especialmente en los ejemplos desarrollados, para llegar más pronto al punto.
- Las respuestas a los ejercicios selectos de fin de capítulo marcados con número impar se publican en el sitio de internet del libro en: www.mhhe.com/haytdurbin8e.

Yo me uní al libro en 1999 y, desgraciadamente, nunca tuve la oportunidad de hablar con Bill ni con Jack sobre el proceso de revisión, aunque me considero afortunado por haber tomado un curso de circuitos de Bill Hayt cuando era estudiante en Purdue. Es un distinguido privilegio servir ahora como coautor en *Análisis de circuitos en ingeniería*, y al trabajar en este libro, doy la más alta prioridad a su filosofía fundamental y a su público selecto. Agradezco mucho a todas las personas que ya han proporcionado retroalimentación —tanto positiva como negativa— sobre aspectos de las ediciones anteriores, y exhorto a otros a hacer lo mismo a través de los editores de McGraw-Hill Educación.

Por supuesto, este proyecto ha sido un esfuerzo de equipo, como es el caso con todo libro de texto moderno. Quisiera agradecer especialmente a Ragu Srinivasan (editor global), Peter Massar (editor sponsor), Curt Reynolds (gerente de comercialización), Jane Mohr (gerente de proyecto), Britney-Corrigan-McElroy (gerente de proyecto) y, de máxima importancia, la editora de desarrollo, Darlene Schueller, quien me ayudó con muchos, muchos detalles, temas, plazos de entrega y preguntas. Ella es absolutamente la mejor, y yo estoy muy agradecido por todo el apoyo del equipo de McGraw-Hill. También quisiera agradecer a varios representantes de McGraw-Hill, especialmente Nazier Hassan, quien nos visitaba siempre que estaba en la universidad sólo para saludarnos y preguntar cómo iban las cosas. También debo un agradecimiento especial a Catherine Schultz y Michael Hackett, ex editores que siguen manteniéndose en contacto. Cadence® y The MathWorks tuvieron la gentileza de proporcionar asistencia con el software de análisis apoyado por software, que se agradeció mucho. Varios colegas han suministrado generosamente o ayudado a obtener fotografías y detalles técnicos, por lo cual estoy muy agradecido: Prof. Masakazu Kobayashi, de la Universidad de Waseda; Dr. Wade Enright; Prof. Pat Bodger; Prof. Rick Millane; Mr. Gary Turner; Prof. Richard Blaikie, de la Universidad de Canterbury, y el Prof.

Reginald Perry y el Prof. Jim Zheng, de la Universidad A&M de Florida y la Universidad del Estado de Florida. Para la octava edición, las siguientes personas merecen reconocimiento y gratitud por haberse tomado el tiempo para revisar varias versiones del manuscrito:

Chong Koo An	Universidad de Ulsan
Mark S. Andersland	Universidad de Iowa
Marc Cahay	Universidad de Cincinnati
Claudio Canizares	Universidad de Waterloo
Teerapon Dachokiatawan	Universidad de Tecnología de Bangkok del Norte
John Durkin	Universidad de Akron
Lauren M. Fuentes	Colegio Durham
Lalit Goel	Universidad Tecnológica de Nanyang
Rudy Hofer	Colegio Conestoga ITAL
Mark Jerabek	Universidad de West Virginia
Michael Kelley	Universidad de Cornell
Hua Lee	Universidad de California, en Santa Bárbara
Georges Livanos	Instituto de Tecnología del Colegio Humber
Ahmad Nafisi	Universidad Politécnica del Estado de California
Arnost Neugroschel	Universidad de Florida
Pravin Patel	Colegio Durham
Jamie Phillips	Universidad de Michigan
Daryl Reynolds	Universidad de West Virginia
G.V.K.R. Sastry	Universidad de Andhra
Michael Scordilis	Universidad de Miami
Yu Sun	Universidad de Toronto, Canadá
Chanchana Tangwongsan	Universidad de Chulalongkorn
Edward Wheeler	Instituto de Tecnología Rose-Hulman
Xiao-Bang Xu	Universidad Clemson
Tianyu Yang	Universidad Aeronáutica Embry-Riddle
Zivan Zabar	Instituto Politécnico de la Universidad de Nueva York

También me gustaría agradecer a Susan Lord, de la Universidad de San Diego, Archie L. Holmes, Jr., de la Universidad de Virginia, Arnost Neugroschel, de la Universidad de Florida y Michael Scordilis, de la Universidad de Miami, por su apoyo en la verificación de la exactitud de las respuestas a los ejercicios selectos de fin de capítulo.

Finalmente, me gustaría agradecer brevemente a muchas otras personas que han contribuido tanto en forma directa como indirecta a la octava edición. Primero y en grado máximo, a mi esposa, Kristi y a nuestro hijo, Sean, por su paciencia, su comprensión, su apoyo, sus gratas distracciones y sus útiles consejos. En todo el día, siempre ha sido un placer hablar con amigos y colegas acerca de lo que se debería enseñar, cómo se debería enseñar y cómo medir el aprendizaje. Especialmente, Martin Allen, Richard Blaikie, Alex Cartwright, Peter Cottrell, Wade Enright, Jeff Gray, Mike Hayes, Bill Kennedy, Susan Lord, Filippa Martin, Theresa Mayer, Chris McConville, Reginald Perry, Joan Redwing, Roger Reeves, Dick Schwartz, Leonard Tung, Jim Zheng y muchos otros, me han dado muchas útiles ideas, como también lo ha hecho mi padre, Jess Durbin, ingeniero eléctrico graduado en el Instituto de Tecnología de Indiana.

Steven M. Durbin
Buffalo, Nueva York



CAPÍTULO

1 Introducción



CONCEPTOS CLAVE

Circuitos lineales contra circuitos no-lineales

Cuatro categorías principales del análisis de circuitos:

- Análisis en cd
- Análisis de estado transitorio
- Análisis sinusoidal en ca
- Respuesta en frecuencia

Análisis de circuitos más allá de los circuitos

Análisis y diseño

Uso de software de ingeniería

Una estrategia de resolución de problemas

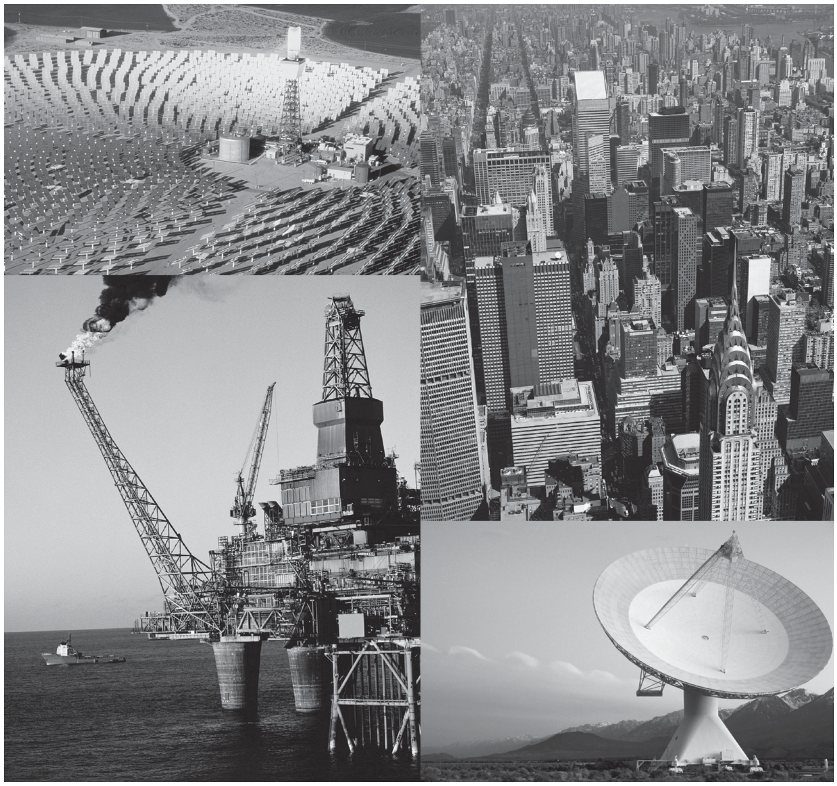
PREÁMBULO

Aunque hay especialidades claramente definidas dentro del campo de ingeniería, todos los ingenieros comparten una cantidad considerable de terreno en común, especialmente cuando se trata de resolución de problemas. De hecho, muchos ingenieros en el ejercicio de su profesión descubren que es posible trabajar en una amplia variedad de circunstancias, e incluso fuera de su especialidad tradicional, ya que su conjunto de habilidades con frecuencia es transferible a otros entornos. En la actualidad, los egresados de ingeniería se emplean en una amplia gama de trabajos, desde el diseño de componentes individuales y sistemas hasta la ayuda en la resolución de problemas socioeconómicos como contaminación de aire y agua, planeación urbana, comunicación, transporte masivo, generación y distribución de energía eléctrica, y uso eficiente y conservación de recursos naturales.

El análisis de circuitos ha sido desde hace tiempo una introducción tradicional al **arte de resolución de problemas** desde una perspectiva de ingeniería, incluso para aquellos cuyos intereses son ajenos a la ingeniería eléctrica. Esto tiene muchas razones, pero una de las mejores es que en el mundo actual es extremadamente improbable que cualquier ingeniero encuentre un sistema que no incluya de alguna manera circuitos eléctricos. Al volverse más pequeños los circuitos y demandar menos potencia, y al hacerse más pequeñas y baratas las fuentes de potencia, los circuitos embebidos parecen estar presentes en todas partes. Como la mayoría de las situaciones de ingeniería exigen un esfuerzo de equipo en alguna etapa, un conocimiento práctico del análisis de circuitos ayuda a proporcionar a todo el que trabaja en un proyecto la preparación necesaria para la comunicación eficaz.

En consecuencia, este libro no trata únicamente del "análisis de circuitos" desde una perspectiva de ingeniería, sino también del desarrollo de habilidades básicas de resolución de problemas que se aplican a situaciones que es muy probable que encuentre





No todos los ingenieros en electrónica utilizan el análisis de circuitos de manera rutinaria, pero a menudo ponen en práctica las habilidades analíticas y de resolución de problemas que aprendieron durante sus estudios de licenciatura. Un curso sobre análisis de circuitos es una de sus primeras exposiciones a dichos conceptos. (Espejos solares: © *Corbis; Skyline: © Getty Images/Photolink; Oil Rig: © Getty Images; Dish: Getty Images/J. Luke/Photolink.*)

un ingeniero. Como parte de esto, también encontramos que estamos desarrollando un entendimiento intuitivo a un nivel más general ya que con frecuencia podemos entender un sistema completo por su analogía con un circuito eléctrico. Antes de entrar a todo esto, sin embargo, comenzaremos con una rápida vista previa de los temas que se encuentran en el resto del libro, deteniéndonos brevemente para ponderar la diferencia entre el análisis y el diseño, y el papel creciente que desempeñan las herramientas computacionales en la ingeniería moderna.



Los aparatos de televisión incluyen muchos circuitos no-lineales. Sin embargo, una gran cantidad de ellos pueden comprenderse y analizarse con la ayuda de modelos lineales. (© *Sony Electronics Inc.*)

1.1 PANORAMA GENERAL DEL TEXTO

El tema fundamental de este libro es el ***análisis de circuitos lineales***, el cual invita a algunos lectores a preguntar:

"¿Existe el análisis de circuitos *no-lineales*?"

¡Por supuesto! Encontramos circuitos no-lineales todos los días: éstos capturan y decodifican señales para nuestras televisiones y radios, llevan a cabo millones de cálculos por segundo dentro de los microprocesadores, convierten la voz en señales eléctricas para su transmisión a través de líneas telefónicas y ejecutan muchas otras funciones que ni siquiera es posible imaginar. En el diseño, prueba e implementación de dichos circuitos no-lineales, no puede uno olvidarse del análisis a detalle.

"Entonces, ¿por qué estudiar el análisis de circuitos *lineales*?"

sería una pregunta válida. Muy buena pregunta. El simple hecho es que ningún sistema físico (entre ellos los circuitos eléctricos) es perfectamente lineal. Sin embargo, por fortuna, un gran número de sistemas se comportan razonablemente en forma lineal

arriba de un rango limitado, pues permite modelarlos como sistemas lineales si se toman en cuenta las limitaciones en el rango.

Por ejemplo, considere la función

$$f(x) = e^x$$

Una aproximación lineal a esta función es

$$f(x) \approx 1 + x$$

Comprobémoslo. La tabla 1.1 muestra tanto el valor exacto como el aproximado de $f(x)$ en un rango de x. De manera sorprendente, la aproximación lineal es muy exacta hasta alrededor de $x = 0.1$ el valor, cuando el error relativo es todavía menor que 1%. Aunque muchos ingenieros son muy hábiles con una calculadora, es difícil discutir el hecho de que cualquier otro método sea más rápido que sólo agregando un 1.

TABLA 1.1 Comparación de un modelo lineal para e^x con el valor exacto

x	$f(x)$*	$1 + x$	Error relativo**
0.0001	1.0001	1.0001	0.0000005%
0.001	1.0010	1.001	0.00005%
0.01	1.0101	1.01	0.005%
0.1	1.1052	1.1	0.5%
1.0	2.7183	2.0	26%

* Especificado con cuatro cifras significativas.

** Error relativo $\triangleq \left| 100 \times \frac{e^x - (1 + x)}{e^x} \right|$.

Los problemas lineales son inherentemente más fáciles de resolver que los no-lineales. Por esta razón, a menudo buscamos aproximaciones lineales que sean muy similares (*modelos*) a las situaciones físicas. Además, los modelos lineales se manipulan y se comprenden de una manera más fácil logrando que el diseño se convierta en un proceso más sencillo.

Todos los circuitos que encontraremos en los capítulos subsecuentes representan aproximaciones lineales a los circuitos eléctricos físicos. Cuando sea apropiado, se proporcionarán explicaciones breves de inexactitudes potenciales o limitaciones de estos modelos, pero, en términos generales, observaremos que tienen una exactitud adecuada para la mayor parte de las aplicaciones. Cuando en la práctica se requiera de una exactitud mayor, se emplearán modelos no-lineales, a costa de un incremento considerable en la complejidad de la solución. En el capítulo 2 se puede encontrar un análisis más detallado de lo que constituye un *circuito eléctrico lineal.*

El análisis de circuitos lineales se puede separar en cuatro vastas categorías: (1) *análisis en cd*, en el que las fuentes de energía no cambian con el tiempo; (2) *análisis de estado transitorio*, donde las cosas cambian rápidamente a menudo; (3) *análisis sinusoidal en ca*, que se aplica tanto a la potencia ac como a las señales en ca, y (4) *respuesta en frecuencia*, que es la más general de las cuatro categorías, pero usualmente supone que algo está cambiando con el tiempo. Comenzamos con el tema de los circuitos resistivos, que incluye ejemplos simples como el de un foco o un tostador. Ello nos brinda una oportunidad perfecta para aprender varias técnicas muy poderosas de análisis de circuitos de ingeniería, como el *análisis nodal,* el *análisis de malla,* la



Los trenes modernos están impulsados por motores eléctricos. Sus sistemas eléctricos se analizan mejor a través del uso de técnicas de análisis fasorial o en ca. (*Se usa con permiso. Copyright de imagen ©2010 M. Kobayashi. Todos los derechos reservados.)*



Los circuitos que dependen de la frecuencia son parte medular de muchos aparatos electrónicos, y su diseño puede representar una tarea muy divertida. (©*The McGraw-Hill Companies, Inc.*)

superposición, la *transformación de fuente,* el *teorema de Thévenin* y el *teorema de Norton,* así como varios métodos para simplificar las redes de componentes conectados en serie o en paralelo. La única característica rescatable de los circuitos resistivos es que la dependencia del tiempo de cualquier cantidad de interés no afecta el proceso de análisis. En otras palabras, si se quiere determinar una cantidad eléctrica de un circuito resistivo en algunos instantes específicos en el tiempo, no será necesario que se analice el circuito más de una vez. Como resultado, se dedicarán los mayores esfuerzos a considerar sólo circuitos de cd, es decir, circuitos cuyos parámetros eléctricos no varían con el tiempo.

Aunque los circuitos de cd como un foco o el desempañador del vidrio trasero de un automóvil son, sin duda alguna, importantes en la vida diaria, las cosas se tornan mucho más interesantes cuando algo sucede de repente. En el argot del análisis de circuitos, el *análisis de transitorios* es el conjunto de técnicas utilizadas en el estudio de circuitos que se energizan o desenergizan de manera repentina. Para hacer esos circuitos más interesantes, es necesario agregarles elementos que respondan a la velocidad de cambio de las cantidades eléctricas, lo cual conduce a ecuaciones de circuitos que incluyen derivadas e integrales. Por fortuna, se pueden obtener dichas ecuaciones utilizando las técnicas que se expusieron en la primera parte de este estudio.

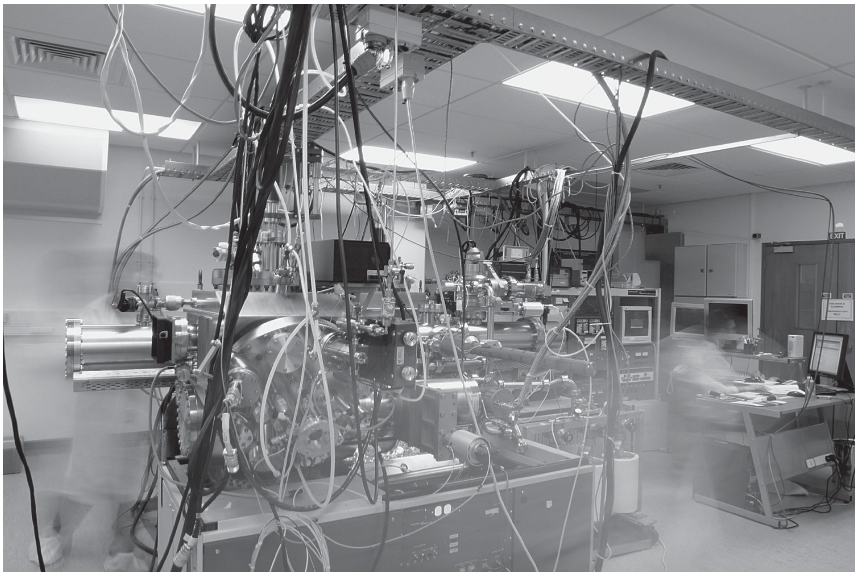
Sin embargo, no todos los circuitos que varían con el tiempo se encienden y se apagan de manera repentina. Los equipos de aire acondicionado, ventiladores y lámparas fluorescentes son sólo algunos de los múltiples ejemplos que se encuentran en la vida diaria. En tales situaciones, el método basado en el cálculo para todos los análisis puede convertirse en una tarea tediosa y consumir mucho tiempo. Por fortuna, existe una mejor alternativa en situaciones donde al equipo se le permite operar un tiempo lo suficientemente largo para que los efectos transitorios desaparezcan, a lo cual se le conoce comúnmente como análisis en ca, o, a menudo, *análisis fasorial.*

La última parte del recorrido está relacionado con el tema conocido como la *respuesta en frecuencia.* Trabajar de manera directa con las ecuaciones diferenciales que se obtienen en el análisis en el dominio del tiempo nos permite desarrollar una comprensión intuitiva de la operación de circuitos que contengan elementos de almacenamiento de energía (por ejemplo, capacitores y bobinas). Sin embargo, como veremos más adelante, aun los circuitos con un número relativamente pequeño de componentes pueden ser de alguna forma difíciles de analizar, por lo que se han desarrollado métodos más directos. Estos métodos, entre ellos el análisis de Laplace y de Fourier, permiten transformar las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, así como diseñar circuitos que respondan de manera específica a frecuencias particulares. Cotidianamente empleamos circuitos que varían con la frecuencia cuando se marca un número telefónico, se selecciona la estación de radio favorita o se conecta a internet.

1.2 RELACIÓN DEL ANÁLISIS DE CIRCUITOS CON LA INGENIERÍA

Ya sea que deseemos llevar a cabo más análisis de circuitos cuando termine este curso o no, vale la pena mencionar que existen varios niveles de los conceptos bajo estudio. Más allá de los detalles de las técnicas de análisis de circuitos se encuentra la oportunidad de desarrollar una técnica metodológica para resolver problemas, la capacidad para determinar el objetivo u objetivos de un problema en particular, la habilidad para recabar la información necesaria para llegar a una solución y, quizás igualmente importante, las oportunidades para obtener experiencia práctica en la verificación de la exactitud de la solución.

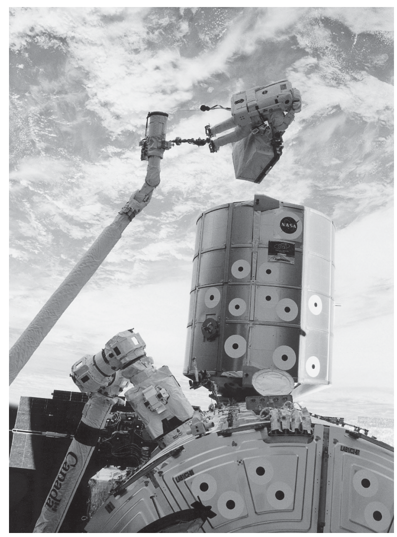
Los estudiantes familiarizados con el estudio de otros temas de ingeniería como el flujo de fluidos, los sistemas de suspensión de automóviles, el diseño de puentes, la administración de la cadena de suministros y el control de procesos, reconocerán la



Instalación de crecimiento epitaxial de cristales por medio de un haz molecular. Las ecuaciones que rigen su operación son muy parecidas a las que se utilizan para describir circuitos lineales simples.

forma general de muchas de las ecuaciones que desarrollaremos para describir el comportamiento de varios circuitos. Sólo necesitamos aprender la forma de "traducir" las variables relevantes (por ejemplo, sustituir *tensión* por *fuerza, carga* por *distancia, resistencia* por *coeficiente de fricción,* etc.) a fin de determinar lo que ya sabemos para resolver un nuevo tipo de problema. Con mucha frecuencia, si tenemos bastante experiencia en la resolución de problemas similares o relacionados, la intuición puede ser una guía a través de la solución de un problema totalmente nuevo.

Veremos a continuación con respecto al análisis de circuitos lineales que forma la base de muchos cursos subsecuentes sobre ingeniería eléctrica. El estudio de la electrónica se fundamenta en el análisis de circuitos con dispositivos conocidos como diodos y transistores, que se emplean para diseñar fuentes de alimentación, amplificadores y circuitos digitales. Por lo general, los ingenieros en electrónica aplican de manera metódica y rápida las capacidades que se deben desarrollar y ¡algunas veces son capaces de analizar un circuito complicado sin valerse incluso de un lápiz! Los capítulos referentes al dominio del tiempo y al dominio de la frecuencia en este libro conducen directamente al examen del procesamiento de señales, de la transmisión de potencia, de la teoría de control y de las comunicaciones. Veremos que el análisis en el dominio de la frecuencia resulta, en particular, una técnica muy poderosa, que se aplica con facilidad a cualquier sistema físico sujeto a una excitación variable en el tiempo y especialmente útil en el diseño de filtros.

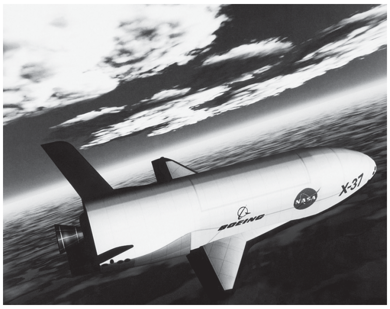


Ejemplo de un manipulador robotizado. El sistema de control de retroalimentación puede modelarse utilizando elementos de circuitos lineales con el fin de determinar las situaciones en las que la operación puede adquirir inestabilidad. (*NASA Marshall Space Fligth Center*.)

1.3 ANÁLISIS Y DISEÑO

Los ingenieros adquieren una comprensión básica de los principios científicos, los combinan con el conocimiento empírico a menudo expresado en términos matemáticos y (con frecuencia con una gran creatividad) llegan a la solución de un problema determinado. El ***análisis*** es el proceso a través del cual determinamos el alcance de un problema, se obtiene la información que se requiere para comprenderlo y se calculan los parámetros de interés. El ***diseño*** es el proceso por medio del cual sintetizamos algo nuevo como parte de la solución de un problema. En general, se espera que un problema que requiera de diseño no tenga una solución única, mientras que la fase de análisis típicamente la tendrá. Por lo tanto, el último paso en el diseño es siempre el análisis del resultado para ver si cumple con las especificaciones.

Este texto se enfoca en el desarrollo de la habilidad para analizar y resolver problemas, debido a que constituye el punto de partida en cada situación de ingeniería. La filosofía de este libro es que es necesario aclarar explicaciones, presentar ejemplos pertinentes y llevar a cabo mucha práctica para desarrollar dicha capacidad. Por lo tanto, los elementos de diseño están integrados en los problemas al final del capítulo y en capítulos posteriores de tal forma que se puedan disfrutar en lugar de distraer.



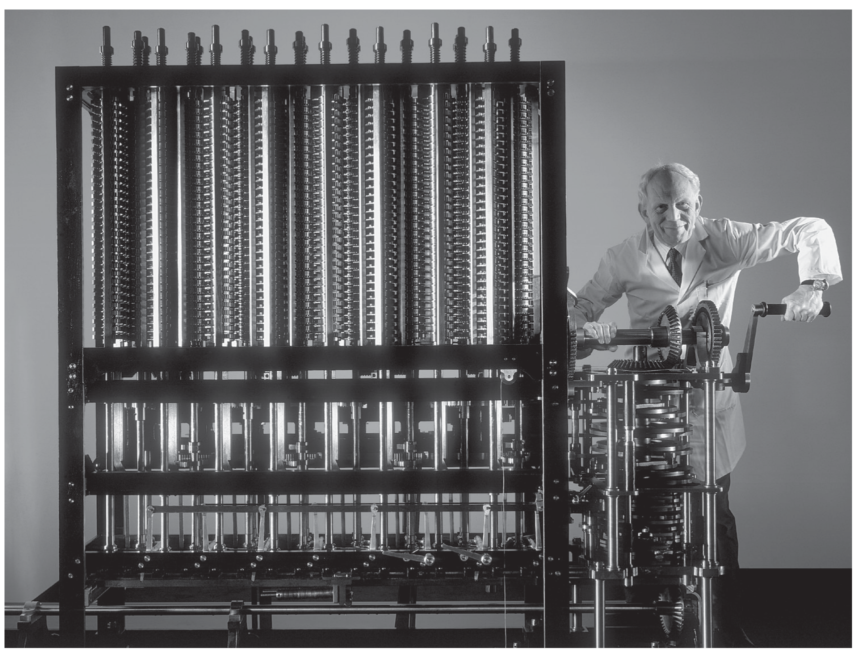


Dos diseños propuestos para el transbordador espacial de nueva generación. Aunque ambos contienen elementos similares, cada uno es único. (*NASA Dryden Flight Research Center*.)

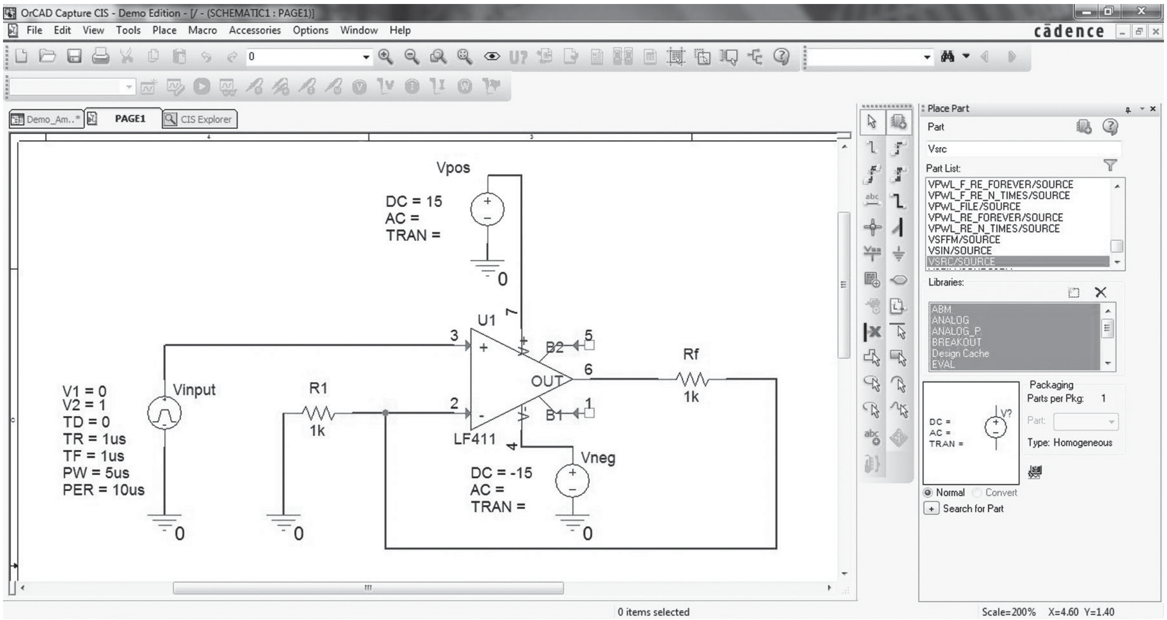
1.4 ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

A menudo, la resolución de los tipos de ecuaciones que resultan del análisis de circuitos puede convertirse en una tarea muy tediosa, aun en el caso de circuitos con un moderado grado de complejidad. Lo anterior, por supuesto, implica una alta probabilidad de que se cometan errores, además del considerable consumo de tiempo para llevar a cabo los cálculos. En realidad, el deseo de encontrar una herramienta que facilite este proceso es anterior a las computadoras electrónicas, con computadoras puramente mecánicas, como la "máquina analítica" diseñada por Charles Babbage alrededor de 1880 y propuesta como una solución. Quizás la primera computadora electrónica que tuvo éxito diseñada para resolver ecuaciones diferenciales fue la ENIAC, inventada en la década de 1940, cuyas válvulas al vacío llenaban un cuarto completo. Sin embargo, con el advenimiento de las computadoras de escritorio de bajo costo, el análisis de circuitos asistido por computadora se ha convertido en una invaluable herramienta cotidiana que forma parte integral no sólo del análisis sino también del diseño.

Uno de los aspectos más poderosos del diseño asistido por computadora es la relativamente reciente integración de programas múltiples de una forma transparente para el usuario, lo cual posibilita que el circuito se dibuje de modo esquemático sobre la pantalla, se reduzca de manera automática al formato requerido por un programa de análisis (como el SPICE, que se presenta en el capítulo 4) y que la salida resultante se transfiera de modo automático incluso a un tercer programa capaz de graficar diversas cantidades eléctricas de interés que describan la operación del circuito. Una vez que el ingeniero está satisfecho con el desempeño simulado del diseño, el mismo software puede generar el *layout* de la placa de circuito impreso usando parámetros geométricos en la biblioteca de componentes. El nivel de integración del software para análisis



"Máquina diferencial número 2", de Charles Babbage, según la completó el Science Museum (Londres) en 1991. (© *Science Museum/Science & Society Picture Library*.)



Un circuito amplificador dibujado mediante un paquete de software comercial de captura esquemática.

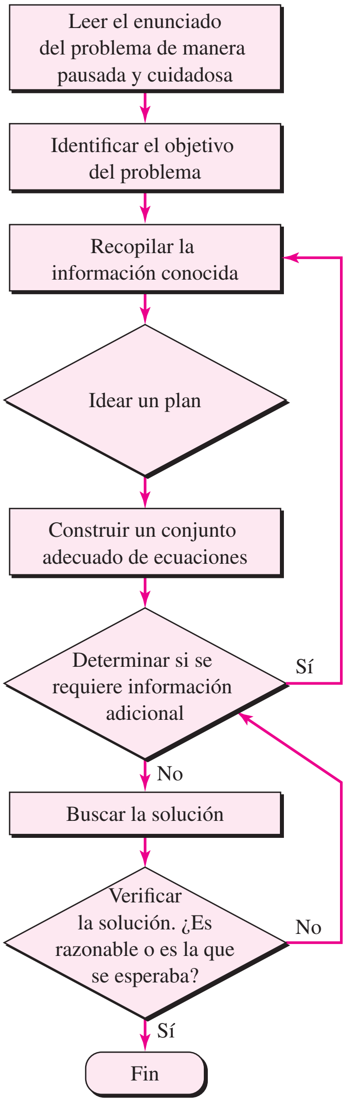
moderno de circuitos ha crecido con rapidez, al punto en el que pronto un ingeniero será capaz de dibujar un diagrama esquemático, presionar unos cuantos botones y ¡caminar al otro lado de la mesa para recoger una versión manufacturada del circuito, lista para probarse!

Sin embargo, es necesario prevenir al lector: aunque es divertido usarlo, el software para el análisis de circuitos no es de ningún modo sustituto de un buen análisis a la antigua, con lápiz y papel. Se necesita comprender cabalmente la forma en la que funcionan los circuitos a fin de desarrollar la capacidad necesaria para diseñarlos. El simple seguimiento de los movimientos de ejecución de un paquete de software particular es como jugar a la lotería: con la introducción de errores generados por el usuario, parámetros ocultos omitidos en la multitud de selecciones de menú y la ocasional deficiencia del código escrito por el ser humano, debe existir forzozamente al menos una idea apróximada del comportamiento esperado del circuito. Entonces, si el resultado simulado no concuerda con el esperado, es posible encontrar los errores en una etapa temprana, y no cuando ya sea demasiado tarde.

Aun así, el análisis asistido por computadora es una herramienta poderosa. Permite modificar los valores de los parámetros y evaluar el cambio en el desempeño de circuitos, así como considerar la introducción de variaciones al diseño de una manera muy sencilla. El resultado es una disminución de las tareas repetitivas y más tiempo para concentrarse en los detalles de ingeniería.

1.5 ESTRATEGIAS EXITOSAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Como el lector puede haberse percatado, este libro trata tanto de resolución de problemas como de análisis de circuitos. Como resultado, se espera que durante su tiempo como estudiante de ingeniería, usted estará aprendiendo a resolver problemas, de modo que en este momento dichas habilidades todavía no están plenamente desarrolladas. Al continuar en su curso de estudio, adquirirá técnicas que le servirán y posiblemente le seguirán sirviendo en el ejercicio de la ingeniería. En esta etapa, entonces, se deben emplear ciertos momentos para explicar algunos puntos básicos.



El primer punto es que, claramente, la dificultad más común que encuentran los estudiantes de ingeniería es *no saber cómo comenzar* a tratar un problema. Esto mejora con la experiencia, pero al principio, saber esto no ayuda. El mejor consejo que se puede dar es adoptar un enfoque metódico, comenzando con la lectura lenta y cuidadosa del planteamiento del problema (y más de una vez, si es necesario). Como la experiencia normalmente proporciona algún tipo de comprensión sobre cómo tratar un problema específico, aparecen ejemplos desarrollados en todo el libro. En lugar de sólo leerlos, sin embargo, puede ser útil trabajar en ellos con lápiz y papel.

Una vez que hemos leído por completo el problema y se considera que se tiene alguna experiencia útil, el siguiente paso es identificar el objetivo del problema: tal vez calcular una tensión o una potencia, o seleccionar el valor de un componente. Saber hacia dónde vamos es de gran ayuda. El siguiente paso es reunir tanta información como se pueda y organizarla de alguna manera.

En este punto, *todavía no se está listo para tomar la calculadora*. Es mejor primero trazarse un plan, quizá basado en la experiencia, quizá basado simplemente en la intuición. Algunas veces los planes funcionan y algunas veces no. Comenzando con el plan inicial, es momento de plantear un conjunto inicial de ecuaciones. Si parecen suficientes, se pueden resolver. Si no, se necesitará ya sea conseguir más información, modificar el plan o ambas cosas.

Una vez que se tiene lo que parece ser una solución viable, no hay que detenerse, aun cuando se está agotado y listo para una pausa. **Ningún problema de ingeniería se resuelve a menos que la solución se compruebe de alguna manera**. Se podría hacer esto realizando una simulación por computadora, o resolviendo el problema de un modo diferente, o quizás incluso simplemente estimando cuál respuesta podría ser razonable.

Como no a todos les gusta leer para aprender, estos pasos se resumen en el diagrama de flujo adyacente. Ésta es únicamente una estrategia específica de resolución de problemas, y el lector, por supuesto, debe sentirse libre para modificarla según sea necesario. La clave real, sin embargo, es tratar de aprender en un ambiente relajado de baja tensión, libre de distracciones. La experiencia es la mejor maestra, y aprender de los propios errores siempre será parte del proceso de llegar a ser un ingeniero experto.

LECTURAS ADICIONALES

Relativamente económico, este famoso éxito editorial a escala mundial enseña al lector la manera de generar estrategias ganadoras al encarar problemas aparentemente imposibles.

G. Polya, *How to Solve It,* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1971.

CAPÍTULO

2

Componentes básicos y circuitos eléctricos



CONCEPTOS CLAVE

Cantidades eléctricas básicas y unidades asociadas: carga, corriente, tensión y potencia

Dirección de la corriente y polaridad de la tensión (voltaje)

Convención de signos pasiva para calcular la potencia

Fuentes ideales de tensión y de corriente

Fuentes dependientes

Resistencia y ley de Ohm

INTRODUCCIÓN

Cuando se lleva a cabo un análisis de circuitos en particular, a menudo tratamos de determinar *corrientes*, *tensiones* o *potencias* específicos, por lo que el capítulo comenzará con una breve descripción de dichas cantidades. En términos de los componentes que pueden utilizarse para construir circuitos eléctricos, se cuenta con mucho de dónde escoger. Primero estudiaremos la *resistencia,* un componente pasivo simple, y luego una variedad de fuentes activas ideales de tensión y de corriente. A medida que avancemos, se agregarán nuevos componentes al inventario a fin de poder considerar circuitos más complejos (y útiles).

Un rápido consejo antes de comenzar: es necesario poner mucha atención en el papel de los signos "+" y "−" cuando indiquen las tensiones, así como en la importancia de la flecha que define la corriente; muchas veces estos elementos establecen la diferencia entre las respuestas equivocadas y las correctas.

2.1 UNIDADES Y ESCALAS

Para establecer los valores de alguna cantidad medible, es necesario dar un *número* y una *unidad,* como "3 metros". Por fortuna, todos utilizan el mismo sistema numérico, aunque no las mismas unidades, por lo que debe dedicarse cierto tiempo para familiarizarse con un sistema adecuado. Es imprescindible acordar una unidad patrón y asegurar su permanencia y aceptación general. La unidad patrón de longitud, por ejemplo, no debe definirse en términos de distancia entre dos marcas sobre cierta banda de plástico, pues no es permanente y además cualquier otra persona podría estar utilizando otro patrón.

El sistema de unidades más frecuentemente utilizado es el adoptado por el National Bureau of Standards en 1964, que es el que emplean todas las principales sociedades de ingenieros profesionales y es el lenguaje con el cual se escriben los libros de texto actuales: el Sistema Internacional de Unidades (***SI*** en todos los lenguajes), adoptado por la Conferencia General de Pesos y Medidas en 1960.



Modificado varias veces desde entonces, el SI se construye a partir de siete unidades básicas: *metro, kilogramo, segundo, ampere, kelvin, mol* y *candela* (vea la tabla 2.1). Es un "sistema métrico", y en cierta forma ahora se utiliza en la mayor parte de los países tecnológicamente avanzados, aunque no en forma amplia en Estados Unidos. Las unidades para medir otras magnitudes como volumen, fuerza, energía, etc., se derivan de las siete unidades fundamentales.

Hay algo de falta de acuerdo respecto a si las unidades que reciben su nombre de una persona se deben escribir con mayúscula. Aquí se adopta la convención más actual,[1,2] según la cual se escriben las unidades con minúscula (por ejemplo, watt, joule), pero se abrevian con mayúscula (por ejemplo, W, J).

[1] H. Barrell, *Nature*, **220**, 1968, p. 651.
[2] V. N. Krutikov, T.K. Kanishcheva, S. A. Kononov, L. K. Isaev y N. I. Khanov, *Measurement Techniques* 51, 2008, p. 1045.

TABLA 2.1 Unidades básicas del SI

Cantidad básica	Nombre	Símbolo
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
corriente eléctrica	ampere	A
temperatura termodinámica	kelvin	K
cantidad de sustancia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd

La unidad fundamental de trabajo o energía es el ***joule*** (J). Un joule (un kg m^2 s^{-2} en las unidades básicas del SI) equivale a 0.7376 pie libra-fuerza (pie · lbf). Otras unidades de energía incluyen la caloría (cal), igual a 4.187 J; la unidad térmica británica (Btu), que corresponde a 1 055 J; y el kilowatthora (kWh), igual a 3.6×10^6 J. La potencia se define como la *tasa* del trabajo que se hace o de la energía gastada. La unidad fundamental de la potencia es el ***watt*** (W), definida como 1 J/s. Un watt equivale a 0.7376 pie · lbf/s, o 1/745.7 caballos de fuerza (hp).

En realidad, la "caloría" utilizada en los alimentos, las bebidas y el ejercicio corresponde a una kilocaloría, 4.187 kJ.

El SI utiliza el sistema decimal para relacionar unidades más grandes y más pequeñas con la unidad básica y emplea prefijos para indicar las diversas potencias de 10. En la tabla 2.2 se presenta una lista de los prefijos y sus símbolos; se resaltan aquellos que se encuentran más comúnmente en ingeniería.

TABLA 2.2 Prefijos del SI

Factor	Nombre	Símbolo	Factor	Nombre	Símbolo
10^{-24}	octo	y	10^{24}	iota	Y
10^{-21}	zepto	z	10^{21}	zeta	Z
10^{-18}	atto	a	10^{18}	exa	E
10^{-15}	femto	f	10^{15}	peta	P
10^{-12}	pico	p	10^{12}	tera	T
10^{-9}	nano	n	10^{9}	giga	G
10^{-6}	micro	μ	10^{6}	mega	M
10^{-3}	mili	m	10^{3}	kilo	k
10^{-2}	centi	c	10^{2}	hecto	h
10^{-1}	deci	d	10^{1}	deca	da

Vale la pena memorizar estos prefijos, ya que aparecerán a menudo en este texto y en cualquier otro trabajo técnico. Las combinaciones de varios prefijos, como el milimicrosegundo, son inaceptables. Cabe mencionar que, en términos de distancia, es

mucho más común ver "micrón" (μm) en vez de "micrómetro", y con frecuencia se utiliza el angstrom (Å) correspondiente a 10^{-10} metros. Además, en el análisis de circuitos y en la ingeniería en general, resulta bastante común observar números expresados en lo que con frecuencia se denomina "unidades de ingeniería". En la notación de ingeniería, una cantidad se representa mediante un número entre 1 y 999 y una unidad métrica apropiada utilizando una potencia divisible entre 3. De tal modo, por ejemplo, es preferible expresar la cantidad 0.048 W como 48 mW, en lugar de 4.8 cW, 4.8×10^{-2} W, o 48 000 μW.

PRÁCTICA

2.1 Un láser de fluoruro de kriptón emite luz con una longitud de onda de 248 nm, lo cual es lo mismo que: (*a*) 0.0248 mm; (*b*) 2.48 μm; (*c*) 0.248 μm; (*d*) 24 800 Å.

2.2 En un prototipo de circuito integrado se encuentra que una compuerta lógica simple es capaz de cambiar del estado "activado" al estado "desactivado" en 12 ps. Esto corresponde a (*a*) 1.2 ns; (*b*) 120 ns; (*c*) 1 200 ns; (*d*) 12 000 ns.

2.3 Una típica lámpara incandescente opera a 60 W. Si se deja encendida permanentemente, ¿cuánta energía (J) se consume por día, y cuál es el costo semanal si la energía se cobra a una tarifa de 12.5 centavos por kilowatt hora?

Respuesta: 2.1 (*c*); 2.2 (*d*); 2.3 5.18 MJ, $1.26.

2.2 CARGA, CORRIENTE, TENSIÓN (VOLTAJE) Y POTENCIA

Carga

Uno de los conceptos más importantes en el análisis de circuitos eléctricos es el de la conservación de la carga. De la física básica sabemos que hay dos tipos de carga: positiva (correspondiente a un protón) y negativa (correspondiente a un electrón). En la mayor parte de los casos, este texto analiza circuitos en los que sólo resulta relevante el flujo de electrones. Existen muchos dispositivos (como baterías, diodos y transistores) en los que resulta determinante el movimiento de carga positiva para entender la operación interna, pero respecto a lo externo del dispositivo es mejor concentrarse en los electrones que fluyen por los alambres de conexión. Si bien continuamente se transfieren cargas entre las diferentes partes de un circuito, no se hace nada para cambiar la cantidad total de carga. En otras palabras, ni creamos ni destruimos electrones (o protones) cuando se operan circuitos eléctricos.[1] La carga en movimiento representa una *corriente.*

En el sistema SI, la unidad fundamental de carga es el ***coulomb*** (C), que se define en términos del ***ampere*** al contar la carga total que pasa por una sección transversal arbitraria de un alambre durante un segundo; un coulomb se mide cada segundo en un alambre que conduce una corriente de 1 ampere (fig. 2.1). En este sistema de unidades, un solo electrón tiene una carga de -1.602×10^{-19} C y un protón individual tiene una carga de $+1.602 \times 10^{-19}$ C.

Como se observa en la tabla 2.1, las unidades básicas del SI no se derivan de cantidades físicas fundamentales. En vez de eso, históricamente representan acuerdos sobre las mediciones, lo que lleva a definiciones que en algunos casos parecen un retroceso. Por ejemplo, tendría más sentido definir, desde la perspectiva física, el ampere con base en la carga electrónica.

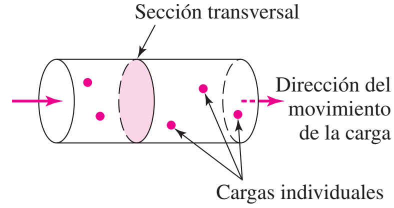


FIGURA 2.1 Definición de corriente ilustrada a través del uso de una corriente que fluye a través de un alambre; 1 ampere corresponde a 1 coulomb de carga que pasa en 1 segundo a través de una sección transversal seleccionada de manera arbitraria.

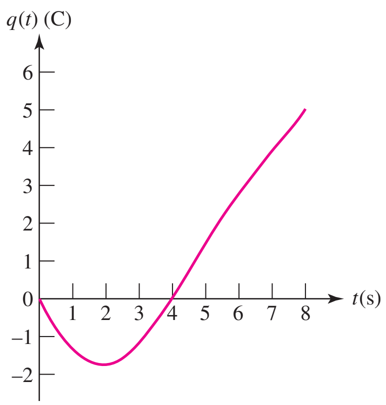
[1] Aunque la aparición ocasional de humo parezca sugerir otra cosa…

Una cantidad de carga que no cambia con el tiempo suele representarse por medio de Q. La cantidad instantánea de carga (que puede ser o no invariante en el tiempo) a menudo se representa por medio de $q(t)$, o simplemente q. Esta convención se utilizará en lo que resta del texto: las letras mayúsculas se reservan para las cantidades constantes (invariantes en el tiempo), en tanto que las minúsculas representan el caso más general. Según este punto de vista, es posible representar una carga constante *por medio* de Q o q, aunque una cantidad de carga que cambia con el tiempo *debe* representarse con la letra minúscula q.

Corriente

La idea de "transferencia de carga" o "carga en movimiento" es de vital importancia cuando estudiamos los circuitos eléctricos, debido a que al mover una carga de un lugar a otro, también se necesita transferir energía de un punto a otro. La familiar línea de transmisión eléctrica que surca los campos es un ejemplo práctico de un dispositivo que transfiere energía. Igual importancia tiene la posibilidad de variar la tasa a la cual se transfiere la carga para comunicar o transferir información. Tal proceso constituye la base de sistemas de comunicación como la radio, la televisión y la telemetría.

La corriente presente en una trayectoria discreta, como un alambre metálico, tiene un *valor numérico* y una *dirección* asociada a ella; es una medida de la velocidad a la cual la carga pasa por un punto de referencia determinado en una dirección especificada.



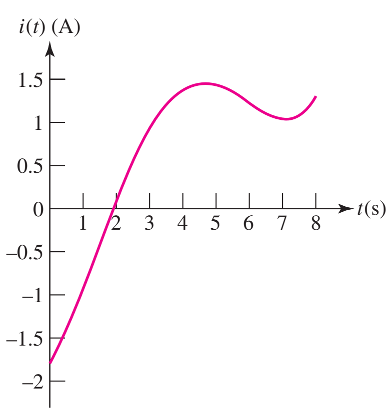
■ **FIGURA 2.2** Gráfica del valor instantáneo de la carga total $q(t)$ que pasó por un punto de referencia determinado desde $t = 0$.

Luego de determinar una dirección de referencia, se puede establecer en ese caso que $q(t)$ sea la carga total que ha pasado por el punto de referencia desde un tiempo arbitrario $t = 0$, moviéndose en la dirección definida. Una contribución a esta carga total será negativa si la carga negativa se mueve en la dirección de referencia, o si la carga positiva se mueve en la dirección opuesta. Como un ejemplo, la figura 2.2 ilustra una historia de la carga total $q(t)$ que ha pasado por un punto de referencia dado en un alambre (como el de la fig. 2.1).

Definimos la corriente en un punto específico, que fluye en una dirección especificada, como la velocidad instantánea a la cual la carga positiva neta pasa por ese punto en la dirección especificada. Desafortunadamente, ésta es la definición histórica, cuyo uso se popularizó antes de que se apreciara que la corriente en los alambres se debe en realidad al movimiento de carga negativa, y no a la positiva. La corriente se simboliza mediante I o i, por lo que

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad [1]$$

La unidad de corriente es el ampere (A), cuyo nombre es en honor a A. M. Ampère, un físico francés. Se suele abreviar como "amp", aunque no es oficial y resulta algo informal. Un ampere es igual a 1 coulomb por segundo.



■ **FIGURA 2.3** Corriente instantánea $i = dq/dt$, donde q está dada en la figura 2.2.

Mediante la ecuación [1] se calcula la corriente instantánea y se obtiene la figura 2.3. El empleo de la letra minúscula i se asocia de nuevo con un valor instantáneo; una I mayúscula denotaría una cantidad constante (es decir, invariante en el tiempo).

La carga transferida entre el tiempo t_0 y t se expresa como una integral definida:

$$\int_{q(t_0)}^{q(t)} dq = \int_{t_0}^{t} i\, dt'$$

Por lo tanto, la carga total transferida durante todo el tiempo está dada por:

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} i\, dt' + q(t_0) \qquad [2]$$

En la figura 2.4 se ilustran diferentes tipos de corriente. Una corriente que es constante en el tiempo se denomina corriente directa, o simplemente cd, la cual se presenta en la figura 2.4*a*. Encontramos muchos ejemplos prácticos de corrientes que varían senoidalmente con el tiempo (fig. 2.4*b*); las corrientes de esta forma se manifiestan en los circuitos domésticos normales. Además, la corriente de este tipo a menudo se conoce como corriente alterna, o ca. Después se verán también corrientes exponenciales y corrientes senoidales amortiguadas (fig. 2.4*c* y *d*).

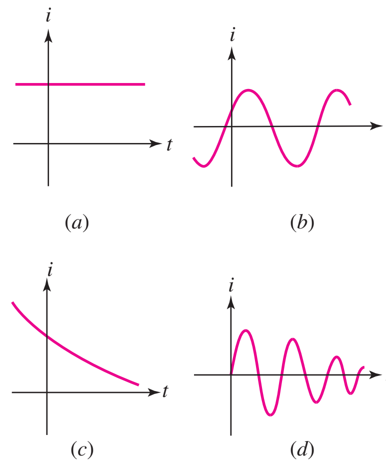


FIGURA 2.4 Varios tipos de corriente: (*a*) Corriente directa (*dc*). (*b*) Corriente senoidal (*ac*). (*c*) Corriente exponencial. (*d*) Corriente senoidal amortiguada.

Establecemos un símbolo gráfico para la corriente mediante una flecha puesta al lado del conductor. Así, en la figura 2.5*a*, la dirección de la flecha y el valor 3 A indican que una carga positiva neta de 3 C/s se está moviendo hacia la derecha, o que una carga negativa de -3 C/s se mueve hacia la izquierda cada segundo. En la figura 2.5*b* se presentan otra vez dos posibilidades: que -3 A fluya hacia la izquierda o que $+3$ A fluya hacia la derecha. Los cuatro enunciados y ambas figuras representan corrientes equivalentes en sus efectos eléctricos, por lo que se dice que son iguales. Una analogía no eléctrica que tal vez sea más fácil de visualizar consiste en pensar en términos de una cuenta de ahorro personal: por ejemplo, se puede considerar un depósito como un flujo de efectivo *negativo hacia afuera* de su cuenta, o como un flujo *positivo hacia adentro* de su cuenta.

Es conveniente visualizar la corriente como el movimiento de carga positiva, aun cuando se sabe que el flujo de corriente en los conductores metálicos se produce a partir del movimiento de electrones. En gases ionizados, en soluciones electrolíticas y en algunos materiales semiconductores, los elementos en movimiento cargados positivamente constituyen una parte o la totalidad de la corriente. Por lo tanto, cualquier definición de corriente concuerda con la naturaleza física de la conducción sólo una parte del tiempo. La definición y la simbología que hemos adoptado son estándares.



Resulta esencial reconocer que la flecha de la corriente no indica la dirección "real" del flujo de ella, sino que sólo forma parte de una convención que permite hablar de "la corriente en el alambre" de una manera precisa. ¡La flecha es una parte fundamental de la definición de una corriente! En consecuencia, hablar sobre el valor de una corriente $i_1(t)$ sin especificar la flecha equivale a analizar una entidad indefinida. Por ejemplo, las figuras 2.6*a* y *b* son representaciones sin sentido de $i_1(t)$, mientras que la figura. 2.6*c* utiliza la simbología definitiva apropiada.



FIGURA 2.5 Dos métodos de representación de la misma corriente.

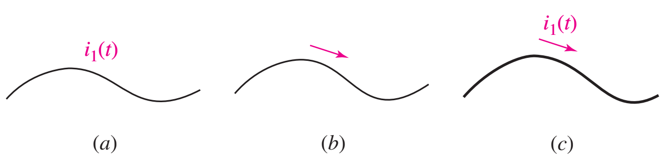


FIGURA 2.6 (*a*, *b*) Definiciones incompletas, impropias e incorrectas de una corriente. (*c*) Definición correcta de $i_1(t)$.

PRÁCTICA

2.4 En el alambre de la figura 2.7, los electrones se mueven de *izquierda* a *derecha* para crear una corriente de 1 mA. Determine I_1 e I_2.

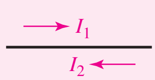
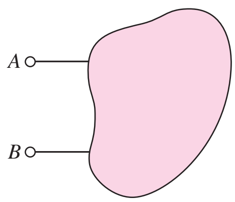
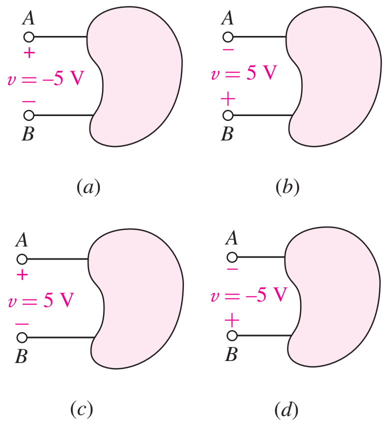


FIGURA 2.7

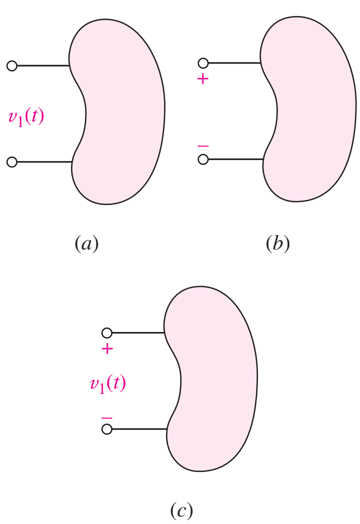
Respuesta: $I_1 = -1$ mA; $I_2 = +1$ mA.



■ **FIGURA 2.8** Elemento de circuito general de dos terminales.



■ **FIGURA 2.9** (*a*, *b*) La terminal *B* es 5 V positiva con respecto a la terminal *A*; (*c*, *d*) la terminal *A* es 5 V positiva con respecto a la terminal *B*.



■ **FIGURA 2.10** (*a*, *b*) Definiciones inadecuadas de una tensión. (*c*) Definición correcta que incluye un símbolo para la variable y un par de símbolos más-menos.

Tensión

A continuación explicaremos un elemento de circuito que está mejor definido en términos generales. Los dispositivos eléctricos como fusibles, bombillas eléctricas, resistores, baterías, capacitores, generadores y bobinas de chispa se representan mediante combinaciones de elementos de circuito simples. Comenzamos con un elemento de circuito muy general, como un objeto sin forma que posee dos terminales en las que es posible hacer conexiones con otros elementos (fig. 2.8).

Hay dos trayectorias por medio de las cuales la corriente entra o sale del elemento. En análisis subsecuentes se definirán elementos de circuito particulares mediante la descripción de las características eléctricas que se observan en sus terminales.

En la figura 2.8, supongamos que una corriente cd se envía hacia la terminal *A*, a través del elemento general, y sale de regreso por la terminal *B*. Consideremos también que empujar la carga a través del elemento requiere un gasto de energía. En este caso, decimos que existe una tensión eléctrica (o una *diferencia de potencial*) entre las dos terminales, o que hay una tensión "en los extremos" del elemento. De tal modo, la tensión entre un par de terminales significa una medida del trabajo que se requiere para mover la carga a través del elemento. La unidad de tensión (voltaje) es el volt,[2] y 1 volt es lo mismo que 1 J/C. La tensión se representa por medio de V o v.

Puede existir una tensión entre un par de terminales eléctricas sin importar si fluye o no una corriente. Por ejemplo, una batería de automóvil tiene una tensión de 12 V entre sus terminales incluso si no se conecta nada a ellas.

De acuerdo con el principio de conservación de energía, la energía que se gasta al forzar la carga a desplazarse a través del elemento debe aparecer en algún otro lado. Cuando más adelante se analicen los elementos de circuito específicos, veremos si esa energía se almacena en alguna forma de tal modo que esté disponible con facilidad como energía eléctrica, o si se transforma de modo irreversible en calor, energía acústica o alguna otra forma no eléctrica.

Ahora es necesario que establezcamos una convención mediante la cual sea posible distinguir entre la energía suministrada *a* un elemento y la energía que suministra *el* propio elemento. Ello se realiza mediante la elección de signo para la tensión de la terminal *A* con respecto a la terminal *B*. Si una corriente positiva está entrando a la terminal *A* del elemento y una fuente externa debe gastar energía para establecer tal corriente, entonces la terminal *A* es positiva con respecto a la terminal *B*. (De manera análoga, se dice que la terminal *B* es negativa con respecto a la terminal *A*.)

El sentido de la tensión se indica mediante un par de signos algebraicos más y menos. En la figura 2.9*a*, por ejemplo, la colocación del signo + en la terminal *A* indica que ésta es v volts positiva con respecto a la terminal *B*. Si después determinamos que v tiene un valor numérico de −5 V, entonces debemos decir que *A* es −5 V positivo con respecto a *B* o que *B* es 5 V positivo con respecto a *A*. Otros casos se ilustran en las figuras 2.9*b*, *c* y *d*.

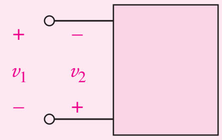
Tal como advertimos en la definición de corriente, resulta esencial darse cuenta que el par más-menos de signos algebraicos no indica la polaridad "real" de la tensión, sino que simplemente forma parte de una convención que permite hablar de manera exacta sobre la "tensión entre el par de terminales".

Nota: *¡La definición de toda tensión debe incluir un par de signos más-menos!* Si se utiliza una cantidad $v_1(t)$ sin especificar la ubicación del par de signos más-menos, se está empleando un término indefinido. Las figuras 2.10*a* y *b no* sirven como definición de $v_1(t)$; la figura 2.10*c* sí.

[2] ¡Tal vez seamos afortunados de que el nombre completo del físico italiano del siglo XVIII, *Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta*, no se utilice para nuestra unidad de diferencia de potencial!

PRÁCTICA

2.5 Para el elemento en la figura 2.11, $v_1 = 17$ V. Determine v_2



■ **FIGURA 2.11**

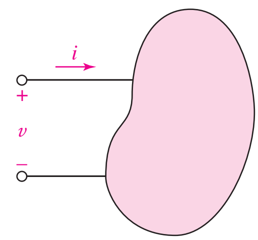
Respuesta: $v_2 = -17$ V.

Potencia

Ya definimos la potencia, a la cual se representará por medio de P o p. Si un joule de energía se gasta en transferir un coulomb de carga a través del dispositivo en un segundo, la tasa de transferencia de energía es un watt. La potencia absorbida debe ser proporcional al número de coulombs transferidos por segundo (corriente) y a la energía necesaria para transferir un coulomb a través del elemento (tensión). De tal modo, se tiene:

$$p = vi \qquad [3]$$

Dimensionalmente, el miembro derecho de esta ecuación se obtiene del producto de joules por coulomb y de los coulombs por segundo, lo cual produce la dimensión esperada de joules por segundo, o watts. Las convenciones para corriente, tensión y potencia se presentan en la figura 2.12.



■ **FIGURA 2.12** La potencia absorbida por el elemento se determina mediante el producto $p = vi$. De forma análoga, se dice que el elemento genera o suministra una potencia $-vi$.

Ahora tenemos la expresión para designar la potencia que es absorbida por un elemento de circuito en términos de un voltaje (tensión) y una corriente que pasan a través de él. El voltaje (tensión) se definió en términos de un consumo de energía y la potencia es la velocidad a la que ésta se consume. Sin embargo, por ejemplo, no se puede hacer ninguna afirmación respecto de la transferencia de energía en cualquiera de los cuatro casos que se muestran en la figura 2.9 hasta que se especifique la dirección de la corriente. Imaginemos que se coloca una flecha de corriente a lo largo de cada extremo superior, dirigida hacia la derecha y se identifica como "+2 A". En primer término, consideremos el caso que se muestra en la figura 2.9*c*. La terminal A es 5 V positivos con respecto a la terminal B, lo cual significa que se requiere de 5 J de energía para mover cada coulomb de carga positiva a la terminal A, a través del objeto y fuera de la terminal B. Puesto que se alimentan +2 A (una corriente de 2 coulombs de carga positiva por segundo) a la terminal A, se realiza un trabajo de (5 J/C) × (2 C/s) = 10 J por segundo sobre el objeto. En otras palabras, el objeto absorbe 10 W de potencia desde cualquier elemento que esté inyectando la corriente.

Sabemos que, a partir de lo que se explicó con anterioridad, no existe ninguna diferencia entre la figura 2.9*c* y la figura 2.9*d*, por lo que se espera que el objeto que se muestra en esta última también absorba 10 W. Se puede verificar este nivel de absorción de una manera muy sencilla: se inyectan +2 A a la terminal A del objeto, por lo que una corriente de +2 A fluye hacia afuera de la terminal B. Otra forma de decir esto es que se inyectan −2 A de corriente en la terminal B. Toma −5 J/C para mover una carga desde la terminal B hasta la A, por lo que el objeto absorbe (−5 J/C) × (−2 C/s) = +10 Wcomo se esperaba. La única dificultad que se presenta para describir este caso particular es conservar el signo menos como está, pero con un poco de cuidado podemos observar que es posible obtener la respuesta correcta sin tomar en cuenta la elección respecto de la terminal de referencia positiva (terminal A en la figura 2.9*c*, y la terminal B en la figura 2.9*d*).

Ahora observemos la situación que se muestra en la figura 2.9*a*, de nuevo con +2 A inyectados a la terminal *A*. Puesto que toma −5 J/C mover una carga desde la terminal *A* a la terminal *B*, el objeto absorbe (−5 J/C) × (2 C/s) = −10 W. ¿Qué significa esto? ¿Cómo puede algo absorber energía ***negativa***? Si pensamos esto en términos de transferencia de energía, se transfieren −10 J al objeto cada segundo a través de la corriente de 2 A que fluye hacia la terminal *A*. En realidad, el objeto pierde energía: a una velocidad de 10 J/s. En otras palabras, proporciona 10 J/s (es decir, 10 W) a otro objeto que no se muestra en la figura. Por lo tanto, la potencia negativa *absorbida* es equivalente a la potencia positiva *entregada*.

En resumen: la figura 2.12 muestra que si una terminal del elemento es v volts positiva con respecto a la otra terminal, y si una corriente i está entrando al elemento a través de esa terminal, este elemento *absorb*e una potencia $p = vi$; también es correcto decir que se *entrega* al elemento una potencia $p = vi$. Cuando la flecha de corriente se dirige hacia el elemento en la terminal marcada como positiva, se satisface la ***convención de signos pasiva***, la cual debe estudiarse con todo cuidado, entenderse y memorizarse. En otras palabras, indica que si la flecha de corriente y los signos de polaridad de tensión se sitúan de manera tal que la corriente entra en el extremo del elemento marcado con el signo positivo, la potencia *absorbida* por el elemento se expresa mediante el producto de las variables de corriente y tensión especificadas. Si el valor numérico del producto es negativo, decimos que el elemento absorbe potencia negativa, o que en realidad está generando potencia y la entrega a algún elemento externo. Por ejemplo, en la figura 2.12, con $v = 5$ V e $i = -4$A, el elemento absorbe −20 W o genera 20 W.

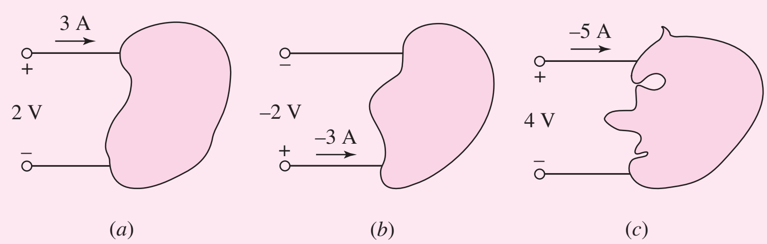
Si la flecha de corriente se dirige hacia la terminal marcada "+" de un elemento, entonces $p = vi$ produce la potencia *absorbida*. Un valor negativo indica que, en realidad, la potencia es generada por el elemento.

Si la flecha de corriente se dirige hacia la terminal "+" de un elemento, entonces $p = vi$ produce la potencia *suministrada*. En este caso, un valor negativo indica que se está absorbiendo potencia.

Las convenciones sólo se requieren cuando existe más de una forma de hacer algo y quizá se produzca confusión cuando dos grupos diferentes tratan de comunicarse. Por ejemplo, resulta bastante arbitrario ubicar siempre el "norte" en la parte superior de un mapa; las manecillas de las brújulas no apuntan hacia "arriba", de ningún modo. Sin embargo, si se habla con personas que han elegido de manera secreta la convención opuesta de situar el "sur" en la parte superior de sus mapas, ¡imagine la confusión que se produciría! De la misma manera, existe una convención general que siempre dibuja las flechas de corriente apuntando hacia la terminal de tensión positiva, sin que importe si el elemento suministra o absorbe potencia, lo cual no es incorrecto pero en ocasiones origina corrientes que no son intuitivas y que se indican en los esquemas de los circuitos. La razón de ello es que simplemente parece más natural referirse a una corriente positiva que fluya hacia afuera de una fuente de tensión o de corriente que está suministrando potencia positiva a uno o más elementos de circuito.

EJEMPLO 2.1

Calcule la potencia absorbida en cada uno de los casos de la figura 2.13.



■ **FIGURA 2.13** (*a, b, c*) Tres ejemplos de elementos de dos terminales.

En la figura 2.13*a*, se observa que la corriente de referencia se define en forma congruente con la convención pasiva de signos, la cual supone que el elemento

está absorbiendo potencia. Con +3 A que fluye hacia la terminal de referencia positiva, se calcula:

$$P = (2 \text{ V})(3 \text{ A}) = 6 \text{ W}$$

de potencia absorbida por el elemento.

La figura 2.13*b* ilustra una imagen un poco diferente. En este caso, tenemos una corriente de −3 A que fluye hacia la terminal de referencia positiva. Esto origina una potencia absorbida

$$P = (-2 \text{ V})(-3 \text{ A}) = 6 \text{ W}$$

Por lo tanto, vemos en realidad que ambos casos son equivalentes: Una corriente de +3 A que fluye hacia la terminal superior es la misma que una corriente de +3 A que fluye hacia afuera de la terminal inferior, o, de modo equivalente, es igual a una corriente de −3 A que fluye hacia la terminal inferior.

Refiriéndose a la la figura 2.13*c*, aplicamos de nuevo las reglas de la convención pasiva de signos y se calcula una potencia absorbida

$$P = (4 \text{ V})(-5 \text{ A}) = -20 \text{ W}$$

Debido a que calculamos una potencia *absorbida* negativa, se deduce que, en realidad, el elemento de la figura 2.13*c* está *suministrando* +20 W (es decir, es una fuente de energía).

PRÁCTICA

2.6 Determinar la potencia que absorbe cada elemento del circuito de la figura 2.14*a*.

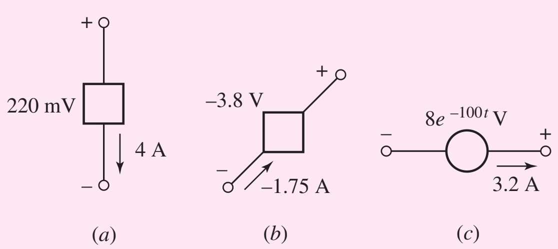


FIGURA 2.14

2.7 Calcular la potencia que genera el elemento de circuito de la figura 2.14*b*.
2.8 Encontrar la potencia que se entrega al elemento de circuito de la figura 2.14*c* en $t = 5$ ms.

Respuesta: 880 mW; 6.65 W; −15.53 W.

2.3 FUENTES DE TENSIÓN Y DE CORRIENTE

Mediante los conceptos de corriente y de tensión, ahora es posible ser más específicos en la definición de un ***elemento de circuito***.

Al hacerlo de esa manera, resulta importante distinguir entre el propio dispositivo físico y el modelo matemático que emplearemos para analizar su comportamiento en un circuito. El modelo no es más que una aproximación.

De aquí en adelante utilizaremos la expresión *elemento de circuito* para referirnos al modelo matemático. La elección de un modelo particular para cualquier dispositivo real debe hacerse con base en datos experimentales o la experiencia; casi siempre supondremos que ya se ha hecho tal elección. Por simplicidad, al principio consideramos los circuitos con componentes ideales, representados mediante modelos simples.

Por definición, un elemento de circuito simple es el modelo matemático de un dispositivo eléctrico de dos terminales, que puede caracterizarse por completo mediante su relación tensión-corriente; no es posible subdividirlo en otros dispositivos de dos terminales.

Todos los elementos de circuitos simples que se considerarán se clasifican de acuerdo con la relación entre la corriente a través del elemento y la tensión en los extremos del mismo elemento. Por ejemplo, si la tensión en los extremos del elemento es linealmente proporcional a la corriente a través de él, al elemento se le denominará resistor. Otros tipos de elementos de circuitos simples tienen tensiones de terminal proporcionales a la *derivada* de la corriente con respecto al tiempo (inductor), o a la *integral* de la corriente con respecto al tiempo (capacitor). Existen también elementos en los que la tensión es totalmente independiente de la corriente, o la corriente lo es de la tensión, en cuyo caso se conocen como *fuentes independientes.* Además, es necesario definir tipos especiales de fuentes para las que la tensión o la corriente de fuente dependan de una corriente o tensión en otro punto del circuito, que se conocen como *fuentes dependientes* y se usan mucho en electrónica para hacer modelos del comportamiento de la cd y de la ca de transistores, sobre todo en circuitos de amplificador.

Fuentes de tensión independientes

El primer elemento que se considerará es la ***fuente de tensión independiente***. El símbolo de circuito se presenta en la figura 2.15*a*; el subíndice *s* sólo identifica la tensión como una tensión de "fuente", y es común pero no se requiere. *Una fuente de tensión independiente se caracteriza por una tensión de terminal que es totalmente independiente de la corriente a través de ella.* Por lo tanto, si se indica una fuente de tensión independiente y se señala que la tensión de terminal corresponde a 12 V, entonces se supone siempre esta tensión, sin que importe la corriente que fluya.

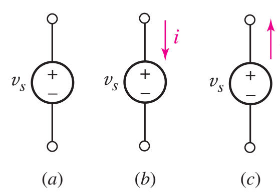


FIGURA 2.15 Símbolo de circuito para la fuente de tensión independiente.

La fuente de tensión independiente es una fuente *ideal,* es decir, no representa exactamente algún dispositivo físico real, debido a que la fuente ideal podría entregar en teoría una cantidad infinita de energía desde sus terminales. Sin embargo, tal fuente de tensión idealizada proporciona una aproximación razonable a varias fuentes de tensión prácticas. Una batería de almacenamiento de automóvil, por ejemplo, muestra una tensión de terminal de 12 V que se mantiene en esencia constante, siempre que la corriente a través de ella no sobrepase unos cuantos amperes. Tal vez fluya una pequeña corriente en cualquier dirección a través de la batería. Si es positiva y circula hacia afuera de la terminal marcada como positiva, entonces la batería proporcionará potencia a los faros delanteros, por ejemplo; si la corriente es positiva y fluye hacia adentro de la terminal positiva, entonces la batería está en proceso de carga y absorbe energía del alternador.[3] Una toma de corriente eléctrica doméstica común se aproxima también a una fuente de tensión independiente y suministra una tensión $v_s = 115\sqrt{2}\cos 2\pi\, 60t$ V; esta representación es válida para corrientes menores que 20 A o con un valor similar.

Si ha notado alguna vez que las luces de la habitación se atenúan cuando comienza a funcionar un equipo de aire acondicionado, se debe a que la repentina demanda de una corriente elevada origina una caída temporal de tensión. Luego de que el motor inicia su movimiento, se necesita menos corriente para mantenerlo. En este punto, se reduce la demanda de corriente, la tensión vuelve a su valor original y la toma de corriente de la pared proporciona otra vez una aproximación razonable a una fuente de tensión ideal.

Un punto que vale la pena repetir aquí es la presencia del signo más en el extremo superior del símbolo de la fuente de tensión independiente de la figura 2.15*a* que no significa de manera forzosa que la terminal superior sea positiva con respecto a la terminal inferior. Más bien, indica que la terminal superior es v_s volts positiva con respecto a la inferior. Si en algún instante ocurre que v_s sea negativa, entonces la terminal superior es en verdad negativa con respecto a la inferior en ese instante.

[3] O de la batería del automóvil de un amigo, si por accidente deja las luces encendidas…

Considere una flecha de corriente marcada como "i" que se ubica adyacente al conductor superior de la fuente (fig. 2.15*b*). La corriente i entra a la terminal donde se localiza el signo positivo, haciendo que la convención de signos pasiva se satisfaga, y la fuente de ese modo *absorbe* una potencia $p = v_s i$. Con mucha frecuencia se espera que una fuente entregue potencia a una red y no que la absorba de ella. En consecuencia, se podría orientar la flecha como en la figura 2.15*c* de manera que $v_s i$ representara la potencia *entregada* por la fuente. Técnicamente, se puede elegir cualquier dirección de flecha; en este texto se adoptará la convención de la figura 2.15*c* para fuentes de tensión y de corriente, las cuales no suelen considerarse dispositivos pasivos.

Una fuente de tensión independiente, con una tensión de terminal constante, muchas veces se conoce como fuente de tensión cd independiente y se representa por cualquiera de los símbolos de la figura 2.16*a* y *b*. Observe en la figura 2.16*b* que cuando se sugiere de forma física la estructura de placas de la batería, la placa más larga se sitúa en la terminal positiva; los signos más y menos representan entonces una notación redundante, aunque suelen incluirse de cualquier modo. Para concordar con lo anterior, el símbolo para una fuente de tensión de ca independiente se ilustra en la figura 2.16*c*.

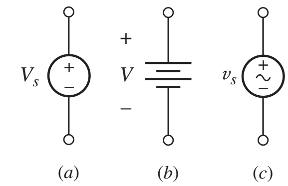


FIGURA 2.16 (*a*) Símbolo de la fuente de tensión de cd; (*b*) símbolo de la batería; (*c*) símbolo de la fuente de tensión de ca.

Se suelen utilizar términos similares para fuente de tensión de cd y fuente de corriente de cd. En sentido literal, quieren decir "fuente de tensión de corriente directa" y "fuente de corriente de corriente directa", respectivamente. Si bien tales palabras pueden parecer un poco extrañas o incluso redundantes, la terminología se emplea a tal grado que no existe punto de conflicto al respecto.

Fuentes de corriente independientes

Otra fuente ideal que necesitaremos es la ***fuente de corriente independiente***. En este caso, la corriente a través del elemento es totalmente independiente de la tensión entre sus extremos. El símbolo de una fuente de corriente independiente se muestra en la figura 2.17. Si i_s es constante, se trata de una fuente de corriente de cd independiente. A menudo, una fuente de corriente de ca se dibuja con una tilde en la flecha, de manera similar a como se hace con la fuente de tensión de ca que se muestra en la figura 2.16*c*.

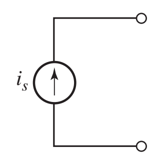


FIGURA 2.17 Símbolo de circuito de la fuente de corriente independiente.

Como en el caso de la fuente de tensión independiente, la fuente de corriente independiente representa, en el mejor de los casos, una aproximación razonable de un elemento físico. En teoría, entrega potencia infinita desde sus terminales, puesto que produce la misma corriente finita para cualquier tensión entre sus extremos, sin importar cuán grande pueda ser la tensión. Sin embargo, ello constituye una buena aproximación de muchas fuentes prácticas, en particular de circuitos electrónicos.

Aunque la mayoría de los estudiantes se sienten a gusto con una fuente de tensión independiente que suministre un voltaje fijo, pero en esencia ninguna corriente, *es un error muy frecuente* ver una fuente de corriente independiente como una en la que el voltaje entre sus terminales es nulo y que suministra una corriente fija. En realidad, no se sabe *a priori* cuál será el voltaje a través de una fuente de corriente, pues ello depende totalmente del circuito al que se encuentre conectada.

Fuentes dependientes

Los dos tipos de fuentes ideales que se han explicado hasta ahora se denominan fuentes *independientes,* debido a que el valor de la cantidad de la fuente no se ve afectado de ningún modo por lo que pasa en el resto del circuito. Esta situación contrasta incluso con otro tipo de fuente ideal, la fuente *dependiente* o *controlada*, donde la cantidad de la fuente está determinada por una tensión o una corriente existente en algún otro lugar del sistema que se analiza. Las fuentes de este tipo aparecen en los modelos eléctricos equivalentes de muchos dispositivos electrónicos, como los transistores, amplificadores operacionales y circuitos integrados. Para distinguir las fuentes dependientes de las independientes se utilizarán los símbolos de diamante de la figura 2.18. En las figuras 2.18*a* y *c*, K es una constante de ajuste adimensional. En la figura 2.18*b*, g es un factor de ajuste con unidades de A/V; en la figura 2.18*d*, r es un factor de ajuste con unidades de V/A. La corriente controladora i_x y la tensión controladora v_x deben definirse en el circuito.

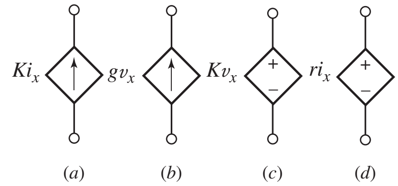


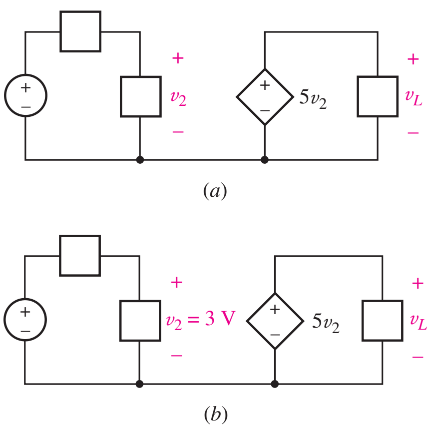
FIGURA 2.18 Cuatro tipos diferentes de fuentes independientes:
(*a*) fuente de corriente controlada por corriente;
(*b*) fuente de corriente controlada por tensión;
(*c*) fuente de tensión controlada por tensión;
(*d*) fuente de tensión controlada por corriente.

En primera instancia parece extraño tener una fuente de corriente cuyo valor dependa de un voltaje o una de una fuente de voltaje que esté controlada por una corriente que

fluya a través de otro elemento. Aun una fuente de voltaje que dependa de un voltaje remoto puede parecer extraña. Sin embargo, dichas fuentes son invaluables en el modelado de un sistema complejo, pues permiten que el análisis algebraico sea muy sencillo. Como ejemplos se pueden incluir la corriente de fuga de un transistor de efecto de campo en función del voltaje de la compuerta, o el voltaje de salida de un circuito integrado analógico en función del voltaje de entrada diferencial. Cuando aparece en el análisis de circuitos, se escribe toda la expresión controladora de la fuente dependiente justamente como se haría si fuera un valor numérico conectado a una fuente independiente. A menudo este procedimiento genera la necesidad de elaborar una ecuación adicional para completar el análisis, a menos que el voltaje o la corriente controladora sean una de las incógnitas específicas del sistema de ecuaciones.

EJEMPLO 2.2

En el circuito de la figura 2.19*a*, si se sabe que v_2 corresponde a 3 V, determine v_L.



■ **FIGURA 2.19** (*a*) Ejemplo de un circuito que contiene una fuente de tensión controlada por tensión. (*b*) La información adicional que se proporciona se incluye en el diagrama.

Damos el esquema del circuito marcado de manera parcial y la información adicional de que $v_2 = 3$ V. Quizá valga la pena agregar dicho valor en el esquema, como se indica en la figura 2.19*b*.

A continuación retrocedemos y observamos la información recopilada. Al examinar el esquema del circuito, observamos que la tensión deseada v_L es la misma que la tensión en la fuente dependiente. De modo que:

$$v_L = 5v_2$$

En este punto ¡qué haríamos con el problema si sólo se conociera v_2!

Al volver al esquema del circuito, se observa que, en realidad, se conoce v_2, que se especificó como 3 V. Por lo tanto, se puede escribir,

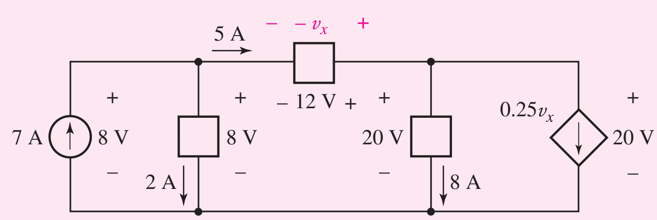
$$v_2 = 3$$

Ahora tenemos dos (simples) ecuaciones con dos incógnitas y resolvemos para encontrar que $v_L = 15$ V.

Una lección importante en esta primera etapa del juego es que *el tiempo que se emplee para marcar por completo un esquema del circuito será siempre una buena inversión.* Como última etapa, es necesario regresar y verificar el trabajo para asegurar que el resultado es correcto.

PRÁCTICA

2.9 Determine la potencia *absorbida* por cada elemento del circuito de la figura 2.20.



■ **FIGURA 2.20**

Respuesta (de izquierda a derecha): −56 W; 16 W; −60 W; 160 W; −60 W.

Las fuentes de tensión y de corriente dependientes e independientes son elementos *activos* que pueden entregar potencia a algún dispositivo externo. Por ahora se considerará un elemento *pasivo* como aquel que sólo puede recibir potencia. Sin embargo, después se verá que varios elementos pasivos almacenan cantidades finitas de energía y luego las reintegran a distintos dispositivos externos; puesto que se desea seguir llamando pasivos a dichos elementos, más adelante será necesario perfeccionar las dos definiciones.

Redes y circuitos

La interconexión de dos o más elementos de circuitos simples forma una ***red*** eléctrica; si contiene al menos una trayectoria cerrada, también es un ***circuito*** eléctrico. Nota: Cada circuito es una red, ¡pero no todas las redes son circuitos! (vea la fig. 2.21).

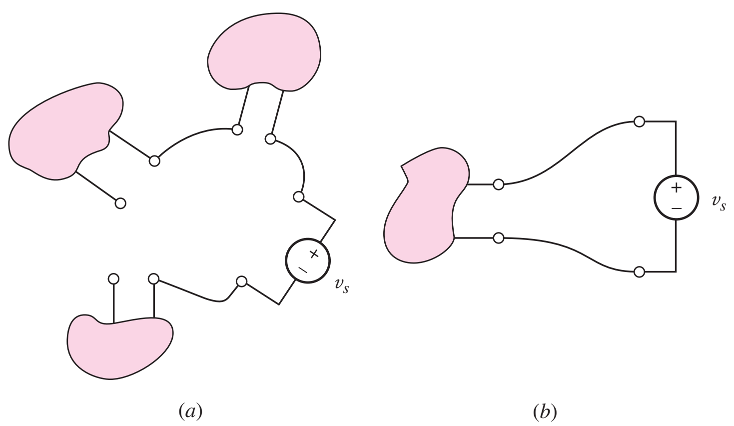
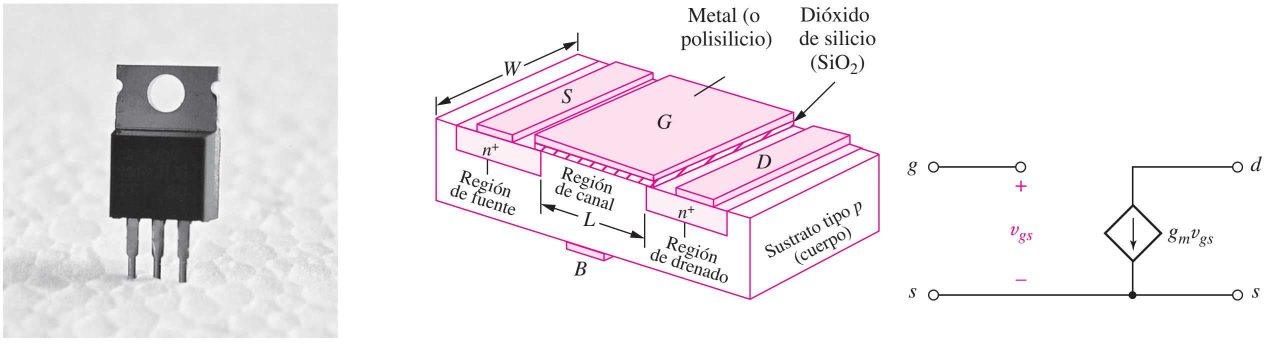


FIGURA 2.21 (*a*) Red que no es un circuito. (*b*) Red que es un circuito.

Una red que contiene al menos un elemento activo, como una fuente de tensión o de corriente independiente, es una red activa; la que no contiene ningún elemento activo constituye una red pasiva.

A continuación definimos lo que se entiende por el término ***elemento de circuito*** y se presentarán las definiciones de varios elementos de circuito específicos, las fuentes de tensión y de corriente independientes y dependientes. En lo que resta del libro definiremos sólo cinco elementos de circuito adicionales: resistor o resistencia, inductor, capacitor, transformador y amplificador operacional ("amp op", para abreviar), todos los cuales son elementos ideales. Son importantes debido a que es posible combinarlos en redes y circuitos que representan dispositivos reales de una forma tan precisa como sea necesario. Por lo tanto, se puede hacer el modelo del transistor de las figuras 2.22*a* y *b* mediante las terminales de tensión denominadas v_{gs} y de la fuente de corriente dependiente de la figura 2.22*c*. Observe que esta última produce una corriente que depende de una tensión en otra parte del circuito. El parámetro g_m, que por lo común se conoce como transconductancia, se calcula utilizando datos específicos del transistor así como también el punto de operación determinado por el circuito conectado al transistor. En general, es un número pequeño en el orden de 10^{-2} a quizás 10 A/V. El modelo funciona bastante bien, siempre y cuando la frecuencia de cualquier fuente senoidal no sea ni muy grande ni muy pequeña; además, se modifica al considerar efectos que dependen de la frecuencia al incluir elementos de circuito ideales adicionales tales como resistencias y capacitores.



(*a*) (*b*) (*c*)

■ **FIGURA 2.22** Transistor de efecto de campo semiconductor de óxido metálico (MOSFET). (*a*) Transistor de potencia MOSFET de canal N IRF540 del empaque TO-220, a 100 V y 22 A; (*b*) vista de la sección transversal de un MOSFET básico (*R. Jaeger*, *Microelectronic Design*, *McGraw-Hill*, *1997*); (*c*) modelo de circuito equivalente para utilizarlo en un análisis de circuitos en ca.

Transistores similares (pero mucho más pequeños) suelen constituir sólo una pequeña parte de un circuito integrado, que quizá sea menor que un cuadrado de 2 mm × 2 mm y de 200 μm de espesor, y aun así contienen incluso varios cientos de transistores, más varias resistencias y capacitores. Por lo tanto, se tiene un dispositivo físico que es casi del tamaño de una letra de esta página, pero que requiere un modelo compuesto de diez mil elementos de circuito simples ideales. Utilizaremos este concepto del "modelado de circuito" en un gran número de temas de ingeniería eléctrica que se abordan en otros cursos, entre los que se incluyen los de electrónica, ahorro de energía y antenas.

2.4 LEY DE OHM

Hasta este momento se han presentado las fuentes de corriente y tensión dependientes e independientes; además, se aclaró que se tratan de elementos activos *idealizados* que sólo se podrían aproximar en un circuito real. Ahora contamos con las bases suficientes para conocer otro elemento idealizado, la resistencia lineal. La resistencia es el elemento pasivo más simple, así que la explicación comienza considerando el trabajo de un humilde físico alemán, Georg Simon Ohm, quien en 1827 publicó un folleto en el que describía los resultados de uno de los primeros intentos para medir corrientes y tensiones, y para describirlos y relacionarlos en forma matemática. Uno de los resultados fue el planteamiento de una relación fundamental llamada ahora ***ley de Ohm***, a pesar de que se ha demostrado que este resultado lo descubrió Henry Cavendish, un brillante semiermitaño, 46 años antes en Inglaterra.

La ley de Ohm establece que la tensión entre los extremos de materiales conductores es directamente proporcional a la corriente que fluye a través del material, o:

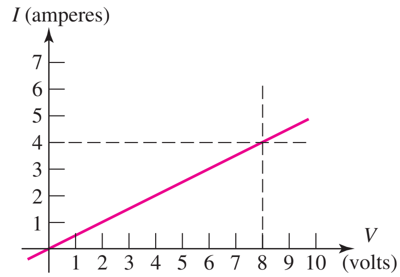
$$v = Ri \qquad [4]$$

donde la constante de proporcionalidad *R* recibe el nombre de ***resistencia***. La unidad de resistencia es el *ohm,* que corresponde a 1 V/A y suele abreviarse mediante una omega mayúscula, Ω.

Cuando esta ecuación se grafica sobre los ejes *i* en función de *v*, el resultado es una recta que pasa por el origen (fig. 2.23). La ecuación [4] es una ecuación lineal; además, la consideramos como la definición de una *resistencia lineal.* La resistencia se suele

considerar como una cantidad positiva, si bien es posible simular resistencias negativas con circuitos especiales.

De nuevo, debe subrayarse que la resistencia lineal es un elemento de circuito idealizado; constituye sólo un modelo matemático de un dispositivo físico real. Las “resistencias” se compran o fabrican con facilidad; sin embargo, se determinó de inmediato que las razones tensión-corriente de estos dispositivos físicos son más o menos razonablemente constantes sólo dentro de ciertos intervalos de corriente, tensión o potencia, y que dependen también de la temperatura y de otros factores ambientales. Es común referirse a una resistencia lineal en forma simple mediante el término resistencia; cualquier resistencia que sea no lineal siempre se describirá como tal. Las resistencias no lineales no necesariamente se consideran elementos indeseables. Si bien es cierto que su presencia complica un análisis, el desempeño del dispositivo quizá dependa o forme parte de la mejora de la no linealidad. Por ejemplo, los fusibles para la protección contra sobrecorrientes y los diodos Zener para regular la tensión son de naturaleza no muy lineal, lo cual se aprovecha cuando se usan en el diseño de circuitos.

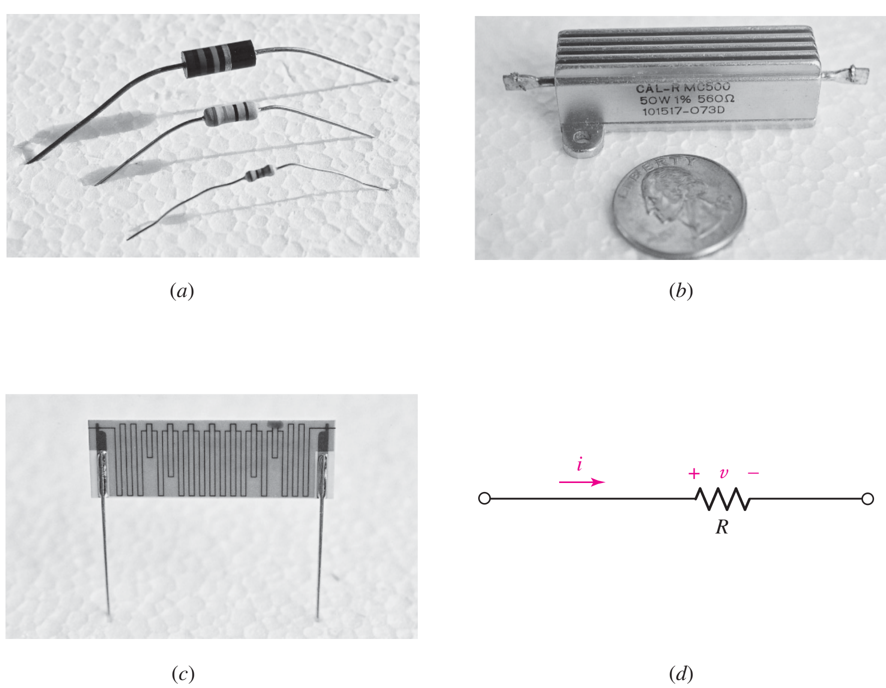


■ **FIGURA 2.23** Relación corriente-tensión de una resistencia lineal de 2 Ω. Observe que la inclinación de la línea es 0.5 A/V o 500 $m\Omega^{-1}$.

Absorción de potencia

La figura 2.24 muestra varios tipos de resistencia diferentes, así como el símbolo de circuito más utilizado para designarlas. De acuerdo con las convenciones de tensión, corriente y potencia ya adoptadas, el producto de v e i da como resultado la potencia que absorbe la resistencia. Esto es, v e i se eligen para satisfacer la convención de signos pasiva. La potencia absorbida aparece físicamente como calor y/o luz y siempre es positiva; una resistencia (positiva) es un elemento pasivo que no puede entregar potencia o almacenar energía. Una variante de expresiones de la potencia absorbida es:

$$p = vi = i^2R = v^2/R \tag{5}$$



■ **FIGURA 2.24** (*a*) Algunos empaques comunes de resistencias. (*b*) Resistencia de potencia de 560 Ω con una potencia de 50 W. (*c*) Resistencia de 10 teraohms (10 000 000 000 000 Ω) y 5% de tolerancia fabricada por Ohmcraft. (*d*) Símbolo de circuito de una resistencia que se aplica a todos los dispositivos de (*a*) hasta (*c*).

Uno de los autores (que prefiere no identificarse) tuvo la desafortunada experiencia de conectar de manera inadvertida una resistencia de carbón de 100 Ω, 2 W a una fuente de 110 V. La flama, el humo y la fragmentación consecuentes resultaron bastante desconcertantes, lo que demostró con toda claridad que una resistencia práctica tiene límites definidos para su capacidad de comportarse como un modelo lineal ideal. En este caso, se requería que la desafortunada resistencia absorbiera 121 W; puesto que se diseñó para manejar sólo 2 W, se comprende que su reacción fuera violenta.

EJEMPLO 2.3

La resistencia de 560 Ω que se muestra en la figura 2.24*b* está conectada a un circuito que hace fluir una corriente de 42.4 mA a través de ella. Calcule la tensión a través de la resistencia y la potencia que está disipando.

La tensión a través de la resistencia está dada por la ley de Ohm:

$$v = Ri = (560)(0.0424) = 23.7 \text{ V}$$

La potencia disipada se puede calcular de varias maneras diferentes. Por ejemplo,

$$p = vi = (23.7)(0.0424) = 1.005 \text{ W}$$

Alternativamente,

$$p = v^2/R = (23.7)^2/(560) = 1.003 \text{ W}$$

o

$$p = i^2R = (0.0424)^2(560) = 1.007 \text{ W}$$

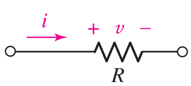
Observamos varias cosas.

Primero, calculamos la potencia de tres modos diferentes, y parece que obtuvimos *¡tres diferentes respuestas!*

En realidad, sin embargo, se ha redondeado la tensión a tres dígitos significativos, lo cual impacta en la exactitud de cualquier cantidad subsecuente que se calcule con dicha tensión. Teniendo esto en consideración, se ve que las respuestas muestran un acuerdo razonable (dentro de 1%).

El otro punto que vale la pena observar es que la potencia nominal de la resistencia es 50 W; como sólo estamos disipando aproximadamente 2% de este valor, la resistencia no está en riesgo de sobrecalentarse.

PRÁCTICA



■ FIGURA 2.25

Con referencia a la figura 2.25, calcule lo siguiente:

2.10 R si $i = -2\ \mu$A y $v = -44$ V.

2.11 La potencia absorbida por la resistencia si $v = 1$ V y $R = 2$ kΩ.

2.12 La potencia absorbida por la resistencia si $i = 3$ nA y $R = 4.7$ MΩ.

Respuestas: 22 MΩ; 500 μW; 42.3 pW.

APLICACIÓN PRÁCTICA

El calibre del alambre

Técnicamente, cualquier material (salvo un superconductor) ofrecerá resistencia al flujo de corriente. Como en todos los textos introductorios de circuitos, de manera tácita se supone que los alambres que aparecen en los esquemas de circuito tienen una resistencia nula, lo cual implica que no hay diferencia de potencial entre los extremos de un alambre y, en consecuencia, no existe potencia absorbida ni calor generado. Si bien no suele ser un supuesto irrazonable, pasa por alto consideraciones prácticas al elegir el diámetro de alambre apropiado para una aplicación específica.

La resistencia se determina por medio de: 1) la resistividad inherente de un material y 2) la geometría del dispositivo. La ***resistividad***, representada por el símbolo ρ, es una medida de la facilidad con que los electrones viajan a través de cierto material. En razón de que es el cociente del campo eléctrico (V/m) y la densidad de corriente que fluye en el material (A/m^2), las dimensiones de ρ son $\Omega \cdot \text{m}$, aunque a menudo se emplean prefijos métricos. Todo material tiene una diferente resistividad inherente, que depende de la temperatura. Algunos ejemplos se muestran en la tabla 2.3; como puede observarse, existe una pequeña variación entre los diferentes tipos de cobre (menor que 1%), pero una gran diferencia entre metales distintos. En particular el acero, aunque más resistente que el cobre, es varias veces más resistivo. En alguna literatura técnica, es más común ver mencionada la conductividad (simbolizada por una σ) de un material, la cual simplemente es el recíproco de la resistividad.

La resistencia de un objeto particular se obtiene multiplicando la resistividad por la longitud ℓ de la resistencia y dividiéndola entre el área de la sección transversal (A) como en la ecuación [6]; estos parámetros se ilustran en la figura 2.26.

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \qquad [6]$$

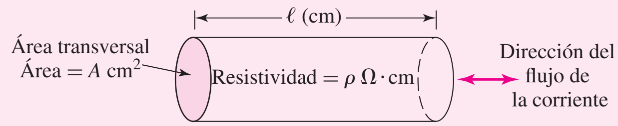


FIGURA 2.26 Definición de los parámetros geométricos empleados para calcular la resistencia de un alambre. Se supone que la resistividad del material es espacialmente uniforme.

Determinamos la resistividad cuando se elige el tipo de material con el que se fabrica un alambre y se mide la temperatura del medio ambiente en donde se lleva la aplicación. Puesto que en realidad el alambre absorberá una cantidad finita de potencia debido a su resistencia, el flujo de corriente origina la producción de calor. Los alambres más gruesos tienen resistencia más baja y también disipan el calor con mayor facilidad, pero son más pesados; tienen

TABLA **2.3** Algunos materiales comunes de alambre eléctrico y sus resistividades*

Especificación ASTM**	Templado y forma	Resistividad a 20 °C ($\mu\Omega \cdot$ cm)
B33	Cobre, estañado blando, redondo	1.7654
B75	Cobre, tubular, blando, cobre	1.7241
B188	Cobre, tubo macizo, rectangular o cuadrado	1.7521
B189	Cobre, recubierto de plomo blando, redondo	1.7654
B230	Aluminio, macizo, redondo	2.8625
B227	Acero con cubierta de cobre, macizo, redondo, grado 40 HS	4.3971
B355	Cobre, recubierto con níquel, redondo, clase 10	1.9592
B415	Acero con cubierta de aluminio, macizo, redondo	8.4805

* C.B. Rawlins, "Conductor Materials", *Standard Handbook for Electrical Engineering,* 13a. edición, D.G. Fink y H.W. Beaty, eds. Nueva York: McGraw-Hill, 1993, pp. 4-4 a 4-8.

** Sociedad Estadounidense de Prueba de Materiales.

un volumen mayor y, además, resultan más costosos. Por lo tanto, por consideraciones prácticas es conveniente seleccionar el alambre más pequeño que pueda utilizarse de manera segura, en lugar de seleccionar el alambre con el diámetro mayor disponible en un esfuerzo por minimizar las pérdidas resistivas. El American Wire Gauge (AWG) es un sistema estándar para especificar tamaños de alambre. Al elegir un calibre de alambre, los valores AWG más pequeños corresponden a un diámetro de alambre más grande; la tabla 2.4 presenta información abreviada de calibres comunes. Los códigos de seguridad locales eléctricos y contra incendio típicamente dictan el calibre que se requiere en aplicaciones específicas de cableado con base en la corriente máxima esperada, así como en el lugar donde se localizará la instalación.

TABLA 2.4 Algunos calibres de alambre comunes y resistencia de alambre de cobre sólido (blando)*

Tamaño del conductor (AWG)	Sección transversal (mm^2)	Ohms por 1 000 pies a 20 °C
28	0.0804	65.3
24	0.205	25.7
22	0.324	16.2
18	0.823	6.39
14	2.08	2.52
12	3.31	1.59
6	13.3	0.3952
4	21.1	0.2485
2	33.6	0.1563

* C.B. Rawlins y cols., *Standard Handbook for Electrical Engineering,* 13a. edición, D.G. Fink y H.W. Beaty, eds. Nueva York: McGraw-Hill, 1993, pp. 4-47.

EJEMPLO 2.4

Se debe establecer una línea de transmisión de energía eléctrica de cd entre dos islas separadas 24 millas una de otra. La tensión de operación es de 500 kV y la capacidad del sistema es de 600 MW. Calcule el flujo máximo de corriente de cd y estime la resistividad del cable, suponiendo un diámetro de 2.5 cm y suponiendo que es de alambre macizo (no trenzado).

Dividiendo la potencia máxima (600 MW, o 600×10^6 W) entre la tensión de operación (500 kV, o 500×10^3 V), se obtiene una corriente máxima de

$$\frac{600 \times 10^6}{500 \times 10^3} = 1\,200 \text{ A}$$

La resistencia del cable es simplemente la relación de la tensión con la corriente, o

$$R_{\text{cable}} = \frac{500 \times 10^3}{1\,200} = 417\ \Omega$$

Conocemos la longitud:

$$\ell = (24 \text{ millas})\left(\frac{5\,280 \text{ pies}}{1 \text{ milla}}\right)\left(\frac{12 \text{ pulg}}{1 \text{ pie}}\right)\left(\frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ pulg}}\right) = 3\,862\,426 \text{ cm}$$

Dado que la mayor parte de la información parece ser válida sólo con dos cifras significativas, se redondea a 3.9×10^6 cm.

Como el diámetro del cable se especifica como de 2.5 cm, se sabe que su área de sección transversal es de 4.9 cm^2.

Por lo tanto, $\rho_{\text{cable}} = R_{\text{cable}} \frac{A}{\ell} = 417\left(\frac{4.9}{3.9 \times 10^6}\right) = 520\ \mu\Omega \cdot \text{cm}$

PRÁCTICA

2.13 Un cable de 500 pies de longitud de cobre blando calibre 24 AWG conduce una corriente de 100 mA. ¿Cuál es la caída de tensión a través del cable?

Respuesta: 3.26 V.

Conductancia

En un resistor lineal, la proporción entre la corriente y la tensión también es constante:

$$\frac{i}{v} = \frac{1}{R} = G \qquad [7]$$

donde G se llama *conductancia*. La unidad del SI para la conductancia es el siemens (S), 1 A/V. Anteriormente se utilizaba una unidad no oficial, el mho, abreviada mediante una omega mayúscula invertida ℧ y todavía ocasionalmente escrita como Ω^{-1}. De vez en cuando la verá en algunos esquemas de circuito, así como en catálogos y textos. El mismo símbolo de circuitos (fig. 2.24*d*) se emplea para representar la resistencia y la conductancia. En este caso, la potencia absorbida es también necesariamente positiva y se podría expresar en términos de la conductancia mediante:

$$p = vi = v^2 G = \frac{i^2}{G} \qquad [8]$$

De este modo, un resistor de 2 Ω tiene una conductancia de $\frac{1}{2}$S, y si fluye una corriente de 5 A a través de él, se presenta una tensión de 10 V en las terminales y se absorbe una potencia de 50 W.

Todas las expresiones dadas hasta ahora en esta sección se escribieron en términos de la corriente, la tensión y la potencia instantáneas, como $v = iR$ y $p = vi$. Es necesario recordar que es una notación abreviada de $v(t) = Ri(t)$ y $p(t) = v(t)\, i(t)$. La corriente que circula por una resistencia y la tensión que existe entre sus extremos deben variar de la misma manera respecto del tiempo. Por lo tanto, si $R = 10\ \Omega$ y $v = 2$ sen $100t$ V, entonces $i = 0.2$ sen $100t$ A. Se observa que la potencia está dada por $0.4 \text{ sen}^2\ 100t$ W, de modo que un diagrama simple ilustrará la naturaleza diferente de su variación en el tiempo. Si bien la corriente y la tensión son negativas durante ciertos intervalos, ¡la potencia absorbida *nunca* es negativa!

La resistencia puede utilizarse como la base para definir dos términos que suelen emplearse: *cortocircuito* y *circuito abierto*. Se define al cortocircuito como una resistencia de cero ohms; entonces, puesto que $v = iR$, la tensión en un cortocircuito debe ser cero, aunque la corriente tenga cualquier valor. De manera análoga, se define al circuito abierto como una resistencia infinita. Se concluye a partir de la ley de Ohm

que la corriente debe ser nula, sin que importe la tensión en el circuito abierto. Aunque los alambres reales tienen una pequeña resistencia asociada, siempre se supone que tienen resistencia nula a menos que se indique lo contrario. Por lo tanto, en la totalidad de los diagramas esquemáticos de circuito, los alambres se consideran como cortocircuitos perfectos.

RESUMEN Y REPASO

En este capítulo introdujimos el tema de las unidades —específicamente aquellas relevantes a los circuitos eléctricos— y su relación con las unidades fundamentales (SI). También explicamos la corriente y las fuentes de corriente, la tensión y las fuentes de tensión, y el hecho de que el producto de tensión y corriente es la potencia (la tasa de consumo o generación de energía). Como la potencia puede ser positiva o negativa, dependiendo de la dirección de la corriente y de la polaridad de la tensión, describimos la convención pasiva de signos para asegurar que siempre se sepa si un elemento está *absorbiendo* (*o disipando*) o *suministrando* energía al resto del circuito. Introdujimos cuatro fuentes adicionales de energía que constituyen una categoría general que se conoce como fuentes dependientes. Se usan a menudo para modelar sistemas y componentes eléctricos complejos, pero el valor real de la tensión o de la corriente que suministran usualmente se desconoce mientras no se analiza el sistema completo. Concluimos el capítulo con la resistencia —definitivamente el elemento más común de un circuito— cuya tensión y corriente tienen una relación lineal (descrita por la ley de Ohm). Mientras que la *resistividad* de un material es una de sus propiedades fundamentales (que se mide en $\Omega \cdot$ cm), la *resistencia* describe la propiedad de un dispositivo (que se mide en Ω), y por lo tanto no depende únicamente de la resistividad, sino también de la geometría del dispositivo (es decir, de la longitud y del área).

Se concluye con los puntos clave para repaso, con ejemplos adecuados.

- El sistema de unidades más utilizado en la ingeniería eléctrica es el SI.
- La dirección en la que se mueven las cargas positivas constituye la correspondiente al flujo de corriente positiva; de manera alternativa, el flujo de corriente positiva está en dirección opuesta a la de los electrones móviles.
- Para definir una corriente, deben indicarse un valor y una dirección. Por lo general, las corrientes se denotan mediante la letra mayúscula "I" para valores constantes (cd), o de lo contrario también $i(t)$ o simplemente i.
- Para definir la tensión en un elemento, se requiere marcar las terminales con signos "+" y "−", además de proporcionar un valor (un símbolo algebraico o un valor numérico).
- Se dice que cualquier elemento suministrará potencia positiva si fluye corriente positiva hacia afuera de la terminal de tensión positiva. Cualquier elemento absorbe potencia positiva si fluye corriente positiva hacia adentro de la terminal de tensión positiva. (Ejemplo 2.1)
- Existen seis fuentes: la fuente de tensión independiente, la fuente de corriente independiente, la fuente de corriente dependiente controlada por corriente, la fuente de corriente dependiente controlada por tensión, la fuente de tensión dependiente controlada por tensión y la fuente de tensión dependiente controlada por corriente. (Ejemplo 2.2)
- La ley de Ohm establece que la tensión en un resistor lineal es directamente proporcional a la corriente que fluye a través de él; es decir, $v = Ri$. (Ejemplo 2.3)
- La potencia disipada por un resistor (que causa producción de calor) está dada por $p = vi = i^2R = v^2/R$. (Ejemplo 2.3)

Observe que una corriente representada por i o $i(t)$ es constante (cd) o variable en el tiempo, aunque las corrientes representadas por el símbolo I no deben variar en el tiempo.

- En el análisis de circuitos se suele suponer que los alambres tienen una resistencia nula. Sin embargo, cuando se elige un calibre de alambre para una aplicación específica, es necesario consultar códigos locales eléctricos y contra incendios. (Ejemplo 2.4)

LECTURAS ADICIONALES

Un buen libro que estudia con una gran profundidad las propiedades y fabricación de resistencias es:

Felix Zandman, Paul-René Simon y Joseph Szwarc, *Resistor Theory and Technology,* Raleigh, N.C.: SciTech Publishing, 2002.

Un buen manual de ingeniería eléctrica para todo propósito es:

Donald G. Fink y H. Wayne Beaty, *Standard Handbook for Electrical Engineers,* 13a. edición, Nueva York: McGraw-Hill,1993.

En particular las páginas 1-1 a 1-51, 2-8 a 2-10 y 4-2 a 4-207 proporcionan un tratamiento detallado de temas relacionados con los que se estudiaron en este capítulo.

Una referencia detallada del SI se encuentra disponible en internet en el Instituto Nacional de Estándares:

Ambler Thompson y Barry N. Taylor, *Guide for the Use of the International System of Units (SI),* NIST Special Publication 811, edición 2008, www.nist.gov.

EJERCICIOS

2.1 Unidades y escalas

1. Convierta lo siguiente a notación de ingeniería:

   (*a*) 0.045 W (*b*) 2 000 pJ
   (*c*) 0.1 ns (*d*) 39 212 as
   (*e*) 3 Ω (*f*) 18 000 m
   (*g*) 2 500 000 000 000 bits (*h*) 10^{15} átomos/cm^3

2. Convierta lo siguiente a notación de ingeniería:

   (*a*) 1 230 fs (*b*) 0.0001 decímetros
   (*c*) 1 400 mK (*d*) 32 nm
   (*e*) 13 560 kHz (*f*) 2 021 micromoles
   (*g*) 13 decilitros (*h*) 1 hectómetro

3. Exprese lo siguiente en unidades de ingeniería:

   (*a*) 1 212 m V (*b*) 10^{11} pA
   (*c*) 1 000 yoctosegundos (*d*) 33.9997 zeptosegundos
   (*e*) 13 100 attosegundos (*f*) 10^{-14} zettasegundos
   (*g*) 10^{-5} segundos (*h*) 10^{9} Gs

4. Exprese en metros las siguientes distancias:

   (*a*) 1 Zm (*b*) 1 Em (*c*) 1 Pm
   (*d*) 1 Tm (*e*) 1 Gm (*f*) 1 Mm

5. Convierta lo siguiente a unidades SI, teniendo cuidado de emplear la notación de ingeniería correcta:

   (*a*) 212 °F (*b*) 0 °F (*c*) 0 K
   (*d*) 200 hp (*e*) 1 yarda (*f*) 1 milla

6. Convierta lo siguiente a unidades SI, teniendo cuidado de emplear la notación de ingeniería correcta:

   (*a*) 100 °C (*b*) 0 °C (*c*) 4.2 K

   (*d*) 150 hp (*e*) 500 Btu (*f*) 100 J/s

7. Cierto láser de fluoruro de kriptón genera pulsos con longitud de 15 ns, y cada pulso contiene 550 mJ de energía. (*a*) Calcule la potencia pico de salida instantánea del láser. (*b*) Si se pueden generar hasta 100 pulsos por segundo, calcule la potencia promedio máxima generada por el láser.

8. Cuando se opera con una longitud de onda de 750 nm, cierto láser de Ti:zafiro es capaz de producir pulsos tan cortos como de 50 fs, cada uno con un contenido de energía de 500 μJ. (*a*) Calcule la potencia instantánea de salida del láser. (*b*) Si el láser es capaz de una rapidez de repetición de pulsos de 80 MHz, calcule la potencia promedio máxima de salida que se puede obtener.

9. Un vehículo eléctrico es propulsado por un solo motor cuya potencia nominal es de 40 hp. Si el motor trabaja continuamente durante 3 h a potencia máxima, calcule la energía eléctrica consumida. Exprese su respuesta en unidades SI usando notación de ingeniería.

10. En condiciones de insolación de 500 W/m^2 (luz de sol directa) y eficiencia de cada celda solar de 10% (definida como la relación entre la potencia eléctrica generada y la potencia solar incidente), calcule el área necesaria para que una red fotovoltaica de celdas solares sea capaz de hacer funcionar el vehículo del ejercicio 9 a media potencia.

11. Cierto generador de piezoelectricidad de nanoalambre es capaz de producir 100 pW de electricidad utilizable a partir del tipo de movimiento que se obtiene del trote de una persona a paso moderado. (*a*) ¿Cuántos dispositivos de nanoalambre se necesitan para operar un reproductor personal MP3 que consume 1 W de potencia? (*b*) Si se pueden producir los nanoalambres directamente en un trozo de tela con una densidad de 5 dispositivos por micra cuadrada, ¿qué área se necesita?; ¿sería práctico?

12. Una compañía de suministro eléctrico hace cargos a sus clientes a tarifas diferentes, dependiendo de su consumo diario de energía: \$0.05/kWh hasta 20 kWh, y \$0.10/kWh para todo consumo de energía por encima de 20 kWh en cualquier periodo de 24 horas. (*a*) Calcule cuántas bombillas de iluminación de 100 W se pueden usar continuamente por menos de \$10 por semana. (*b*) Calcule el costo diario de energía si se usan continuamente 2 000 kW de potencia.

13. La Tilting Windmill Electrical Cooperative LLC, Inc., ha instituido un esquema de precios diferenciados que tiene por objetivo animar a los clientes a ahorrar en el uso de energía durante las horas de luz de día, cuando la demanda comercial local está en su máximo. Si el precio por kilowatt-hora es de \$0.033 entre las 9 p.m. y las 6 a.m., y de \$0.057 para el resto de las horas, ¿cuánto cuesta hacer funcionar un calefactor portátil de 2.5 kW continuamente durante 30 días?

14. Suponiendo una población mundial de 9 000 millones de personas, cada una de las cuales usa aproximadamente 100 W de potencia continuamente durante el día, calcule el área total de terreno que tendría que reservarse para la generación fotovoltaica de potencia, suponiendo 800 W/m^2 de potencia solar incidente y una eficiencia de conversión (luz solar a electricidad) de 10%.

2.2 Carga, corriente, tensión (voltaje) y potencia

15. Se determina que la carga total que sale de un extremo de un pequeño alambre de cobre y entra a un dispositivo desconocido sigue la relación $q(t) = 5e^{-t/2}$ C, donde t se expresa en segundos. Calcule la corriente que entra al dispositivo, indicando el signo.

16. La corriente que entra a la terminal del colector de cierto transistor de unión bipolar (BJT) se mide como 1 nA. Si no se ha transferido carga alguna hacia o desde la terminal del colector antes de $t = 0$, y la corriente fluye durante 1 min, calcule la carga total que cruza hacia el colector.

17. La carga total almacenada en una placa aislante de 1 cm de diámetro es de -10^{13} C. (*a*) ¿Cuántos electrones están sobre la placa? (*b*) ¿Cuál es la densidad superficial de los electrones (número de electrones por metro cuadrado)? (*c*) Si se agregan electrones adicionales a la

placa de una fuente externa a razón de 10^6 electrones por segundo, ¿cuál es la magnitud de la corriente que fluye entre la fuente y la placa?

18. Un misterioso dispositivo que se encontró en un laboratorio olvidado acumula carga con una rapidez especificada por la expresión $q(t) = 9 - 10t$ C desde el momento en que se pone en acción. (*a*) Calcule la carga total contenida en el dispositivo cuando $t = 0$. (*b*) Calcule la carga total contenida cuando $t = 1$ s. (*c*) Determine la corriente que fluye hacia el dispositivo cuando $t = 1$ s, 3 s y 10 s.
19. Un nuevo tipo de dispositivo parece acumular carga de acuerdo con la expresión $q(t) = 10t^2 - 22t$ mC (t en s). (*a*) En el intervalo $0 \leq t < 5$ s, ¿en qué tiempo la corriente que fluye hacia el dispositivo es igual a cero? (*b*) Grafique $q(t)$ e $i(t)$ en el intervalo $0 \leq t < 5$ s.
20. Se determina que la corriente que fluye a través de una bombilla de luz de filamento de tungsteno sigue $i(t) = 114$ sen $(100\pi t)$ A. (*a*) En el intervalo definido por $t = 0$ y $t = 2$ s, ¿cuántas veces la corriente es igual a cero amperes? (*b*) ¿Cuánta carga se transporta a través de la bombilla en el primer segundo?
21. La forma de onda de corriente que se describe en la figura 2.27 se caracteriza por un periodo de 8 s. (*a*) ¿Cuál es el valor promedio de la corriente durante un solo periodo? (*b*) Si $q(0) = 0$, grafique $q(t)$, $0 < t < 20$ s.

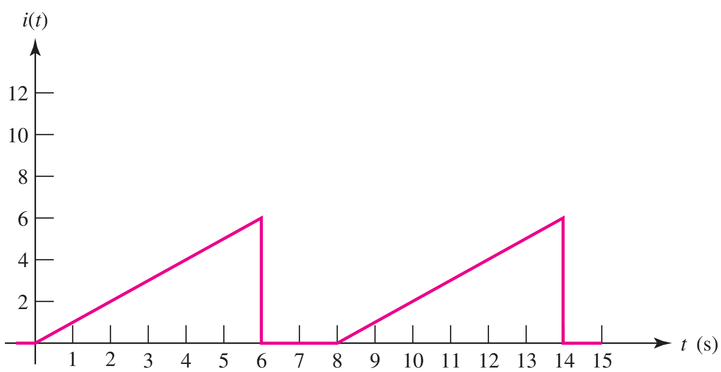


FIGURA 2.27 Un ejemplo de una corriente variable con el tiempo.

22. La forma de onda de corriente que se describe en la figura 2.28 se caracteriza por un periodo de 4 s. (*a*) ¿Cuál es el valor promedio de la corriente a lo largo de un solo periodo? (*b*) Calcule la corriente promedio a lo largo del intervalo $1 < t < 3$ s. (*c*) Si $q(0) = 1$ C, grafique $q(t)$, $0 < t < 4$ s.

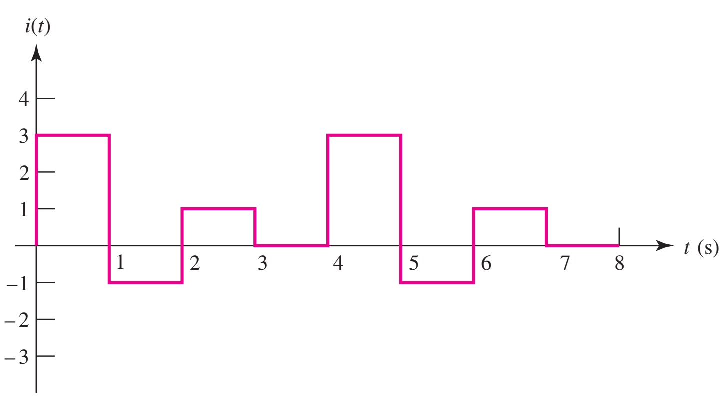
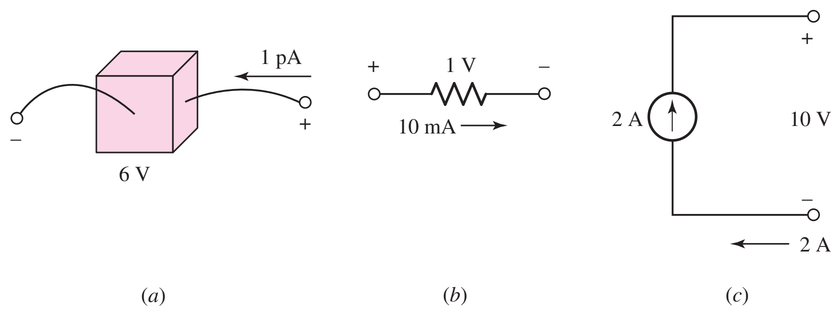


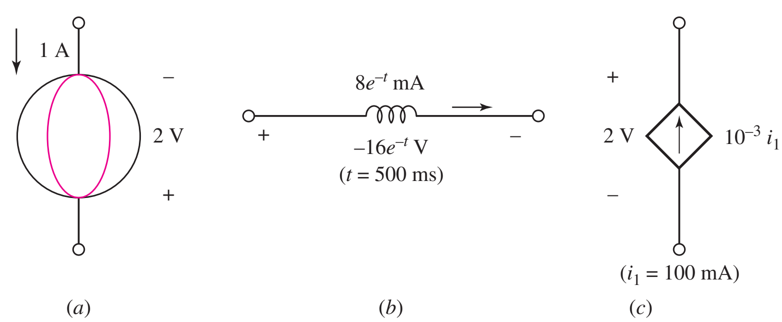
FIGURA 2.28 Un ejemplo de una corriente variable con el tiempo.

23. Una trayectoria alrededor de cierto circuito eléctrico tiene puntos discretos llamados *A*, *B*, *C* y *D*. Para mover un electrón del punto *A* al *C* se necesitan 5 pJ. Para mover un electrón de *B* a *C* se necesitan 3 pJ. Para mover un electrón de *A* a *D* se necesitan 8 pJ. (*a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial (en volts) entre los puntos *B* y *C*, suponiendo una referencia "+" en *C*? (*b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial (en volts) entre los puntos *B* y *D*, suponiendo una referencia "+" en *D*? (*c*) ¿Cuál es la diferencia de potencial (en volts) entre los puntos *A* y *B* (nuevamente en volts), suponiendo una referencia "+" en *B*?
24. Dos terminales metálicas sobresalen de un dispositivo. La terminal izquierda es la referencia positiva para una tensión llamada v_x (la otra terminal es la referencia negativa). La terminal de la derecha es la referencia positiva para una tensión llamada v_y (la otra terminal es la referencia negativa). Si se necesita 1 mJ de energía para empujar un solo electrón hacia la terminal izquierda, determine las tensiones v_x y v_y.
25. La convención para los voltímetros es usar un alambre negro para la terminal de referencia negativa y uno rojo para la terminal de referencia positiva. (*a*) Explique por qué se necesitan dos alambres para medir una tensión. (*b*) Si por trabajar en la oscuridad se invierten accidentalmente los alambres en un voltímetro, ¿qué sucederá durante la siguiente medición?
26. Determine la potencia absorbida por cada uno de los elementos en la figura 2.29.



■ **FIGURA 2.29** Elementos para el ejercicio 26.

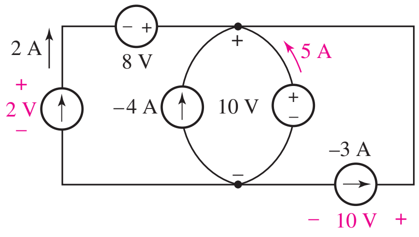
27. Determine la potencia absorbida por cada uno de los elementos en la figura 2.30.



■ **FIGURA 2.30** Elementos para el ejercicio 27.

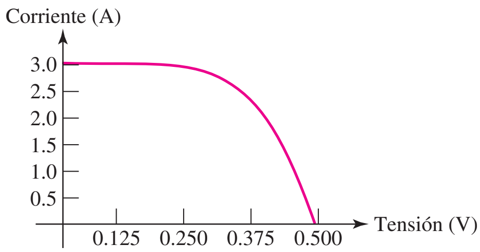
28. Se mide una corriente constante de 1 ampere que fluye hacia la terminal de referencia positiva de un par de conductores, cuya tensión se llamará v_p. Calcule la potencia absorbida cuando $t = 1$ s, si $v_p(t)$ es igual (*a*) $+1$ V; (*b*) -1 V; (*c*) $2 + 5\cos(5t)$ V; (*d*) $4e^{-2t}$ V. (*e*) Explique el significado de un valor negativo para la potencia absorbida.

29. Determine la potencia suministrada por el elemento del extremo izquierdo en el circuito de la figura 2.31.



■ **FIGURA 2.31**

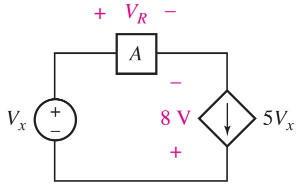
30. La característica corriente-tensión de una celda solar de silicio expuesta a la luz solar directa a medio día en Florida a mediados de verano se da en la figura 2.32. Se obtiene colocando resistencias de diferentes tamaños entre las dos terminales del dispositivo y midiendo las corrientes y las tensiones resultantes.
    (*a*) ¿Cuál es el valor de la corriente de cortocircuito?
    (*b*) ¿Cuál es el valor de la tensión circuito abierto?
    (*c*) Estime la potencia máxima que se puede obtener del dispositivo.



■ **FIGURA 2.32**

2.3 Fuentes de tensión y de corriente

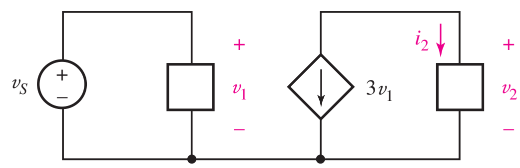
31. Algunas de las fuentes ideales en el circuito de la figura 2.31 están suministrando potencia positiva, y las otras están absorbiendo potencia positiva. Determine cuáles son cuáles, y demuestre que la suma algebraica de la potencia absorbida para cada elemento (teniendo cuidado de conservar los signos) es igual a cero.
32. Mediante medición cuidadosa, se determina que un láser de mesa de ion de argón está consumiendo (absorbiendo) 1.5 kW de potencia eléctrica de la toma de corriente de la pared, pero únicamente produce 5 W de potencia óptica. ¿A dónde va la energía restante? ¿La conservación de la energía no requiere que ambas cantidades sean iguales?
33. Con referencia al circuito representado en la figura 2.33 vea que la misma corriente fluye a través de cada elemento. La fuente dependiente controlada por la tensión suministra una corriente que es 5 veces superior a la tensión V_x. (*a*) Para $V_R = 10$ V y $V_x = 2$ V, determine la potencia absorbida por cada elemento. (*b*) ¿El elemento *A* es una fuente pasiva o activa? Explique.



■ **FIGURA 2.33**

34. En la figura 2.33, observe que la misma corriente fluye a través de cada elemento. La fuente controlada por tensión suministra una corriente que es 5 veces superior que la tensión V_x. (*a*) Para $V_R = 100$ V y $V_x = 92$ V, determine la potencia suministrada por cada elemento. (*b*) Verifique que la suma algebraica de las potencias suministradas es igual a cero.

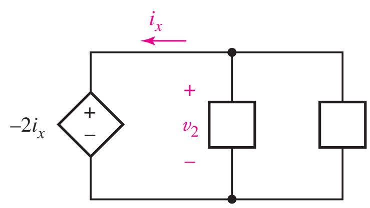
35. El circuito representado en la figura 2.34 contiene una fuente dependiente de corriente; la magnitud y el sentido de la corriente que suministra están directamente determinados por la tensión etiquetada como v_1. Observe que, por lo tanto, $i_2 = -3v_1$. Determine la tensión v_1 si $v_2 = 33i_2$ y si $i_2 = 100$ mA.



■ **FIGURA 2.34**

36. Para proteger un costoso componente de un circuito contra el riesgo de que se le suministre demasiada potencia, usted decide incorporar en el diseño un fusible de ruptura rápida. Sabiendo que el componente de circuito está conectado a 12 V, su consumo mínimo de potencia es de 12 W y la potencia máxima que puede disipar con seguridad es de 100 W, ¿cuál de las tres clasificaciones disponibles de fusible seleccionaría: 1 A, 4 A o 10 A? Explique su respuesta.

37. La fuente dependiente en el circuito de la figura 2.35 suministra una tensión cuyo valor depende de la corriente i_x. ¿Qué valor de i_x se necesita para que la fuente dependiente suministre 1 W?



■ **FIGURA 2.35**

2.4 Ley de Ohm

38. Determine la magnitud de la corriente que fluye a través de una resistencia de 4.7 kΩ si la tensión a través de éste es (*a*) 1 mV; (*b*) 10 V; (*c*) $4\,e^{-t}$ V; (*d*) $100 \cos(5\,t)$ V; (*e*) −7 V.

39. Las resistencias reales se pueden fabricar únicamente con una tolerancia específica, de modo que en realidad el valor de la resistencia es incierto. Por ejemplo, una resistencia de 1 Ω especificada con 5% de tolerancia podría en la práctica tener cualquier valor comprendido entre 0.95 y 1.05 Ω. Calcule la tensión a través de una resistencia de 2.2 kΩ con tolerancia de 10% si la corriente que fluye a través del elemento es (*a*) 1 mA; (*b*) 4 sen 44*t* mA.

40. (*a*) Grafique la relación corriente-tensión (corriente en el eje *y*) de una resistencia de 2 kΩ dentro del rango de tensión de $-10\text{ V} \leq V_{\text{resistencia}} \leq +10$ V. Asegúrese de etiquetar adecuadamente ambos ejes. (*b*) ¿Cuál es el valor numérico de la pendiente (exprese su respuesta en siemens)?

41. Grafique la tensión a través de una resistencia de 33 Ω dentro del rango $0 < t < 2\pi$s, si la corriente está dada por $2.8 \cos(t)$ A. Suponga que tanto la corriente como la tensión están definidos de acuerdo con la convención pasiva de signos.

42. La figura 2.36 representa la característica corriente-tensión de tres diferentes elementos resistivos. Determine la resistencia de cada uno, suponiendo que la tensión y la corriente están definidas de acuerdo con la convención pasiva de signos.

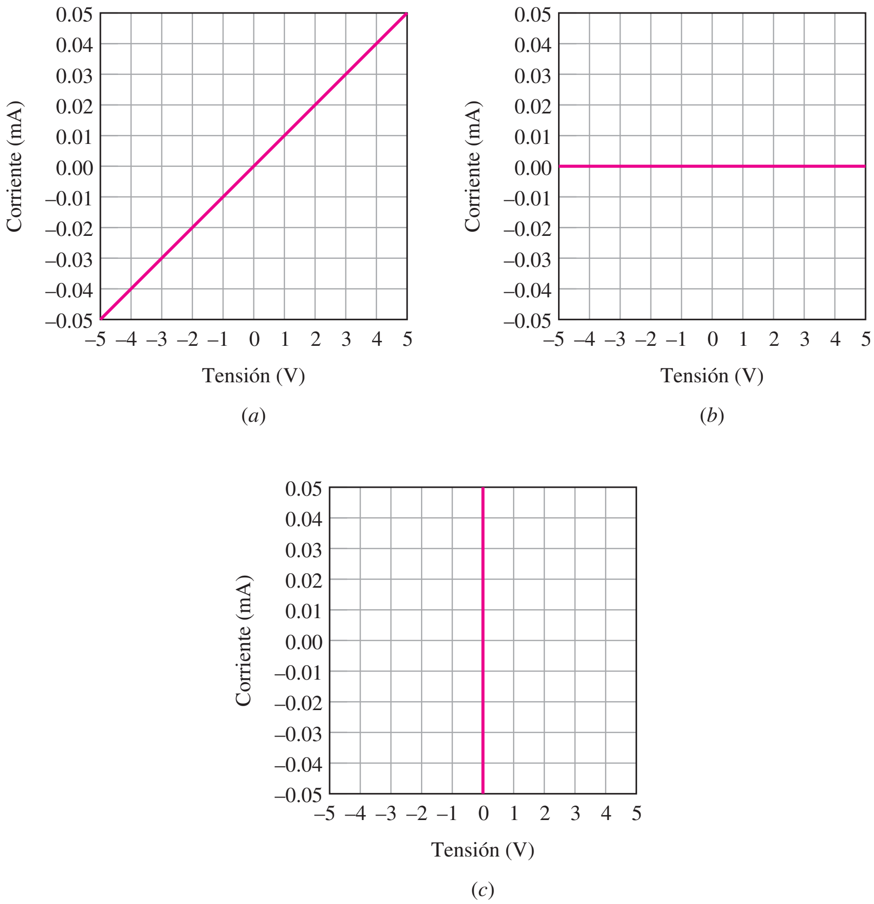
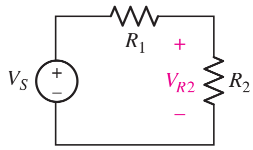


FIGURA 2.36

43. Determine la conductancia (en siemens) de lo siguiente: (*a*) 0 Ω; (*b*) 100 MΩ; (*c*) 200 mΩ.
44. Determine la magnitud de la corriente que fluye a través de una conductancia de 10 mS si la tensión a través de ésta es (*a*) 2 mV; (*b*) −1 V; (*c*) $100e^{-2t}$ V; (*d*) 5 sen(5*t*) V; (*e*) 0 V.
45. Una resistencia de 1 kΩ a 1% de tolerancia puede tener en realidad cualquier valor dentro del rango de 990 a 1 010 Ω. Suponiendo que se aplica una tensión de 9 V a través de ella, determine (*a*) el rango correspondiente de corriente y (*b*) el rango correspondiente de potencia absorbida. (*c*) Si la resistencia se reemplaza por otra de 1 kΩ a 10% de tolerancia, repita los incisos (*a*) y (*b*).
46. Los siguientes datos experimentales se obtienen de una resistencia sin marcar, usando una fuente de potencia de tensión variable y un medidor de corriente. El indicador del medidor de corriente es algo inestable, desafortunadamente, lo cual introduce error en la medición.

Tensión (V)	Corriente (mA)
−2.0	−0.89
−1.2	−0.47
0.0	0.01
1.0	0.44
1.5	0.70

(*a*) Grafique la característica de corriente contra tensión medidos.
(*b*) Usando una línea de ajuste óptimo, estime el valor de la resistencia.



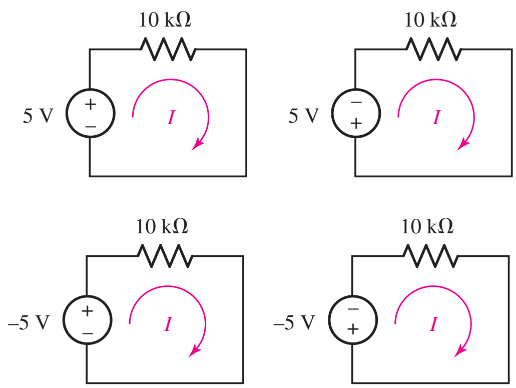
■ **FIGURA 2.37**

47. Utilice el hecho de que, en el circuito de la figura 2.37, la potencia total suministrada por la fuente de tensión debe ser igual a la potencia total absorbida por las dos resistencias para demostrar que

$$V_{R_2} = V_S \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Usted puede suponer que fluye la misma corriente a través de cada elemento (un requisito de la conservación de cargas).

48. Para cada uno de los circuitos de la figura 2.38, encuentre la corriente I y calcule la potencia absorbida por la resistencia.

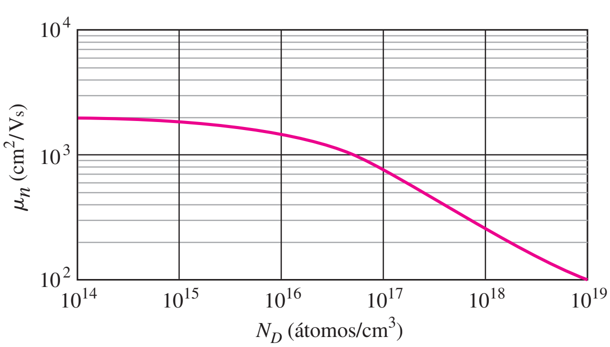


■ **FIGURA 2.38**

49. Grafique la potencia absorbida por una resistencia de 100 Ω como función de la tensión dentro del rango de $-2\text{ V} \leq V_{\text{resistencia}} \leq +2\text{ V}$.

Ejercicios de integración del capítulo

DP 50. El silicio conocido como "tipo n" tiene una resistividad dada por $\rho = (-q\, N_D \mu_n)^{-1}$, donde N_D es la densidad volumétrica de los átomos de fósforo (átomos/cm^3), μ_n es la movilidad de los electrones (cm^2/V · s), y $q = -1.602 \times 10^{-19}$ C es la carga de cada electrón. Convenientemente, existe una relación entre movilidad y N_D, como se muestra en la figura 2.39. Suponga una oblea (disco) de silicio de 8 pulgadas de diámetro y que tiene un espesor de 300 μm. Diseñe una resistencia de 10 Ω mediante la especificación de una concentración de fósforo dentro del rango de $2 \times 10^{15}\text{ cm}^{-3} \leq N_D \leq 2 \times 10^{17}\text{ cm}^{-3}$, junto con una geometría adecuada (la oblea se puede cortar, pero no adelgazar).



■ **FIGURA 2.39**

51. La figura 2.39 representa la relación entre movilidad de electrones μ_n y densidad del impurificante N_D para silicio tipo n. Con el conocimiento de que la resistividad en este material está dada por $\rho = [q\mu_n N_D]^{-1}$, grafique la resistividad como función de la densidad del impurificante dentro del rango 10^{14} cm$^{-3} \leq N_D \leq 10^{19}$ cm^{-3}.

DP 52. Haciendo referencia a los datos de la tabla 2.4, diseñe una resistencia cuyo valor se pueda variar mecánicamente dentro del rango de 100 a 500 Ω (suponga la operación a 20 °C).

53. Una brecha de 250 pies de longitud separa a una fuente de potencia cd de una bombilla que toma 25 A de corriente. Si se utiliza un alambre de calibre 14 AWG (observe que se necesitan dos alambres, para un total de 500 pies), calcule la cantidad de potencia desperdiciada en el alambre.

54. Los valores de resistencia de la tabla 2.4 están calibrados para operación a 20 °C. Para operar a otras temperaturas, se pueden corregir usando la relación[4]

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{234.5 + T_2}{234.5 + T_1}$$

donde T_1 = temperatura de referencia (20 °C en el caso actual)
T_2 = temperatura de operación deseada
R_1 = resistencia a T_1
R_2 = resistencia a T_2

Un equipo depende para su operación de un alambre externo hecho de cobre blando de calibre 28 AWG, que tiene una resistencia de 50.0 Ω a 20 °C. Desafortunadamente, el ambiente operativo ha cambiado, y ahora está a 110.5 °F. (*a*) Calcule la longitud del alambre original. (*b*) Determine en cuánto debe acortarse el alambre para que vuelva a tener 50.0 Ω .

DP 55. Su medidor favorito contiene una resistencia de precisión (tolerancia de 1%) de 10 Ω. Lamentablemente, la última persona que pidió prestado este medidor quemó, de alguna manera, la resistencia y necesita reemplazarse. Diseñe un reemplazo adecuado, suponiendo que usted puede disponer fácilmente de 1 000 pies de cada uno de los calibres de alambre mencionados en la tabla 2.4.

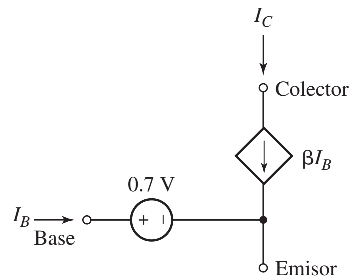
56. En una nueva instalación, usted especificó que todo el alambrado debe cumplir con la especificación ASTM B33 (vea la tabla 2.3). Por desgracia, el subcontratista leyó mal sus instrucciones e instaló en su lugar alambrado B415 (pero del mismo calibre). Suponiendo que la tensión de operación no ha cambiado, (*a*) ¿en cuánto se reducirá la corriente, y (*b*) ¿cuánta potencia adicional se desperdiciará en las líneas? (*Exprese ambas respuestas en términos de porcentaje*).

57. Si se fuerza una corriente de 1 mA a través de un trozo de alambre macizo, redondo, de acero revestido de aluminio (B415) de 2.3 m de longitud y diámetro de 1 mm, ¿cuánta potencia se desperdicia como resultado de las pérdidas resistivas? Si en vez de esto se usa alambre con las mismas dimensiones pero que cumpla las especificaciones B75, ¿en cuánto se reducirá la potencia desperdiciada debido a pérdidas resistivas?

58. La red que se muestra en la figura 2.40 se puede usar para modelar con exactitud el comportamiento de un transistor de unión bipolar siempre y cuando esté operando en la región activa. El parámetro β se conoce como la ganancia de corriente. Si para este dispositivo $\beta = 100$ y se determina I_B como 100 μA, calcule (*a*) I_C, la corriente que fluye hacia la terminal del colector, y (*b*) la potencia disipada por la región base-emisor.

59. Una bombilla de luz de filamento de tungsteno de 100 W funciona aprovechando las pérdidas resistivas en el filamento, absorbiendo 100 J de energía cada segundo del tomacorriente de la pared. ¿Cuánta energía *óptica* por segundo espera usted que produzca esta bombilla? ¿Esto viola el principio de conservación de la energía?

[4] D.G. Fink y H.W. Beaty, *Standard Handbook for Electrical Engineers*, 13a. edición, Nueva York: McGraw-Hill, 1993, pp. 2-9.



■ **FIGURA 2.40** Modelo cd para un transistor de unión bipolar operando en región activa.

60. Las baterías se presentan en una amplia variedad de tipos y tamaños. Dos de las más comunes se llaman “AA” y “AAA”. Una sola batería de cualquiera de estos tipos produce nominalmente una tensión entre sus terminales de 1.5 V cuando está plenamente cargada. Entonces, ¿cuáles son las diferencias entre las dos, además del tamaño? (*Pista:* Piense en energía.)

CAPÍTULO 3

Leyes de tensión y de corriente



CONCEPTOS CLAVE

- Nuevos términos sobre circuitos: *nodo*, *trayectoria*, *lazo* y *rama*
- Ley de corrientes de Kirchhoff (LCK)
- Ley de voltajes de Kirchhoff (LVK)
- Análisis de circuitos básicos en serie y en paralelo
- Combinación de fuentes en serie y en paralelo
- Simplificación de combinaciones de resistencias en serie y en paralelo
- División de corriente y de tensión
- Conexiones a tierra

INTRODUCCIÓN

En el capítulo 2 presentamos las fuentes de tensión y corriente independientes, las fuentes dependientes y las resistencias. Hemos visto que las fuentes *dependientes* se presentan en cuatro variedades, y las controla una tensión o una corriente que existe en otro sitio. Una vez que conocemos la tensión a través de una resistencia, conocemos su corriente (y viceversa); sin embargo, éste no es el caso para las fuentes. En general, los circuitos se deben analizar para determinar un conjunto completo de tensiones y corrientes. Esto resulta ser razonablemente sencillo, y únicamente se necesitan dos simples leyes además de la ley de Ohm. Estas nuevas leyes son la ley de corrientes de Kirchhoff (LCK) y la ley de voltajes (o tensiones) de Kirchhoff (LVK), que son reformulaciones de las leyes de carga y de conservación de la energía, respectivamente. Se aplican a cualquier circuito, aunque en capítulos posteriores revisaremos técnicas más eficientes para tipos específicos de situaciones.

3.1 NODOS, TRAYECTORIAS, LAZOS Y RAMAS

Ahora centraremos el foco de atención en determinar las relaciones corriente-tensión en redes simples con dos o más elementos de circuito. Los elementos se conectarán entre sí por medio de cables (algunas veces denominados “hilos de conexión”), que tienen una resistencia nula. Debido a que la red aparece entonces como varios elementos simples y un conjunto de hilos de conexión, se le da el nombre de ***red de parámetros concentrados***. Surge un problema de análisis más difícil cuando debemos enfrentar una ***red de parámetros distribuidos***, que contiene un número esencialmente infinito de elementos pequeños que se van anulando. En este texto sólo nos enfocaremos en las redes de parámetros concentrados.



En los circuitos ensamblados en el mundo real, los cables siempre tienen resistencia finita. Sin embargo, dicha resistencia casi siempre es tan pequeña, en comparación con otras resistencias del circuito, que puede pasarse por alto sin introducir un error importante. Por lo tanto, de ahora en adelante, en circuitos idealizados, haremos referencia a cables de "resistencia nula".

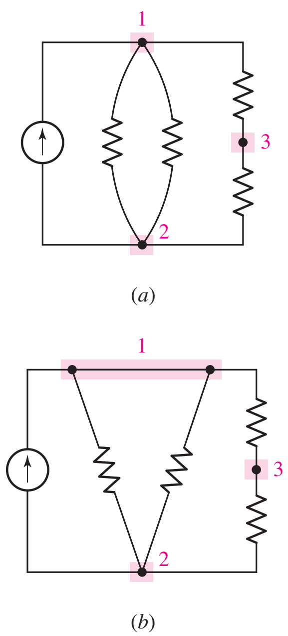


FIGURA 3.1 (*a*) Circuito que contiene tres nodos y cinco ramas. (*b*) El nodo 1 se vuelve a dibujar para considerarlo como dos nodos, aunque sigue siendo uno.

Un punto en el cual dos o más elementos tienen una conexión común se llama ***nodo***. Por ejemplo, la figura 3.1*a* presenta un circuito que contiene tres nodos. Algunas redes se dibujan de manera que engañan a un estudiante desprevenido que cree que hay más nodos de los que en verdad existen. Esto ocurre cuando un nodo, tal como el que se indica con el número 1 en la figura 3.1*a*, se muestra como dos uniones separadas conectadas por un conductor (resistencia nula), como en la figura 3.1*b*. Sin embargo, todo lo que se ha hecho es dispersar el punto común en una línea común de resistencia nula. Así, debemos considerar en forma obligatoria la totalidad de los hilos de conexión perfectamente conductores, o las porciones de hilos de conducción unidos al nodo, como parte de este mismo. Observemos también que todo elemento tiene un nodo en cada uno de sus extremos.

Supongamos que se parte del nodo de una red y se mueve a través de un elemento simple hacia el nodo del otro extremo. Continuamos luego desde ese nodo a través de un elemento diferente hasta el siguiente, y proseguimos con este movimiento hasta que hayemos pasado por tantos elementos como deseemos. Si no encontramos un nodo más de una vez, entonces el conjunto de nodos y elementos a través de los cuales pasamos se define como una ***trayectoria***. Si el nodo en el cual empezamos es el mismo que con el que finalizamos, entonces la trayectoria es, por definición, una trayectoria cerrada o ***lazo***.

Por ejemplo, en la figura 3.1*a*, si nos movemos a partir del nodo 2 por la fuente de corriente hacia el 1, y luego atravesamos la resistencia superior derecha hacia el nodo 3, establecemos una trayectoria. Esto es debido a que no continuamos de nuevo hacia el nodo 2, completando así un lazo. Si procedemos desde el nodo 2 a través de la fuente de corriente hacia el 1, atravesamos la resistencia izquierda hacia el 2, y después subimos otra vez por la resistencia central hacia el nodo 1, no estamos teniendo una trayectoria, ya que encontramos más de una vez un nodo (en realidad dos nodos); tampoco tenemos un lazo, puesto que éste debe ser una trayectoria.

Otro término cuyo uso probará su conveniencia es el de ***rama***, a la cual definimos como una trayectoria única en una red, compuesta por un elemento simple y el nodo en cada extremo de ese elemento. Por lo tanto, una trayectoria es una colección particular de ramas. El circuito de las figuras 3.1*a* y *b* contiene cinco ramas.

3.2 LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF

Ahora contamos con elementos suficientes para analizar la primera de las dos leyes con las que se honra el nombre de Gustav Robert Kirchhoff (dos *h* y dos *f*), profesor universitario alemán que nació en la época en que Ohm efectuaba su trabajo experimental. Esta ley axiomática se denomina ley de corrientes de Kirchhoff (abreviada **LCK**), la cual establece simplemente que:

> La suma algebraica de las corrientes que entran a cualquier nodo es cero.

Esta ley representa un enunciado matemático del hecho de que la carga no se acumula en un nodo. *Un nodo no es un elemento de circuito,* y ciertamente no puede almacenar, destruir o generar carga. En consecuencia, las corrientes deben sumar cero. En ocasiones resulta útil una analogía hidráulica para aclarar este caso: por ejemplo, consideremos tres tuberías de agua unidas en la forma de una Y. Definimos tres "corrientes" que fluyen *hacia* cada una de las tres tuberías. Si insistimos en que el agua siempre fluye, entonces resulta evidente que no podemos tener tres corrientes de agua positivas, o las tuberías explotarían. Lo anterior constituye un resultado de las corrientes definidas como independientes de la dirección en la cual en realidad fluye el agua. Por lo tanto, por definición, el valor de una o dos corrientes debe ser negativo.

Consideremos el nodo de la figura 3.2. La suma algebraica de las cuatro corrientes que entran al nodo debe ser cero:

$$i_A + i_B + (-i_C) + (-i_D) = 0$$

Es obvio que la ley podría aplicarse de igual forma a la suma algebraica de las corrientes que *abandonan* el nodo:

$$(-i_A) + (-i_B) + i_C + i_D = 0$$

Quizá deseemos igualar la suma de las corrientes que tienen flechas de referencia dirigidas hacia el nodo, con la suma de las dirigidas hacia afuera del mismo:

$$i_A + i_B = i_C + i_D$$

lo que establece de manera simple que la suma de las corrientes que entran es igual a la suma de las corrientes que salen.

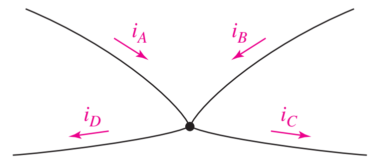


FIGURA 3.2 Ejemplo de un nodo para ilustrar la aplicación de la ley de corrientes de Kirchhoff.

EJEMPLO 3.1

En el circuito de la figura 3.3*a*, calcule la corriente a través del resistor R_3 si se sabe que la fuente de tensión suministra una corriente de 3 A.

▶ ***Identificar el objetivo del problema.***
La corriente que circula por el resistor R_3 ya se marcó como i sobre el diagrama de circuito.

▶ ***Recopilar la información conocida.***
El nodo en la parte superior de R_3 está conectado a cuatro ramas.

Dos de estas corrientes están claramente etiquetadas: una corriente de 2 A sale del nodo hacia R_2, y una corriente de 5 A fluye hacia el nodo desde la fuente de corriente. Se nos dice que la corriente que sale de la fuente de 10 V es de 3 A.

▶ ***Elaborar un plan.***
Empezar marcando la corriente que pasa por R_1 (fig. 3.3*b*), de manera que pueda escribirse una ecuación LCK en el nodo superior de los resistores R_2 y R_3.

▶ ***Construir un conjunto apropiado de ecuaciones.***
Sumar las corrientes que circulan hacia el nodo:

$$i_{R1} - 2 - i + 5 = 0$$

Para mayor claridad, las corrientes que fluyen hacia este nodo se muestran en el esquema del circuito ampliado de la figura 3.3*c*.

▶ ***Determinar si se requiere información adicional.***
Tenemos una ecuación pero dos incógnitas, lo que significa que necesitamos obtener una ecuación adicional. En este punto, se vuelve útil el hecho de que sepamos que la fuente de 10 V suministra 3 A: la LCK nos muestra que ésta es también la corriente i_{R1}.

▶ ***Buscar la solución.***
Sustituyendo, tenemos que $i = 3 - 2 + 5 = 6$ A.

▶ ***Verificar la solución. ¿Es razonable o es la esperada?***
Siempre vale la pena el esfuerzo de verificar una vez más la solución. Además, podemos hacer el intento de evaluar si al menos la magnitud de la solución es razonable. En este caso, tenemos dos fuentes: una suministra 5 A y la otra, 3 A. No hay otras fuentes independientes o dependientes. Por consiguiente, no debemos esperar encontrar ninguna corriente en el circuito mayor que 8 A.

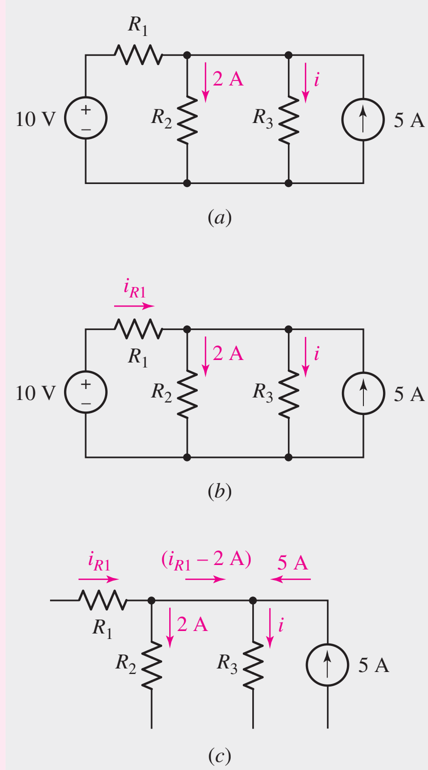


FIGURA 3.3 (*a*) Circuito simple en el que se desea que fluya la corriente a través de la resistencia R_3. (*b*) La corriente que circula por la resistencia R_1 se indica de manera que la ecuación de la LCK pueda escribirse. (*c*) Las corrientes en el nodo superior de R_3 se vuelven a dibujar por claridad.

(*continúa*)

PRÁCTICA

3.1 Cuente el número de ramas y nodos que hay en el circuito de la figura 3.4. Si $i_x = 3$ y la fuente de 18 V entrega 8 A de corriente, ¿cuál es el valor de R_A? (*Sugerencia*: necesita de la ley de Ohm, así como de la LCK.)

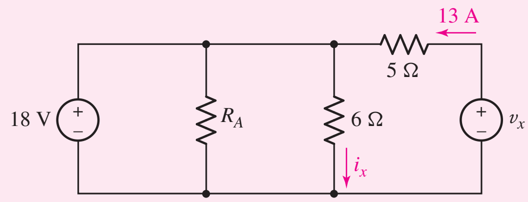


FIGURA 3.4

Respuesta: 5 ramas, 3 nodos, 1Ω.

Una expresión compacta de la ley de corrientes de Kirchhoff es:

$$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0 \qquad [1]$$

que es justo un enunciado breve de:

$$i_1 + i_2 + i_3 + ... + i_N = 0 \qquad [2]$$

Cuando se emplea la ecuación [1] o la [2], se entiende que las flechas de corriente N se dirigen hacia el nodo en cuestión, o se alejan de él.

3.3 LEY DE TENSIONES DE KIRCHHOFF

La corriente se relaciona con la carga que fluye *por* un elemento de circuito, en tanto que la tensión constituye una medida de la diferencia de energía potencial *entre* los extremos del elemento. En la teoría de circuitos, la tensión sólo tiene un valor único. Por lo tanto, en un circuito, la energía necesaria para mover una carga unitaria desde el punto A hasta el punto B debe tener un valor independiente de la trayectoria seguida de A a B (a menudo existe más de una trayectoria). Este hecho se puede comprobar por medio de la ley de voltajes (tensiones) de Kirchhoff (abreviada **LVK**):

La suma algebraica de las tensiones alrededor de cualquier trayectoria cerrada es cero.

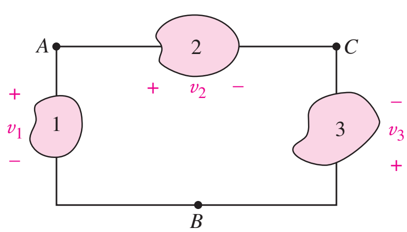


FIGURA 3.5 La diferencia de potencial entre los puntos A y B es independiente de la trayectoria elegida.

En la figura 3.5, si llevamos una carga de 1 C de A a B a través del elemento 1, los signos de polaridad de referencia de v_1 muestran que se utilizaron v_1 joules de trabajo.[1]

[1] Observe que se eligió una carga de 1 C por conveniencia numérica; por lo tanto, efectuamos (1 C)(v_1 J/C) = v_1 joules de trabajo.

Ahora bien, si, en vez de eso, elijimos proceder de A a B por el nodo C, entonces consumiremos $(v_2 - v_3)$ joules de energía. El trabajo realizado, sin embargo, es independiente de la trayectoria en un circuito, por lo que cualquier ruta debe conducir al mismo valor de la tensión. En otras palabras,

$$v_1 = v_2 - v_3 \quad [3]$$

Resulta que si trazamos una trayectoria cerrada, la suma algebraica de las tensiones en los elementos individuales, a lo largo de ella, debe ser nula. Así, se podría escribir:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_N = 0$$

o de manera más compacta,

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = 0 \quad [4]$$

Podemos aplicar la LVK a un circuito de varias maneras diferentes. Un método que propicia menos errores de escritura de ecuaciones, en comparación con otros, consiste en moverse mentalmente alrededor de la trayectoria cerrada en la dirección de las manecillas del reloj y escribir de manera directa la tensión de cada elemento a cuya terminal (+) se entra, y después expresar el negativo de cada tensión que se encuentre primero en el signo (−). Aplicando lo anterior al lazo sencillo de la figura 3.5, tenemos

$$-v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

lo cual concuerda con el resultado previo, ecuación [3].

EJEMPLO 3.2

En el circuito de la figura 3.6, determine v_x e i_x.

Conocemos la tensión en dos de los tres elementos del circuito. De tal modo, aplicamos la LVK de inmediato para obtener v_x.

Empezando con el nodo superior de la fuente de 5 V, aplicamos la LVK en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del lazo:

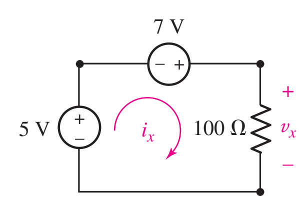
$$-5 - 7 + v_x = 0$$

por lo que $v_x = 12$ V.

La LCK se aplica a este circuito, pero sólo nos dice que la misma corriente (i_x) fluye a través de los tres elementos. Sin embargo, conocemos la tensión en la resistencia de 100 Ω.

Podemos recurrir a la ley de Ohm:

$$i_x = \frac{v_x}{100} = \frac{12}{100} \text{ A} = 120 \text{ mA}$$

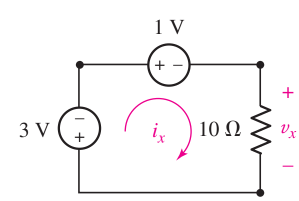


■ **FIGURA 3.6** Circuito simple con dos fuentes de tensión y una sola resistencia.

PRÁCTICA

3.2 Determine i_x y v_x en el circuito de la figura 3.7.

Respuesta: $v_x = -4$ V; $i_x = -400$ mA.



■ **FIGURA 3.7**

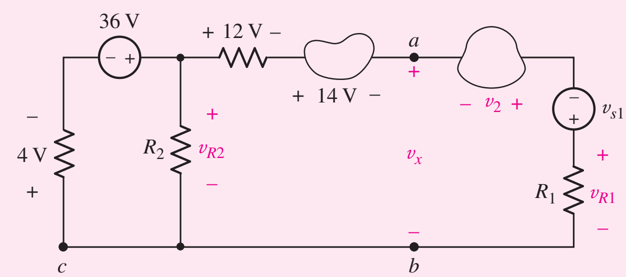
EJEMPLO 3.3

En el circuito de la figura 3.8 hay ocho elementos de circuito. Calcule v_{R2} (la tensión en R_2) y la tensión marcada v_x.

El mejor método para determinar v_{R2} en esta situación consiste en considerar un lazo en el que podamos aplicar la LVK. Existen varias opciones, pero después de observar con cuidado el circuito descubrimos que el lazo que está más hacia la izquierda ofrece una ruta directa, ya que dos tensiones se especifican con claridad. Por lo tanto, podemos encontrar v_{R2} si escribimos una ecuación LVK en torno al lazo de la izquierda, empezando en el punto c:

$$4 - 36 + v_{R2} = 0$$

lo que produce $v_{R2} = 32$ V.



■ **FIGURA 3.8** Circuito con ocho elementos en el que queremos determinar v_{R2} y v_x.

Los puntos b y c, así como el cable entre ellos, son parte del mismo nodo.

Para determinar v_x, podríamos considerarlo como la suma (algebraica) de las tensiones de los tres elementos de la derecha. Sin embargo, puesto que no tenemos valores para estas cantidades, tal procedimiento no suministraría una respuesta numérica. En vez de eso, debemos aplicar la LVK empezando en el punto c, movernos hacia arriba y a través de la parte superior hasta a, a través de v_x hasta b, y por el hilo de conducción hasta el punto de inicio teniendo así:

$$+4 - 36 + 12 + 14 + v_x = 0$$

por lo que

$$v_x = 6 \text{ V}$$

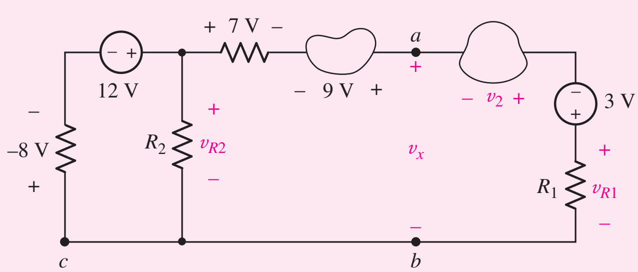
Procedimiento alterno: conociendo v_{R2} podríamos haber tomado el camino corto a través de R_2:

$$-32 + 12 + 14 + v_x = 0$$

con lo cual obtendríamos $v_x = 6$ V también en este caso.

PRÁCTICA

3.3 Para el circuito de la figura 3.9, determine (a) v_{R2} y (b) v_2, si $v_{R1} = 1$ V.



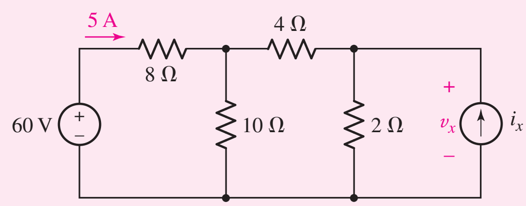
■ **FIGURA 3.9**

Respuestas: (a) 20 V; (b) −24 V.

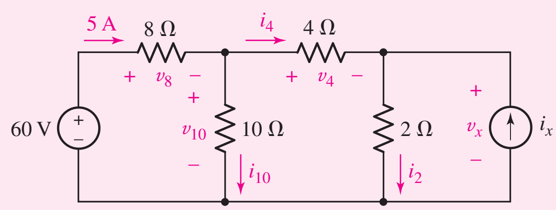
Como pudimos ver justamente, la clave para analizar de modo correcto un circuito consiste en marcar primero de manera metódica todas las tensiones y las corrientes sobre el esquema del circuito. De esta forma, la escritura cuidadosa de las ecuaciones LCK o LVK proporcionaría relaciones correctas y la ley de Ohm se aplicaría como se requiriese, si se obtienen al principio más incógnitas que ecuaciones. Ilustramos estos principios con un ejemplo más detallado.

EJEMPLO 3.4

Determine v_x en el circuito de la figura 3.10*a*.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 3.10 (*a*) Circuito para el que se va a determinar v_x mediante LVK. (*b*) Circuito con tensiones y corrientes señaladas.

Debemos empezar marcando (señalando) las tensiones y las corrientes en el resto de los elementos de circuito (fig. 3.10*b*). Observe que v_x aparece entre los extremos del resistor de 2 Ω y la fuente i_x también.

Si podemos obtener la corriente que circula por el resistor de 2 Ω, la ley de Ohm calculará v_x. Al escribir la ecuación apropiada de la LCK, vemos que:

$$i_2 = i_4 + i_x$$

Desafortunadamente, no tenemos los valores de ninguna de estas tres cantidades. Por lo tanto, nuestra solución se ha atascado (de manera temporal).

Puesto que conocemos el flujo de corriente de la fuente de 60 V, es más conveniente trabajar con ese lado del circuito. Podríamos obtener v_x mediante i_2 de manera directa usando la LVK, en lugar de basarnos en el conocimiento de v_x. Desde esta perspectiva, podemos escribir las ecuaciones LVK siguientes:

$$-60 + v_8 + v_{10} = 0$$

y

$$-v_{10} + v_4 + v_x = 0 \qquad [5]$$

Esto ya es un avance. Ahora contamos con dos ecuaciones con cuatro incógnitas, lo cual significa una ligera mejora que contar con una ecuación en la que todos los términos son incógnitas. En realidad, sabemos que $v_8 = 40$ V por medio de la ley de Ohm, ya que se nos dijo que 5 A fluyen a través de una resistencia de 8 Ω. Por lo tanto, $v_{10} = 0 + 60 - 40 = 20$ V, de tal forma que la ecuación [5] se reduce a:

(*continúa*)

$$v_x = 20 - v_4$$

Si pudieramos determinar v_4, el problema se resolvería.

La mejor forma de encontrar el valor numérico de la tensión v_4 en este caso es utilizar la ley de Ohm, la cual requiere contar con un valor para i_4. A partir de LCK, podemos ver que

$$i_4 = 5 - i_{10} = 5 - \frac{v_{10}}{10} = 5 - \frac{20}{10} = 3$$

de tal forma que $v_4 = (4)(3) = 12$ V y, por lo tanto, $v_x = 20 - 12 = 8$ V.

PRÁCTICA

3.3 Determine v_x en el circuito de la figura 3.11.

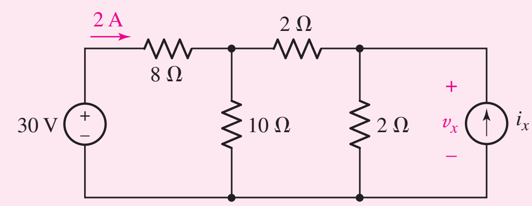


FIGURA 3.11

Respuesta: $v_x = 12.8$ V.

3.4 EL CIRCUITO DE UN SOLO LAZO

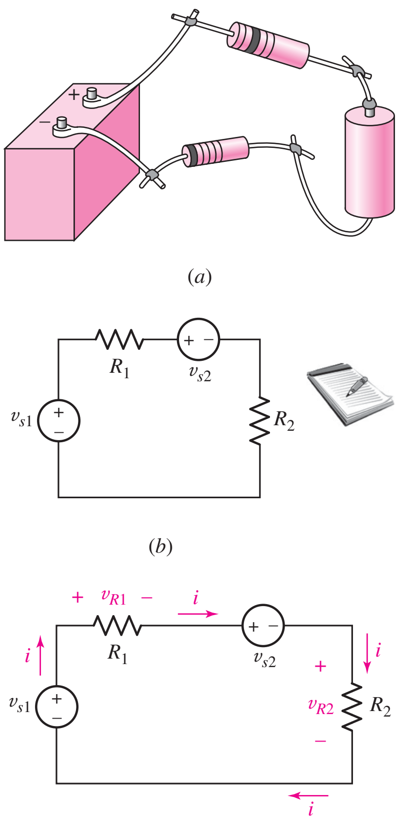


FIGURA 3.12 (*a*) Circuito de un solo lazo con cuatro elementos. (*b*) Modelo del circuito con tensiones de fuente y valores de resistencia dados. (*c*) Se han agregado al circuito los signos de referencia de la corriente y de la tensión.

Hemos observado que el uso repetido de LCK y LVK en conjunto con la ley de Ohm puede aplicarse a circuitos no triviales que cuenten con varios lazos y un determinado número de elementos. Antes de avanzar más, éste es un buen momento para enfocar la atención en el concepto de circuitos en serie (y, en la sección siguiente, en paralelo), ya que ambos formarán la base de cualquier red que se presente en el futuro.

Se dice que todos los elementos del circuito que conducen la misma corriente están conectados en ***serie***. Como ejemplo, considere el circuito de la figura 3.10. La fuente de 60 V está en serie con la resistencia de 8 Ω; por ambas circula la misma corriente de 5 A. Sin embargo, la resistencia de 8 Ω no está en serie con la de 4 Ω; por ambas circulan corrientes diferentes. Observe que los elementos pueden conducir corrientes iguales y no estar en serie; dos focos de luz eléctrica de 100 W en casas vecinas quizá conduzcan perfectamente corrientes iguales, pero realmente no conducen la misma corriente y *no* están en serie.

La figura 3.12*a* muestra un circuito simple que consiste en dos baterías y dos resistencias. Se supone que cada terminal, hilo de conexión y soldadura tienen resistencia nula; juntos constituyen un nodo individual del esquema de circuitos de la figura 3.12*b*. Ambas baterías están modeladas por fuentes de tensión ideales; se supone que cualquier resistencia interna que puedan tener es lo suficientemente pequeña como para que pueda despreciarse. Se supone que las dos resistencias son reemplazables por resistencias ideales (lineales).

Tratamos de encontrar la corriente *a través* de cada elemento, la tensión *en* cada elemento y la potencia que *absorbe* cada elemento. El primer paso del análisis es el supuesto de las direcciones de referencia de las corrientes desconocidas. De manera arbitraria elejimos la corriente *i* en el sentido de las manecillas del reloj que sale de la terminal superior de la fuente de tensión a la izquierda. Tal elección se indica mediante una flecha marcada *i* en ese punto del circuito, como se muestra en la figura 3.12*c*. Una

aplicación trivial de la ley de corrientes de Kirchhoff asegura que esta misma corriente debe circular también por cada uno de los demás elementos del circuito; debemos destacar este hecho colocando esta vez varios símbolos de corriente alrededor del circuito.

El segundo paso del análisis consiste en elegir la tensión de referencia para cada una de las dos resistencias. La convención de signos pasiva requiere que las variables de corriente y tensión de la resistencia se definan de manera que la corriente entre a la terminal en la cual se localiza la referencia de tensión positiva. Puesto que ya se ha elegido (de manera arbitraria) la dirección de la corriente, v_{R1} y v_{R2} se definen como en la figura 3.12*c*.

El tercer paso es aplicar la ley de tensiones de Kirchhoff a la única trayectoria cerrada. Es necesario moverse alrededor del circuito en la dirección de las manecillas del reloj, empezar en la esquina inferior izquierda y escribir de manera directa cada tensión que se encuentre primero en su referencia positiva, y expresar el negativo de cada tensión que se encuentre en la terminal negativa. Por lo tanto,

$$-v_{s1} + v_{R1} + v_{s2} + v_{R2} = 0 \qquad [6]$$

Después aplicamos la ley de Ohm a los elementos resistivos:

$$v_{R1} = R_1 i \quad \text{y} \quad v_{R2} = R_2 i$$

La sustitución en la ecuación [6] produce:

$$-v_{s1} + R_1 i + v_{s2} + R_2 i = 0$$

Puesto que i es la única incógnita, determinamos que:

$$i = \frac{v_{s1} - v_{s2}}{R_1 + R_2}$$

La tensión o la potencia asociada con cualquier elemento tal vez se obtenga ahora mediante la aplicación de $v = Ri$, $p = vi$ o $p = i^2 R$.

PRÁCTICA

3.5 En el circuito de la figura 3.12*b*, $v_{s1} = 120$ V, $v_{s2} = 30$ V, $R_1 = 30\ \Omega$ y $R_2 = 15\ \Omega$. Calcule la potencia que absorbe cada elemento.

Respuesta: $p_{120V} = -240$ W; $p_{30V} = +60$ W; $p_{30\Omega} = 120$ W; $p_{15\Omega} = 60$ W.

EJEMPLO 3.5

Calcule la potencia que absorbe cada elemento del circuito que se presenta en la figura 3.13*a*.

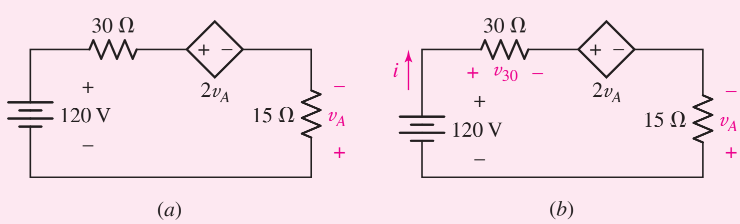


FIGURA 3.13 (*a*) Circuito de un solo lazo que contiene una fuente dependiente. (*b*) Se asignan la corriente i y la tensión v_{30}.

(*continúa*)

Primero asignamos una dirección de referencia a la corriente i y una polaridad de referencia a la tensión v_{30} como se indica en la figura 3.13*b*. No es necesario asignar una tensión a la resistencia de 15 Ω puesto que la tensión de control v_A de la fuente dependiente ya está disponible. (Sin embargo, vale la pena señalar que los signos de referencia de v_A están invertidos respecto a los que se habrían asignado, con base en la convención de signos pasiva.)

Este circuito contiene una fuente de tensión dependiente, cuyo valor permanece desconocido hasta que determinemos v_A. No obstante, utilizamos su valor algebraico $2v_A$ del mismo modo como si dispusieramos de un valor numérico. En consecuencia, al aplicar la LVK alrededor del lazo:

$$-120 + v_{30} + 2v_A - v_A = 0 \qquad [7]$$

Utilizando la ley de Ohm para introducir los valores de resistencia conocidos:

$$v_{30} = 30i \quad \text{y} \quad v_A = -15i$$

Observe que se requiere el signo negativo, puesto que i fluye hacia la terminal negativa de v_A.

La sustitución en la ecuación [7] produce:

$$-120 + 30i - 30i + 15i = 0$$

y por ello determinamos que:

$$i = 8 \text{ A}$$

Al calcular la potencia *absorbida* por cada elemento:

$$\begin{aligned} p_{120\text{V}} &= (120)(-8) = -960 \text{ W} \\ p_{30\Omega} &= (8)^2(30) \quad = 1\,920 \text{ W} \\ p_{\text{dep}} &= (2\,v_A)(8) \quad = 2[(-15)(8)](8) \\ & \qquad\qquad\qquad = -1\,920 \text{ W} \\ p_{15\Omega} &= (8)^2(15) \quad = 960 \text{ W} \end{aligned}$$

PRÁCTICA

3.6 En el circuito de la figura 3.14, encuentre la potencia absorbida por cada uno de los cinco elementos del circuito.

Respuesta: (En el sentido de las manecillas del reloj desde la izquierda) 0.768 W, 1.92 W, 0.2048 W, 0.1792 W, −3.072 W.

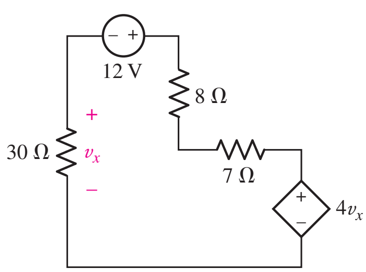


FIGURA 3.14 Circuito de un solo lazo.

En el ejemplo anterior y el problema de la práctica, se nos pidió calcular la potencia absorbida por cada elemento de un circuito. Sin embargo, es difícil pensar en una situación en la que *todas* las cantidades de potencia absorbidas por un circuito sean positivas, por la sencilla razón de que la energía debe provenir de algún lugar. Por lo tanto, a partir de la conservación de la energía, es de esperar que la ***suma de la potencia absorbida por cada elemento de un circuito sea cero***. En otras palabras, al menos una de las cantidades debe ser negativa (despreciando el obvio caso en el que el circuito no esté en operación). Dicho de otra forma, la suma de la potencia absorbida por

cada elemento debe ser igual a cero. De manera más práctica, ***la suma de la potencia absorbida es igual a la suma de la potencia suministrada***, lo que parece lógico de acuerdo con el valor.

Lo anterior puede probarse con el circuito de la figura 3.13 del ejemplo 3.5, que consiste en dos fuentes (una dependiente y la otra independiente) y dos resistencias. Si sumamos la potencia absorbida por cada elemento, tenemos

$$\sum_{\text{todos los elementos}} p_{\text{absorbida}} = -960 + 1\,920 - 1\,920 + 960 = 0$$

En realidad (nuestra indicación en el esquema del circuito es la del signo asociado con la potencia absorbida) la fuente de 120 V *suministra* +960 W, y la fuente dependiente +1 920 W. Por lo tanto, las fuentes suministran un total de 960 + 1 920 = 2 880 W. Se espera que las resistencias absorban potencia positiva, que en este caso se adiciona a un total de 1 920 + 96 = 2 880 W. Por ende, si tomamos en cuenta cada elemento del circuito,

$$\sum p_{\text{absorbida}} = \sum p_{\text{suministrada}}$$

como esperabamos.

Si nos enfocamos en el problema de práctica 3.6, la solución con la que querramos comparar, observamos claramente que las potencias absorbidas suman 0.768 + 1.92 + 0.2048 + 0.1792 − 3.072 = 0. Resulta interesante saber que la fuente de tensión independiente de 12 V absorbe +1.92 W, lo que significa que está *disipando* potencia y no suministrándola. En su lugar, la fuente de tensión dependiente aparenta estar suministrando toda la potencia en este circuito en particular. ¿Es factible esta situación? En general, esperaríamos que una fuente suministrara potencia positiva; sin embargo, puesto que nuestros circuitos emplean fuentes ideales, es factible tener un flujo de potencia neto en cualquier fuente. Si se modifica el circuito de alguna forma, podremos ver que la misma fuente suministrará la potencia positiva. No conoceremos el resultado hasta que se haya llevado a cabo el análisis de circuitos.

3.5 EL CIRCUITO DE UN PAR DE NODOS

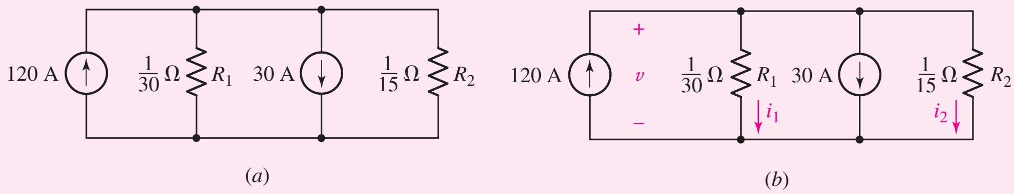
El compañero de un circuito de un solo lazo analizado en la sección 3.4 es el circuito de un par de nodos, en el que cualquier número de elementos simples se conectan entre el mismo par de nodos. Un ejemplo de este tipo de circuito se ilustra en la figura 3.15*a*. La LVK obliga a reconocer que la tensión en los extremos en cada rama es la misma que la de los extremos de cualquier otra. *Se dice que los elementos de un circuito que tienen una tensión común entre sus extremos están conectados en* ***paralelo***.

EJEMPLO 3.6

Determine la tensión, la corriente y la potencia asociadas con cada elemento del circuito de la figura 3.15*a*.

Primero se define una tensión v y se elige de manera arbitraria su polaridad, como se muestra en la figura 3.15*b*. Dos corrientes, que fluyen en las resistencias, se escogen conforme a la convención de signos pasiva; tales corrientes se indican también en la figura 3.15*b*.

(*continúa*)



■ **FIGURA 3.15** (*a*) Circuito de un solo par de nodos. (*b*) Se asignan una tensión y dos corrientes.

Determinar cualquier corriente i_1 o i_2 nos permitirá obtener un valor de v. De este modo, el siguiente paso es aplicar la LCK a cualquiera de los dos nodos del circuito. Igualando a cero la suma algebraica de las corrientes que abandonan el nodo superior, tenemos:

$$-120 + i_1 + 30 + i_2 = 0$$

Al escribir ambas corrientes en términos de la tensión v mediante la ley de Ohm,

$$i_1 = 30v \quad \text{e} \quad i_2 = 15v$$

obtenemos:

$$-120 + 30v + 30 + 15v = 0$$

Cuando despejamos v de esta ecuación, tenemos como resultado,

$$v = 2 \text{ V}$$

y al recurrir a la ley de Ohm obtenemos:

$$i_1 = 60 \text{ A} \quad \text{e} \quad i_2 = 30 \text{ A}$$

Ahora podemos calcular la potencia absorbida por cada elemento. En las dos resistencias:

$$p_{R1} = 30(2)^2 = 120 \text{ W} \quad \text{y} \quad p_{R2} = 15(2)^2 = 60 \text{ W}$$

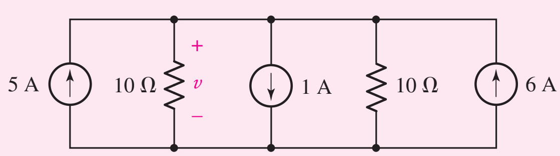
y para las dos fuentes:

$$p_{120\text{A}} = 120(-2) = -240 \text{ W} \quad \text{y} \quad p_{30\text{A}} = 30(2) = 60 \text{ W}$$

En razón de que la fuente de 120 A absorbe 240 W negativos, en realidad ésta *suministra* potencia a los otros elementos del circuito. De manera similar, encontramos que la fuente de 30 A en realidad *absorbe* potencia, en vez de *suministrarla*.

PRÁCTICA

3.7 Determine v en el circuito de la figura 3.16.

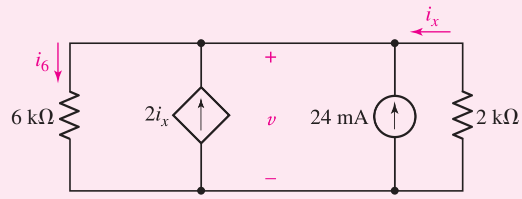


■ **FIGURA 3.16**.

Respuesta: 50 V.

EJEMPLO 3.7

Determine el valor de v y la potencia suministrada por la fuente de corriente independiente de la figura 3.17.



■ **FIGURA 3.17** Se asignan una tensión v y una corriente i_6 en un circuito de un solo par de nodos que contiene un fuente dependiente.

Mediante la LCK, la suma de las corrientes que salen del nodo superior debe ser cero, por lo que:

$$i_6 - 2i_x - 0.024 - i_x = 0$$

De nuevo, observe que el valor de la fuente dependiente ($2i_x$) se trata como si fuese cualquier otra corriente, aun cuando no se conoce su valor exacto hasta que el circuito haya sido analizado.

A continuación aplicamos la ley de Ohm a cada resistencia:

$$i_6 = \frac{v}{6\,000} \quad \text{e} \quad i_x = \frac{-v}{2\,000}$$

Por lo tanto,

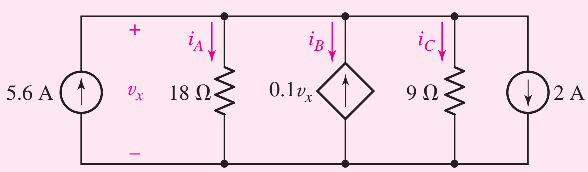
$$\frac{v}{6\,000} - 2\left(\frac{-v}{2\,000}\right) - 0.024 - \left(\frac{-v}{2\,000}\right) = 0$$

y por ello $v = (600)(0.024) = 14.4$ V.

Cualquier otra información que queramos determinar para este circuito se obtiene ahora con facilidad, por lo general en un solo paso. Por ejemplo, la potencia suministrada por la fuente independiente es $p_{24} = 14.4(0.024) = 0.3456$ W (345.6 mW).

PRÁCTICA

3.8 En el circuito de un solo par de nodos de la figura 3.18, determine i_A, i_B, e i_C,



■ **FIGURA 3.18**

Respuesta: 3 A; –5.4 A; 6 A.

3.6 FUENTES CONECTADAS EN SERIE Y EN PARALELO

Ocurre que algunas de las ecuaciones que hemos realizado para los circuitos en serie y en paralelo se evitan si se combinan las fuentes. Sin embargo, observe que la totalidad de las relaciones de corriente, tensión y potencia en el resto del circuito permanecen invariables. Por ejemplo, varias fuentes de tensión en serie tal vez sean sustituidas por

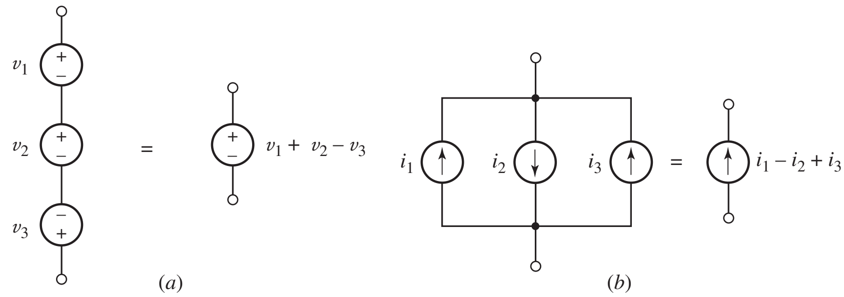


FIGURA 3.19 (*a*) Las fuentes de tensión conectadas en serie se sustituyen por una sola fuente. (*b*) Las fuentes de corriente en paralelo se sustituyen por una sola fuente.

una fuente de tensión equivalente que tenga una tensión igual a la suma algebraica de las fuentes individuales (fig. 3.19*a*). También se podrían combinar las fuentes de corriente en paralelo mediante la suma algebraica de las corrientes individuales; además, el orden de los elementos en paralelo quizá se vuelva a arreglar como se desee (fig. 3.19*b*).

EJEMPLO 3.8

Determine la corriente *i* en el circuito de la figura 3.20*a*, combinando primero las fuentes en una sola fuente de tensión equivalente.

Para poder combinar las fuentes de tensión, deben estar en serie. Como la misma corriente (i) fluye a través de cada una, esta condición se satisface.

Comenzando desde la esquina inferior izquierda y procediendo en el sentido horario,

$$-3 - 9 - 5 + 1 = -16\text{V}$$

de modo que podemos reemplazar las cuatro fuentes de tensión por una sola fuente de 16 V que tiene su referencia negativa como se muestra en la figura 3.20*b*.

La LVK combinada con la de Ohm da entonces

$$-16 + 100i + 220i = 0$$

o

$$i = \frac{16}{320} = 50 \text{ mA}$$

Debemos observar que el circuito de la figura 3.20*c* también es equivalente, un hecho que se verifica fácilmente calculando i.

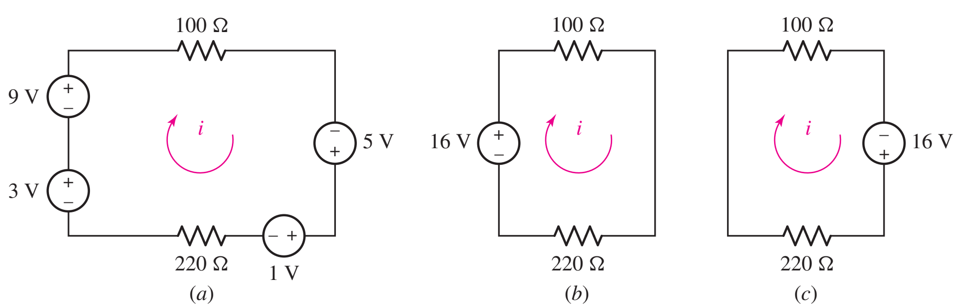
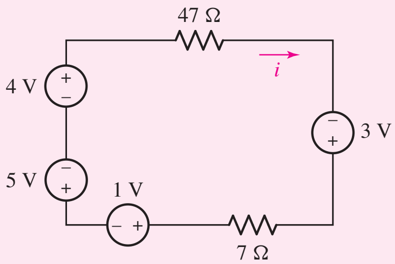


FIGURA 3.20

PRÁCTICA

3.9 Determine la corriente i en el circuito de la figura 3.21 después de reemplazar primero las cuatro fuentes por una sola fuente equivalente.



■ **FIGURA 3.21**

Respuesta: −54 A.

EJEMPLO 3.9

Determine la tensión v en el circuito de la figura 3.22*a* combinando primero las fuentes en una sola fuente equivalente de corriente.

Las fuentes se pueden combinar si aparece la misma tensión a través de cada una, lo cual podemos fácilmente verificar que es el caso. Así, creamos una nueva fuente, con la flecha apuntando hacia arriba hacia el nodo superior, agregando las corrientes que fluyen hacia dicho nodo:

$$2.5 - 2.5 - 3 = -3\text{A}$$

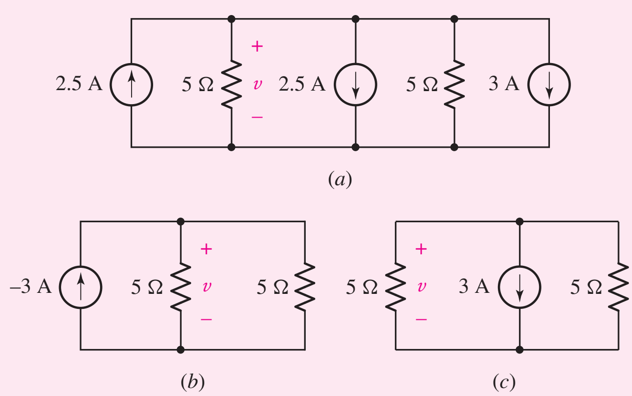
En la figura 3.22*b* se muestra un circuito equivalente.

La LCK nos permite entonces escribir:

$$-3 + \frac{v}{5} + \frac{v}{5} = 0$$

Al resolver, encontramos $v = 7.5$ V.

Otro circuito equivalente se muestra en la figura 3.22*c*.

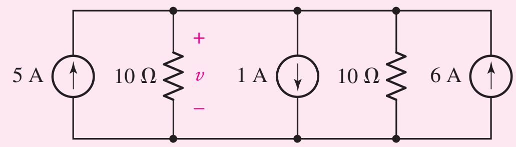


■ **FIGURA 3.22**

(*continúa*)

PRÁCTICA

3.10 Determine la tensión v en el circuito de la figura 3.23 combinando primero las tres fuentes de corriente con una fuente equivalente única.



■ **FIGURA 3.23**

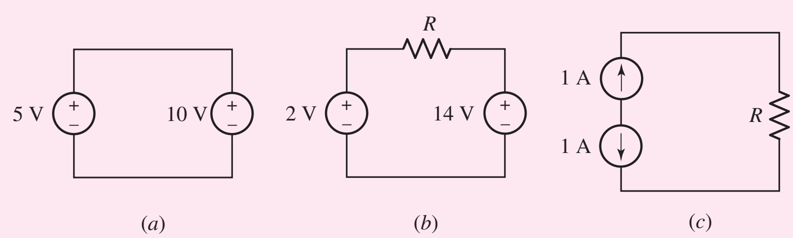
Respuesta: 50 V.

Para concluir el análisis de las combinaciones de fuentes en paralelo y en serie, debemos considerar la combinación en paralelo de dos fuentes de tensión y la combinación en serie de dos fuentes de corriente. Por ejemplo, ¿cuál es el equivalente de una fuente de 5 V en paralelo con una fuente de 10 V? De acuerdo con la definición de una fuente de tensión, la tensión en la fuente no puede cambiar; entonces, mediante la ley de tensiones de Kirchhoff, 5 es igual a 10 y hemos supuesto como hipótesis una imposibilidad física. De tal modo, las fuentes de tensión *ideales* en paralelo se pueden tener sólo cuando cada una tiene la misma tensión a nivel terminal en todo instante. De modo similar, no se pueden poner dos fuentes de corriente en serie a menos que cada una tenga la misma corriente y el mismo signo, en cada instante de tiempo.

EJEMPLO 3.10

Determine cuáles de los circuitos de la figura 3.24 son válidos.

El circuito de la figura 3.24*a* consiste en dos fuentes de tensión en paralelo. El valor de cada fuente es diferente, por lo que viola la LVK. Por ejemplo, si una resistencia se pone en paralelo con la fuente de 5 V, también está en paralelo con la fuente de 10 V. La tensión real en sus extremos es por lo tanto ambigua y, obviamente, no hay posibilidad de construir el circuito como se indica. Si intentamos construir un circuito de este tipo en la vida real, nos será imposible localizar fuentes de tensión "ideales", pues todas las fuentes del mundo real tienen una resistencia interna. La presencia de este tipo de resistencia permite una diferencia de tensión entre las dos fuentes *reales*. De acuerdo con lo anterior, el circuito de la figura 3.24*b* es perfectamente válido.

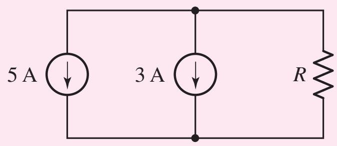


■ **FIGURA 3.24** De (*a*) a (*c*), ejemplos de circuitos con fuentes múltiples, algunos de los cuales violan las leyes de Kirchhoff.

El circuito de la figura 3.24*c* viola la LCK: no es claro cuál corriente fluye en realidad a través de la resistencia *R*.

PRÁCTICA

3.11 Determine si el circuito de la figura 3.25 viola las leyes de Kirchhoff.



■ **FIGURA 3.25**

Respuesta: No. Sin embargo, si se quitara la resistencia, el circuito resultante sí las violaría.

3.7 RESISTENCIAS EN SERIE Y EN PARALELO

A menudo se sustituyen combinaciones de resistencias relativamente complicadas por una sola resistencia equivalente. Lo anterior resulta útil cuando no estamos interesados de manera específica, en la corriente, la tensión o la potencia asociadas con cualquiera de las resistencias individuales de las combinaciones. *Todas las relaciones de corriente, tensión y potencia en el resto del circuito permanecerán invariables.*

Considere la combinación en serie de N resistencias que se muestra en la figura 3.26*a*. Debemos simplificar el circuito sustituyendo las N resistencias por una sola resistencia R_{eq} de modo que el resto del circuito, en este caso sólo la fuente de tensión, no se percate de que se ha realizado algún cambio. La corriente, la tensión y la potencia de la fuente deben ser las mismas antes y después de la sustitución.

Primero aplicamos la LVK:

$$v_s = v_1 + v_2 + \cdots + v_N$$

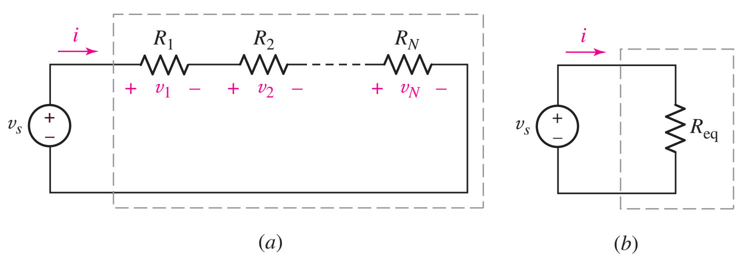
y después la ley de Ohm:

$$v_s = R_1 i + R_2 i + \ldots + R_N i = (R_1 + R_2 + \cdots + R_N)i$$

Pista útil: La inspección de la ecuación de la LVK para cualquier circuito en serie muestra que el *orden* en que se colocan los elementos en tal circuito *no importa*.

Compare ahora este resultado con la ecuación simple aplicándola al circuito equivalente de la figura 3.26*b*:

$$v_s = R_{eq} i$$



■ **FIGURA 3.26** (*a*) Combinaciones en serie de *N* resistencias. (*b*) Circuito eléctricamente equivalente.

Así, el valor de la resistencia equivalente de N resistencias en serie está dado por

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N \qquad [8]$$

En consecuencia, podemos sustituir una red de dos terminales compuesta por N resistencias en serie, por un solo elemento de dos terminales R_{eq} que tengan la misma relación v-i.

Debe subrayarse de nuevo que tal vez nos interese la corriente, la tensión o la potencia de uno de los elementos originales. Por ejemplo, la tensión de una fuente de tensión dependiente quizá dependa de la tensión en R_3. Después de que R_3 se combina con varias resistencias en serie para formar una resistencia equivalente, éste desaparece y su tensión no puede determinarse hasta que R_3 se identifique al separarlo de la combinación. En ese caso, sería mejor continuar y no hacer que al principio R_3 forme parte de la combinación.

EJEMPLO 3.11

Utilice las combinaciones de resistencia y fuente para determinar la corriente *i* de la figura 3.27*a*, así como la potencia que entrega la fuente de 80 V.

Primero intercambiamos las posiciones de los elementos del circuito, para lo cual se debe tener cuidado de preservar el sentido apropiado de las fuentes, como se ilustra en la figura 3.27*b*. El siguiente paso consiste en combinar las tres fuentes

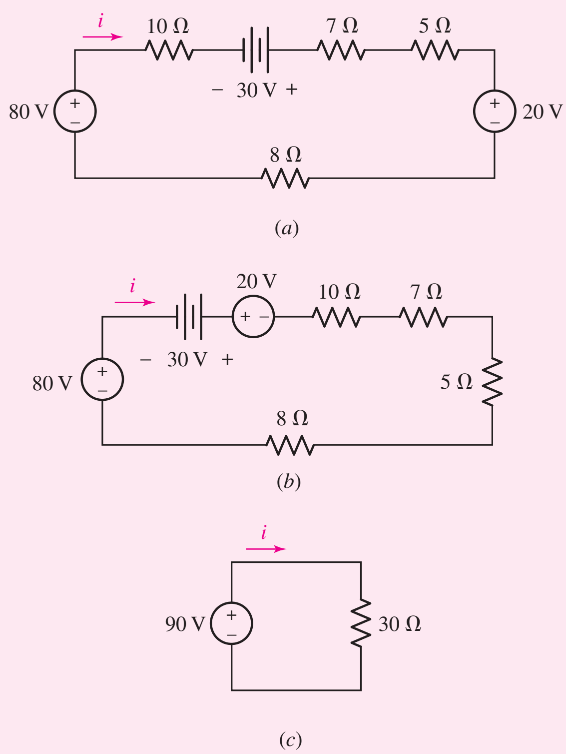


FIGURA 3.27 (*a*) Circuito en serie con varias fuentes y resistencias. (*b*) Los elementos se vuelven a ordenar para lograr una mayor claridad. (*c*) Un equivalente más simple.

de tensión en una fuente equivalente de 90 V, y las cuatro resistencias en una resistencia equivalente de 30 Ω como en la figura 3.27*c*. De tal modo, en lugar de escribir:

$$-80 + 10i - 30 + 7i + 5i + 20 + 8i = 0$$

simplemente tenemos

$$-90 + 30i = 0$$

y de esa manera determinamos que:

$$i = 3 \text{ A}$$

Para calcular la potencia que la fuente de 80 V, que aparece en el circuito dado, entrega al circuito, resulta necesario regresar a la figura 3.27*a* sabiendo que la corriente es igual a 3 A. En ese caso, la potencia deseada es 80 V × 3 A = 240 W.

Es interesante advertir que ningún elemento del circuito original queda en el circuito equivalente.

PRÁCTICA

3.12 Determine *i* en el circuito de la figura 3.28.

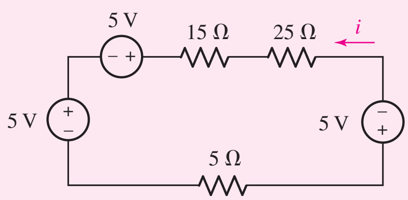


FIGURA 3.28

Respuesta: −333 mA.

Se aplican simplificaciones similares a circuitos en paralelo. Un circuito que contiene *N* resistencias en paralelo, como el de la figura 3.29*a*, conduce a la ecuación de la ley de corrientes de Kirchhoff:

$$i_s = i_1 + i_2 + \cdots + i_N$$

o

$$i_s = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \cdots + \frac{v}{R_N}$$

$$= \frac{v}{R_{eq}}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N}} \quad [9]$$

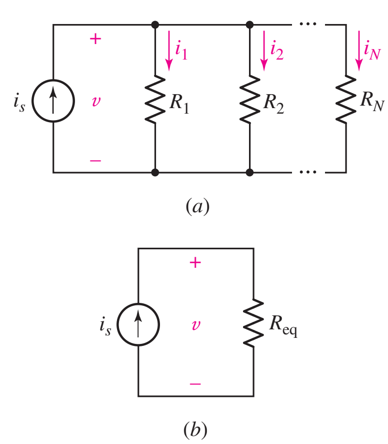


FIGURA 3.29 (*a*) Circuito con *N* resistencias en paralelo. (*b*) Circuito equivalente.

que puede escribirse como:

$$R_{\text{eq}}^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} + \cdots + R_N^{-1}$$

o en términos de conductancias como:

$$G_{\text{eq}} = G_1 + G_2 + \cdots + G_N$$

El circuito simplificado (equivalente) se ilustra en la figura 3.29*b*.

Una combinación en paralelo se indica de manera rutinaria siguiendo la notación abreviada:

$$R_{\text{eq}} = R_1 \parallel R_2 \parallel R_3$$

El caso especial de sólo dos resistencias en paralelo se encuentra con bastante frecuencia, y está dado por:

$$R_{\text{eq}} = R_1 \parallel R_2$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$$

O, más simplemente:

$$\boxed{R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \qquad [10]$$

Vale la pena memorizar la última forma, si bien es un error común intentar generalizar la ecuación [10] para más de dos resistencias; por ejemplo:

$$R_{\text{eq}} \neq \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Una rápida revisión de las unidades de esta ecuación muestra de inmediato que no es posible que la expresión sea correcta.

PRÁCTICA

3.13 Determine v en el circuito de la figura 3.30 combinando primero las tres fuentes de corriente y después las dos resistencias de 10 Ω.

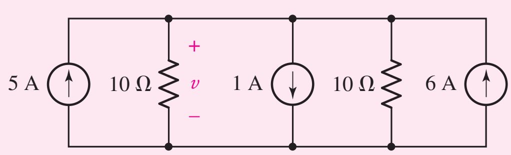
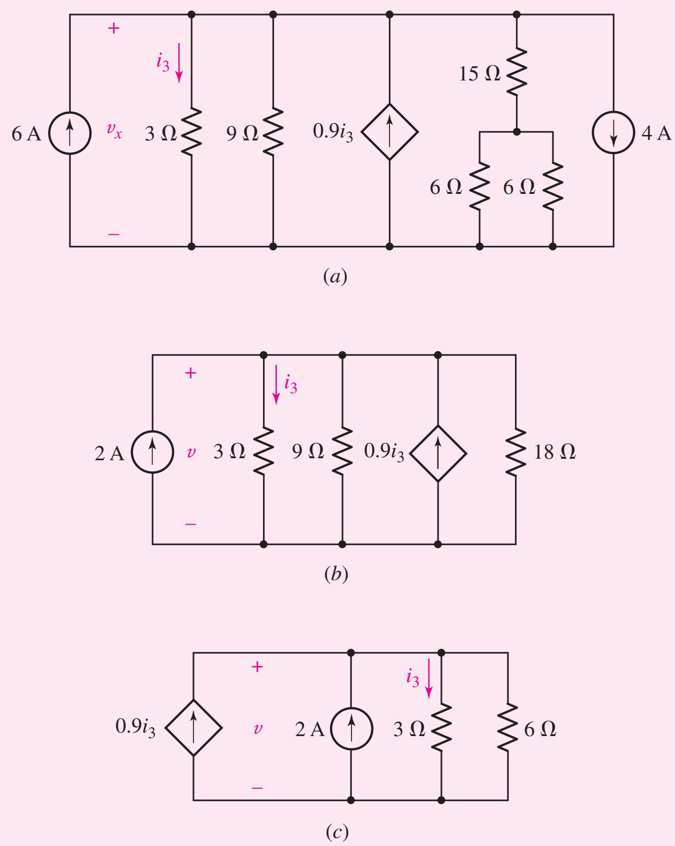


FIGURA 3.30

Respuesta: 50 V.

EJEMPLO 3.12

Calcule la potencia y la tensión de la fuente dependiente de la figura 3.31*a*.



■ **FIGURA 3.31** (*a*) Circuito multinodal. (*b*) Las dos fuentes de corriente independientes se combinan en una fuente de 2 A, y la resistencia de 15 Ω en serie con las dos resistencias de 6 Ω en paralelo se sustituyen por una sola resistencia de 18 Ω. (*c*) Circuito equivalente simplificado.

Intentaremos simplificar el circuito antes de analizarlo, pero debemos tener cuidado de no incluir la fuente dependiente puesto que sus características de tensión y de potencia son de interés.

A pesar de no estar dibujadas juntas, las dos fuentes de corriente independientes están, en realidad, en paralelo, por lo que se las reemplaza por una fuente de 2 A.

Las dos resistencias de 6 Ω están en paralelo y pueden reemplazarse con una resistencia de 3 Ω en serie con la de 15 Ω. Por lo tanto, las dos resistencias de 6 Ω y la de 15 Ω se reemplazan por una de 18 Ω (figura 3.31*b*).

Sin importar qué tan tentador sea, *no debemos combinar las tres resistencias sobrantes*: la variable de control i_3 depende de la resistencia de 3 Ω, por lo que esa resistencia debe quedar intacta. La única simplificación adicional, entonces, es 9 Ω‖18 Ω = 6 Ω, como se muestra en la figura 3.31*c*.

(*continúa*)

Al aplicar la LCK en el nodo superior de la figura 3.31*c*, tenemos

$$-0.9\,i_3 - 2 + i_3 + \frac{v}{6} = 0$$

Empleando la ley de Ohm:

$$v = 3i_3$$

lo que permite calcular

$$i_3 = \frac{10}{3}\ \text{A}$$

De esta forma, la tensión en la fuente dependiente (que es la misma que la tensión en la resistencia de 3 Ω) está dada por:

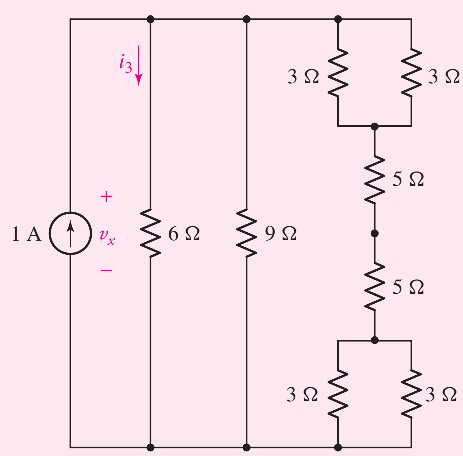
$$v = 3i_3 = 10\ \text{V}$$

Entonces, la fuente dependiente suministra $v \times 0.9i_3 = 10(0.9)(10/3) = 30$ W al resto del circuito.

Ahora bien: si se nos pide la potencia disipada en la resistencia de 15 Ω, debemos volver al circuito original. Tal resistencia se encuentra en serie con una resistencia equivalente de 3 Ω; existe una tensión de 10 V en el total de 18 Ω; en consecuencia, circula una corriente de 5/9 A por la resistencia de 15 Ω y la potencia absorbida por el elemento corresponde a $(5/9)^2(15)$ o 4.63 W.

PRÁCTICA

3.14 Para el circuito de la figura 3.32, calcule la tensión v_x.



■ **FIGURA 3.32**

Respuesta: 2.819 V.

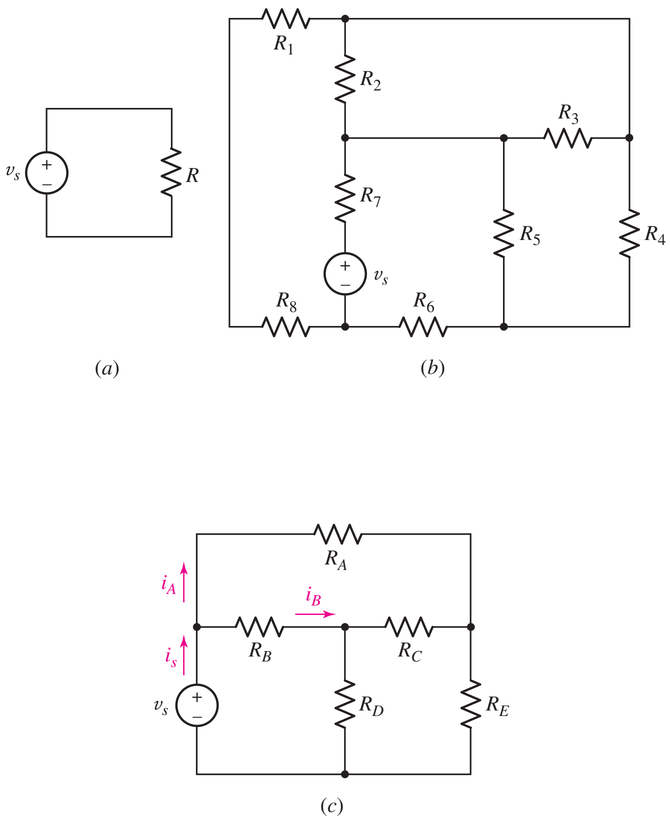


FIGURA 3.33 Estos dos elementos de circuito están en serie y en paralelo. (*b*) R_2 y R_3 están en paralelo, y R_1 y R_8 se encuentran en serie. (*c*) No hay elementos de circuito en serie o en paralelo entre sí.

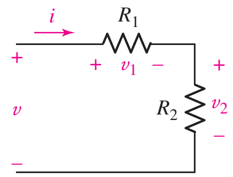
Podrían ser de utilidad tres comentarios finales sobre las combinaciones en serie y en paralelo. El primero se refiere a la figura 3.33*a* y se debe preguntar: "*¿Están v_s y R en serie o en paralelo*?" La respuesta es "*en las dos condiciones*". Los dos elementos conducen la misma corriente y, por lo tanto, están en serie; están sujetos también a la misma tensión y, en consecuencia, se encuentran en paralelo.

El segundo comentario es una alerta. Tal vez los estudiantes sin experiencia o instructores maliciosos dibujen los circuitos de manera que resulte difícil distinguir combinaciones en serie o en paralelo. En la figura 3.33*b*, por ejemplo, las únicas dos resistencias en paralelo son R_2 y R_3; en tanto que las únicas dos en serie son R_1 y R_8.

El último comentario es que un elemento de circuito simple no necesita estar en serie o en paralelo con otro elemento de circuito simple de un circuito. Por ejemplo, R_4 y R_5 en la figura 3.33*b* no están en serie o en paralelo con otro elemento de circuito simple, y no hay elementos de circuito simples en la figura 3.33*c* que estén en serie o en paralelo con cualquier otro elemento de circuito simple. En otras palabras, no podemos simplificar aún más el circuito utilizando cualquiera de las técnicas analizadas en este capítulo.

3.8 DIVISIÓN DE TENSIÓN Y DE CORRIENTE

Al combinar resistencias y fuentes, hemos encontrado un método para simplificar el análisis de un circuito. Otro camino útil consiste en la aplicación de las ideas de división de tensión y de corriente. La división de tensión se usa para expresar la tensión en



■ **FIGURA 3.34** Ilustración de la división de tensión.

una de varias resistencias en serie, en términos de la tensión de la combinación. En la figura 3.34, la tensión en R_2 se determina por medio de la LVK y de la ley de Ohm:

$$v = v_1 + v_2 = iR_1 + iR_2 = i(R_1 + R_2)$$

de modo que

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2}$$

En consecuencia:

$$v_2 = i\,R_2 = \left(\frac{v}{R_1 + R_2}\right) R_2$$

o

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$

y la tensión en R_1 es, de modo similar:

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v$$

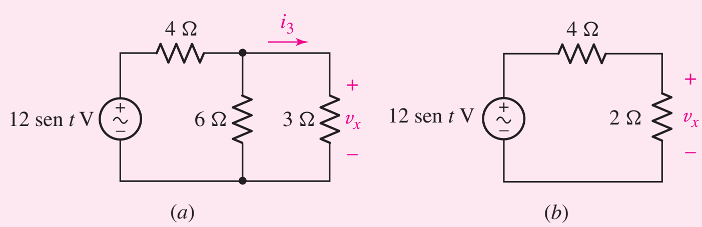
Si se generaliza la red de la figura 3.34 mediante la eliminación de R_2 y se la sustituye por la combinación en serie $R_2, R_3, \ldots, R_N$, entonces tenemos el resultado general de la división de tensión en una cadena de N resistencias en serie,

$$v_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \cdots + R_N} v \qquad [11]$$

lo cual nos permite calcular la tensión v_k que aparece entre los extremos de una resistencia arbitraria R_k de la serie.

EJEMPLO 3.13

Determine v_x del circuito de la figura 3.35*a*.



■ **FIGURA 3.35** Ejemplo numérico que ilustra la combinación de resistencia y división de tensión. (*a*) Circuito original. (*b*) Circuito simplificado.

Primero debemos combinar las resistencias de 6 y 3 Ω y sustituirlas por (6)(3)/(6 + 3) = 2 Ω.

Debido a que v_x aparece en los extremos de la combinación en paralelo, nuestra simplificación no ha perdido esta cantidad. Sin embargo, una simplificación adicional del circuito al sustituir la combinación en serie de la resistencia de 4 Ω por una nueva resistencia de 2 Ω produciría dicha situación.

En consecuencia, sólo se debe aplicar la división de tensión al circuito de la figura 3.35*b*:

$$v_x = (12 \operatorname{sen} t)\frac{2}{4+2} = 4 \operatorname{sen} t \qquad \text{volts}$$

PRÁCTICA

3.15 Recurra a la división de tensión para determinar v_x en el circuito de la figura 3.36.

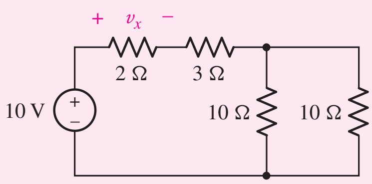


FIGURA 3.36

Respuesta: 2 V.

El complemento[2] de la división de tensión es la división de corriente. En este caso tenemos una corriente total que se alimenta a varias resistencias en paralelo, como en el circuito de la figura 3.37.

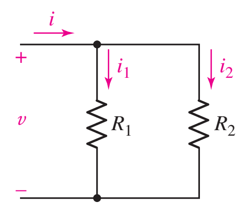


FIGURA 3.37 Ilustración de la división de corriente.

La corriente que fluye por R_2 es

$$i_2 = \frac{v}{R_2} = \frac{i\,(R_1 \| R_2)}{R_2} = \frac{i}{R_2}\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

o

$$i_2 = i\frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad [12]$$

y de manera similar,

$$i_1 = i\frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad [13]$$

La naturaleza no nos sonríe en este caso, ya que estas dos últimas ecuaciones tienen un factor que difiere sutilmente del utilizado con la división de tensión, y se requerirá cierto esfuerzo para evitar errores. Muchos estudiantes consideran la expresión de la división de tensión como “evidente” y la correspondiente a la división de corriente como “diferente”. Ayuda a reconocer que la más grande de las dos resistencias en paralelo conduce siempre la corriente más pequeña.

Para combinar en paralelo N resistencias, la corriente que circula por la resistencia R_k es

$$i_k = i\frac{\dfrac{1}{R_k}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \cdots + \dfrac{1}{R_N}} \qquad [14]$$

[2] El principio de dualidad se encuentra a menudo en ingeniería. Hablaremos del tema, en forma breve, en el capítulo 7 cuando comparemos bobinas y capacitores.

Escrito en términos de conductancias:

$$i_k = i\frac{G_k}{G_1 + G_2 + \cdots + G_N}$$

lo que se asemeja en gran medida a la ecuación [11] de la división de tensión.

EJEMPLO 3.14

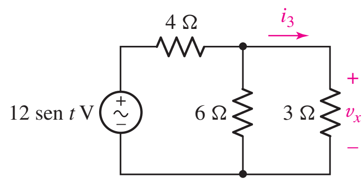


FIGURA 3.38 Circuito utilizado como un ejemplo de división de corriente. La línea ondulada en el símbolo de la fuente de tensión indica su variación senoidal con el tiempo.

Escriba la expresión de la corriente que pasa por la resistencia de 3 Ω en el circuito de la figura 3.38.

La corriente total que fluye en la combinación de 3 y 6 Ω se calcula mediante:

$$i(t) = \frac{12 \text{ sen } t}{4 + 3\|6} = \frac{12 \text{ sen } t}{4 + 2} = 2 \text{ sen } t \qquad \text{A}$$

y por lo tanto la corriente deseada está dada por la división de corriente:

$$i_3(t) = (2 \text{ sen } t)\left(\frac{6}{6+3}\right) = \frac{4}{3} \text{ sen } t \qquad \text{A}$$

Desafortunadamente, la división de corriente se aplica algunas veces cuando no es aplicable. Como ejemplo, consideremos otra vez el circuito de la figura 3.33*c*, en cuyo caso ya hemos acordado que no contiene elementos de circuito que estén en serie o en paralelo. Sin resistencias en paralelo, no hay forma de que pueda aplicarse la división de corriente. Aun así, hay muchos estudiantes que dan un rápido vistazo a las resistencias R_A y R_B y tratan de aplicar la división de corriente, escribiendo una ecuación incorrecta, como

$$i_A \not= i_S\frac{R_B}{R_A + R_B}$$

Recuerde que *las resistencias en paralelo deben ser ramas entre el mismo par de nodos.*

PRÁCTICA

3.16 En el circuito de la figura 3.39, utilice los métodos de combinación de resistencias y de división de corriente para determinar i_1, i_2 y v_3.

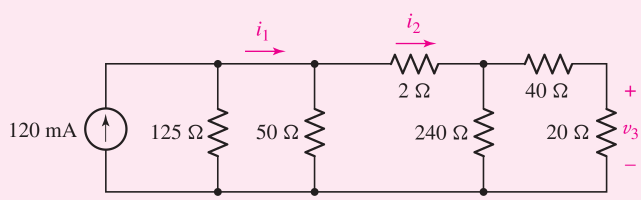


FIGURA 3.39

Respuesta: 100 mA; 50 mA; 0.8 V.

APLICACIÓN PRÁCTICA

La conexión a tierra difiere de la tierra geológica

Hasta ahora, hemos dibujado esquemas de circuito de una manera similar al de la figura 3.40, donde las tensiones se definen entre dos terminales marcadas con toda claridad. Se tuvo especial cuidado en subrayar el hecho de que la tensión no puede definirse en un solo punto: es por definición la *diferencia* de potencial entre *dos* puntos. Sin embargo, muchos esquemas utilizan la convención de considerar a la tierra como la definición de cero volts, de modo que todas las demás tensiones se refieren de manera implícita a este potencial. A menudo el concepto se conoce como ***conexión a tierra***, y está vinculado de manera fundamental con los reglamentos de seguridad diseñados para evitar incendios, choques eléctricos fatales y todo el caos que esto genera. El símbolo de la conexión a tierra se muestra en la figura 3.41*a*.

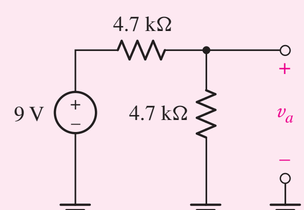
Debido a que la conexión a tierra se define como cero volts, a menudo resulta conveniente emplearla como una terminal común en los esquemas de circuito. El circuito de la figura 3.40 se presenta dibujado otra vez de esta manera en la figura 3.42, donde el símbolo de conexión a tierra representa un nodo común. Resulta importante advertir que dos circuitos son equivalentes en términos de nuestro valor para v_a (4.5 V en cualquier caso), aunque ya no son totalmente iguales. Se afirma que el circuito de la figura 3.40 "flota", pues para todos los propósitos prácticos podría instalarse sobre un tablero de circuito de un satélite en una órbita geosíncrona (o en su camino hacia Plutón). Sin embargo, el circuito de la figura 3.42 está conectado físicamente de algún modo a la tierra por medio de una trayectoria conductora. Por esta razón, existen otros dos símbolos que se usan en ocasiones para denotar una terminal común. La figura 3.41*b* muestra lo que suele conocerse como ***tierra de la señal***; tal vez haya (y a menudo hay) una gran tensión entre la conexión a tierra y cualquier terminal conectada a la tierra de la señal.

El hecho de que la terminal común de un circuito pueda o no conectarse mediante alguna trayectoria de baja resistencia a la tierra, propicia situaciones potencialmente peligrosas. Considere el diagrama de la figura 3.43*a*, que describe a un inocente espectador a punto de tocar una pieza de equipo energizado por una toma de corriente de ca. Sólo se han utilizado dos terminales del contacto de la pared; la terminal redonda de conexión a tierra del enchufe no se ha conectado. La terminal común de cualquier circuito del equipo se ha unido y conectado eléctricamente con el chasis conductor del equipo; a menudo, esta terminal se denota mediante el símbolo de la conexión a ***tierra de chasis*** de la figura 3.41*c*. Desafortunadamente, existe una falla en el cableado, debido a una fabricación pobre o quizá sólo al desgaste y a la prisa. De cualquier forma, el chasis no está "aterrizado", por lo que se presenta una gran resistencia entre la conexión al chasis y la conexión a tierra. En la figura 3.43*b* se exhibe un pseudoesquema (se tomaron ciertas libertades con el símbolo de la resistencia equivalente de la persona) de la situación. En realidad, la trayectoria eléctrica entre el chasis conductor y la tierra puede ser la mesa, la cual puede representar una resistencia de cientos de megaohms o más. Sin embargo, la resistencia de una persona es muchos órdenes menos de magnitud. Una vez que la persona toca el equipo para ver por qué no está trabajando correctamente... bien, sólo se señala que no todas las historias tienen un final feliz.

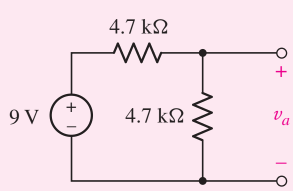
El hecho de que la "tierra" no siempre sea "la conexión a tierra" puede provocar una amplia gama de problemas de seguridad y de ruido eléctrico. De vez en cuando se encuentra un ejemplo en los edificios viejos, donde la plomería consistía al principio en cobre conductor de electricidad. En este tipo de edificios, cualquier tubería de agua se consideró a menudo como una trayectoria de baja resistencia hacia la tierra, y por lo tanto se usó en muchas conexiones eléctricas. Sin embargo, cuando las tuberías corroídas



■ **FIGURA 3.41** Tres símbolos diferentes utilizados para representar una conexión a tierra o terminal común: (*a*) tierra; (*b*) tierra de señal, (*c*) tierra de chasis.



■ **FIGURA 3.42** El circuito de la figura 3.40 se volvió a dibujar utilizando el símbolo de la conexión a tierra. El símbolo de conexión a tierra de la derecha es redundante; sólo se requiere marcar la terminal positiva de v_a; por lo tanto, la referencia negativa es implícitamente la conexión a tierra, o cero volts.

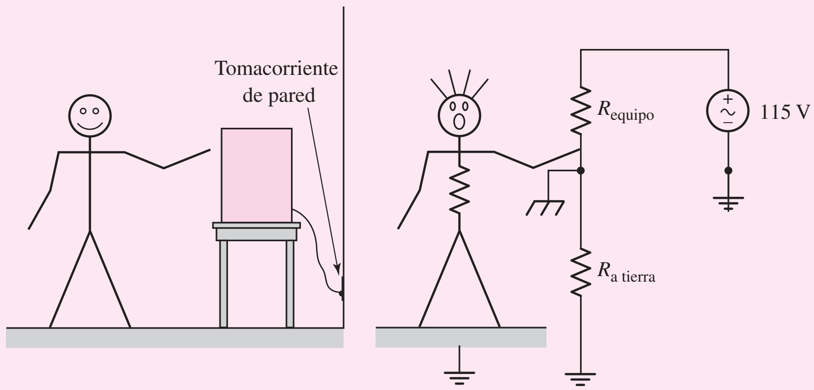


■ **FIGURA 3.40** Circuito simple con una tensión v_a definida entre dos terminales.

(*continúa*)

se sustituyeron por material de PVC no conductor y de costo conveniente, dejó de existir la trayectoria de baja resistencia hacia la tierra. Se presenta un problema similar cuando la composición de la tierra varía de modo considerable en una región particular. En tales situaciones, es posible tener en realidad dos edificios separados en los que las dos "conexiones a tierra" no son iguales, y como consecuencia, fluya corriente.

Dentro de este texto, se usará exclusivamente el símbolo de conexión a tierra. Sin embargo, vale la pena recordar que, en la práctica, no todas las conexiones a tierra son iguales.



(*a*) (*b*)

■ **FIGURA 3.43** (*a*) Bosquejo de una persona desprevenida a punto de tocar una parte de equipo conectada a tierra de manera inadecuada. No va a serle agradable el resultado. (*b*) Diagrama de un circuito equivalente para la situación que está a punto de desencadenarse; la persona se representó con una resistencia equivalente, como la que tiene el equipo. Se utilizó una resistencia para representar la trayectoria no humana hacia tierra.

RESUMEN Y REPASO

Este capítulo comienza con la explicación de conexiones de elementos de circuitos, y con la introducción de los términos *nodo*, *trayectoria*, *bucle* (o *lazo*) y *rama*. Los siguientes dos temas se podrían considerar los dos más importantes en todo el libro de texto, a saber, la ley de las corrientes de Kirchhoff (LCK) y la ley de voltajes (tensiones) de Kirchhoff (LVK). La primera se deduce de la conservación de la carga, y se puede conceptualizar en términos de "lo que entra (corriente) debe salir". La segunda se basa en la conservación de la energía, y se puede visualizar como "lo que sube (potencial) debe bajar". Estas dos leyes nos permiten analizar *cualquier* circuito, lineal o no, siempre y cuando exista una manera de relacionar la tensión y la corriente correspondientes a los elementos pasivos (por ejemplo, la ley de Ohm para la resistencia). En el caso de un circuito con un solo bucle, los elementos están conectados en *serie*, y por lo tanto cada uno lleva la misma corriente. El circuito de un solo par de nodos, en los que los elementos están conectados en *paralelo* entre sí, se caracteriza por una sola tensión común a cada elemento. La ampliación de estos conceptos permitió desarrollar un medio de simplificar las fuentes de tensión conectadas en serie o las fuentes de corriente en paralelo; en seguida obtuvimos expresiones típicas para resistencias conectadas en serie y en paralelo. El tema final, el de la división de corrientes y tensiones, tiene un uso considerable en el diseño de circuitos, donde se necesita una tensión específica o una corriente específica pero las opciones de fuentes es limitada.

Se concluye con puntos clave que se deben repasar de este capítulo, destacando los ejemplos adecuados.

- ❑ La ley de corrientes de Kirchhoff (LCK) establece que la suma algebraica de las corrientes que entran a cualquier nodo es nula. (Ejemplos 3.1, 3.4)
- ❑ La ley de voltajes (tensiones) de Kirchhoff (LVK) enuncia que la suma algebraica de las tensiones alrededor de cualquier trayectoria cerrada en un circuito es nula. (Ejemplos 3.2, 3.3)
- ❑ Se dice que todos los elementos de un circuito que conducen la misma corriente están conectados en serie. (Ejemplos 3.5)
- ❑ Se dice que los elementos de un circuito que tienen una tensión común entre sus terminales están conectados en paralelo. (Ejemplos 3.6, 3.7)
- ❑ Se pueden sustituir fuentes de tensión en serie por una sola fuente, siempre que se tenga cuidado de notar la polaridad individual de cada fuente. (Ejemplos 3.8, 3.10)
- ❑ Es posible sustituir las fuentes de corriente en paralelo por una sola fuente, pero hay que tener cuidado de la dirección de cada flecha de corriente. (Ejemplos 3.9, 3.10)
- ❑ Una combinación en serie de N resistencias se sustituye por una sola que tiene un valor $R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N$. (Ejemplo 3.11)
- ❑ Una combinación en paralelo de N resistencias se sustituye por una sola resistencia que tiene el valor

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N}$$

(Ejemplo 3.12)

- ❑ La división de tensión permite calcular la fracción de la tensión total en los extremos de una cadena de resistencias en serie que se reduce entre los extremos de cualquier resistencia (o grupo de resistencias). (Ejemplo 3.13)
- ❑ La división de corriente permite calcular la fracción de la corriente total en una cadena en paralelo de resistencias que fluye a través de cualquiera de ellas. (Ejemplo 3.14)

LECTURAS ADICIONALES

Se puede encontrar un análisis de los principios de conservación de la energía y conservación de la carga, así como las leyes de Kirchhoff en

R. Feynman, R. B. Leighton y M. L. Sands, *The Feynman Lectures on Physics.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1989, pp. 4-1, 4-7 y 25-9.

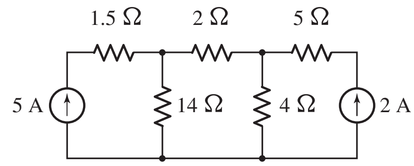
Se pueden encontrar explicaciones detalladas sobre numerosos aspectos de las prácticas de conexión a tierra congruentes con el National Electrical Code® de 2008 en

J. E. McPartland, B. J. McPartland y F. P. Hartwell, *McGraw-Hill's National Electrical Code® 2008 Handbook*, 26a. edición, Nueva York, McGraw-Hill, 2008.

EJERCICIOS

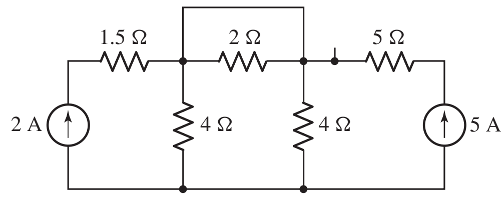
3.1 Nodos, trayectorias, lazos y ramas

1. En el circuito de la figura 3.44, cuente el número de (*a*) nodos; (*b*) elementos; (*c*) ramas.

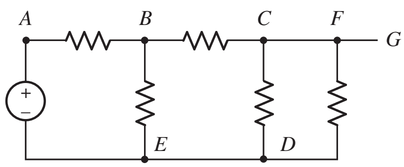


■ **FIGURA 3.44**

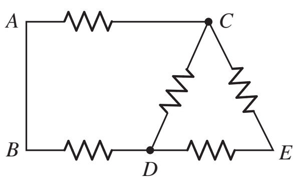
2. En el circuito que se muestra en la figura 3.45, cuente el número de (*a*) nodos; (*b*) elementos; (*c*) ramas.



■ **FIGURA 3.45**



■ **FIGURA 3.46**

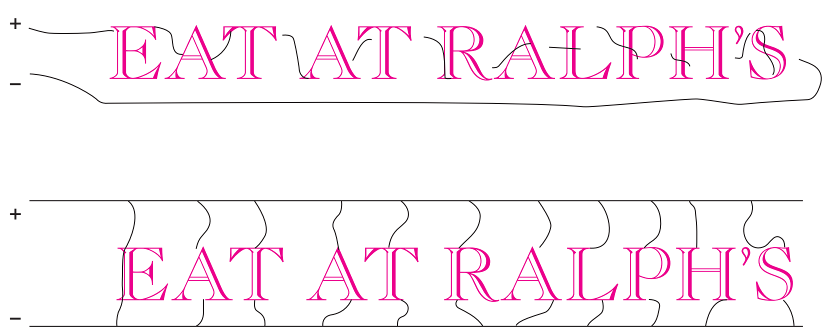


■ **FIGURA 3.47**

3. Para el circuito de la figura 3.46:
   (*a*) Cuente el número de nodos.
   (*b*) Al moverse de *A* a *B*, ¿hemos formado una ruta? ¿Hemos formado un bucle?
   (*c*) Al moverse de *C* a *F* a *G*, ¿hemos formado una ruta? ¿Hemos formado un bucle?
4. Para el circuito de la figura 3.46:
   (*a*) Cuente el número de elementos del circuito.
   (*b*) Al moverse de *B* a *C* a *D*, ¿hemos formado una ruta? ¿Hemos formado un bucle?
   (*c*) Al moverse de *E* a *D* a *C* a *B*, ¿hemos formado una ruta? ¿Hemos formado un lazo?
5. Observe el circuito de la figura 3.47 y responda a lo siguiente:
   (*a*) ¿Cuántos nodos distintos contiene el circuito?
   (*b*) ¿Cuántos elementos contiene el circuito?
   (*c*) ¿Cuántas ramas tiene el circuito?
   (*d*) Determine si cada uno de los siguientes movimientos representa una ruta, un bucle, ambos o ninguno:
      (*i*) *A* a *B*
      (*ii*) *B* a *D* a *C* a *E*
      (*iii*) *C* a *E* a *D* a *B* a *A* a *C*
      (*iv*) *C* a *D* a *B* a *A* a *C* a *E*

3.2 Ley de corrientes de Kirchhoff

6. Un restaurante local cuenta con un anuncio de neón construido con 12 focos separados; cuando uno de éstos falla, parece como una resistencia infinita y no puede conducir corriente. Para cablear el anuncio, el fabricante presenta dos opciones (figura 3.48). A partir de lo que se aprendió sobre la LCK, ¿cuál deberá seleccionar el propietario? Explicar su respuesta.



■ **FIGURA 3.48**

7. Observando el diagrama de un solo nodo de la figura 3.49, calcule:
   (*a*) i_B, si $i_A = 1$ A, $i_D = -2$ A, $i_C = 3$ A, e $i_E = 0$;
   (*b*) i_E, si $i_A = -1$ A, $i_B = -1$ A, $i_C = -1$ A, e $i_D = -1$ A.

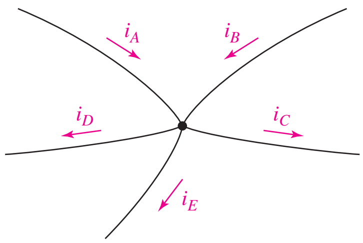


FIGURA 3.49

8. Determine la corriente etiquetada *I* en cada uno de los circuitos de la figura 3.50.

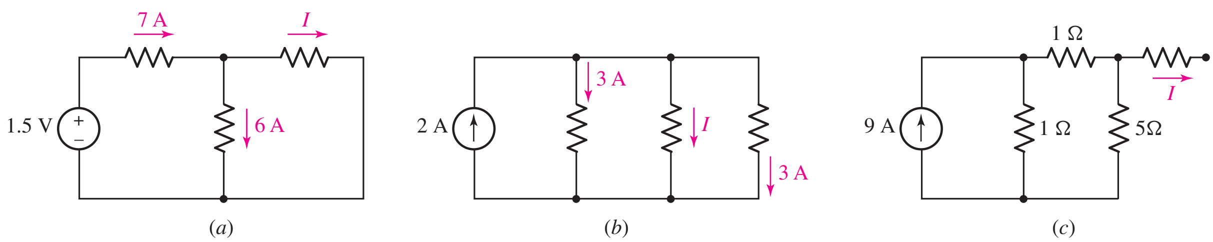


FIGURA 3.50

9. En el circuito que se muestra en la figura 3.51, los valores de las resitencias son desconocidos, pero se sabe que la fuente de 2 V suministra una corriente de 7 A al resto del circuito. Calcule la corriente etiquetada como i_2.

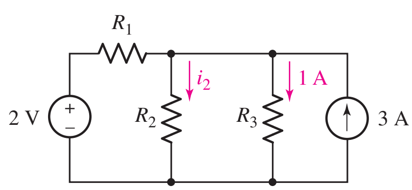


FIGURA 3.51

10. La fuente de tensión en el circuito de la figura 3.52 tiene una corriente de 1 A que sale de la terminal positiva hacia la resistencia R_1. Calcule la corriente marcada como i_2.

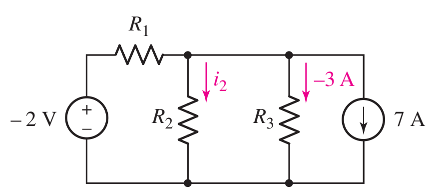


FIGURA 3.52

11. En el circuito representado en la figura 3.53, i_x se determina como 1.5 A, y la fuente de 9 V suministra una corriente de 7.6 A (es decir, una corriente de 7.6 A sale de la terminal positiva de la fuente de 9 V). Determine el valor de la resistencia R_A.

12. Para el circuito de la figura 3.54 (que es un modelo de operación en cd de un transistor de unión bipolar polarizado en la región activa), I_B se mide como 100 μA. Determine I_C e I_E.

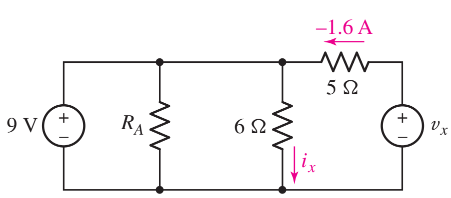


FIGURA 3.53

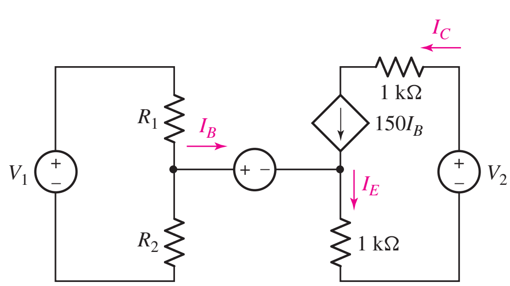
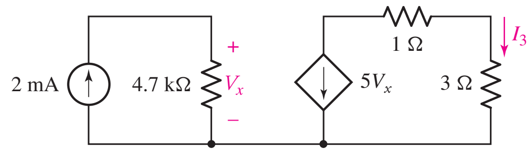


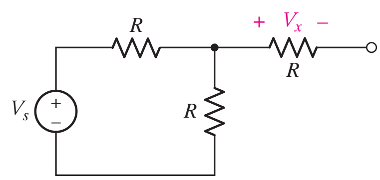
FIGURA 3.54

13. Determine la corriente marcada como I_3 en la figura 3.55.



■ **FIGURA 3.55**

14. Estudie el circuito representado en la figura 3.56 y explique (en términos de la LCK) por qué la tensión marcada como V_x debe ser cero.

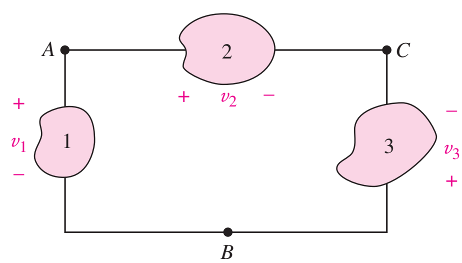


■ **FIGURA 3.56**

15. En muchos hogares, en una habitación determinada a menudo hay múltiples tomas de corriente eléctrica que son parte de un mismo circuito. Dibuje el circuito de una habitación de cuatro paredes que tiene una sola toma de corriente en cada pared, con una bombilla (representada por una resistencia de 1 Ω) conectada a cada toma de corriente.

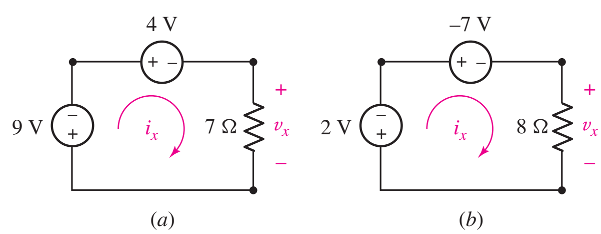
3.3 Ley de tensiones de Kirchhoff

16. Para el circuito de la figura 3.57:
   (*a*) Determine la tensión v_1 si $v_2 = 0$ y $v_3 = -17$ V.
   (*b*) Determine la tensión v_1 si $v_2 = -2$ V y $v_3 = +2$ V.
   (*c*) Determine la tensión v_2 si $v_1 = 7$ V y $v_3 = 9$ V.
   (*d*) Determine la tensión v_3 si $v_1 = -2.33$ V y $v_2 = -1.70$ V.



■ **FIGURA 3.57**

17. Para cada uno de los circuitos de la figura 3.58, determine la tensión v_x y la corriente i_x.



■ **FIGURA 3.58**

18. Use la LVK para obtener un valor numérico para la corriente etiquetada i en cada circuito representado en la figura 3.59.

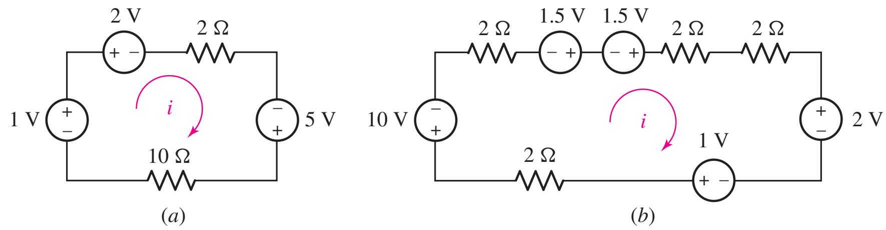


FIGURA 3.59

19. En el circuito de la figura 3.60, se determina que $v_1 = 3$ V y $v_3 = 1.5$ V. Calcule v_R y v_2.

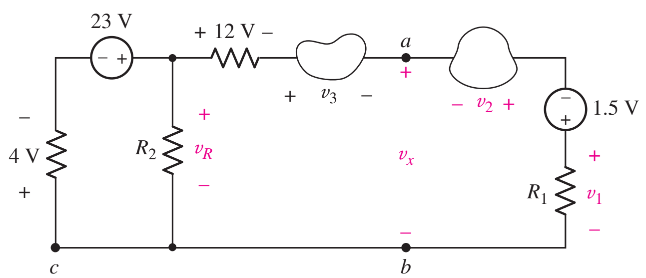


FIGURA 3.60

20. En el circuito de la figura 3.60, se usa un voltímetro para medir lo siguiente: $v_1 = 2$ V y $v_3 = -1.5$ V. Calcule v_x.

21. Determine el valor de v_x como se etiqueta en el circuito de la figura 3.61.

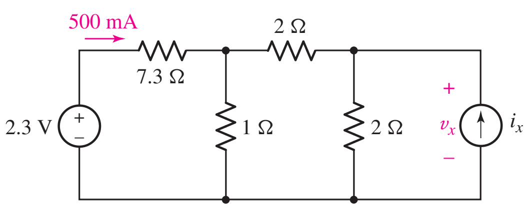


FIGURA 3.61

22. Considere el circuito simple que se muestra en la figura 3.62. Con base en la LVK, deduzca las expresiones:

$$v_1 = v_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{y} \quad v_2 = v_s \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

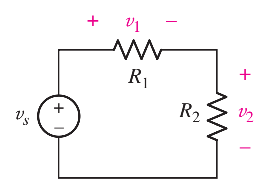


FIGURA 3.62

23. (a) Determine un valor numérico para cada corriente y tensión (i_1, v_1, etc.) en el circuito de la figura 3.63. (b) Calcule la potencia absorbida por cada elemento y verifique que la suma de las potencias absorbidas sea cero.

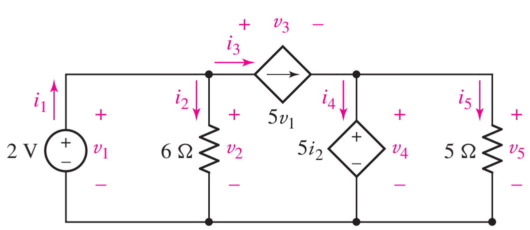


FIGURA 3.63

24. El circuito que se presenta en la figura 3.64 muestra un dispositivo conocido como amp op. Este dispositivo tiene dos propiedades particulares en el circuito que se muestra: 1) $V_d = 0$ V, y 2) no puede circular ninguna corriente en cualquier terminal de entrada (marcada con un "−" y un "+" dentro del símbolo), pero *sí puede* circular a través de la terminal de salida (marcada "SAL"). Esta situación aparentemente imposible —en conflicto directo con la LCK— es un resultado de canalizaciones de potencia hacia este dispositivo que no están incluidas en el símbolo. Con base en esta información, calcule V_{sal}. (*Pista*: Se requieren dos ecuaciones LVK, que tomen en cuenta la fuente de 5 V.)

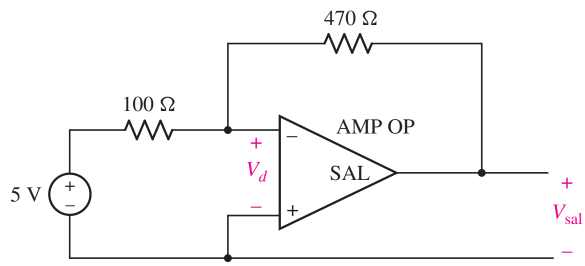


FIGURA 3.64

3.4 El circuito de un solo bucle (lazo)

25. El circuito de la figura 3.12*b* se compone de lo siguiente: $v_{s1} = -8$V, $R_1 = 1\ \Omega$, $v_{s2} = 16$ V y $R_2 = 4.7\ \Omega$. Calcule la potencia absorbida por cada elemento. Verifique que las potencias absorbidas sumen cero.
26. Obtenga un valor numérico para la potencia absorbida por cada elemento del circuito que se muestra en la figura 3.65.

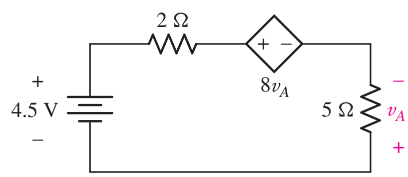


FIGURA 3.65

27. Calcule la potencia absorbida por cada elemento del circuito de la figura 3.66.
28. Calcule la potencia absorbida por cada elemento del circuito de la figura 3.67 si el elemento misterioso X es (*a*) una resistencia de 13 Ω; (*b*) una fuente de tensión dependiente etiquetada como $4v_1$, con referencia "+" en la parte superior; (*c*) una fuente de tensión dependiente marcada como $4i_x$, con referencia "+" en la parte superior.

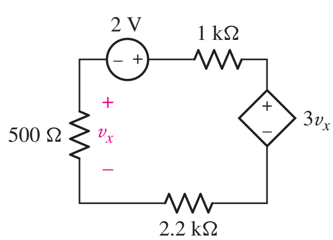


FIGURA 3.66

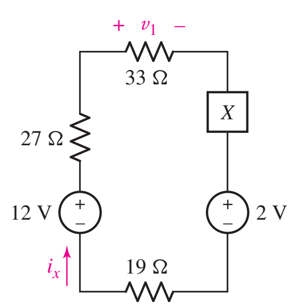
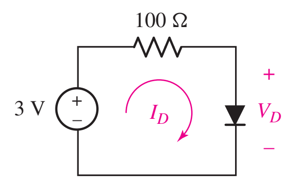


FIGURA 3.67

29. Las leyes de Kirchhoff se aplican, independientemente de que la ley de Ohm se cumpla para un elemento particular. La característica *I-V* de un diodo, por ejemplo, está dada por

$$I_D = I_S\left(e^{V_D/V_T} - 1\right)$$

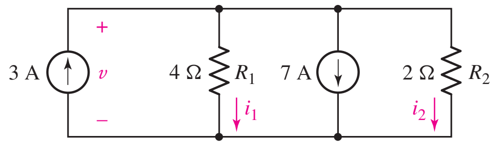
donde $V_T = 27$ mV a temperatura ambiente e I_S puede variar desde 10^{-12} hasta 10^{-3} A. En el circuito de la figura 3.68, utilice las LVK y LCK para obtener V_D si $I_S = 29$ pA. (*Nota: este problema da como resultado una ecuación trascendental que requiere un método iterativo para obtener una solución numérica. La mayor parte de las calculadoras científicas pueden efectuar una función de este tipo*.)



■ **FIGURA 3.68**

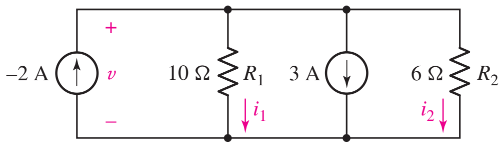
3.5 El circuito de un solo par de nodos

30. Con referencia al circuito de la figura 3.69, (*a*) determine las dos corrientes i_1 e i_2; (*b*) calcule la potencia absorbida por cada elemento.



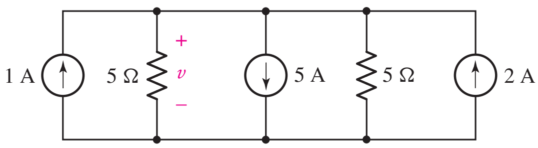
■ **FIGURA 3.69**

31. Determine un valor para la tensión v marcada en el circuito de la figura 3.70 y calcule la potencia suministrada por las dos fuentes de corriente.



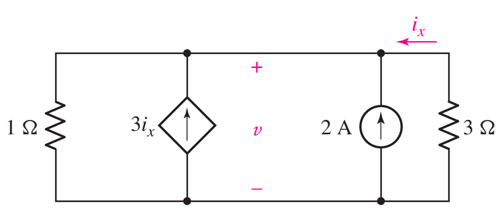
■ **FIGURA 3.70**

32. Con referencia al circuito representado en la figura 3.71, determine el valor de la tensión v.

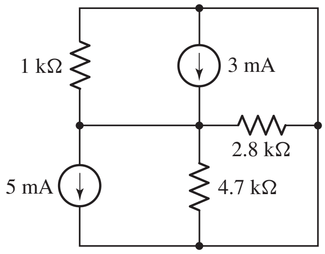


■ **FIGURA 3.71**

33. Determine la tensión v etiquetada en la figura 3.72 y calcule la potencia suministrada por cada fuente de corriente.
34. Aunque está dibujado de tal manera que puede no parecer obvio a primera vista, el circuito de la figura 3.73 es, de hecho, un circuito de solo un par de nodos. (*a*) Determine la potencia absorbida por cada resistencia. (*b*) Determine la potencia suministrada por cada fuente de corriente. (*c*) Demuestre que la suma de la potencia absorbida calculada en (*a*) es igual a la suma de la potencia suministrada calculada en (*b*).



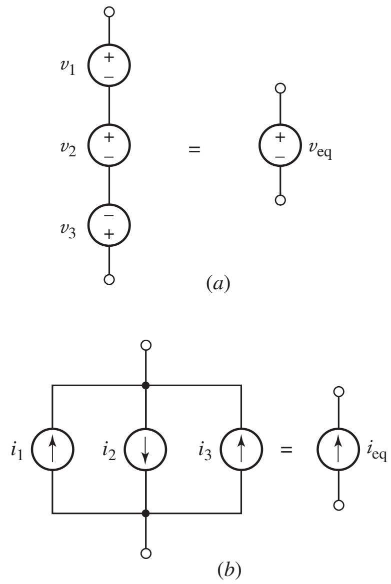
■ **FIGURA 3.72**



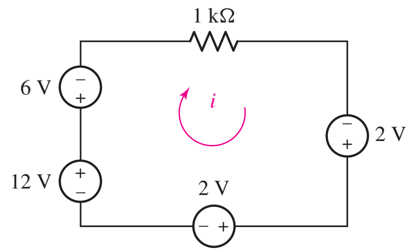
■ **FIGURA 3.73**

3.6 Fuentes conectadas en serie y en paralelo

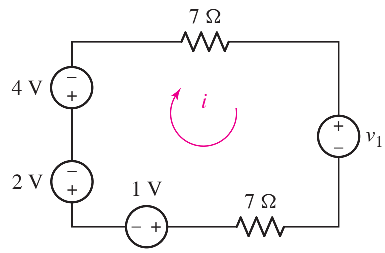
35. Determine el valor numérico para v_{eq} en la figura 3.74*a*, si (*a*) $v_1 = 0$, $v_2 = -3$ V, y $v_3 = +3$ V; (*b*) $v_1 = v_2 = v_3 = 1$ V; (*c*) $v_1 = -9$ V, $v_2 = 4.5$ V, $v_3 = 1$ V.
36. Determine el valor numérico para i_{eq} en la figura 3.74*b*, si (*a*) $i_1 = 0$, $i_2 = -3$ A, e $i_3 = +3$ A; (*b*) $i_1 = i_2 = i_3 = 1$ A; (*c*) $i_1 = -9$ A, $i_2 = 4.5$ A, $i_3 = 1$A.
37. Para el circuito que se presenta en la figura 3.75, determine la corriente etiquetada i combinando primero las cuatro fuentes en una sola fuente equivalente.
38. Determine el valor de v_1 necesario para obtener un valor cero para la corriente etiquetada i en el circuito de la figura 3.76.



■ FIGURA 3.74

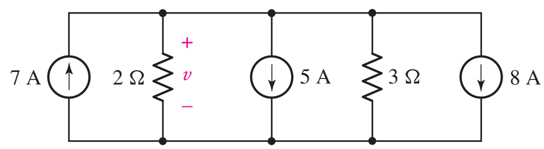


■ FIGURA 3.75



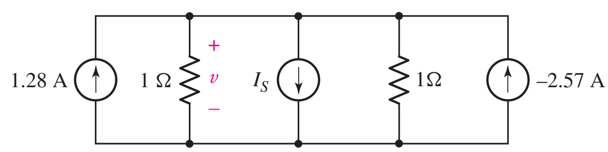
■ FIGURA 3.76

39. (*a*) Para el circuito de la figura 3.77, determine el valor de la tensión etiquetada v después de simplificar primero el circuito a una sola fuente de corriente en paralelo con dos resistencias. (*b*) Verifique que la potencia suministrada por su fuente equivalente sea igual a la suma de las potencias suministradas de las fuentes individuales en el circuito original.



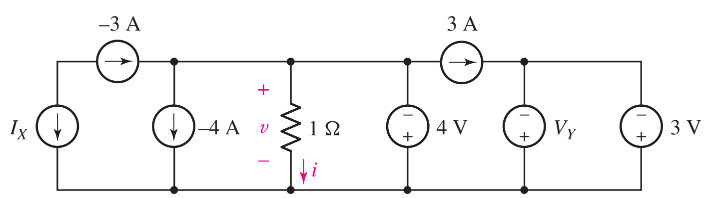
■ FIGURA 3.77

40. ¿Qué valor de I_S en el circuito de la figura 3.78 dará como resultado una tensión v igual a cero?



■ FIGURA 3.78

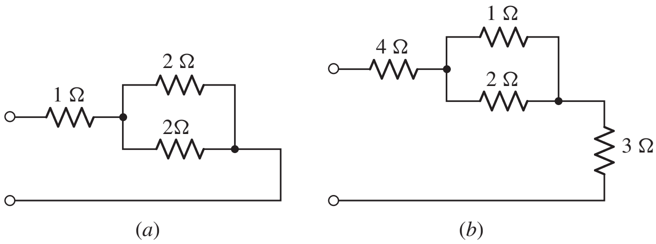
41. (*a*) Determine los valores de I_X y V_Y en el circuito que se muestra en la figura 3.79. (*b*) ¿Son estos valores necesariamente los únicos para ese circuito? Explique. (*c*) Simplifique el circuito de la figura 3.79 tanto como sea posible manteniendo los valores de v e i. (Su circuito debe contener la resistencia de 1 Ω.)



■ FIGURA 3.79

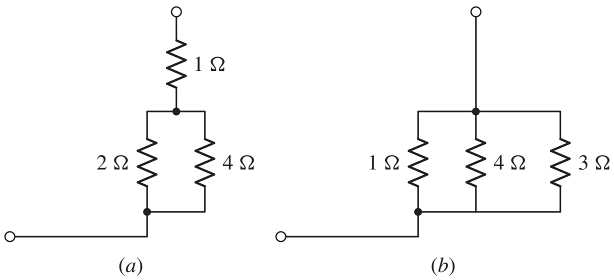
3.7 Resistencias en serie y en paralelo

42. Determine la resistencia equivalente de cada una de las redes que se muestran en la figura 3.80.



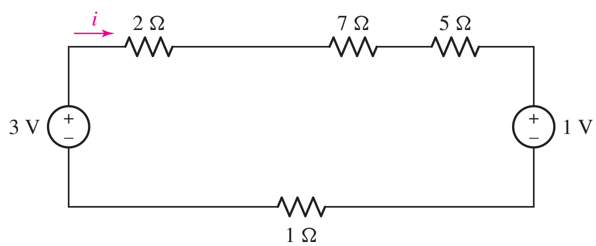
■ **FIGURA 3.80**

43. Para cada red representada en la figura 3.81, determine una sola resistencia equivalente.



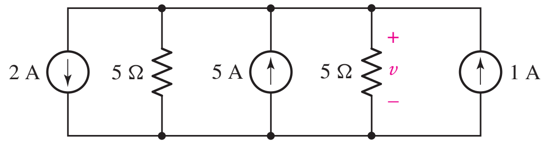
■ **FIGURA 3.81**

44. (*a*) Simplifique el circuito de la figura 3.82 tanto como sea posible usando combinaciones de fuentes y de resistencias. (*b*) Calcule *i*, usando su circuito simplificado. (*c*) ¿A qué tensión se debe cambiar la fuente de 1 V para reducir *i* a cero? (*d*) Calcule la potencia absorbida por la resistencia de 5 Ω.



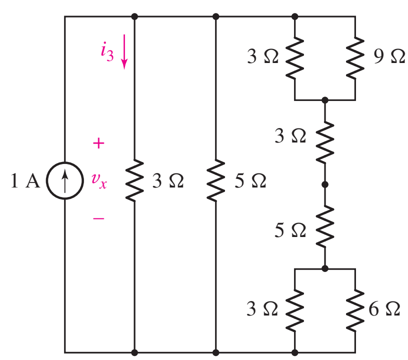
■ **FIGURA 3.82**

45. (*a*) Simplifique el circuito de la figura 3.83 usando combinaciones o reducciones adecuadas de fuentes y resistencias. (*b*) Determine la tensión etiquetada *v*, usando su circuito simplificado. (*c*) Calcule la potencia suministrada por la fuente de 2 A al resto del circuito.



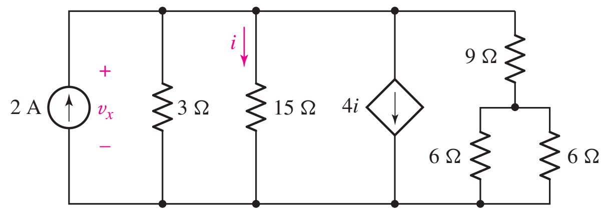
■ **FIGURA 3.83**

46. Haciendo un uso apropiado de las técnicas de combinación de resistencias, calcule i_3 en el circuito de la figura 3.84 y la potencia suministrada al circuito por la fuente de corriente.



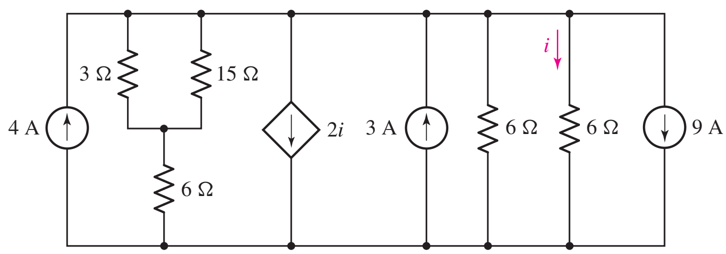
■ **FIGURA 3.84**

47. Calcule la tensión marcada como v_x en el circuito de la figura 3.85 después de simplificar primero, usando combinaciones adecuadas de fuentes y resistencias.



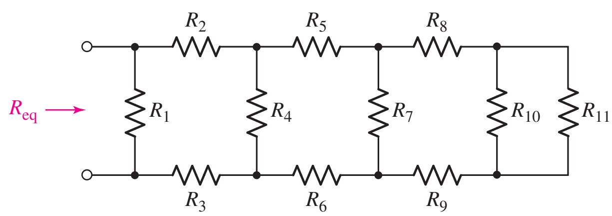
■ **FIGURA 3.85**

48. Determine la potencia absorbida por la resistencia de 15 Ω en el circuito de la figura 3.86.



■ **FIGURA 3.86**

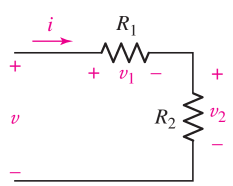
49. Calcule la resistencia equivalente R_{eq} de la red que se muestra en la figura 3.87 si $R_1 = 2R_2 = 3R_3 = 4R_4$, etc., y $R_{11} = 3\ \Omega$.



■ **FIGURA 3.87**

50. Muestre cómo combinar cuatro resistencias de 100 Ω para obtener una resistencia combinada de (*a*) 25 Ω; (*b*) 60 Ω; (*c*) 40 Ω.

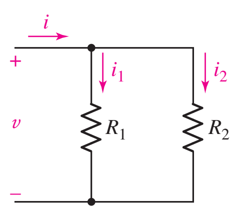
3.8 División de tensión y de corrientes



■ **FIGURA 3.88**

51. En la red divisora de tensiones de la figura 3.88, calcule (*a*) v_2 si $v = 9.2$ V y $v_1 = 3$ V; (*b*) v_1 si $v_2 = 1$ V y $v = 2$ V; (*c*) v si $v_1 = 3$ V y $v_2 = 6$ V; (*d*) R_1/R_2 si $v_1 = v_2$; (*e*) v_2 si $v = 3.5$ V y $R_1 = 2\,R_2$; (*f*) v_1 si $v = 1.8$ V, $R_1 = 1$ kΩ y $R_2 = 4.7$ kΩ.

52. En la red divisora de corrientes representada en la figura 3.89, calcule (*a*) i_1 si $i = 8$ A e $i_2 = 1$ A; (*b*) v si $R_1 = 100$ kΩ, $R_2 = 100$ kΩ, e $i = 1$ mA; (*c*) i_2 si $i = 20$ mA, $R_1 = 1\ \Omega$, y $R_2 = 4\ \Omega$; (*d*) i_1 si $i = 10$ A, $R_1 = R_2 = 9\ \Omega$; (*e*) i_2 si $i = 10$ A, $R_1 = 100$ MΩ y $R_2 = 1\ \Omega$.



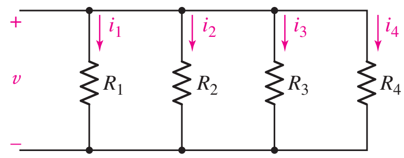
■ **FIGURA 3.89**

53. Elija una tensión $v < 2.5$ V y valores para las resistencias R_1, R_2, R_3 y R_4 en el circuito de la figura 3.90, de modo que $i_1 = 1$ A, $i_2 = 1.2$ A, $i_3 = 8$ A, e $i_4 = 3.1$ A.

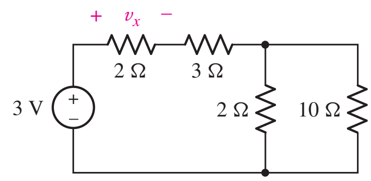
54. Utilice la división de tensión como apoyo para el cálculo de la tensión marcada como v_x en el circuito de la figura 3.91.

55. Se construye una red de una conexión en serie de cinco resistencias que tienen valores de 1 Ω, 3 Ω, 5 Ω, 7 Ω y 9 Ω. Si se conectan 9 V a las terminales de la red, utilice la división de tensión para calcular la tensión a través de la resistencia de 3 Ω y la tensión a través de la resistencia de 7 Ω.

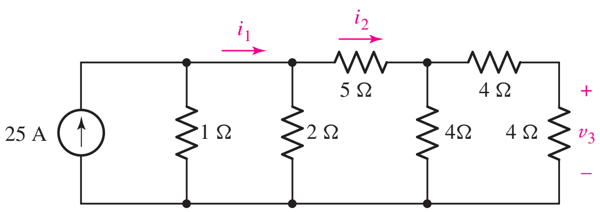
56. Utilizando la combinación de resistencias y la división de corriente como sea adecuado, determine valores de i_1, i_2 y v_3 en el circuito de la figura 3.92.



■ FIGURA 3.90

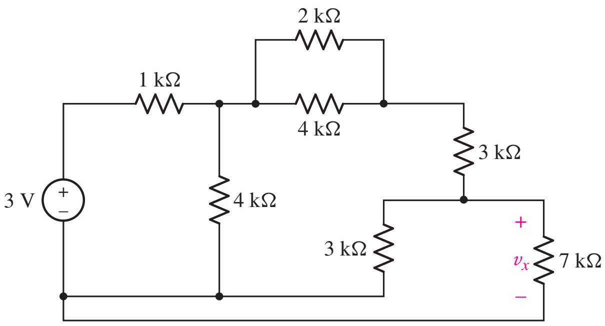


■ FIGURA 3.91



■ FIGURA 3.92

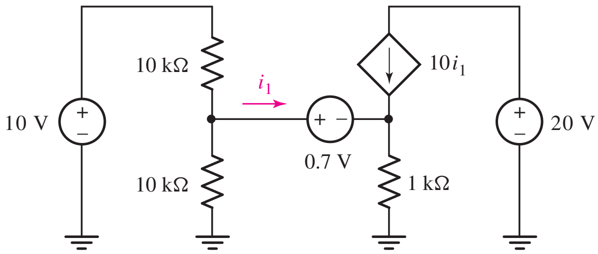
57. En el circuito de la figura 3.93, sólo interesa la tensión v_x. Simplifique el circuito usando la combinación adecuada de resistencias y empleando iterativamente división de tensión para determinar v_x.



■ FIGURA 3.93

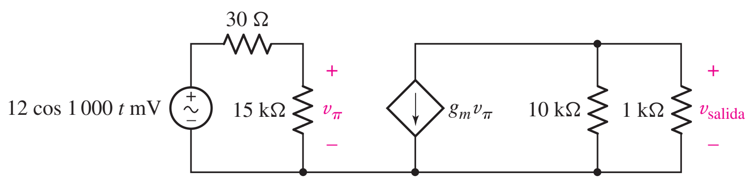
Ejercicios de integración de capítulo

58. El circuito que se muestra en la figura 3.94 es un modelo lineal de un transistor de unión bipolar polarizado en la región activa. Explique por qué la división de tensión no es un método válido para determinar la tensión a través de cualquiera de las resistencias de 10 kΩ.



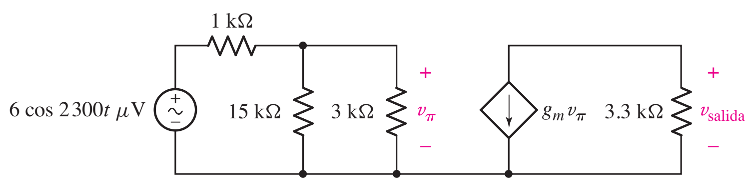
■ FIGURA 3.94

59. En la figura 3.95 se muestra un modelo de un amplificador implementado con transistores de efecto de campo para frecuencia media. Si el parámetro controlador g_m (conocido como *transconductancia*) es igual a 1.2 mS, utilice la división de corriente para obtener la corriente a través de la resistencia de 1 kΩ, y luego calcule la tensión de salida del amplificador v_{salida}.



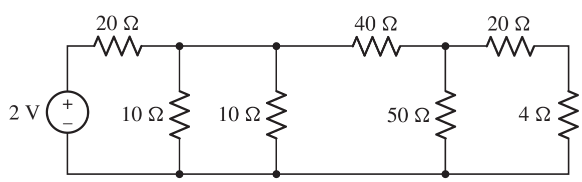
■ **FIGURA 3.95**

60. El circuito que se representa en la figura 3.96 se emplea rutinariamente para modelar la operación en frecuencia media de un amplificador implementado con transistores de unión bipolar. Calcule la salida del amplificador v_{salida} si la transconductancia g_m es igual a 322 mS.



■ **FIGURA 3.96**

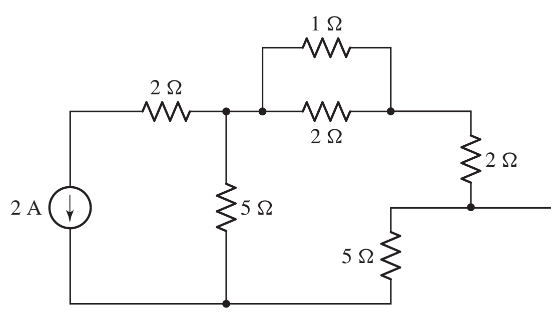
61. Con respecto al circuito que se muestra en la figura 3.97, calcule (*a*) la tensión a través de las dos resistencias de 10 Ω, suponiendo que la terminal superior es la referencia positiva; (*b*) la potencia disipada por la resistencia de 4 Ω.



■ **FIGURA 3.97**

62. Elimine la resistencia de 10 Ω más a la izquierda en el circuito de la figura 3.97, y calcule (*a*) la corriente que entra a la terminal izquierda de la resistencia de 40 Ω; (*b*) la potencia suministrada por la fuente de 2 V; (*c*) la potencia disipada por la resistencia de 4 Ω.

63. Considere el circuito de siete elementos representado en la figura 3.98. (*a*) ¿Cuántos nodos, bucles y ramas contiene? (*b*) Calcule el flujo de corriente a través de cada resistencia. (*c*) Determine la tensión a través de la fuente de corriente, suponiendo que la terminal superior es la terminal de referencia positiva.



■ **FIGURA 3.98**



CAPÍTULO 4

Análisis nodal y de malla básicos

CONCEPTOS CLAVE

- Análisis nodal
- Técnica del supernodo
- Análisis de malla
- Técnica de la supermalla
- Selección entre análisis nodal y de malla
- Análisis asistido por computadora incluyendo PSpice y MATLAB

INTRODUCCIÓN

Una vez que se conocen las leyes de Ohm y de Kirchhoff, el análisis de un circuito lineal simple para obtener información útil acerca de la corriente, la tensión o la potencia asociadas con un elemento en particular comienza a parecer una misión muy directa. Al menos hasta ahora, cada circuito parece ser único y requiere (hasta cierto punto) un grado de creatividad en el momento de realizar el análisis. En este capítulo aprenderemos dos técnicas básicas de análisis de circuitos —el ***análisis nodal*** y el ***análisis de malla***—, las cuales permiten estudiar una gran cantidad de circuitos de una manera metódica y coherente. El resultado que se obtiene es un análisis más directo, un nivel de complejidad más uniforme en nuestras ecuaciones, un menor número de errores y, quizá, lo más importante, una menor ocurrencia de "*¡todavía no sé cómo empezar!*"

La mayor parte de los circuitos con los que hemos practicado son simples y (siendo honestos) de importancia práctica cuestionable; sin embargo, resultan útiles como ayuda para aprender a aplicar las técnicas fundamentales. Aunque los circuitos más complejos que aparecen en este capítulo pueden representar una gran variedad de sistemas eléctricos, incluyendo circuitos de control, redes de comunicaciones, motores o circuitos integrados, así como modelos de circuitos eléctricos, de sistemas no eléctricos, creemos que es mejor no profundizar en esos detalles específicos en esta etapa inicial. En lugar de lo anterior, es importante enfocarnos en la *metodología para resolver problemas* que desarrollaremos a lo largo de este libro.



4.1 ANÁLISIS NODAL

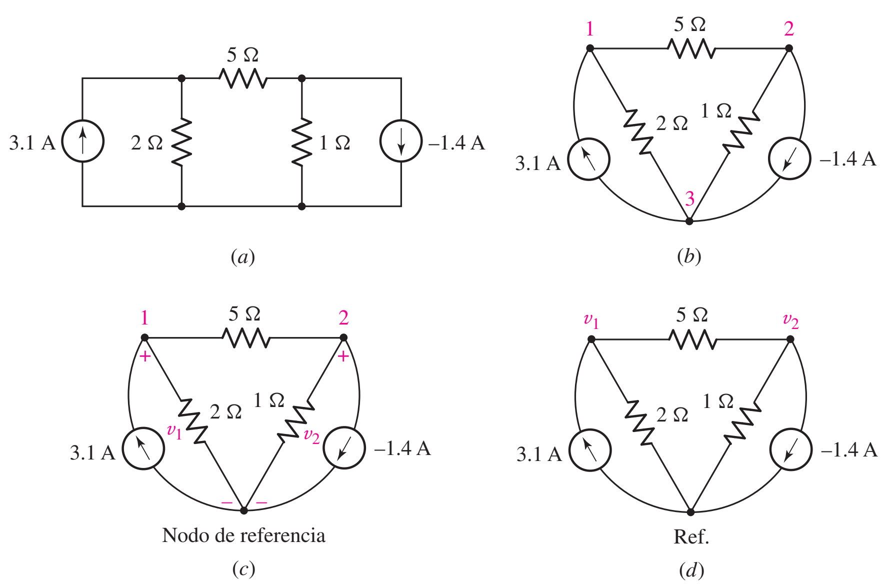
El estudio de métodos generales para el análisis metódico de circuitos se inicia con un método poderoso basado en LCK, llamado ***análisis nodal***. En el capítulo anterior presentamos el análisis de un circuito simple que contenía sólo dos nodos. Así descubrimos que el principal paso del análisis se presentaba cuando se obtenía una ecuación simple en términos de una incógnita simple: la tensión entre el par de nodos.

Se dejará que aumente el número de nodos y se proporcionará de manera correspondiente una cantidad desconocida adicional y una ecuación extra para cada nodo agregado. De tal modo, un circuito de tres nodos tendrá dos tensiones desconocidas y dos ecuaciones; uno de 10 nodos constará de nueve tensiones desconocidas y nueve ecuaciones; un circuito de N nodos se formará con $(N - 1)$ tensiones y $(N - 1)$ ecuaciones. Cada ecuación es una ecuación LCK simple.

Para ilustrar la mecánica básica de esta técnica, considere el circuito de tres nodos que se muestra en la figura 4.1*a*, que se dibuja nuevamente en la figura 4.1*b* para destacar el hecho de que sólo hay tres nodos, numerados de manera correspondiente. El objetivo será determinar la tensión en cada elemento y el paso siguiente del análisis es crítico. Se designa un nodo como ***nodo de referencia***; en este caso será la terminal negativa de las tensiones nodales $N - 1 = 2$, como se muestra en la figura 4.1*c*.

Se logra otra pequeña simplificación en las ecuaciones resultantes si el nodo conectado al mayor número de ramas se identifica como el nodo de referencia. Si hay un nodo de conexión a tierra, a menudo resulta más conveniente elegirlo como el nodo de referencia, aunque mucha gente prefiere seleccionar el nodo inferior de un circuito como la referencia, especialmente si no se especifica una tierra explícita.

La tensión del nodo 1 *en relación con el nodo de referencia* se define como v_1, y v_2 se define como la tensión del nodo 2 con respecto al nodo de referencia. Ambas tensiones son suficientes, puesto que la tensión entre cualquier otro par de nodos puede determinarse en términos de ellos. Por ejemplo, la tensión del nodo 1 con respecto al nodo 2 es $v_1 - v_2$. Las tensiones v_1 y v_2 y sus signos de referencia se muestran en la figura 4.1*c*. Una vez marcado el nodo de referencia, es una práctica común omitir los signos de



■ **FIGURA 4.1** (*a*) Circuito simple de tres nodos. (*b*) Dibujo del circuito en el que se hace hincapié en los nodos. (*c*) Nodo de referencia elegido y tensiones asignadas. (*d*) Referencias de tensión abreviadas. Si se desea, un símbolo de conexión a tierra apropiado se podría sustituir por "Ref".

referencia para hacerlo más claro; el nodo marcado con la tensión se considera como la terminal positiva (fig. 4.1*d*), lo cual se entiende como un tipo de notación de tensión abreviada.

El nodo de referencia en un diagrama esquemático se define de manera explícita como cero volts. Sin embargo, resulta importante recordar que cualquier terminal puede ser designada como terminal de referencia. En consecuencia, el nodo de referencia está a cero volts con respecto a las otras tensiones nodales definidas, y no necesariamente con respecto a la *conexión a tierra*.

Ahora aplicaremos la LCK a los nodos 1 y 2. Este paso se realiza igualando la corriente total que sale del nodo a través de varias resistencias con la corriente de fuente total que entra al nodo. De tal manera que

$$\frac{v_1}{2} + \frac{v_1 - v_2}{5} = 3.1 \qquad [1]$$

o

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = 3.1 \qquad [2]$$

En el nodo 2 se obtiene

$$\frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_1}{5} = -(-1.4) \qquad [3]$$

o

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = 1.4 \qquad [4]$$

Las ecuaciones [2] y [4] son las dos deseadas con dos incógnitas, y además se pueden resolver con facilidad. Los resultados son $v_1 = 5$ V y $v_2 = 2$ V.

A partir de este punto, se determina de manera directa la tensión en la resistencia de 5 Ω: $v_{5\Omega} = v_1 - v_2 = 3$ V. Las corrientes y las potencias absorbidas también se pueden calcular en un paso.

En este punto se debe observar que existe más de una forma de escribir las ecuaciones LCK en el análisis nodal. Por ejemplo, el lector preferirá sumar todas las corrientes que ingresan a un determinado nodo y fijar esta cantidad a un valor cero. Por lo tanto, para el nodo 1 pudimos haber escrito:

$$3.1 - \frac{v_1}{2} - \frac{v_1 - v_2}{5} = 0$$

o

$$3.1 + \frac{-v_1}{2} + \frac{v_2 - v_1}{5} = 0$$

las cuales son equivalentes a la ecuación [1].

¿*Es una forma mejor que la otra*? Cada profesor y cada estudiante tiene una preferencia personal y, al final de cuentas, lo más importante es ser congruente. Los autores prefieren construir ecuaciones LCK para el análisis nodal de una manera tal que al final tengan todos los términos de fuentes de corriente de un lado y todos los términos de resistencia por otro. Específicamente,

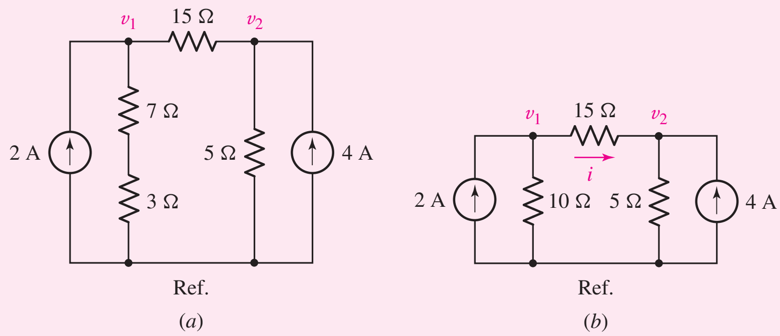
Σ de corrientes que ingresan al nodo de las fuentes de corriente
= Σ de corrientes que abandonan el nodo a través de resistencias

Este método tiene varias ventajas. Primero, no puede existir confusión alguna con respecto a que si un término deba ser "$v_1 - v_2$" o "$v_2 - v_1$"; la primera tensión de cada expresión de corriente de resistencia corresponde al nodo para el que se está escribiendo una expresión LCK, como se puede ver en las ecuaciones [1] y [3]. Segundo,

permite verificar rápidamente que un término no se haya eliminado de manera accidental. Simplemente se deben contar las fuentes de corriente conectadas a un nodo y después las resistencias; además, agruparlas en la forma en la que se mencionó hace un poco más fácil la comparación.

EJEMPLO 4.1

Determine la corriente que fluye de izquierda a derecha a través de la resistencia de 15 Ω de la figura 4.2*a*.



■ **FIGURA 4.2** (*a*) Circuito de cuatro nodos que contiene dos fuentes de corriente independientes. (*b*) Las dos resistencias en serie se reemplazan por una sola resistencia de 10 Ω para reducir a tres nodos el circuito.

El análisis nodal arrojará valores numéricos para las tensiones nodales v_1 y v_2, y la corriente deseada está dada por $i = (v_1 - v_2)/15$.

Sin embargo, antes de comenzar el análisis nodal, podemos observar que no es de interés conocer los detalles respecto de las resistencias de 7 Ω y de 3 Ω. Por lo tanto, se pueden reemplazar sus combinaciones de serie por una resistencia de 10 Ω como se muestra en la figura 4.2*b*. El resultado es una reducción del número de ecuaciones que se deben resolver.

Se escribe la ecuación LCK apropiada del nodo 1,

$$2 = \frac{v_1}{10} + \frac{v_1 - v_2}{15} \qquad [5]$$

y del nodo 2,

$$4 = \frac{v_2}{5} + \frac{v_2 - v_1}{15} \qquad [6]$$

Al simplificar, se obtiene

$$5v_1 - 2v_2 = 60$$

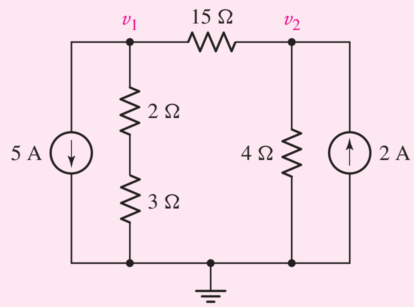
y

$$-v_1 + 4v_2 = 60$$

Al despejar, encontramos que $v_1 = 20$ V y $v_2 = 20$ V de tal forma que $v_1 - v_2 = 0$. En otras palabras, ¡en este circuito fluye una ***corriente cero*** a través de la resistencia de 15 Ω!

PRÁCTICA

4.1 Determine las tensiones nodales v_1 y v_2 del circuito de la figura 4.3.



■ **FIGURA 4.3**

Respuesta: $v_1 = -145/8$ V, $v_2 = 5/2$ V.

A continuación se aumentará el número de nodos de manera que se utilice esta técnica para resolver un problema un poco más difícil.

EJEMPLO 4.2

Determine las tensiones de nodo del circuito de la figura 4.4*a* con referencia al nodo inferior.

▶ ***Identificar el objetivo del problema.***

Hay cuatro nodos en este circuito. Si elejimos el nodo inferior como referencia, debemos marcar los otros tres como se indica en la figura 4.4*b*. El circuito se ha redibujado para darle claridad, teniendo cuidado de identificar los dos nodos de interés para la resistencia de 4 Ω.

▶ ***Recopilar la información conocida.***

Tenemos tres tensiones desconocidas, v_1, v_2 y v_3. Todas las fuentes de corriente y las resistencias tienen valores designados, las cuales se marcan sobre el esquema.

▶ ***Elaborar un plan.***

Este problema es bastante apropiado para la técnica del análisis nodal que se acaba de presentar, ya que es factible escribir tres ecuaciones LCK independientes en términos de las fuentes de corriente y de la corriente a través de cada resistencia.

▶ ***Construir un conjunto apropiado de ecuaciones.***

Empezamos escribiendo una ecuación LCK para el nodo 1:

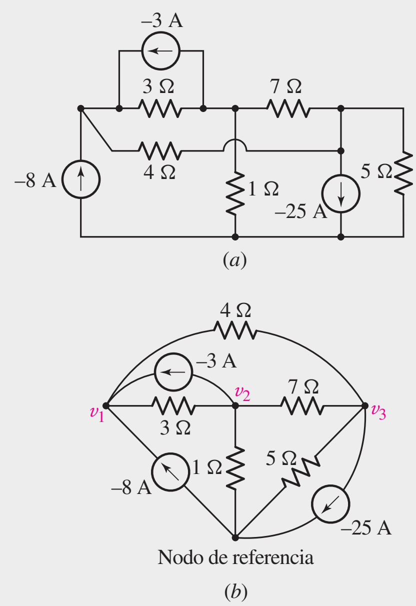
$$-8 - 3 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

o

$$0.5833v_1 - 0.3333v_2 - 0.25v_3 = -11 \qquad [7]$$

En el nodo 2:

$$-(-3) = \frac{v_2 - v_1}{3} + \frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_3}{7}$$



■ **FIGURA 4.4** (*a*) Circuito de cuatro nodos. (*b*) Dibujo del circuito con el nodo de referencia elegido y las tensiones marcadas.

(*continúa*)

o

$$0.3333v_1 + 1.4762v_2 - 0.1429v_3 = 3 \qquad [8]$$

Y en el nodo 3:

$$-(-25) = \frac{v_3}{5} + \frac{v_3 - v_2}{7} + \frac{v_3 - v_1}{4}$$

o, de manera más simple,

$$-0.25v_1 - 0.1429v_2 + 0.5929v_3 = 25 \qquad [9]$$

▶ *Determinar si se requiere de información adicional.*

Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas. Siempre y cuando éstas sean independientes, lo anterior es suficiente para determinar las tres tensiones.

▶ *Intentar obtener la solución.*

Las ecuaciones [7] a [9] se pueden resolver con una calculadora científica (apéndice 5), mediante paquetes de software tal como MATLAB, o con procedimientos matemáticos tradicionales, tales como eliminación de variables, métodos matriciales o la regla de Cramer. Usando este último método, que se describe en el apéndice 2, tenemos:

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -0.3333 & -0.2500 \\ 3 & 1.4762 & -0.1429 \\ 25 & -0.1429 & 0.5929 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.2500 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.2500 & -0.1429 & 0.5929 \end{vmatrix}} = \frac{1.714}{0.3167} = 5.412 \text{ V}$$

De manera similar.

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.5833 & -11 & -0.2500 \\ -0.3333 & 3 & -0.1429 \\ -0.2500 & 25 & 0.5929 \end{vmatrix}}{0.3167} = \frac{2.450}{0.3167} = 7.736 \text{ V}$$

y

$$v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -11 \\ -0.3333 & 1.4762 & 3 \\ -0.2500 & -0.1429 & 25 \end{vmatrix}}{0.3167} = \frac{14.67}{0.3167} = 46.32 \text{ V}$$

▶ *Verificar la solución. ¿Es razonable o es la esperada?*

Sustituir las tensiones de nodos en cualquiera de las tres ecuaciones de nodos es suficiente para asegurar que no cometimos ningún error de cálculo. Más allá de eso, ¿es posible determinar si las tensiones son valores "razonables"? Existe una corriente máxima posible de $3 + 8 + 25 = 36$ amperes en cualquier punto del circuito. La resistencia más grande es de 7 Ω, de modo que no es posible esperar alguna magnitud de tensión superior a $7 \times 36 = 252$ V.

Desde luego, existen numerosos métodos disponibles para resolver sistemas de ecuaciones lineales, algunos de los cuales se describen detalladamente en el apéndice 2. Antes del advenimiento de la calculadora científica, la regla de Cramer que se utilizó en el ejemplo 4.2 era muy común para analizar circuitos, aunque a veces era muy tediosa

en su implementación. Sin embargo, es muy sencillo utilizarla en una calculadora de cuatro funciones, por lo que es muy valioso conocer esta técnica. Por otro lado, aunque no es muy probable que se encuentre a la mano durante un examen, MATLAB es un paquete de software muy poderoso que simplifica enormemente el proceso de solución; en el apéndice 6 se proporciona un breve tutorial para comenzar.

Para el escenario que se menciona en el ejemplo 4.2, existen varias opciones disponibles con MATLAB. Como primer paso, podemos representar las ecuaciones [7] a [9] en ***forma matricial***:

$$\begin{bmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.25 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.25 & -0.1429 & 0.5929 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

de modo que:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.25 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.25 & -0.1429 & 0.5929 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

En MATLAB escribimos

```
>> a = [0.5833 -0.3333 -0.25; -0.3333 1.4762 -0.1429; -0.25
       -0.1429 0.5929];
>> c = [-11; 3; 25];
>> b = a^-1 * c
b =
    5.4124
    7.7375
   46.3127
>>
```

donde espacios separan a los elementos a lo largo de las filas y un punto y coma separa las filas. La matriz denominada **b**, a la cual también se le conoce como ***vector*** puesto que tiene sólo una columna, es nuestra solución. Por ende, $v_1 = 5.412$ V, $v_2 = 7.738$ V y $v_3 = 46.31$ V (se ha incurrido en un error por redondeo).

También pudimos haber utilizado las ecuaciones LKC como las escribimos al principio si se emplea el procesador simbólico de MATLAB.

```
>> eqn1 = '-8 -3 = (v1 - v2)/ 3 + (v1 - v3)/ 4';
>> eqn2 = '-(-3) = (v2 - v1)/ 3 + v2/ 1 + (v2 - v3)/ 7';
>> eqn3 = '-(-25) = v3/ 5 + (v3 - v2)/ 7 + (v3 - v1)/ 4';
>> answer = solve(eqn1, eqn2, eqn3, 'v1', 'v2', 'v3');
>> answer.v1
ans =
720/133
>> answer.v2
ans =
147/19
>> answer.v3
ans =
880/19
>>
```

lo que resulta en respuestas exactas, sin errores por redondeo. La rutina *solve()* se invoca con la lista de ecuaciones simbólicas que se nombran como eqn1, eqn2 y eqn3; sin embargo, deben especificarse también las variables v1, v2 y v3. Si a *solve()* se le llama con un menor número de variables que de ecuaciones, se obtiene una solución algebraica. Vale la pena hacer un rápido comentario respecto de la forma de la solución; en el argot de programación, se refiere como algo que se conoce como una *estructura*; en este caso, a dicha estructura le llamamos "respuesta". Se accede a cada componente de la estructura de manera separada por nombre, como se muestra.

PRÁCTICA

4.2 Calcule la tensión en cada fuente de corriente del circuito de la figura 4.5.

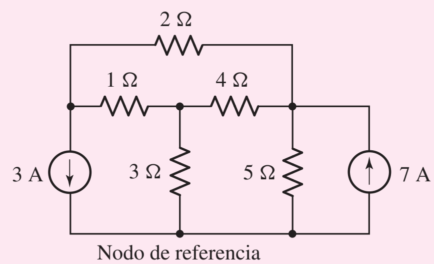


FIGURA 4.5

Respuesta: $v_{3A} = 5.235$ V; $v_{7A} = 11.47$ V.

Los ejemplos anteriores han demostrado el método básico para realizar el análisis nodal, pero vale la pena considerar qué pasa si las fuentes dependientes también se encuentran presentes.

EJEMPLO 4.3

Determine la potencia proporcionada por la fuente dependiente de la figura 4.6*a*.

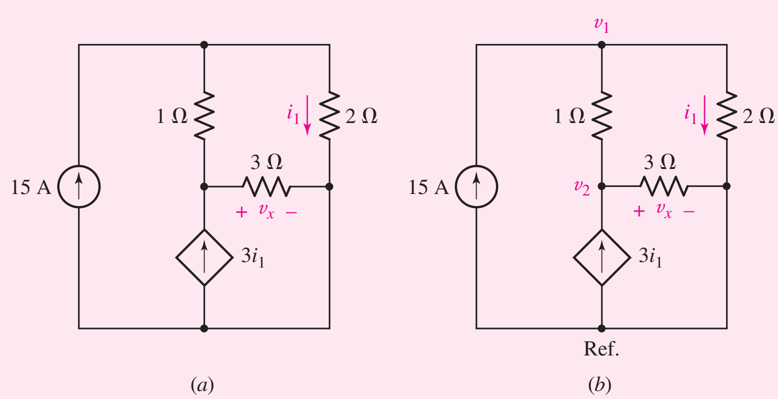


FIGURA 4.6 (*a*) Circuito de cuatro nodos que contiene una fuente de corriente dependiente. (*b*) Circuito marcado para el análisis nodal.

Seleccionamos el nodo inferior como nuestra referencia, ya que cuenta con el número más grande de conexiones ramales, y procedemos a marcar las tensiones nodales v_1 y v_2 como se muestra en la figura 4.6*b*. La cantidad marcada v_x es, en realidad, igual a v_2.

En el nodo 1, escribimos:

$$15 = \frac{v_1 - v_2}{1} + \frac{v_1}{2} \qquad [10]$$

y en el nodo 2:

$$3i_1 = \frac{v_2 - v_1}{1} + \frac{v_2}{3} \qquad [11]$$

Desafortunadamente, sólo tenemos dos ecuaciones pero con tres incógnitas, lo cual *es el resultado directo de la presencia de la fuente de corriente dependiente, puesto que no está controlada por una tensión nodal.* Por ende, necesitamos desarrollar una ecuación adicional que relacione i_1 con una o más tensiones nodales.

En este caso encontramos que

$$i_1 = \frac{v_1}{2} \qquad [12]$$

la cual, sustituyéndola en la ecuación [11], obtenemos (con un poco de simplificación):

$$3v_1 - 2v_2 = 30 \qquad [13]$$

y la ecuación [10] se simplifica en:

$$-15v_1 + 8v_2 = 0 \qquad [14]$$

Al despejar, encontramos que $v_1 = -40$ V, $v_2 = -75$ V e $i_1 = 0.5\ v_1 = -20$ A. Por lo tanto, la potencia suministrada por la fuente dependiente es igual a $(3i_1)(v_2) = (-60)\ (-75) = 4.5$ kW.

Podemos observar que la presencia de una fuente dependiente originará la necesidad de una ecuación adicional en nuestro análisis si la cantidad controladora no es una tensión nodal. Ahora veamos el mismo circuito, pero con la variable controladora de la fuente de corriente dependiente cambiada a otro valor: la tensión de la resistencia de 3 Ω, la cual es, de hecho, una tensión nodal. Encontraremos que solamente se requieren *dos* ecuaciones para terminar el análisis.

EJEMPLO 4.4

Determine la potencia suministrada por la fuente dependiente de la figura 4.7*a*.

Seleccionamos el nodo inferior como nuestra referencia y se marcan las tensiones nodales como se muestra en la figura 4.7*b*. Hemos marcado la tensión nodal v_x explícitamente para efectos de claridad. Observe que la selección del nodo de referencia es importante en este caso; esto lleva a la cantidad v_x, la cual es una tensión nodal.

La ecuación LCK del nodo 1 es:

$$3i_1 = \frac{v_2 - v_1}{1} + \frac{v_2}{3} \qquad [15]$$

(*continúa*)

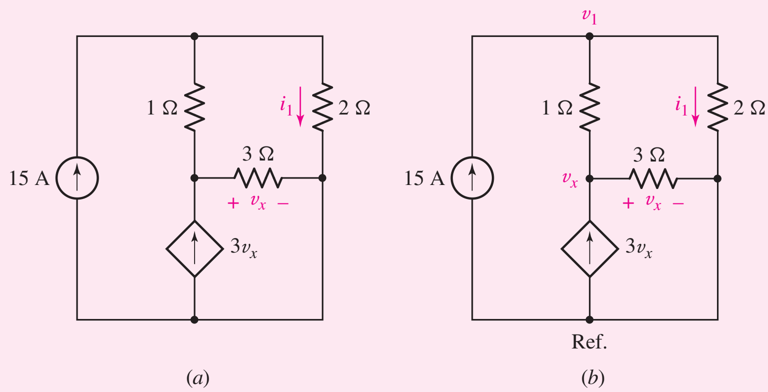


FIGURA 4.7 (*a*) Circuito de cuatro nodos que contiene una fuente de corriente dependiente. (*b*) Circuito marcado para el análisis nodal.

y la del nodo x es

$$3v_x = \frac{v_x - v_1}{1} + \frac{v_2}{3} \qquad [16]$$

Si se agrupan términos y se despeja, encontramos que $v_1 = \frac{50}{7}$ V y $v_x = -\frac{30}{7}$ V. Por lo tanto, la fuente dependiente de este circuito genera $(3v_x)(v_x) = 55.1$ W.

PRÁCTICA

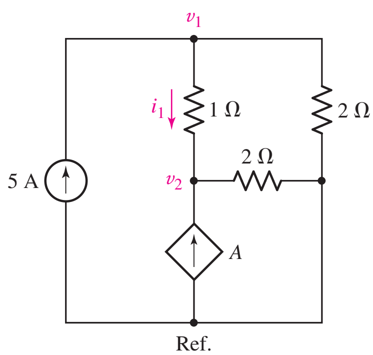


FIGURA 4.8

4.3 Determine la tensión nodal v_1 del circuito de la figura 4.8 si A es (*a*) $2i_1$; (*b*) $2v_1$.

Respuesta: (*a*) $\frac{70}{9}$ V; (*b*) –10 V.

Resumen del procedimiento básico del análisis nodal

1. **Contar el número de nodos** (N).
2. **Designar un nodo de referencia.** El número de términos en sus ecuaciones nodales pueden minimizarse seleccionando el nodo con el mayor número de ramas conectadas a él.
3. **Marcar las tensiones nodales** (existen $N - 1$ tensiones).
4. **Escribir una ecuación de LCK de cada uno de los nodos excepto el de referencia.** Sumar las corrientes que fluyen *hacia* un nodo desde las fuentes en un miembro de la ecuación. Del otro lado, sumar las corrientes que circulan *hacia afuera* del nodo a través de las resistencias. Poner particular atención a los signos “–”.
5. **Expresar cualquier incógnita adicional como corrientes o tensiones, excepto tensiones nodales, en términos de tensiones nodales apropiadas.** Esta situación puede presentarse si en el circuito hay fuentes de tensión o fuentes dependientes.
6. **Organizar las ecuaciones.** Agrupándolas de acuerdo con las tensiones nodales.
7. **Resolver el sistema de ecuaciones para encontrar las tensiones nodales** (existen $N - 1$ tensiones).

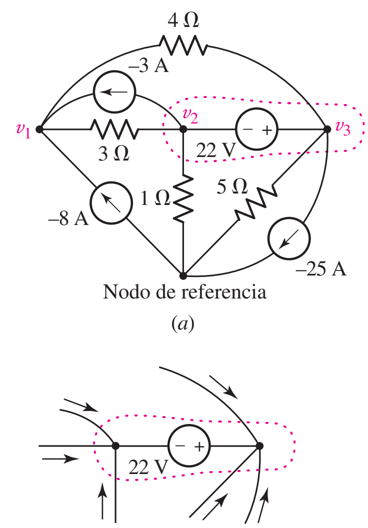
Estos siete pasos básicos funcionarán bien en cualquier circuito que encontremos, aunque se requerirá de especial cuidado si se presentan fuentes de tensión. En la sección 4.2 se analizan dichas situaciones.

4.2 EL SUPERNODO

Como ejemplo de la mejor forma de manejar las fuentes de tensión al realizar el análisis de nodos, considere el circuito que se muestra en la figura 4.9*a*. El circuito original de cuatro nodos de la figura 4.4 se cambió al sustituir la resistencia de 7 Ω entre los nodos 2 y 3 por una fuente de tensión de 22 V. Seguimos asignando el mismo nodo a las tensiones de referencia v_1, v_2 y v_3. Antes, el siguiente paso era la aplicación de la LCK en cada uno de los nodos de no referencia. Si tratamos de hacerlo otra vez, surgirán algunas dificultades en los nodos 2 y 3, ya que no conocemos cuál es la corriente en la rama con la fuente de tensión. No hay manera de que podamos expresar la corriente como una función de la tensión, ya que la definición de una fuente de tensión señala precisamente que la tensión es independiente de la corriente.

Hay dos modos de salir de este dilema. El método más complicado consiste en asignar una corriente desconocida a la rama que contiene la fuente de tensión, proseguir para aplicar tres veces la LCK y luego aplicar una vez la LVK ($v_3 - v_2 = 22$) entre los nodos 2 y 3; el resultado consiste en cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas para este ejemplo.

El método más sencillo considera al nodo 2, al nodo 3 y a la fuente de tensión en conjunto como una especie de ***supernodo*** y se aplica la LCK en ambos nodos al mismo tiempo; el supernodo se indica por medio de una región encerrada por la línea punteada de la figura 4.9*a*. Esto es posible debido a que si la corriente total que sale del nodo 2 es cero y la corriente total que sale del nodo 3 es nula, entonces la corriente total que sale de la combinación de los dos nodos es igual a cero. Este concepto se describe de manera gráfica en la vista ampliada de la figura 4.9*b*.



■ **FIGURA 4.9** (*a*) Circuito del ejemplo 4.2 con una fuente de 22 V en lugar de la resistencia de 7 Ω. (*b*) Vista ampliada de la región definida como supernodo; la LCK requiere que todas las corrientes que fluyan hacia la región sumen cero, pues de otra forma los electrones se apilarían o desaparecerían.

EJEMPLO 4.5

Determine el valor de la tensión del nodo desconocido v_1 del circuito de la figura 4.9*a*.

La ecuación de la LCK del nodo 1 es la misma que la del ejemplo 4.2:

$$-8 - 3 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

o

$$-0.5833v_1 - 0.3333v_2 - 0.2500v_3 = -11 \qquad [17]$$

A continuación consideramos el supernodo 2-3. Están conectadas dos fuentes de tensión y cuatro resistencias. Por lo tanto,

$$3 + 25 = \frac{v_2 - v_1}{3} + \frac{v_3 - v_1}{4} + \frac{v_3}{5} + \frac{v_2}{1}$$

o

$$-0.5833v_1 + 1.3333v_2 + 0.45v_3 = 28 \qquad [18]$$

(*continúa*)

Puesto que tenemos tres incógnitas, necesitamos una ecuación adicional, y además debemos aprovechar el hecho de que hay una fuente de tensión de 22 V entre los nodos 2 y 3.

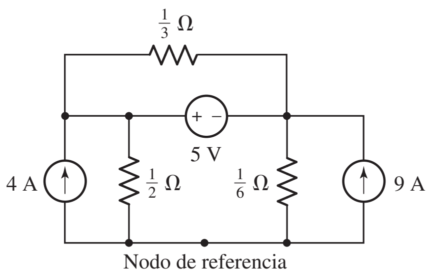
$$v_2 - v_3 = -22 \qquad [19]$$

Al resolver las ecuaciones [17] a [19], la solución para v_1 es 1.071 V.

PRÁCTICA

4.4 Calcule la tensión en cada fuente de corriente del circuito de la figura 4.10.

Respuesta: 5.375 V, 375 mV.



■ **FIGURA 4.10**

De ese modo, la presencia de una fuente de tensión reduce en uno el número de nodos de no referencia en los que se debe aplicar la LCK, sin que importe si la fuente de tensión se extiende entre dos nodos de no referencia o si está conectada entre un nodo y la referencia. También debemos ser cuidadosos cuando se analizan circuitos como el del problema de práctica 4.4. Puesto que ambos extremos de la resistencia son parte del supernodo, desde un punto de vista técnico debe haber *dos* términos de corriente correspondientes en la ecuación LCK, aunque se cancelan entre sí. Podemos resumir el método del supernodo de la manera siguiente:

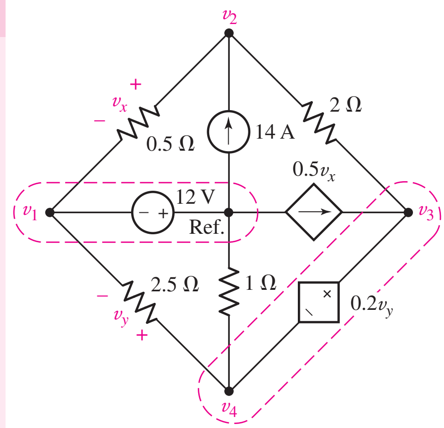
Resumen del procedimiento de análisis del supernodo

1. **Contar el número de nodos** (N).
2. **Designar un nodo de referencia.** El número de términos en sus ecuaciones nodales pueden minimizarse seleccionando el nodo con el mayor número de ramas conectadas a él.
3. **Marcar las tensiones nodales** (habrá $N - 1$ tensiones).
4. **Si el circuito cuenta con fuentes de tensión, construir un supernodo alrededor de cada una.** Para hacer esta tarea debe encerrarse la fuente, sus dos terminales y cualquier otro elemento conectado entre las dos terminales dentro de un cuadro dibujado con línea punteada.
5. **Escribir una ecuación LCK de cada nodo de no referencia y de cada supernodo que *no contenga el nodo de referencia.*** Sumar las corrientes que circulen *hacia* un nodo/supernodo desde las fuentes de corriente en un miembro de la ecuación. En el otro miembro, sumar las corrientes que circulen hacia *afuera* del nodo/supernodo a través de las resistencias. Poner particular atención a los signos "−".
6. **Relacionar la tensión en cada fuente de tensión con las tensiones nodales.** Esta tarea se lleva a cabo aplicando LVK; es necesaria una ecuación por cada supernodo definido.
7. **Expresar cualquier incógnita adicional (es decir, corrientes o tensiones diferentes a las tensiones nodales) en términos de las tensiones nodales apropiadas.** Esta situación puede presentarse si existen fuentes dependientes en nuestro circuito.
8. **Organizar las ecuaciones.** Agrupar términos de acuerdo con las tensiones nodales.
9. **Resolver el sistema de ecuaciones para obtener las tensiones** (habrá $N - 1$ ecuaciones).

Podemos observar que se han agregado dos pasos adicionales al procedimiento general de análisis nodal. Sin embargo, en realidad, la aplicación de la técnica del supernodo a un circuito que contenga fuentes de tensión no conectadas al nodo de referencia dará como resultado una reducción del número de ecuaciones de LCK que sean necesarias. Tomando en cuenta lo anterior, consideremos el circuito de la figura 4.11, que contiene los cuatro tipos de fuentes y cuenta con cinco nodos.

EJEMPLO 4.6

Determine las tensiones entre cada nodo y el de referencia en el circuito de la figura 4.11.



■ **FIGURA 4.11** Circuito con cinco nodos con cuatro tipos diferentes de fuentes.

Después de establecer un supernodo en torno a cada fuente de *tensión*, necesitamos escribir ecuaciones de LCK sólo del nodo 2 y del supernodo que contiene a la fuente de tensión dependiente. Por inspección, está claro que $v_1 = -12$ V.

En el nodo 2,

$$\frac{v_2 - v_1}{0.5} + \frac{v_2 - v_3}{2} = 14 \qquad [20]$$

mientras en el supernodo 3-4,

$$0.5v_x = \frac{v_3 - v_2}{2} + \frac{v_4}{1} + \frac{v_4 - v_1}{2.5} \qquad [21]$$

A continuación relacionamos las tensiones de fuente con las tensiones de nodo:

$$v_3 - v_4 - = 0.2\ v_y \qquad [22]$$

y

$$0.2\ v_y = 0.2\ (v_4 - v_1) \qquad [23]$$

Por último, expresamos la fuente de corriente dependiente en términos de las variables asignadas:

$$0.5\ v_x = 0.5(v_2 - v_1) \qquad [24]$$

Cinco nodos requieren *cuatro* ecuaciones LCK en el análisis nodal general, pero hemos reducido este requerimiento a *sólo dos,* ya que se formaron dos supernodos separados. Cada supernodo requiere una ecuación de LVK (ecuación [22] y $v_1 =$ -12, esta última inscrita por inspección). Ninguna de las fuentes dependientes estuvo controlada por una tensión nodal, por lo que se necesitaron dos ecuaciones adicionales como resultado.

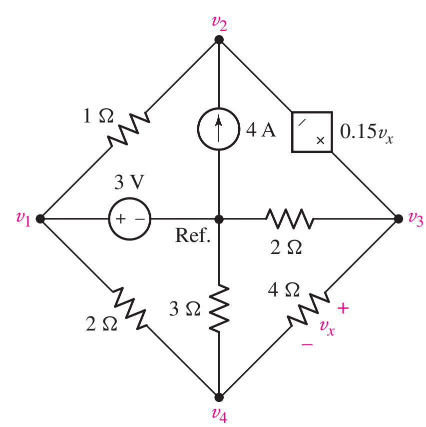
Una vez hecho lo anterior, ahora podemos eliminar v_x y v_y para obtener un conjunto de cuatro ecuaciones con las cuatro tensiones de nodo:

$$\begin{aligned}
-2v_1 + 2.5v_2 - 0.5v_3 \quad &= \quad 14 \\
0.1v_1 - \quad v_2 + 0.5v_3 + 1.4v_4 &= \quad 0 \\
v_1 \quad &= -\ 12 \\
0.2v_1 - \quad + \quad v_3 - 1.2v_4 &= \quad 0
\end{aligned}$$

Al despejar, obtenemos $v_1 = -12$V, $v_2 = -4$ V, $v_3 = 0$ V y $v_4 = -2$ V.

PRÁCTICA

4.5 Determine las tensiones nodales del circuito de la figura 4.12.



■ **FIGURA 4.12**

Respuesta: $v_1 = 3$ V, $v_2 = -2.33$ V, $v_3 = -1.91$ V, $v_4 = 0.945$ V.

4.3 ANÁLISIS DE MALLA

Como hemos visto, el análisis de nodos es una técnica sencilla de análisis cuando están presentes solamente fuentes de corriente, y las fuentes de tensión se incluyen fácilmente con el concepto de supernodo. Aun así, el análisis de nodos se basa en la LCK, y en algún momento, el lector podría preguntarse si no hay un procedimiento similar basado en la LVK. Sí existe este procedimiento —se conoce como ***análisis de mallas***— y aunque estrictamente se aplica a lo que en breve definiremos como circuito plano, en muchos casos puede resultar más sencillo que el análisis de nodos.

Si se puede dibujar el esquema de un circuito sobre una superficie plana de manera tal que ninguna rama pase sobre o por debajo de cualquier otra rama, entonces se afirma que es un ***circuito plano*** o de ***forma plana***. Por lo tanto, la figura 4.13*a* muestra una red de forma plana, la 4.13*b* presenta una red de forma no plana y la 4.13*c* muestra también una red de forma plana, aunque se dibuja de modo que parece ser no plana a primera vista.

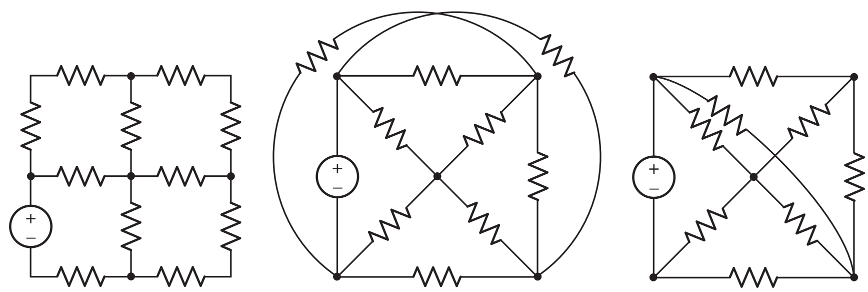


FIGURA 4.13 Ejemplos de redes de forma plana y no planas; los alambres que se cruzan sin que se señalen con un punto grueso no están en contacto físico entre sí.

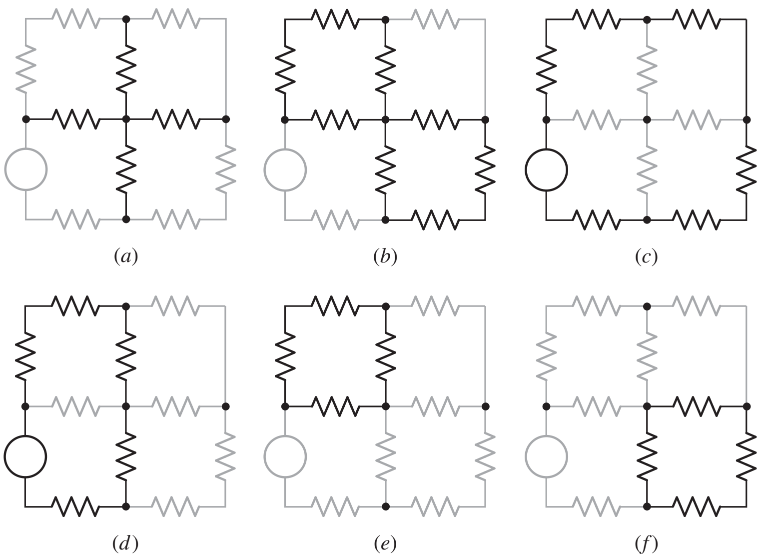
En la sección 3.1 se definieron los términos ***trayectoria***, ***trayectoria cerrada*** y ***lazo***. Antes de definir lo que es una malla, debemos considerar el conjunto de ramas dibujadas con líneas gruesas de la figura 4.14. El primer conjunto de ramas no es una trayectoria, puesto que cuatro ramas están conectadas al nodo central, y, desde luego, tampoco constituyen un lazo. El segundo conjunto de ramas no representa una trayectoria, puesto que sólo se recorre pasando dos veces a través del nodo central. Las cuatro trayectorias restantes corresponden a lazos. El circuito contiene 11 ramas.

La ***malla*** es una propiedad de un circuito de forma plana y no se define para un circuito de forma no plana, sino como un lazo que no contiene ningún otro lazo dentro de él. Así, los lazos indicados en la figura 4.14*c* y *d* no son mallas, en tanto que de las partes *e* y *f* sí lo son. Una vez que se ha dibujado un circuito de manera clara en forma plana, a menudo tiene la apariencia de una ventana con hojas de vidrio múltiples; puede considerarse que la frontera de cada vidrio de la ventana es una malla.

> Es necesario mencionar que el análisis tipo malla se aplica a circuitos de forma no plana, pero como no es factible definir un conjunto completo de mallas únicas para este tipo de circuitos, no se pueden asignar corrientes de malla únicas.

Si una red es de forma plana, se utiliza el análisis de malla para llevar a cabo su estudio. Esta técnica implica el concepto de ***corriente de malla***, que presentamos al considerar el análisis del circuito de dos mallas de la figura 4.15*a*.

Del mismo modo que procedimos en el caso del circuito de un solo lazo, definiremos una corriente a través de una de las ramas. Denominemos i_1 a la corriente que circula hacia la derecha a través de la resistencia de 6 Ω. Aplicaremos la LVK alrededor de cada una de las dos mallas, y las dos ecuaciones resultantes son suficientes para determinar las dos corrientes desconocidas. Después definimos una segunda corriente i_2, que fluye hacia la derecha en la resistencia de 4 Ω. También podríamos denominar como i_3 a la corriente que fluye hacia abajo por la rama central, pero resulta evidente,



■ **FIGURA 4.14** (*a*) El conjunto de ramas especificadas por líneas gruesas no es ni una trayectoria ni un lazo. (*b*) En este caso, el conjunto de ramas no es una trayectoria, ya que pueden recorrerse sólo al pasar dos veces por el nodo central. (*c*) Esta trayectoria es un lazo pero no una malla, puesto que encierra otros lazos. (*d*) Esta trayectoria es también un lazo pero no una malla. (*e, f*) Cada una de estas trayectorias es un lazo y una malla.

a partir de la LCK, que i_3 puede expresarse en términos de las dos corrientes supuestas antes como $(i_1 - i_2)$. Las corrientes supuestas se muestran en la figura 4.15*b*.

Siguiendo el método de solución para el circuito de un lazo, aplicamos ahora la LVK a la malla del lado izquierdo:

$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

o

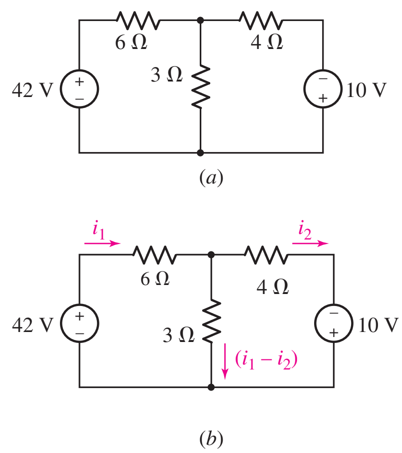
$$9i_1 - 3i_1 = 42 \qquad [25]$$

Aplicando la LVK en la malla del lado derecho,

$$-3(i_1 - i_2) + 4i_2 - 10 = 0$$

o

$$-3i_1 + 7i_2 = 10 \qquad [26]$$



■ **FIGURA 4.15** (*a, b*) Circuito simple para el que se requieren las corrientes.

Las ecuaciones [25] y [26] son independientes; no es posible deducir una a partir de la otra. Hay dos ecuaciones y dos incógnitas, y la solución se obtiene sin ninguna dificultad:

$$i_1 = 6 \text{ A} \qquad i_2 = 4 \text{ A} \qquad \text{e} \qquad (i_1 - i_2) = 2 \text{ A}$$

Si nuestro circuito contiene *M* mallas, entonces esperamos tener *M* corrientes de malla y, por lo tanto, deberemos escribir *M* ecuaciones independientes.

A continuación consideremos este mismo problema de una manera un poco diferente, mediante el uso de corrientes de malla. Definimos una ***corriente de malla*** como aquella que fluye sólo alrededor del perímetro de una malla. Una de las grandes ventajas en el empleo de las corrientes de malla es el hecho de que la ley de corriente de Kirchhoff se satisface de manera automática. Si una corriente de malla fluye *hacia* un nodo determinado, también fluye *fuera* de él.

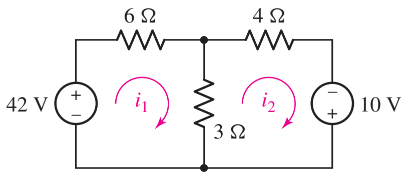


FIGURA 4.16 El mismo circuito que el de la figura 4.15*b*, pero visto de una manera un poco diferente.

A menudo se identifica una corriente de malla como una corriente de rama, al igual que i_1 e i_2 se identificaron en este ejemplo. Sin embargo, lo anterior no siempre es cierto, pues al considerar una red cuadrada de nueve mallas, la corriente de la malla central no puede identificarse como la corriente de alguna rama.

Si marcamos como la malla 1 a la del lado izquierdo del problema, es factible que establezcamos una corriente de malla i_1 que circula en la misma dirección que las manecillas del reloj alrededor de dicha malla. Una corriente de malla se indica con una flecha curva que casi se cierra sobre sí misma y se dibuja dentro de la malla apropiada, como se muestra en la figura 4.16. La corriente de malla i_2 se establece en la malla restante, otra vez en la dirección de las manecillas del reloj. Si bien las direcciones son arbitrarias, siempre debemos elegir las corrientes de malla en el sentido de las manecillas del reloj debido a que, en tal caso, en las ecuaciones se produce una cierta simetría de minimización de errores.

Ya no contamos con una corriente o una flecha de corriente que se muestre de manera directa sobre cada rama del circuito. La corriente a través de cualquier rama debe determinarse al considerar las corrientes de malla que fluyen en cada malla en la que aparece dicha rama. Esto no es difícil, debido a que ninguna rama puede aparecer en más de dos mallas. Por ejemplo, la resistencia 3 Ω aparece en ambas mallas, y la corriente que fluye hacia abajo a través de ella es $i_1 - i_2$. La resistencia 6 Ω sólo aparece en la malla 1, y la corriente que fluye hacia la derecha en esa rama es igual a la corriente de malla i_1.

Para la malla izquierda,

$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

mientras que para la malla derecha,

$$3(i_2 - i_1) + 4i_2 - 10 = 0$$

así que estas dos ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones [25] y [26].

EJEMPLO 4.7

Determine la potencia suministrada por la fuente de 2 V de la figura 4.17*a*.

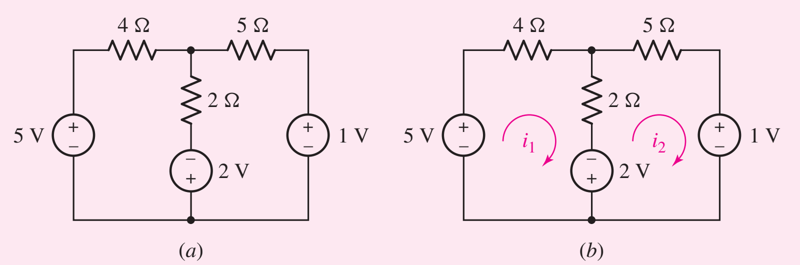


FIGURA 4.17 (*a*) Circuito de dos mallas que contiene tres fuentes. (*b*) Circuito marcado para el análisis de mallas.

Primero definimos dos corrientes de malla en el sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 4.17*b*.

Comenzando en la parte inferior izquierda de la malla 1, escribimos la ecuación de LVK siguiente a medida que procedemos por las ramas en el sentido de las manecillas del reloj:

$$-5 + 4i_1 + 2(i_1 - i_2) - 2 = 0$$

Hacemos lo mismo en la malla 2, por lo cual podemos escribir:

$$+2 + 2(i_2 - i_1) + 5i_2 + 1 = 0$$

Simplificando y agrupando términos:

$$6i_1 - 2i_2 = 7$$

y

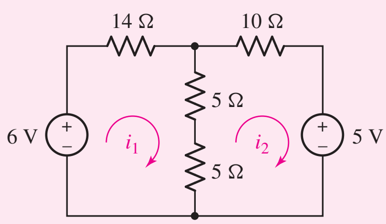
$$-2i_1 + 7i_2 = -3$$

Despejando, se obtiene $i_1 = \frac{43}{38} = 1.132$ A e $i_2 = -\frac{2}{19} = -0.1053$ A.

La corriente que circula hacia afuera de la terminal de referencia positiva de la fuente de 2 V es $i_1 - i_2$. Por lo tanto, la fuente de 2 V suministra (2) (1.237) = 2.474 W.

PRÁCTICA

4.6 Determine i_1 e i_2 en el circuito de la figura 4.18.



■ **FIGURA 4.18**

Respuesta: +184.2 mA; −157.9 mA.

Examinemos en seguida el circuito de cinco nodos, siete ramas y tres mallas que se presenta en la figura 4.19. Es un problema un poco más complicado debido a la malla adicional.

EJEMPLO 4.8

Recurra al análisis de malla para determinar las tres corrientes de malla en el circuito de la figura 4.19.

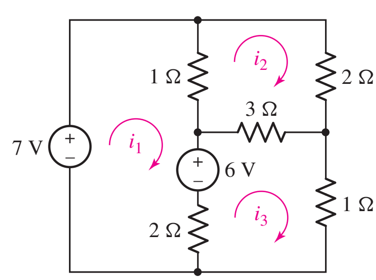
Las tres corrientes de malla requeridas se asignan como se indica en la figura 4.19 y duplicamos de manera metódica la LVK en torno a cada malla:

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 6 + 2(i_1 - i_3) = 0$$
$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$
$$2(i_3 - i_1) - 6 + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

Simplificando,

$$3i_1 - i_2 - 2i_3 = 1$$
$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0$$
$$-2i_1 - 3i_2 + 6i_3 = 6$$

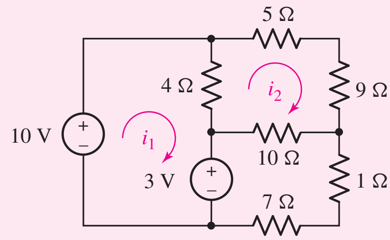
y resolviendo obtenemos $i_1 = 3$ A, $i_2 = 2$ A e $i_3 = 3$ A.



■ **FIGURA 4.19** Circuito de cinco nodos, siete ramas y tres mallas.

PRÁCTICA

4.7 Determine i_1 e i_2 en el circuito de la figura 4.20.



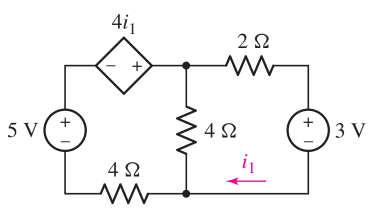
■ **FIGURA 4.20**

Respuesta: 2.220 A, 470.0 mA.

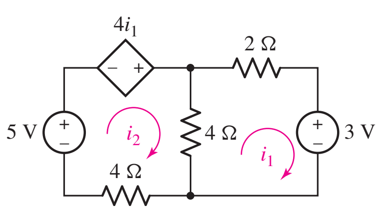
Los ejemplos anteriores trataron, exclusivamente, acerca de circuitos alimentados por fuentes de tensión independientes. Si en el circuito se incluyera una fuente de corriente, podría simplificar o complicar el análisis, como lo estudiamos en la sección 4.4. Como lo analizamos en el estudio de la técnica de análisis nodal, en general las fuentes dependientes requieren de una ecuación adicional además de las *M* ecuaciones de malla, a menos que la variable controladora sea una corriente de malla (o la suma de las corrientes de malla). En el ejemplo siguiente se explica este caso.

EJEMPLO 4.9

Determine la corriente i_1 del circuito de la figura 4.21*a*.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 4.21** (*a*) Circuito de dos mallas que contiene una fuente dependiente. (*b*) Circuito marcado para el análisis de mallas.

La corriente i_1 es, en realidad, una corriente de malla, así que más que redefinirla, marcamos la corriente de malla que está más a la derecha, i_1, y definimos una corriente de malla en el sentido de las manecillas del reloj, i_2, para la malla de la izquierda, como se muestra en la figura 4.21*b*.

Si aplicamos LVK a la malla izquierda, tenemos:

$$-5 - 4i_1 + 4(i_2 - i_1) + 4i_2 = 0 \qquad [27]$$

y para la malla de la derecha, obtenemos:

$$4(i_1 - i_2) + 2i_2 + 3 = 0 \qquad [28]$$

Agrupando términos, estas ecuaciones pueden escribirse de manera más compacta como:

$$-8i_1 + 8i_2 = 5$$

y

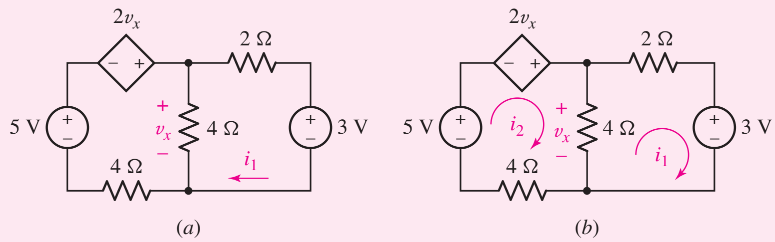
$$6i_1 - 4i_2 = -3$$

Despejando, $i_2 = 375$ mA, así que $i_1 = -250$ mA.

Puesto que la fuente dependiente de la figura 4.21 está controlada por la corriente de malla (i_1), sólo dos ecuaciones —la [27] y la [28]— se requirieron en el análisis del circuito de dos mallas. En el ejemplo siguiente, exploramos la situación que se presenta si la variable controladora *no* es una corriente de malla.

EJEMPLO 4.10

Determine la corriente i_1 del circuito de la figura 4.22*a*.



■ **FIGURA 4.22** (*a*) Circuito con una fuente dependiente controlada por una tensión. (*b*) Circuito marcado para el análisis de mallas.

Con la finalidad de hacer una comparación con el ejemplo 4.9, utilizamos las mismas definiciones de corriente de malla, como se muestra en la figura 4.22*b*.

En la malla de la izquierda, al aplicar la LVK se obtiene

$$-5 - 2v_x + 4(i_2 - i_1) + 4i_2 = 0 \qquad [29]$$

y en la malla de la derecha encontramos lo mismo que antes,

$$4(i_1 - i_2) + 2i_1 + 3 = 0 \qquad [30]$$

Puesto que la fuente dependiente está controlada por la tensión desconocida v_x, tenemos *dos* ecuaciones con *tres* incógnitas. La solución a este dilema es simplemente construir una ecuación para v_x en términos de las corrientes de malla, como

$$v_x = 4(i_2 - i_1) \qquad [31]$$

Simplificamos este sistema de ecuaciones sustituyendo la ecuación [31] en la ecuación [29], lo que resulta en

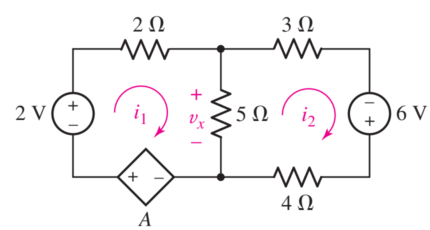
$$4i_1 = 5$$

Simplificando, encontramos que $i_1 = 1.25$ A. En este ejemplo en particular, la ecuación [30] no es necesaria a menos que deseemos obtener un valor para i_2.

PRÁCTICA

4.8 Determine i_1 en el circuito de la figura 4.23 si la cantidad controladora A es igual a: (*a*) $2i_2$; (*b*) $2v_x$.

Respuesta: (*a*) 1.35 A; (*b*) 546 mA.



■ **FIGURA 4.23**

El procedimiento del análisis de malla puede resumirse en los siete pasos básicos descritos a continuación, que son válidos en cualquier circuito *plano* aunque la presencia de fuentes de corriente requerirá que se tomen precauciones. Dicha situación se estudia en la sección 4.4.

Resumen del procedimiento básico del análisis de malla

1. **Determinar si el circuito es planar (forma plana)**. Si no, lleve a cabo el análisis nodal.
2. **Contar el número de mallas** (M). Volver a dibujar el circuito si es necesario.
3. **Marcar cada una de las corrientes de malla M**. En general, definir todas las corrientes de malla que circulan en el sentido de las manecillas del reloj facilita el análisis.
4. **Escribir la ecuación LVK en cada malla**. Iniciar con un nodo conveniente y proceder en la dirección de la corriente de malla. Poner especial atención a los signos "−". Si una fuente de corriente se localiza en la periferia de una malla, no es necesaria la ecuación LVK y la corriente de malla se determina por inspección.
5. **Expresar cualquier incógnita adicional como tensiones o corrientes que sean diferentes a las corrientes de malla en términos de las corrientes de malla apropiadas**. Esta situación puede presentarse si en el circuito aparecen fuentes de corriente o fuentes dependientes.
6. **Organizar las ecuaciones**. Agrupar términos de acuerdo con las corrientes de malla.
7. **Resolver el sistema de ecuaciones para encontrar las corrientes de malla** (se encontrarán M corrientes).

4.4 LA SUPERMALLA

¿Cómo debemos modificar este procedimiento directo cuando en la red hay una fuente de corriente? Desde la perspectiva del análisis nodal, tendríamos que percibir que hay dos métodos posibles. Primero, podríamos asignar una tensión desconocida a la fuente de corriente, aplicar la LVK alrededor de cada malla como antes, y luego relacionar la fuente de corriente con las corrientes de malla asignadas. Por lo general, éste es el método más difícil.

Una mejor técnica se asemeja bastante al método del supernodo del análisis nodal. En este caso formamos un supernodo al encerrar por completo la fuente de tensión dentro del supernodo y al reducir en 1 el número de nodos de no referencia de cada fuente de tensión. Ahora creamos un tipo de **"*supermalla*"** a partir de dos mallas que tienen una fuente de corriente como un elemento común: la fuente de corriente está en el interior de la supermalla. De ese modo reducimos en 1 el número de mallas de cada fuente de corriente presente. Si la fuente de corriente se ubica en el *perímetro* del circuito, entonces pasamos por alto la malla simple en la cual se encuentra. Por lo tanto, la ley de Kirchhoff de tensión se aplica sólo en aquellas mallas o supermallas de la red reinterpretada.

EJEMPLO 4.11

Determine las tres corrientes de malla en la figura 4.24*a*.

Observamos que la fuente independiente de corriente de 7 A es común a dos mallas, lo cual nos lleva a crear una supermalla cuyo interior corresponde a las mallas 1

y 3, como se muestra en la figura 4.24*b*. Al aplicar la LVK alrededor de este bucle (lazo),

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

o

$$i_1 - 4i_2 + 4\,i_3 = 7 \qquad [32]$$

y alrededor de la malla 2,

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

o

$$-\,i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0 \qquad [33]$$

Por último, la corriente de la fuente independiente se relaciona con las corrientes de mallas supuestas,

$$i_1 - i_3 = 7 \qquad [34]$$

Al resolver las ecuaciones [32] a [34], encontramos que $i_1 = 9$ A, $i_2 = 2.5$ A e $i_3 = 2$ A.

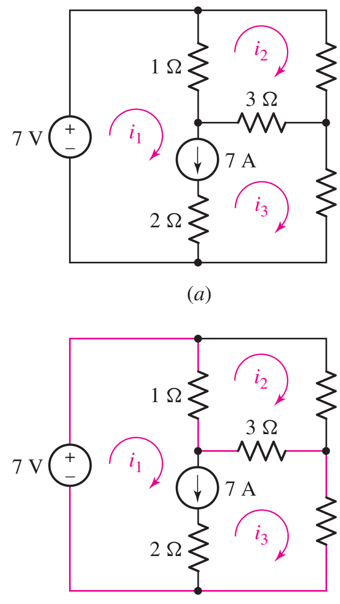


FIGURA 4.24 (*a*) Circuito de tres mallas con una fuente de corriente independiente. (*b*) Supermalla definida por la línea de color.

PRÁCTICA

4.9 Determine la corriente i_1 del circuito de la figura 4.25.

Respuesta: −1.93 A.

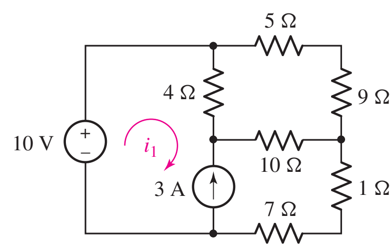


FIGURA 4.25

La presencia de una o más fuentes dependientes requiere tan sólo que cada una de tales cantidades de fuente y la variable de la que dependen se expresen en términos de las corrientes de malla asignadas. En la figura 4.26, por ejemplo, observamos que ambas fuentes de corriente, dependiente e independiente, se incluyen en la red. Veamos cómo su presencia afecta el análisis del circuito y que en realidad lo simplifica.

EJEMPLO 4.12

Evalúe las tres corrientes incógnitas en el circuito de la figura 4.26.

Las fuentes de corriente aparecen en las mallas 1 y 3. Dado que la fuente de 15 A se localiza en el perímetro del circuito, podemos eliminar la malla 1 de la consideración; resulta claro que $i_1 = 15$ A.

Podemos darnos cuenta de que debido a que conocemos una de las dos corrientes de malla que son relevantes a la fuente de corriente independiente, no hay necesidad de escribir una ecuación de supermalla alrededor de las mallas 1 y 3. En lugar de hacer eso, simplemente relacionamos i_1 e i_3 con la corriente de la fuente dependiente mediante la LCK:

$$\frac{v_x}{9} = i_3 - i_1 = \frac{3(i_3 - i_2)}{9}$$

la cual puede escribirse en forma más compacta como:

$$-i_1 + \frac{1}{3}i_2 + \frac{2}{3}i_3 = 0 \quad \text{o} \quad \frac{1}{3}i_2 + \frac{2}{3}i_3 = 15 \qquad [35]$$

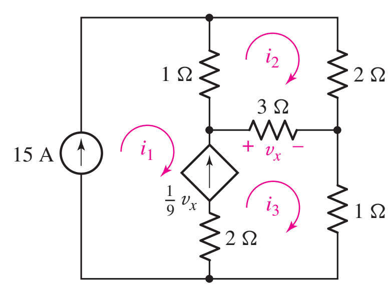


FIGURA 4.26 Circuito de tres mallas con una fuente de corriente dependiente y una independiente.

(continúa)

Con una ecuación y dos incógnitas, todo lo que resta es escribir una ecuación de LVK alrededor de la malla 2:

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_1) = 0$$

o

$$6i_2 - 3i_3 = 15 \qquad [36]$$

Resolviendo las ecuaciones [35] y [36], encontramos que $i_2 = 11$ A e $i_3 = 17$ A; por inspección, determinamos que $i_1 = 15$ A.

PRÁCTICA

4.10 Determine v_3 en el circuito de la figura 4.27.

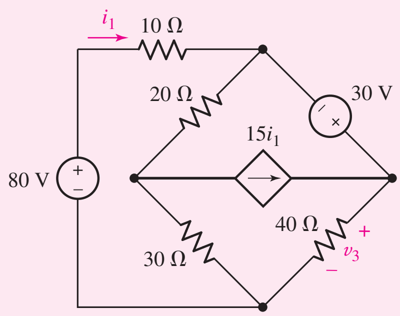


FIGURA 4.27

Respuesta: 104.2 V.

Ahora podemos resumir el método general para escribir ecuaciones de malla, ya sea que haya fuentes dependientes o no, fuentes de tensión y/o fuentes de corriente, siempre y cuando el circuito pueda dibujarse como un circuito de forma plana:

Resumen del procedimiento de análisis de la supermalla

1. **Determinar si el circuito es un circuito de forma plana**. Si no, llevar a cabo el análisis nodal.
2. **Contar el número de mallas** (M). Volver a dibujar el circuito si es necesario.
3. **Marcar cada una de las corrientes de las M mallas**. En general, la definición de todas las corrientes de malla que circulan en el sentido de las manecillas del reloj da como resultado un análisis más simple.
4. **Si el circuito contiene fuentes de corriente que están compartidas por dos mallas, formar una supermalla que encierre a ambas mallas**. Un cuadro remarcado es de ayuda al escribir las ecuaciones LVK.
5. **Escribir una ecuación LVK alrededor de cada malla/supermalla**. Iniciar en un nodo adecuado y proceder en la dirección de la corriente de malla. Poner especial atención a los signos "–". Si una fuente de corriente se loca-

liza en la periferia de una malla, no es necesaria ninguna ecuación de LVK y la corriente de malla se determina por inspección.

6. **Relacionar la corriente que circula desde cada fuente de corriente con las corrientes de las mallas**. Esta tarea se lleva a cabo mediante la LCK; se necesita una de tales ecuaciones para cada supermalla que se defina.
7. **Expresar cualquier otra incógnita como corrientes y tensiones**, **aparte de las corrientes de malla en términos de las corrientes de malla apropiadas**. Esta situación se puede presentar si existen fuentes dependientes en nuestro circuito.
8. **Organizar las ecuaciones**. Agrupar los términos de acuerdo con las tensiones nodales.
9. **Resolver el sistema de ecuaciones para encontrar las tensiones nodales** (se encontrarán M tensiones).

4.5 COMPARACIÓN ENTRE EL ANÁLISIS NODAL Y EL DE MALLA

Ahora que hemos examinado dos métodos muy diferentes para analizar circuitos, parece lógico preguntar si se logra alguna ventaja al utilizar uno u otro. Si el circuito es de forma no plana, entonces no hay elección: sólo se podrá aplicar el análisis nodal.

Sin embargo, siempre que consideremos el análisis de un circuito de forma *plana* habrá situaciones en las que una técnica tiene una pequeña ventaja sobre la otra. Si planeamos utilizar el análisis nodal, entonces un circuito con N nodos proporcionará a lo más $(N - 1)$ ecuaciones de la LCK. Cada supernodo definido reducirá de manera adicional en uno este número. Si el mismo circuito tiene M mallas distintas, entonces obtendremos a lo más M ecuaciones por medio de la LVK; cada supermalla reducirá en uno este número. Con base en estos hechos, debemos elegir el método que producirá el número más pequeño de ecuaciones simultáneas.

Si una o más fuentes dependientes se incluyen en el circuito, cada cantidad controladora puede tener efecto en la elección entre el análisis nodal o de mallas. Por ejemplo, una fuente de tensión dependiente controlada por una tensión nodal no requiere una ecuación adicional cuando llevamos a cabo el análisis nodal. De forma similar, una fuente de corriente dependiente controlada por una corriente de malla no requiere de una ecuación adicional cuando llevamos a cabo el análisis de malla. *¿Qué hay acerca de la situación donde una fuente de tensión dependiente es controlada por una corriente?, o de otra forma, ¿dónde es controlada por una tensión una fuente de corriente dependiente?* Siempre que una cantidad controladora puede relacionarse fácilmente con las corrientes de malla, podemos esperar que el análisis de malla sea la opción más conveniente. De manera similar, si la cantidad controladora puede fácilmente relacionarse con las tensiones en los nodos, puede ser preferible el análisis nodal. Un punto final a este respecto es tener en mente la *ubicación* de la fuente: las fuentes de corriente que se ubican en la periferia de una malla, ya sean dependientes o independientes, se manipulan de una manera más fácil con el análisis de malla; las fuentes de tensión conectadas a la terminal de referencia se manejan más fácilmente mediante el análisis nodal.

Si con cualquiera de los métodos obtenemos en esencia el mismo número de ecuaciones, quizá valga la pena considerar también las cantidades estamos buscando. El análisis nodal origina el cálculo directo de tensiones nodales, en tanto que el análisis de malla proporciona corrientes. Si, por ejemplo, se nos pide determinar corrientes a través de un conjunto de resistencias, después de efectuar el análisis nodal aún debemos recurrir a la ley de Ohm en cada resistencia para determinar la corriente.

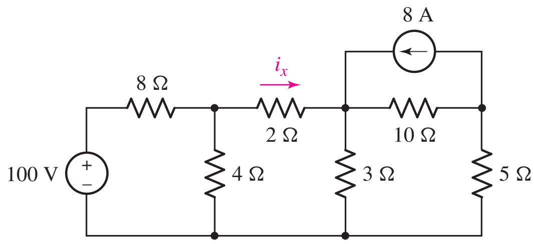


FIGURA 4.28 Circuito de forma plana con cinco nodos y cuatro mallas.

Como ejemplo considere el circuito de la figura 4.28. Se desea determinar la corriente i_x.

Seleccionamos el nodo inferior como el de referencia y observamos que hay cuatro nodos de no referencia. Si bien esto significa que podemos escribir cuatro ecuaciones distintas, no hay necesidad de marcar el nodo entre la fuente de 100 V y la resistencia de 8 Ω ya que resulta obvio que la tensión de nodo mide 100 V. En consecuencia, marcamos las siguientes tensiones de nodo v_1, v_2 y v_3 como en la figura 4.29.

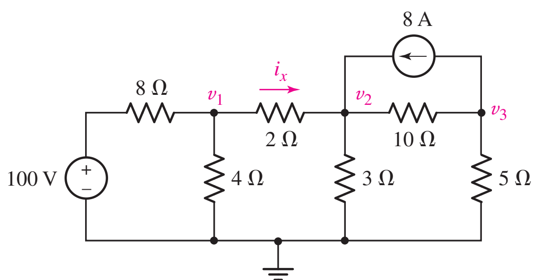


FIGURA 4.29 El circuito de la figura 4.28 con tensiones de nodo marcadas. Observe que se eligió un sistema de tierra física para designar la terminal de referencia.

Se tienen las siguientes tres ecuaciones:

$$\frac{v_1 - 100}{8} + \frac{v_1}{4} + \frac{v_1 - v_2}{2} = 0 \qquad \text{o} \qquad 0.875v_1 - 0.5v_2 = 12.5 \tag{37}$$

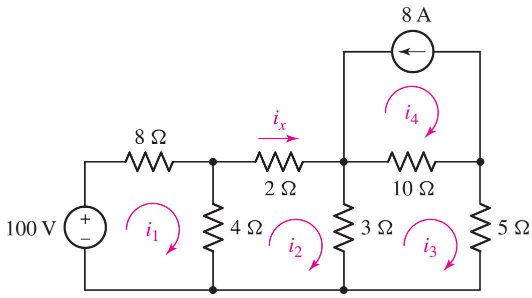
$$\frac{v_2 - v_1}{2} + \frac{v_2}{3} + \frac{v_2 - v_3}{10} - 8 = 0 \qquad \text{o} \qquad -0.5v_1 - 0.9333v_2 - 0.1v_3 = 8 \tag{38}$$

$$\frac{v_3 - v_2}{10} + \frac{v_3}{5} + 8 = 0 \qquad \text{o} \qquad -0.1v_2 + 0.3v_3 = -8 \tag{39}$$

Resolviendo, encontramos que $v_1 = 25.89$ V y $v_2 = 20.31$ V. Determinamos la corriente i_x mediante la aplicación de la ley de Ohm:

$$i_x = \frac{v_1 - v_2}{2} = 2.79 \text{ A} \tag{40}$$

En seguida, consideramos el mismo circuito mediante el análisis de malla. En la figura 4.30 tenemos cuatro mallas distintas, aunque es evidente que $i_4 = -\ 8$ A; por lo tanto, es necesario escribir tres ecuaciones distintas.



■ **FIGURA 4.30** El circuito de la figura 4.28 con las corrientes de malla marcadas.

Escribiendo una ecuación LVK para las mallas 1, 2 y 3:

$$-100 + 8i_1 + 4(i_1 - i_2) = 0 \quad \text{o} \quad 12i_1 - 4i_2 = 100 \qquad [41]$$

$$4(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0 \quad \text{o} \quad -4i_1 + 9i_2 - 3i_3 = 0 \qquad [42]$$

$$3(i_3 - i_2) + 10(i_3 + 8) + 5i_3 = 0 \quad \text{o} \quad -3i_2 + 18i_3 = -80 \qquad [43]$$

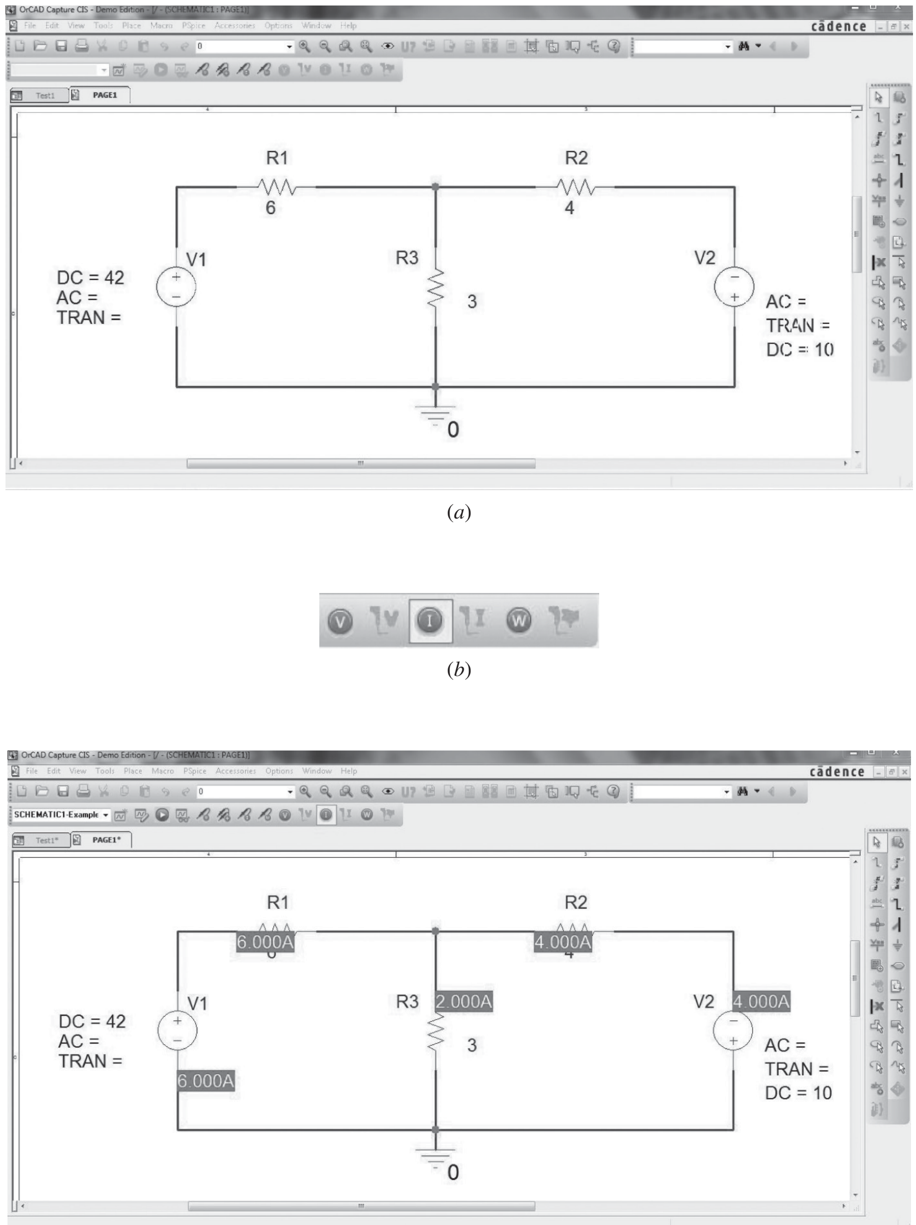
Al resolver encontramos que i_2 $(= i_x) = 2.79$ A. Para este problema en particular, el análisis de malla mostró ser más simple. No obstante, puesto que cualquier método es válido, resolver el mismo problema de las dos formas también servirá como un medio para verificar las respuestas.

4.6 ANÁLISIS DE CIRCUITOS ASISTIDO POR COMPUTADORA

Hemos visto que no es necesario tomar muchos componentes para crear un circuito de complejidad respetable. A medida que examinemos circuitos incluso más complejos, se evidenciará de inmediato que es fácil cometer errores durante el análisis, y que la verificación de las soluciones de manera manual consume mucho tiempo. Un poderoso programa de computadora, conocido como PSpice, se suele utilizar para analizar rápidamente los circuitos, así que las herramientas de captura de esquemas casi siempre se integran con una tablilla de circuito impreso o una herramienta de visualización de circuito integrado. Creado originalmente a principios de los años de 1970 en la Universidad de California en Berkeley, SPICE (*Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*) es en la actualidad un estándar industrial. MicroSim Corporation introdujo PSpice en 1984, el cual, por medio de interfaces, traza gráficas correspondientes en torno al programa SPICE principal. Según sea el tipo de aplicación de circuitos que se considere, hay en la actualidad varias compañías que ofrecen diferentes versiones del paquete SPICE básico.

Si bien el análisis asistido por computadora es un medio relativamente rápido para determinar tensiones y corrientes en un circuito, debemos ser cuidadosos de no permitir que los paquetes de simulación reemplacen por completo el análisis tradicional con “papel y lápiz”. Existen varias razones que sostienen lo anterior. Primero, para diseñar debemos ser capaces de analizar. La excesiva confianza en las herramientas de cómputo puede inhibir el desarrollo de las capacidades analíticas necesarias, tal como sucedió con la introducción muy temprana de las calculadoras en la escuela elemental. Segundo, es casi imposible utilizar un programa complicado durante un largo tiempo sin cometer algún tipo de error en la entrada de datos. Si no contamos con una intuición básica en cuanto al tipo de respuesta que debemos esperar de una simulación, no hay forma de determinar si es o no válida. Por consiguiente, el nombre genérico en realidad es una descripción bastante precisa: análisis *asistido* por computadora. Los cerebros humanos no son obsoletos. No todavía, como quiera que sea.





(*a*)

(*b*)

(*c*)

■ **FIGURA 4.31** (*a*) Circuito de la figura 4.15*a* dibujado mediante el software de captura de esquemas Orcad. (*b*) Botones de despliegue de corriente, tensión y potencia. (*c*) Circuito después de ejecutarse la simulación, con el despliegue de corriente habilitado.

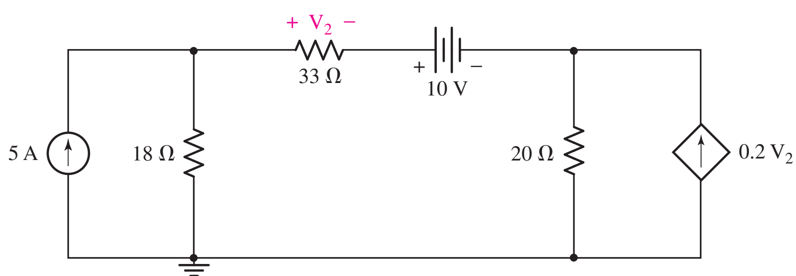
A manera de ejemplo, considere el circuito de la figura 4.15*b*, que incluye dos fuentes de tensión de cd y tres resistencias. Deseamos simular este circuito mediante PSpice, de modo que podamos determinar las corrientes i_1 e i_2. La figura 4.31*a* muestra el circuito en la forma que se dibuja mediante un programa de captura de esquemas.[1]

Con la finalidad de determinar las corrientes de malla, sólo necesitamos correr una simulación para encontrar el punto de polarización. Al estar en **PSpice**, seleccionar

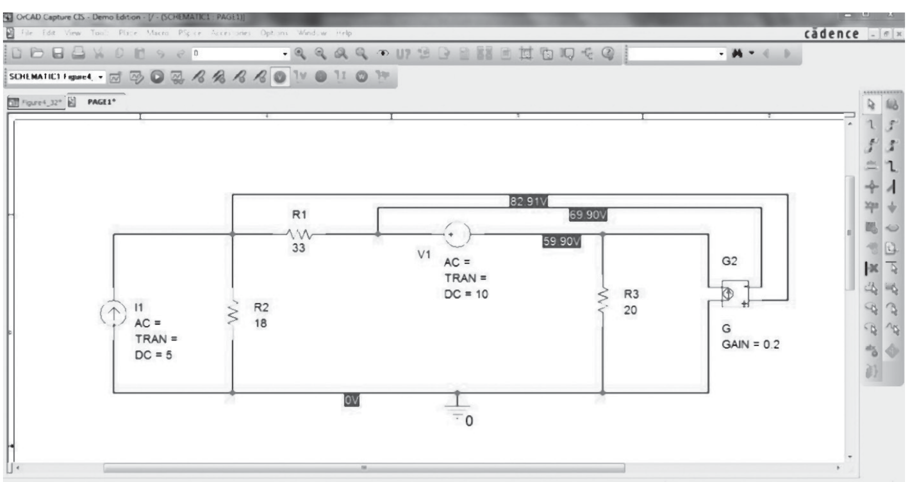
[1] Consulte el apéndice 4 para obtener un breve tutorial sobre PSpice y la captura de diagramas esquemáticos.

New Simulation Profile. Teclee Primer Ejemplo (o cualquier nombre de su preferencia) y hacer click en **Create**. En el menú **Analysis Type** seleccionar **Bias Point**, después hacer click en **OK**. Regresar a la ventana esquemática original y en **PSpice** seleccionar **Run** (o utilizar alguno de los dos atajos: presionar la tecla F11 o hacer clic en el símbolo azul "Play"). Para ver las corrientes calculadas por PSpice, asegurarse de que el botón de corriente esté seleccionado (figura 4.31*b*). Los resultados de la simulación se muestran en la figura 4.31*c*. Podemos observar que las dos corrientes i_1 e i_2 son 6 A y 4 A, respectivamente, como pudimos ver con anterioridad.

Como ejemplo adicional, consideremos el circuito de la figura 4.32*a*. Contiene una fuente de tensión de cd, una fuente de corriente de cd y una fuente de corriente controlada por tensión. Estamos interesados en las tres tensiones nodales que, a partir del análisis nodal o de malla, podemos ver que son 82.91 V, 69.9 V y 59.9 V, respectivamente, a medida que nos desplazamos de izquierda a derecha en la parte superior del circuito. La figura 4.32*b* muestra este circuito, después de haberse llevado a cabo la simulación. Las tres tensiones nodales se indican directamente en el esquema. Observe que al dibujar una fuente dependiente con la herramienta de captura de esquemas, debemos enlazar de manera *explícita* dos terminales de la fuente con la tensión o la corriente de control.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 4.32** (*a*) Circuito con fuente de corriente dependiente. (*b*) Circuito dibujado con una herramienta de captura de esquemas, cuyos resultados de la simulación se presentan de manera directa sobre el esquema.

APLICACIÓN PRÁCTICA

Creación de diagramas PSpice con base en nodos

El método más común para describir un circuito, en conjunción con el análisis de circuitos asistido por computadora, es un tipo de programa gráfico para dibujo de esquemas, de cuya salida se muestra un ejemplo en la figura 4.32. Sin embargo, SPICE se escribió antes del advenimiento de este tipo de programas, y como tal requiere que los circuitos se describan en un formato específico basado en texto. El formato tiene sus raíces en la sintaxis utilizada en las tarjetas perforadas, lo cual le da una apariencia un poco distinta. La base para describir circuitos es la definición de elementos, así que a cada terminal del mismo se le asigna un número de nodos. De esa manera, aunque acabamos de estudiar dos métodos de análisis de circuitos generalizados diferentes —las técnicas nodal y de malla—, resulta interesante observar que SPICE y PSpice se elaboraron mediante un método de análisis nodal muy bien definido.

Aun cuando el análisis moderno de circuitos se hace en gran medida con un software interactivo orientado a gráficos, cuando se generan errores (casi siempre debidos a equivocaciones en el dibujo del esquema o al elegir una combinación de las opciones de análisis), la capacidad para leer la "plataforma de entrada" basada en textos generados por la herramienta de captura de esquemas resulta invaluable para el seguimiento del problema específico. La mejor forma de desarrollar una capacidad de este tipo consiste en aprender la manera de ejecutar PSpice de manera directa, a partir de una plataforma de entrada escrita por el usuario.

Considere, por ejemplo, la muestra de la plataforma de entrada siguiente (las líneas que empiezan con un asterisco son comentarios, y SPICE las pasa por alto).

```
* Ejemplo de paquete de datos de entrada SPICE para un circuito simple de divisor de
voltaje.
.OP                      (Solicita el punto operativo)
R1 1 2 1k                (Ubica R1 entre los nodos 1 y 2; el valor es de 1 kΩ)
R2 2 0 1k                (Ubica R2 entre los nodos 2 y 0; también 1 kΩ)
V1 1 0 DC 5              (Ubica la fuente de 5V entre los nodos 1 y 0)
* End of input deck.     * Fin del paquete de datos de entrada
```

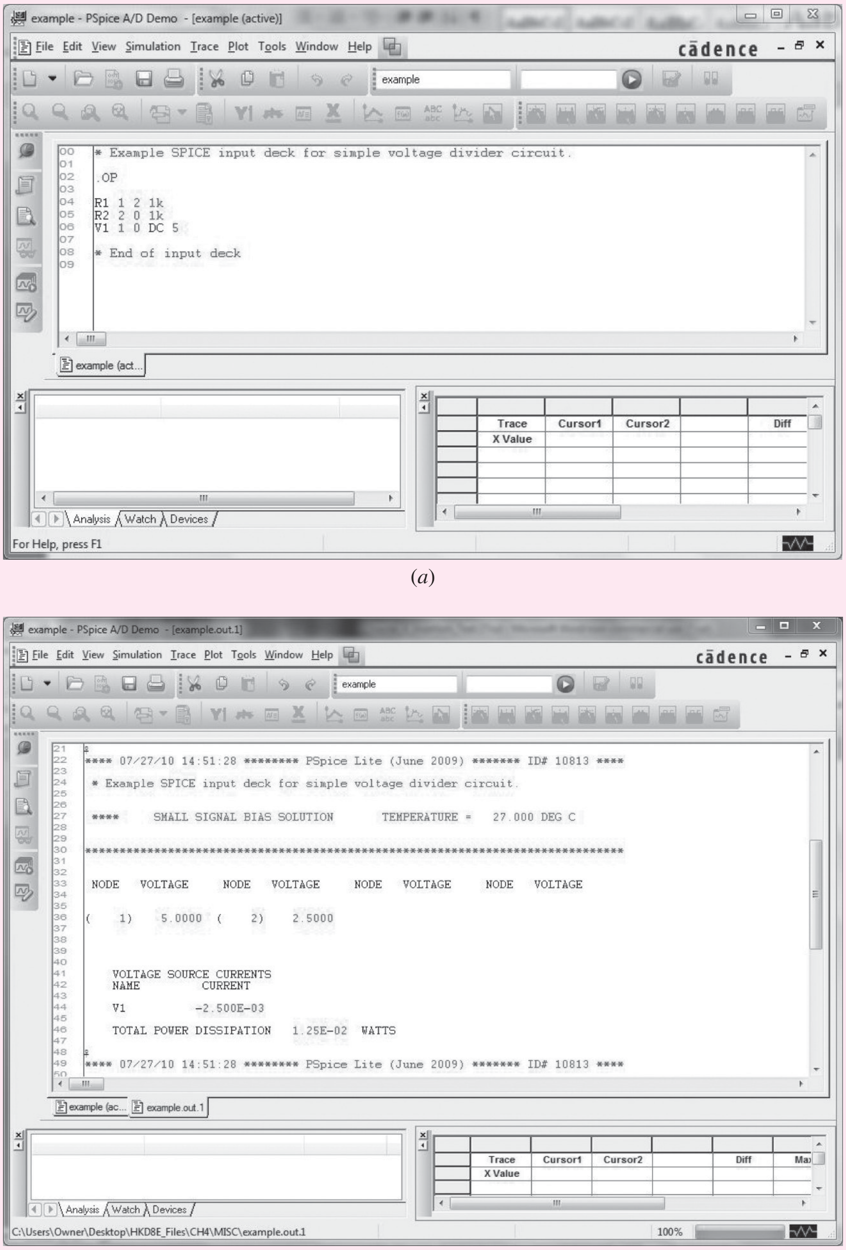
Se puede crear la plataforma de entrada con el programa Notepad de Windows o con su editor de textos favorito. Al salvar el archivo bajo el nombre example.cir, invocamos a PSpice A/D (vea el apéndice 4). En **File**, seleccionamos **Open**, ubicamos el directorio en el que salvamos el archivo example.cir y para **Files of Type**: seleccionamos **Circuit Files (*.cir)**. Después de seleccionar el archivo y hacer clic en **Open**, aparece la ventana PSpice A/D con el archivo de circuito cargado (figura 4.33*a*). Una lista de red como ésta, que contiene instrucciones de la simulación que se llevará a cabo, puede hacerse con el software de captura de esquemas o manualmente en este ejemplo.

Ejecutamos la simulación ya sea haciendo clic en el símbolo "play" en color verde en la parte superior derecha o seleccionando **Run** en **Simulation**.

Para visualizar los resultados, seleccionamos **Output File** de la parte del menú **View**, que abre la ventana que se muestra en la figura 4.33*b*. Aquí vale la pena señalar que la salida proporciona las tensiones de nodos esperadas (5 V en el nodo 1, 2.5 V a través de la resistencia R2), pero la corriente se indica tomando en cuenta la convención de signo pasivo (es decir, −2.5 mA).

El ingreso de datos de forma esquemática basado en texto es razonablemente sencillo; pero para circuitos complejos (con gran número de elementos), puede rápidamente volverse engorroso. También es fácil equivocarse en la numeración de los nodos, un error que puede ser difícil de detectar. Sin embargo, la lectura de los archivos de entrada y salida a menudo ayuda cuando se realizan simulaciones, de modo que es útil tener algo de experiencia con este formato.

En este punto, el poder real del análisis asistido por computadora empieza a ser patente: una vez que se tiene el circuito dibujado en el programa de captura de esquemas, resulta fácil experimentar con sólo cambiar los valores de los componentes y observar el efecto sobre las corrientes y las tensiones. Para obtener un poco de experiencia a este respecto, se debe tratar de simular cualquiera de los circuitos de los ejemplos previos y de los problemas de práctica.



(*a*)

(*b*)

■ **FIGURA 4.33** (*a*) Ventana PSpice A/D después de ingresar la información de entrada que describe el divisor de tensión. (*b*) Ventana de respuesta, que muestra tensiones de nodo y corriente de la fuente (pero expresados usando la convención de signo pasivo). Observe que la tensión a través de R1 necesita una sustracción de posimulación.

RESUMEN Y REPASO

Aunque en el capítulo 3 se presentaron las LCK y LVK, las cuales son suficientes para permitir el análisis de cualquier circuito, un procedimiento más sistemático resulta útil en situaciones habituales. Por lo tanto, en este capítulo desarrollaremos la técnica del análisis de nodos basada en la LCK, que da como resultado la determinación de una tensión en cada nodo (con respecto a algún nodo designado "de referencia"). Generalmente

necesitamos resolver un sistema de ecuaciones simultáneas, a menos que las fuentes de tensión estén conectadas de manera que automáticamente proporcionen tensiones de nodo. El valor de control de una fuente *dependiente* se escribe simplemente como escribiríamos el valor numérico de una fuente "independiente". Usualmente se necesita entonces una ecuación adicional, a menos que la fuente dependiente esté controlada por una tensión de nodo. Cuando una fuente de tensión está conectada entre dos nodos, la técnica básica se puede extender mediante la creación de un *supernodo*. La LCK exige que la suma de las corrientes que entran a un conjunto de conexiones así definido sea igual a la suma de las corrientes que salen.

Como alternativa del análisis de nodo, se desarrolló la técnica de análisis de mallas mediante la aplicación de la LVK; este análisis proporciona el conjunto completo de corrientes de *malla*, que no siempre representan la corriente *real* que fluye a través de algún elemento en particular (por ejemplo, si un elemento se encuentra entre dos mallas). La presencia de una fuente de corriente simplificará el análisis si está en la periferia de una malla; si la fuente es compartida, entonces es mejor la técnica de la *supermalla*. En dicho caso, escribimos una ecuación de LVK en una trayectoria que evite la fuente de corriente compartida y que posteriormente se vincule algebraicamente con las dos corrientes de malla correspondientes que comparten la fuente.

Una pregunta común es: "*¿Qué técnica de análisis debo usar?*" Hemos explicado algunos de los puntos que podrían intervenir en la elección de una técnica para un circuito dado. Estos puntos incluían: saber si el circuito es plano o no, qué tipos de fuentes están presentes y cómo están conectadas, y también qué información específica se necesita (es decir, una tensión, una corriente o una potencia). Para circuitos complejos, puede exigir mayor esfuerzo que el que vale la pena para determinar el procedimiento "óptimo", en cuyo caso la mayoría optará por el método que se perciba como más cómodo. Concluimos el capítulo con la introducción de PSpice, una herramienta común de simulación de circuitos, que es muy útil para verificar los resultados.

En este punto terminamos identificando los puntos clave de este capítulo para su repaso, con ejemplos pertinentes.

- ❑ Antes de iniciar un análisis, elaborar un diagrama de circuito claro y simple. Indicar todos los valores de los elementos y de las fuentes. (Ejemplo 4.1)
- ❑ Si el análisis nodal es el método elegido,
  - ❑ Escoger uno de los nodos como el de referencia. Luego marcar las tensiones de nodo v_1, v_2, …, v_{N-1}, recordando que se entiende que cada uno se mide con respecto al nodo de referencia. (Ejemplos 4.1, 4.2)
  - ❑ Si el circuito contiene sólo fuentes de corriente, aplicar la LCK en cada nodo de referencia. (Ejemplos 4.1, 4.2)
  - ❑ Si el circuito consiste en fuentes de tensión, formar un supernodo alrededor de cada una y luego proceder a aplicar la LCK en todos los nodos de no referencia y los supernodos. (Ejemplos 4.5, 4.6)
- ❑ Si se está pensando emplear el análisis de malla, cerciorarse primero de que la red es de forma plana.
  - ❑ Asignar una corriente de malla en dirección de las manecillas del reloj en cada malla: i_1, i_2, …, i_M. (Ejemplo 4.7)
  - ❑ Si el circuito sólo contiene fuentes de tensión, aplicar la LVK alrededor de cada malla. (Ejemplos 4.7, 4.8, 4.9)
  - ❑ Si contiene fuentes de corriente, crear una supermalla para cada una que sea común a dos mallas y aplicar después la LVK alrededor de cada malla y supermalla. (Ejemplos 4.11, 4.12)
- ❑ Las fuentes dependientes sumarán una ecuación extra al análisis nodal si la variable de control es una corriente, pero no lo hará así si la variable de control es una tensión

nodal. (De manera contraria, una fuente dependiente agregará una ecuación extra al análisis de malla si la variable de control es una tensión, pero no lo hará así si la variable de control es una corriente de malla). (Ejemplos 4.3, 4.4, 4.6, 4.9, 4.10, 4.12)

- ❑ Cuando se deba decidir si se usa el análisis nodal o el de malla para un circuito plano, pensar que un circuito con menor número de nodos/supernodos dará lugar a menos número de ecuaciones mediante el análisis nodal.
- ❑ El análisis asistido por computadora resulta útil para verificar resultados y analizar circuitos con una gran cantidad de elementos. Sin embargo, debe recurrirse al sentido común para verificar los resultados de la simulación.

LECTURAS ADICIONALES

Un tratamiento detallado del análisis nodal y de malla puede encontrarse en:

R. A. DeCarlo y P. M. Lin, *Linear Circuit Analysis,* 2a. edición, Nueva York: Oxford University Press, 2001.

Una sólida guía para utilizar SPICE es:

P. Tuinenga, *SPICE: A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSPICE,* 3a. edición, Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall, 1995.

EJERCICIOS

4.1 Análisis de nodo

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

(*a*) $2v_2 - 4v_1 = 9$ y $v_1 - 5v_2 = -4$;

(*b*) $-v_1 + 2v_3 = 8$; $2v_1 + v_2 - 5v_3 = -7$; $4v_1 + 5v_2 + 8v_3 = 6$.

2. Evalúe los siguientes determinantes:

(*a*) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$ (*b*) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 11 \\ 6 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

3. Utilice la regla de Cramer para despejar v_2 en cada parte del ejercicio 1.

4. (*a*) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3 = \frac{v_1}{5} - \frac{v_2 - v_1}{22} + \frac{v_1 - v_3}{3}$$

$$2 - 1 = \frac{v_2 - v_1}{22} + \frac{v_2 - v_3}{14}$$

$$0 = \frac{v_3}{10} + \frac{v_3 - v_1}{3} + \frac{v_3 - v_2}{14}$$

(*b*) Verifique su solución usando MATLAB.

5. (*a*) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$7 = \frac{v_1}{2} - \frac{v_2 - v_1}{12} + \frac{v_1 - v_3}{19}$$

$$15 = \frac{v_2 - v_1}{12} + \frac{v_2 - v_3}{2}$$

$$4 = \frac{v_3}{7} + \frac{v_3 - v_1}{19} + \frac{v_3 - v_2}{2}$$

(*b*) Verifique su solución usando MATLAB.

6. Corrija el siguiente código de MATLAB (y verifique al ejecutar el código):

```
>> e1 = ‘3 = v/7 - (v2 - v1)/2 + (v1 - v3)/3;
>> e2 = ‘2 = (v2 - v1)/2 + (v2 - v3)/14’;
>> e  ‘0 = v3/10 + (v3 - v1)/3 + (v3 - v2)/14’;
>>
>> a = sove(e e2 e3, ‘v1’, v2, ‘v3’)
```

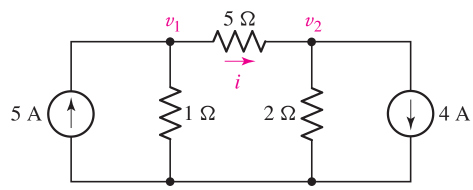
7. Identifique los errores obvios en el siguiente conjunto completo de ecuaciones de nodos si se sabe que la última ecuación es correcta:

$$7 = \frac{v_1}{4} - \frac{v_2 - v}{1} + \frac{v_1 - v_3}{9}$$

$$0 = \frac{v_2 - v_1}{2} + \frac{v_2 - v_3}{2}$$

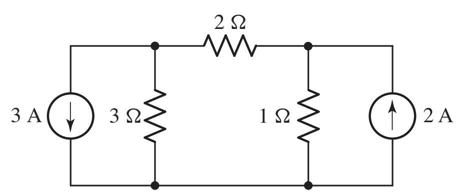
$$4 = \frac{v_3}{7} + \frac{v_3 - v_1}{19} + \frac{v_3 - v_2}{2}$$

8. En el circuito de la figura 4.34, determine la corriente marcada como i con la ayuda de técnicas de análisis de nodos.



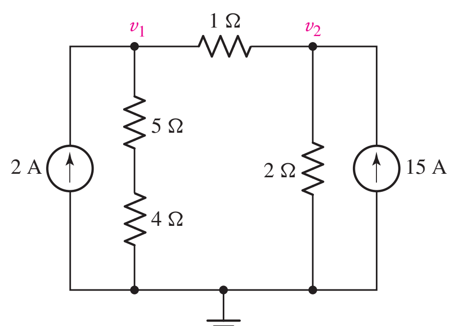
■ **FIGURA 4.34**

9. Calcule la potencia disipada en la resistencia de 1 Ω de la figura 4.35.



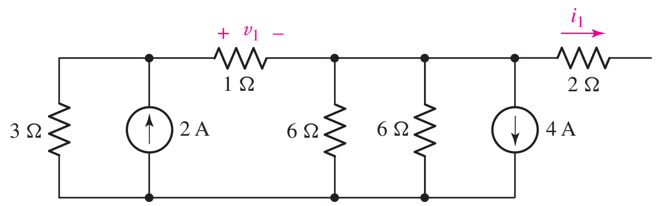
■ **FIGURA 4.35**

10. Con la ayuda del análisis de nodos, determine $v_1 - v_2$ en el circuito que se muestra en la figura 4.36.



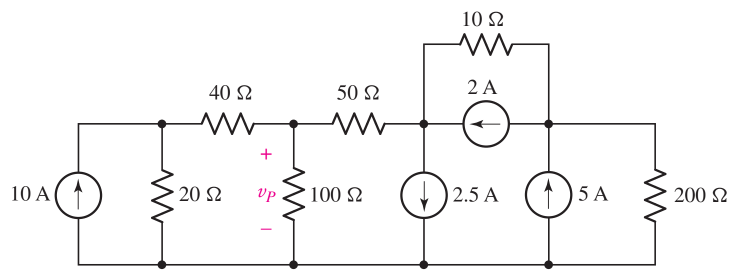
■ **FIGURA 4.36**

11. En el circuito de la figura 4.37, determine el valor de la tensión marcada como v_1 y la corriente marcada como i_1.



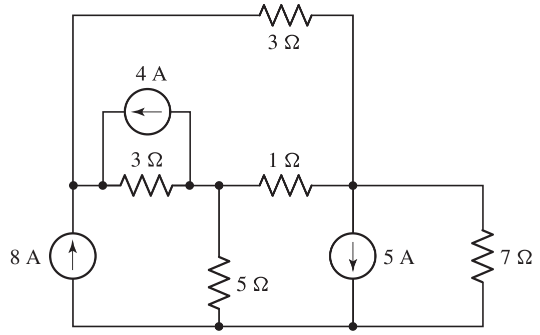
■ **FIGURA 4.37**

12. Recurra al análisis nodal para determinar v_P en el circuito de la figura 4.38.



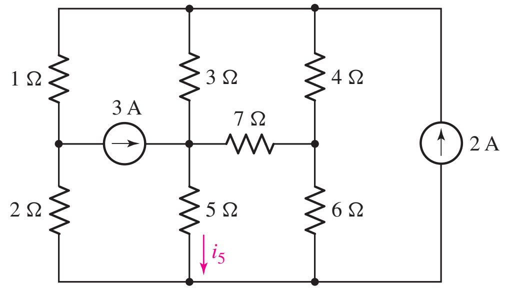
■ **FIGURA 4.38**

13. Usando el nodo inferior como referencia, determine la tensión a través de la resistencia 5 Ω en el circuito de la figura 4.39, y calcule la potencia disipada por la resistencia de 7 Ω.



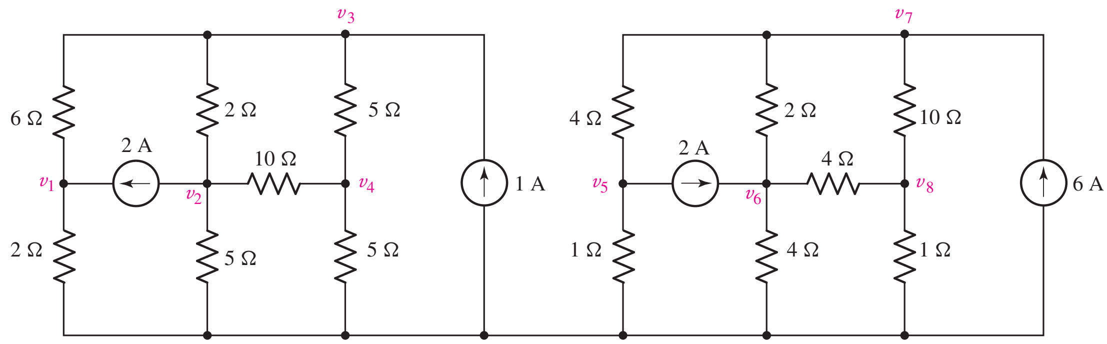
■ **FIGURA 4.39**

14. En el caso del circuito de la figura 4.40 utilice el análisis nodal para determinar la corriente i_5.



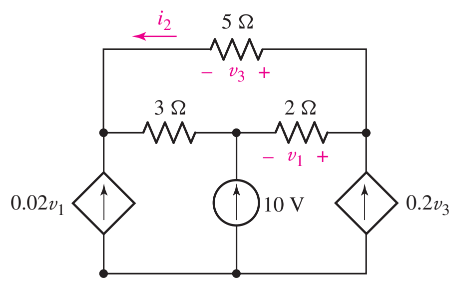
■ **FIGURA 4.40**

15. Determine el valor numérico para cada tensión de nodo en el circuito de la figura 4.41.

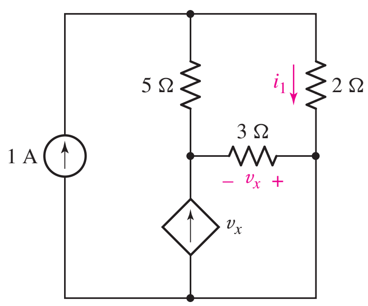


■ FIGURA 4.41

16. Determine la corriente i_2 como está identificada en el circuito de la figura 4.42, con la ayuda del análisis de nodos.

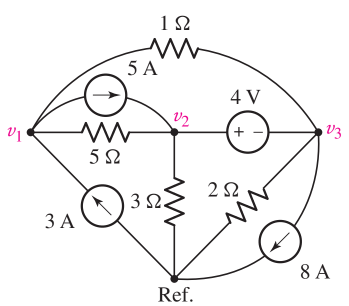


■ FIGURA 4.42



■ FIGURA 4.43

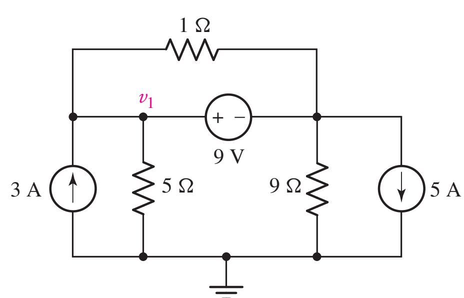
17. Usando el análisis de nodos de forma adecuada, determine la corriente marcada como i_1 en el circuito de la figura 4.43.



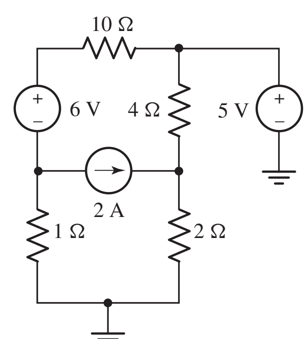
■ FIGURA 4.44

4.2 El supernodo

18. Determine las tensiones de nodo según están identificadas en la figura 4.44, usando la técnica de supernodo de forma adecuada.
19. Para el circuito que se muestra en la figura 4.45, determine el valor numérico para la tensión marcada como v_1.
20. Para el circuito de la figura 4.46, determine tensiones de nodo.

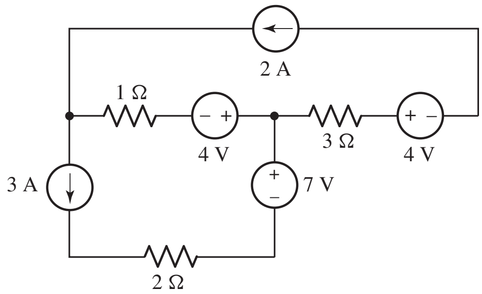


■ FIGURA 4.45



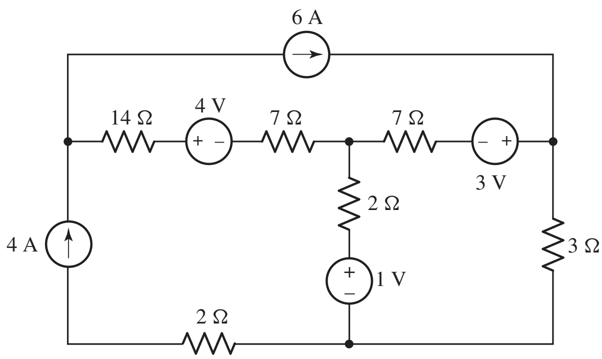
■ FIGURA 4.46

21. Usando la técnica de análisis de nodos por supernodo de forma adecuada, determine la potencia disipada por la resistencia de 1 Ω en el circuito de la figura 4.47.



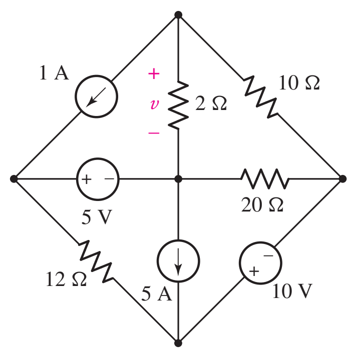
■ **FIGURA 4.47**

22. Con referencia al circuito de la figura 4.48, obtenga un valor numérico para la potencia suministrada por la fuente de 1 V.



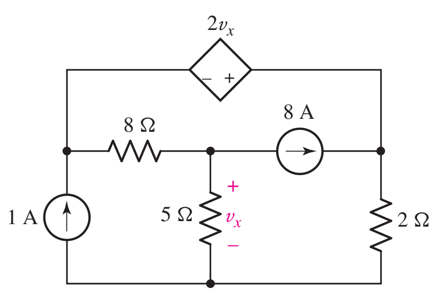
■ **FIGURA 4.48**

23. Determine la tensión marcada como v en el circuito de la figura 4.49.



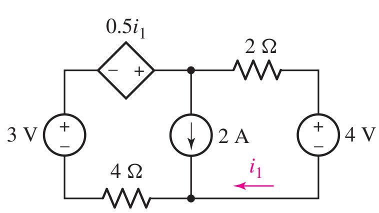
■ **FIGURA 4.49**

24. Determine la tensión v_x en el circuito de la figura 4.50, y la potencia suministrada por la fuente de 1 A.



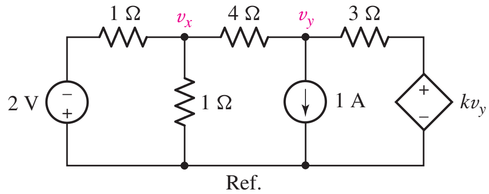
■ **FIGURA 4.50**

25. Considere el circuito de la figura 4.51. Determine la corriente marcada como i_1.



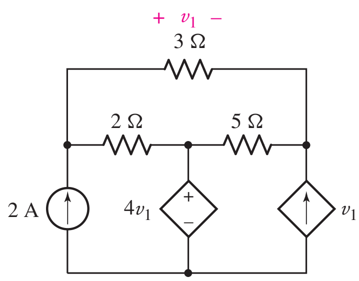
■ **FIGURA 4.51**

26. Determine el valor de k que dará como resultado que v_x sea igual a cero en el circuito de la figura 4.52.



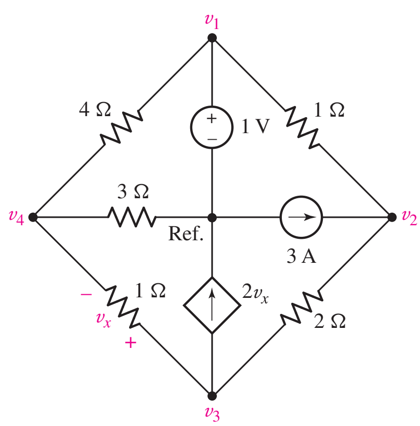
■ **FIGURA 4.52**

27. Para el circuito representado en la figura 4.53, determine la tensión marcada como v_1 a través de la resistencia de 3 Ω.



■ **FIGURA 4.53**

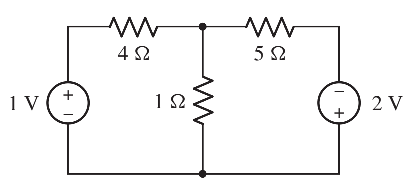
28. Para el circuito de la figura 4.54, determine las cuatro tensiones de nodo.



■ **FIGURA 4.54**

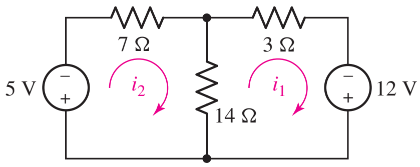
4.3 Análisis de mallas

29. Determine las corrientes que salen de la terminal positiva de cada fuente de tensión en el circuito de la figura 4.55.



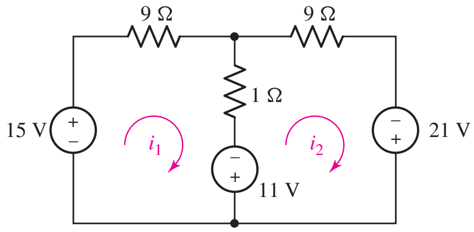
■ **FIGURA 4.55**

30. Obtenga los valores numéricos para las dos corrientes de malla i_1 e i_2 en el circuito que se muestra en la figura 4.56.



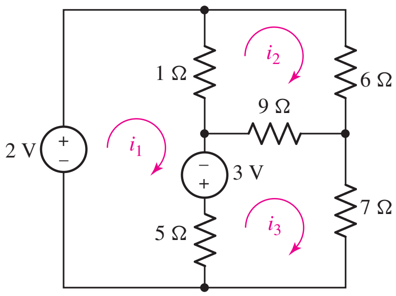
■ **FIGURA 4.56**

31. Use el análisis de mallas de forma adecuada para determinar las dos corrientes de malla marcadas en la figura 4.57.



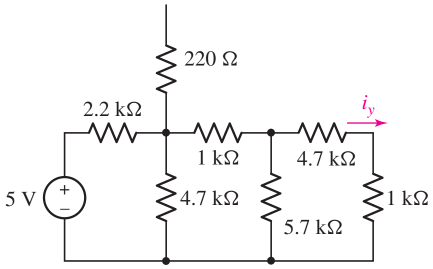
■ **FIGURA 4.57**

32. Determine los valores numéricos para cada una de las tres corrientes de malla marcadas en el diagrama de circuito de la figura 4.58.

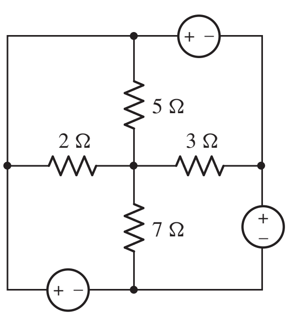


■ **FIGURA 4.58**

33. Calcule la potencia disipada por cada resistencia en el circuito de la figura 4.58.
34. Usando análisis de mallas de forma adecuado, obtenga (*a*) el valor para la corriente i_y y (*b*) la potencia disipada por la resistencia de 220 Ω en el circuito de la figura 4.59.
35. Elija valores diferentes de cero para las tres fuentes de tensión de la figura 4.60, de modo que no fluya corriente a través de ninguna resistencia del circuito.

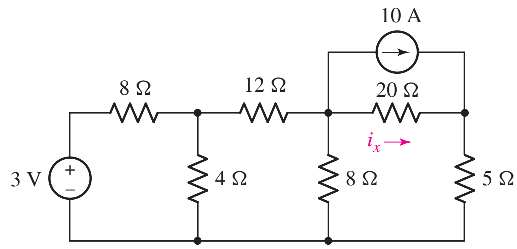


■ **FIGURA 4.59**



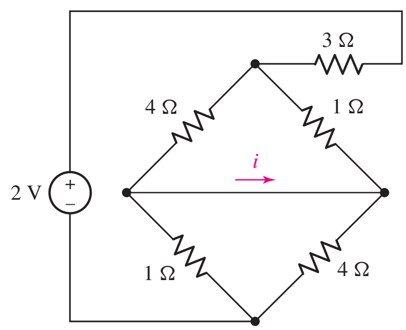
■ **FIGURA 4.60**

36. Calcule la corriente i_x en el circuito de la figura 4.61.



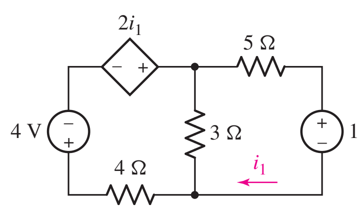
■ **FIGURA 4.61**

37. Usando procedimientos de análisis de mallas, obtenga el valor para la corriente marcada como i en el circuito representado por la figura 4.62.



■ **FIGURA 4.62**

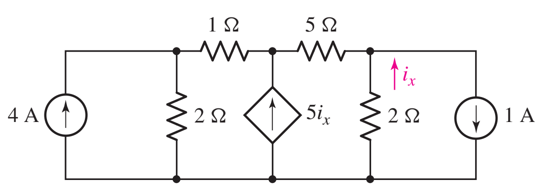
38. Determine la potencia disipada por la resistencia de 4 Ω del circuito que se muestra en la figura 4.63.



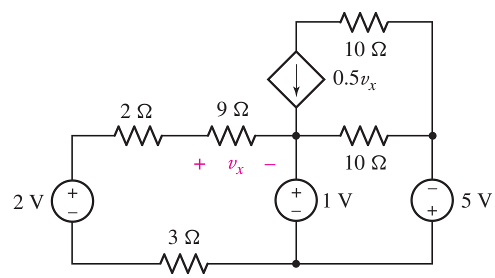
■ **FIGURA 4.63**

39. (a) Utilice el análisis de mallas para determinar la potencia disipada por la resistencia de 1 Ω en el circuito representado esquemáticamente en la figura 4.64. (b) Verifique su respuesta usando análisis de nodos.

40. Defina tres corrientes de malla en sentido horario para el circuito de la figura 4.65, y utilice el análisis de mallas para obtener el valor de cada una.

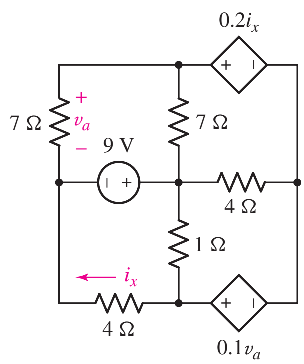


■ **FIGURA 4.64**



■ **FIGURA 4.65**

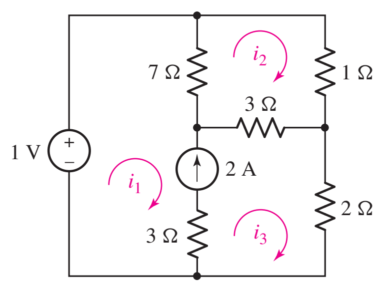
41. Utilice análisis de mallas para obtener los valores de i_x y v_a en el circuito de la figura 4.66.



■ **FIGURA 4.66**

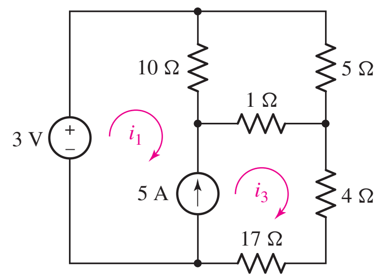
4.4 La supermalla

42. Determine los valores para las tres corrientes de malla de la figura 4.67.



■ **FIGURA 4.67**

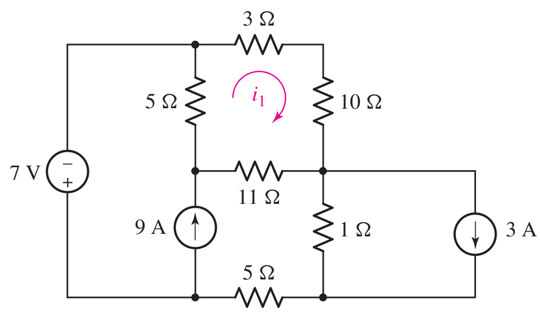
43. Mediante la adecuada aplicación de la técnica de supermalla, obtenga el valor numérico para la corriente de malla i_3 en el circuito de la figura 4.68 y calcule la potencia disipada por la resistencia de 1 Ω.



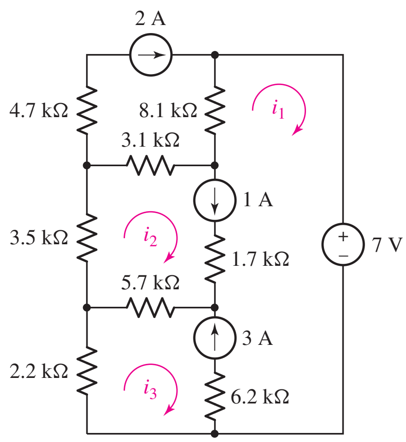
■ **FIGURA 4.68**

44. Para el circuito de la figura 4.69, determine la corriente de malla i_1 y la potencia disipada por la resistencia de 1 Ω.

45. Calcule las tres corrientes de malla identificadas en el diagrama de circuito de la figura 4.70.

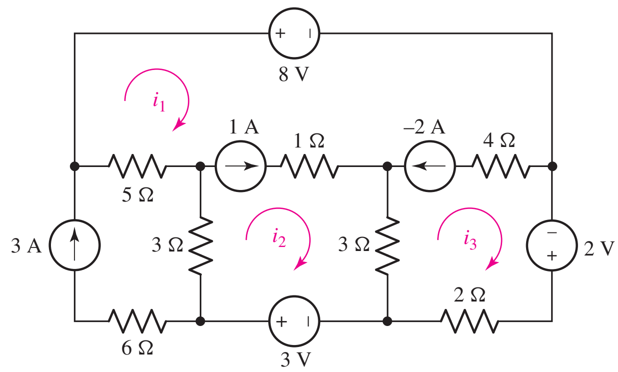


■ **FIGURA 4.69**



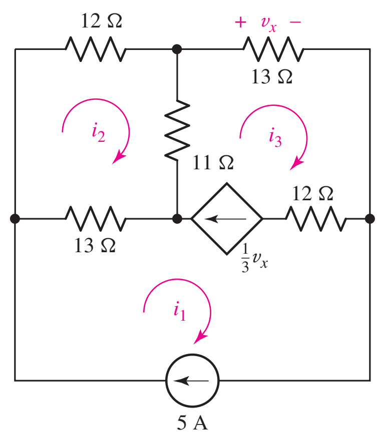
■ **FIGURA 4.70**

46. Aprovechando al máximo la técnica de supermalla, obtenga valores numéricos para cada una de las corrientes de malla identificadas en el circuito que se muestra en la figura 4.71.

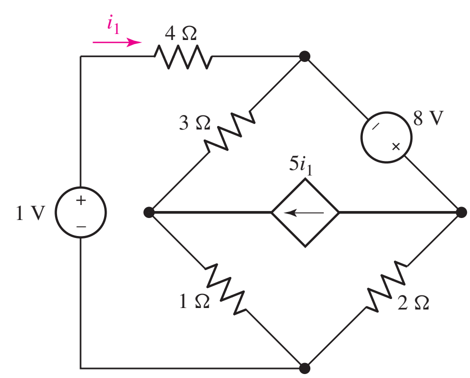


■ FIGURA 4.71

47. Mediante la aplicación cuidadosa de la técnica de supermalla, obtenga valores para las tres corrientes de malla marcadas en la figura 4.72.

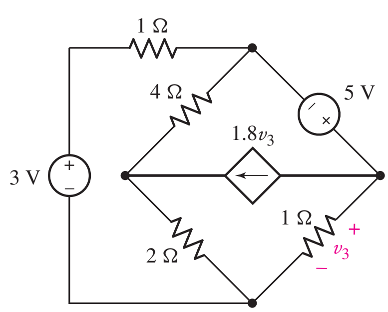


■ FIGURA 4.72

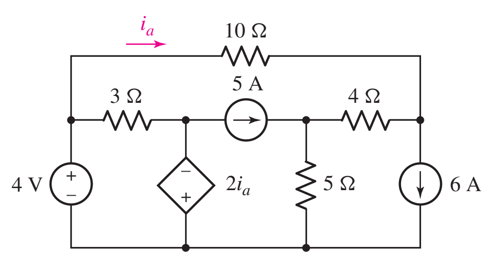


■ FIGURA 4.73

48. Determine la potencia suministrada por la fuente de 1 V en la figura 4.73.
49. Defina tres corrientes de malla en sentido horario para el circuito de la figura 4.74 y utilice la técnica de supermalla para obtener los valores numéricos para cada una.
50. Determine la potencia absorbida por la resistencia de 10 Ω en la figura 4.75.



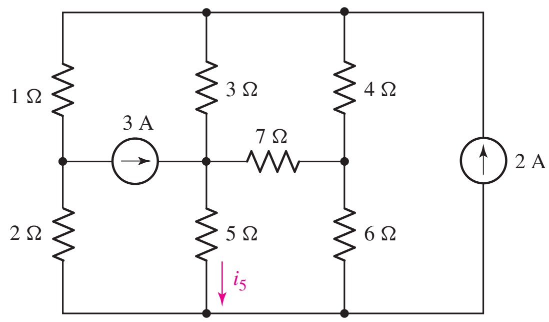
■ FIGURA 4.74



■ FIGURA 4.75

4.5 Comparación entre el análisis de nodos y el de malla

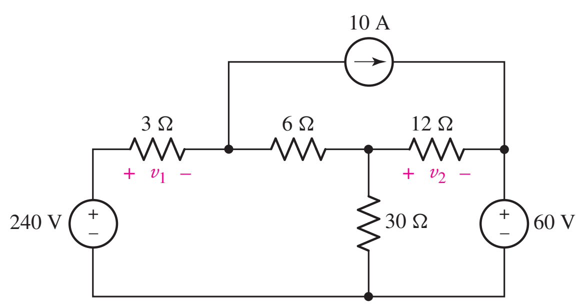
51. Para el circuito representado esquemáticamente en la figura 4.76: (*a*) ¿Cuántas ecuaciones de nodos se necesitarían para determinar i_5? (*b*) Alternativamente, ¿cuántas ecuaciones de malla se necesitarían? (*c*) ¿Cambiaría su método de análisis preferido si sólo se necesitara la tensión a través de la resistencia de 7 Ω? *Explique.*



■ **FIGURA 4.76**

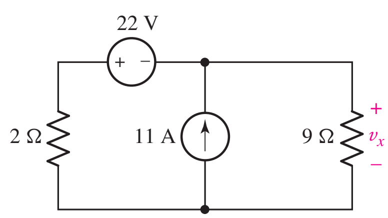
52. El circuito de la figura 4.76 se modifica de tal manera que la fuente de 3 A se reemplaza por una fuente de 3 V cuya terminal de referencia positiva está conectada a la resistencia de 7 Ω. (*a*) Determine el número de ecuaciones de nodos necesarias para determinar i_5. (*b*) Alternativamente, ¿cuántas ecuaciones de malla se necesitarían? (*c*) ¿Cambiaría su método de análisis preferido si sólo se necesitara la tensión a través de la resistencia de 7 Ω? *Explique*.

53. El circuito de la figura 4.77 contiene tres fuentes. (*a*) Como está actualmente dibujado, ¿qué análisis de nodos o de mallas daría como resultado un número menor de ecuaciones para determinar las tensiones v_1 y v_2? *Explique*. (*b*) Si la fuente de tensión se reemplazará por una fuente de corriente, y la fuente de corriente se reemplazara por una fuente de tensión, ¿cambiaría su respuesta al inciso (*a*)? *Explique*.



■ **FIGURA 4.77**

54. Determine la tensión v_x como está marcada en el circuito de la figura 4.78 usando: (*a*) análisis de malla. (*b*) Repita, usando el análisis de nodos. (*c*) ¿Cuál método fue más fácil y por qué?



■ **FIGURA 4.78**

55. Considere el circuito de cinco fuentes de la figura 4.79. Determine el número total de ecuaciones simultáneas que se deben resolver para determinar v_1 usando (*a*) análisis de nodos; (*b*) análisis de mallas. (*c*) ¿Cuál método se prefiere y diga si depende de qué lado de la resistencia de 40 Ω se elija como nodo de referencia? *Explique su respuesta*.

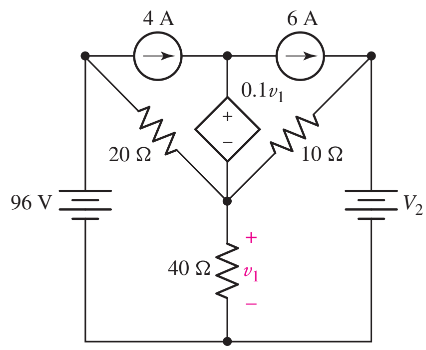


FIGURA 4.79

56. Reemplace la fuente dependiente de tensión en el circuito de la figura 4.79 por una fuente dependiente de corriente orientada de tal manera que la flecha señale hacia arriba. La expresión de control 0.1 v_1 sigue sin cambio. El valor V_2 es cero. (*a*) Determine el número total de ecuaciones simultáneas necesarias para obtener la potencia disipada por la resistencia de 40 Ω si se usa análisis de nodos. (*b*) ¿Se prefiere en su lugar el análisis de mallas? *Explique.*

57. Después de estudiar el circuito de la figura 4.80, determine el número total de ecuaciones simultáneas que se deben resolver para determinar las tensiones v_1 y v_3 usando (*a*) análisis de nodos, (*b*) análisis de mallas.

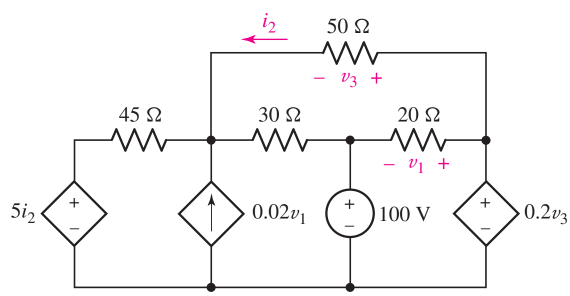


FIGURA 4.80

58. Desde la perspectiva de determinar las tensiones y corrientes correspondientes a todos los componentes, (*a*) diseñe un circuito de cinco nodos y cuatro mallas que se analice más fácilmente usando técnicas de nodos. (*b*) Modifique su circuito reemplazando sólo un componente de tal manera que ahora se analice más fácilmente usando técnicas de mallas.

4.6 Análisis de circuitos asistido por computadora

59. Utilice PSpice (o una herramienta CAD similar) para verificar la solución del ejercicio 8. Imprima el diagrama esquemático correctamente etiquetado con la respuesta destacada, junto con sus cálculos manuales.

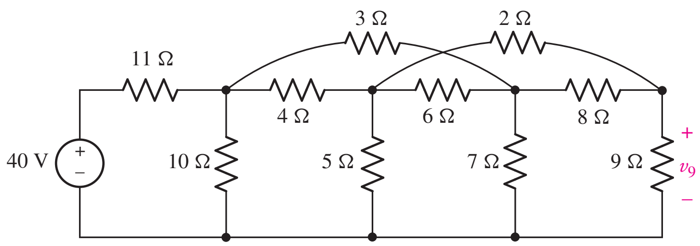
60. Utilice PSpice (o una herramienta CAD similar) para verificar la solución del ejercicio 10. Imprima el diagrama correctamente marcado con las dos tensiones de nodos destacadas, junto con sus cálculos manuales resolviendo las mismas cantidades.

61. Utilice PSpice (o una herramienta CAD similar) para verificar la tensión a través de la resistencia de 5 Ω en el circuito del ejercicio 13. Imprima el diagrama correctamente marcado con la respuesta destacada, junto con sus cálculos manuales.

62. Verifique los valores numéricos para cada tensión de nodo en el ejercicio 15 usando PSpice o una herramienta CAD similar. Imprima el diagrama correctamente marcado con las tensiones de nodos destacadas, junto con sus cálculos manuales.

63. Verifique los valores numéricos de i_1 y v_x como se indican en el circuito del ejercicio 17, usando PSpice o una herramienta CAD similar. Imprima el diagrama adecuadamente marcado con las respuestas destacadas, junto con los cálculos manuales.

64. (*a*) Genere un paquete de información de entrada para SPICE para determinar la tensión v_9 marcada en la figura 4.81. Imprima el archivo generado con la solución destacada. (*b*) Verifique su respuesta manualmente.



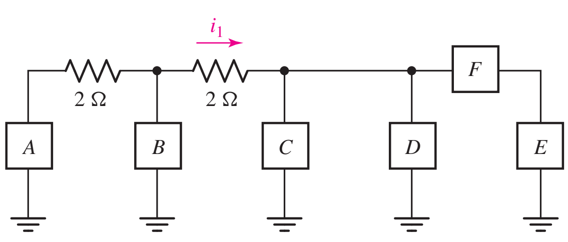
■ **FIGURA 4.81**

Ejercicios de integración de capítulo

65. (*a*) Diseñe un circuito utilizando sólo baterías de 9 V y resistencias de valores estándar con tolerancia de 5% que proporcionen tensiones de 1.5 V, 4.5 V y 5 V y por lo menos una corriente de malla de 1 mA. (*b*) Verifique su diseño usando PSpice o una herramienta CAD similar.

66. Una serie decorativa para exterior de lámparas multicolor se instala en una casa en una tranquila área residencial. Después de conectar el adaptador de 12 V ca en la toma de corriente eléctrica, el dueño observa de inmediato que dos lámparas se han quemado. (*a*) ¿Las lámparas están conectadas en serie o en paralelo? *Explique*. (*b*) Simule la serie de lámparas escribiendo un programa de información de entrada SPICE, suponiendo 44 lámparas, suministro de potencia de 12 V cd, alambre de cobre suave macizo de calibre 24 AWG, y lámparas individuales de 10 mW nominales cada una. Imprima el archivo generado, con la potencia suministrada por la fuente de 12 V destacada. (*c*) Verifique su simulación mediante cálculo manual.

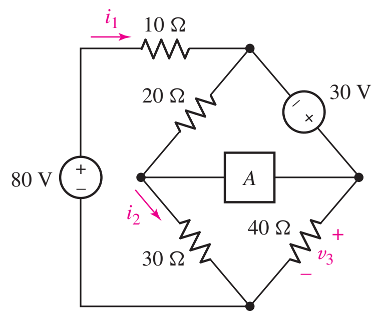
67. Considere el circuito representado en la figura 4.82. Utilice el análisis ya sea de nodo o de malla como herramienta de diseño para obtener un valor de 200 mA para i_1, si los elementos *A, B, C, D, E* y *F* deben ser fuentes ya sea de corriente o de tensión con valores diferentes de cero.



■ **FIGURA 4.82**

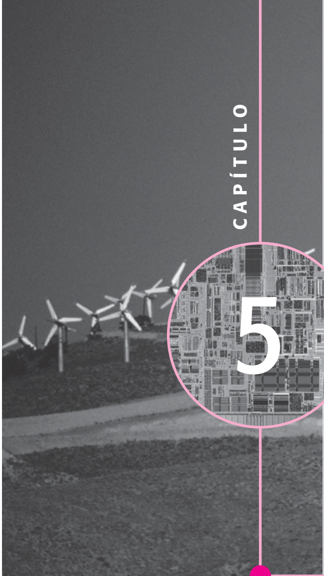
68. (*a*) ¿En qué circunstancias la presencia de una fuente independiente de tensión simplifica en gran medida el análisis de nodos? *Explique*. (*b*) ¿En qué circunstancias la presencia de una fuente independiente de corriente simplifica notablemente el análisis de mallas? *Explique*. (*c*) ¿En qué principio físico fundamental se basa el análisis de nodos? (*d*) ¿En qué principio físico fundamental se basa el análisis de mallas?

69. Con referencia a la figura 4.83, (*a*) determine si es más adecuado el análisis de nodos o el de mallas para determinar i_2 si el elemento *A* se reemplaza por un cortocircuito; luego realice el análisis. (*b*) Verifique su respuesta con una simulación PSpice adecuada. Presente el diagrama esquemático adecuadamente marcado, junto con la respuesta destacada.



■ **FIGURA 4.83**

70. El elemento marcado *A* en el circuito de la figura 4.83 se reemplaza por una fuente independiente de tensión de 2.5 V con la terminal de referencia positiva conectada al nodo común de las resistencias de 20 Ω y 30 Ω. (*a*) Determine si es más sencillo el análisis de nodos o el de mallas para determinar la tensión marcada v_3. (*b*) Verifique su respuesta usando PSpice. (*c*) ¿Su conclusión para el inciso (*a*) cambiaría si la corriente i_2 también se preguntara? *Explique*.



CAPÍTULO 5

Técnicas útiles para el análisis de circuitos



CONCEPTOS CLAVE

- La superposición como un medio para determinar las *contribuciones individuales* de diferentes fuentes a cualquier corriente o tensión
- La transformación de fuente como un medio para simplificar circuitos
- El teorema de Thévenin
- El teorema de Norton
- Redes equivalentes de Thévenin y de Norton
- Transferencia de potencia máxima
- Transformaciones $\Delta \leftrightarrow Y$ en redes resistivas
- Selección de una combinación particular de técnicas de análisis
- Simulaciones de barrido de cd mediante PSpice

INTRODUCCIÓN

Las técnicas de análisis nodal y de malla que se describieron en el capítulo 4 representan métodos muy confiables y extremadamente poderosos. Sin embargo, ambos requieren que desarrollemos un conjunto completo de ecuaciones a fin de describir un circuito particular como regla general, aun cuando sólo sea de interés un valor de corriente, de tensión o de potencia. En este capítulo investigamos las diferentes técnicas para aislar partes específicas de un circuito a fin de simplificar el análisis. Después de examinar el uso de estas técnicas, nos concentraremos en cómo seleccionar un modelo sobre otro.

5.1 LINEALIDAD Y SUPERPOSICIÓN

Todos los circuitos que planeamos analizar se pueden clasificar como *circuitos lineales*, así que es un buen momento para detallar más, al definir con exactitud lo que entendemos por eso. Luego de ello, podemos considerar la consecuencia más importante de la linealidad, el principio de ***superposición***, el cual resulta fundamental y aparecerá de manera repetida en el estudio del análisis de circuitos lineales. En realidad, el hecho de no poder aplicar la superposición en los circuitos no lineales ¡es la principal razón de que sean tan difíciles de analizar!

El principio de superposición establece que la *respuesta* (una corriente o tensión deseada) en un circuito lineal que tiene más de una fuente independiente se obtiene mediante la suma de las respuestas ocasionadas por las fuentes independientes separadas que *actúan solas*.

Elementos lineales y circuitos lineales

Se definirá primero un ***elemento lineal*** como un elemento pasivo que tiene una relación lineal de tensión-corriente. Por "relación lineal de tensión-corriente" entendemos simplemente que al multiplicar la corriente que atraviesa el elemento por una constante K tenemos como resultado la multiplicación de la tensión en el elemento por la



misma constante K. En este caso, sólo se ha definido un elemento pasivo (la resistencia) y su relación de tensión-corriente

$$v(t) = Ri(t)$$

es claramente lineal. En realidad, si $v(t)$ se gráfica como función de $i(t)$, se obtiene una recta.

Por ejemplo, la fuente de tensión dependiente $v_s = 0.6i_1 - 14v_2$ es lineal, pero $v_s = 0.6i_1^2$ y $v_s = 0.6i_1\, v_2$ no lo son.

También definimos una ***fuente dependiente lineal*** como una fuente de corriente o tensión dependiente, cuya corriente o tensión de salida resulta proporcional sólo a la primera potencia de la variable de corriente *o* tensión especificada en el circuito (o a la *suma* de tales cantidades).

Ahora definimos un ***circuito lineal*** como el que está compuesto en forma completa por fuentes independientes, fuentes dependientes lineales y elementos lineales. A partir de esta definición, se demuestra[1] que "la respuesta es proporcional a la fuente", o que la multiplicación de todas las tensiones y corrientes de fuente independiente por una constante K incrementa todas las respuestas de corriente y tensión por el mismo factor K (incluyendo las salidas de tensión y corriente de la fuente dependiente).

El principio de superposición

La consecuencia más importante de la linealidad es la ***superposición***.

Desarrollemos el principio de superposición considerando primero el circuito de la figura 5.1, que contiene dos fuentes independientes, los generadores de corriente que imponen las corrientes i_a e i_b en el circuito. Por esta razón, las fuentes a menudo se denominan *funciones de forzamiento* y las tensiones nodales que producen se denominan *funciones de respuesta* o simplemente *respuestas*. Quizá tanto las funciones de forzamiento como las respuestas sean funciones del tiempo. Las dos ecuaciones nodales de este circuito son:

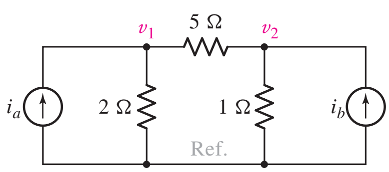


FIGURA 5.1 Circuito con dos fuentes de corriente independientes.

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = i_a \qquad [1]$$

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = i_b \qquad [2]$$

Ahora efectuaremos el experimento x. Cambiamos las dos funciones forzadas a i_{ax} e i_{bx}; las dos tensiones desconocidas serán ahora diferentes, por lo que las denominaremos v_{1x} y v_{2x}. Por lo tanto,

$$0.7v_{1x} - 0.2v_{2x} = i_{ax} \qquad [3]$$

$$-0.2v_{1x} + 1.2v_{2x} = i_{bx} \qquad [4]$$

En seguida llevamos a cabo el experimento y al cambiar las corrientes de fuente por i_{ay} e i_{by} y midiendo también las respuestas v_{1y} y v_{2y}, tenemos:

$$0.7v_{1y} - 0.2v_{2y} = i_{ay} \qquad [5]$$

$$-0.2v_{1y} + 1.2v_{2y} = i_{by} \qquad [6]$$

[1] La demostración implicaría comprobar primero que el uso del análisis nodal en los circuitos lineales da como resultado sólo ecuaciones lineales de la forma

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_Nv_N = b$$

donde las a_i son constantes (combinaciones de valores de resistencia o conductancia, constantes que aparecen en expresiones de fuentes dependientes, 0, o ±1), las v_i son tensiones de nodos desconocidas (respuestas) y b es un valor de fuente independiente o una suma de valores de fuentes independientes. Dado un conjunto de este tipo de ecuaciones, si multiplicamos todas las b por K, entonces resulta evidente que la solución de este nuevo conjunto de ecuaciones serán las tensiones de nodo. $Kv_1, Kv_2, \ldots, Kv_N$.

Los tres conjuntos de ecuaciones describen el mismo circuito con tres conjuntos diferentes de corrientes de fuente. Intentemos *sumar* o "*superponer*" los dos últimos conjuntos de ecuaciones. Al sumar las ecuaciones [3] y [5],

$$(0.7v_{1x} + 0.7v_{1y}) - (0.2v_{2x} + 0.2v_{2y}) = i_{ax} + i_{ay} \qquad [7]$$

$$0.7v_1 \quad - \quad 0.2v_2 \quad = \quad i_a \qquad [1]$$

y al sumar las ecuaciones [4] y [6],

$$-(0.2v_{1x} + 0.2v_{1y}) + (1.2v_{2x} + 1.2v_{2y}) = i_{bx} + i_{by} \qquad [8]$$

$$-0.2v_1 \quad + \quad 1.2v_2 \quad = \quad i_b \qquad [2]$$

donde la ecuación [1] se escribió de inmediato debajo de la ecuación [7], y la ecuación [2] debajo de la ecuación [8] para una comparación fácil.

La linealidad de todas las ecuaciones nos permite comparar la ecuación [7] con la [1], y la ecuación [8] con la [2], además de extraer una conclusión interesante. Si elegimos i_{ax} e i_{ay} de manera que su suma sea i_a y elegimos i_{bx} e i_{by} de modo que su suma corresponda a i_b, entonces las respuestas deseadas v_1 y v_2 se determinan sumando v_{1x} a v_{1y} y v_{2x} a v_{2y}, respectivamente. En otras palabras, podemos efectuar el experimento *x* y observar las respuestas, hacer el experimento *y* y observar las respuestas, y finalmente sumar ambos conjuntos de respuestas. Esto conduce al concepto fundamental implicado en el principio de superposición: examinar cada fuente independiente (y la respuesta que genera), una a la vez, junto con las otras fuentes independientes "desactivadas" o "con salida cero".

Si reducimos una fuente de tensión a cero volts, generamos en verdad un cortocircuito (fig. 5.2*a*). Si reducimos una fuente de corriente a cero amperes, creamos un circuito abierto (fig. 5.2*b*). De tal modo, el ***teorema de superposición*** expresa que:

> En cualquier red resistiva lineal, la tensión o la corriente a través de cualquier resistencia o fuente se calcula mediante la suma algebraica de todas las tensiones o corrientes individuales ocasionadas por fuentes independientes separadas que actúan solas, junto con todas las demás fuentes de tensión independientes sustituidas por cortocircuitos y todas las demás fuentes de corriente independientes, sustituidas por circuitos abiertos.

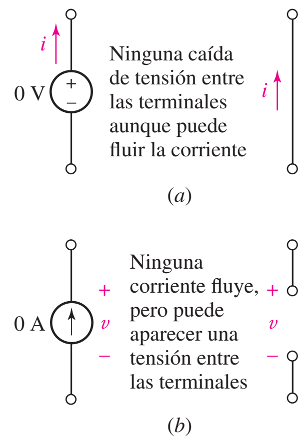


FIGURA 5.2 (*a*) Fuente de tensión igual a cero que actúa como un cortocircuito. (*b*) Fuente de corriente igual a cero que funciona como un circuito abierto.

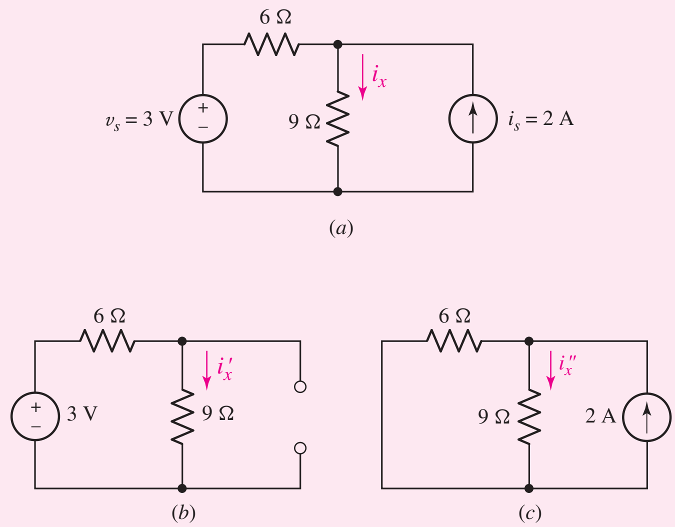
Por lo tanto, si hay *N* fuentes independientes debemos efectuar *N* experimentos, cada uno con sólo una de las fuentes independientes activas y las otras inactivas, desconectadas o con salida cero. Observe que las fuentes *dependientes* se encuentran en general activas en cada experimento.

Tampoco hay razón para que una fuente independiente deba asumir sólo su valor dado o un valor cero en los diversos experimentos: sólo es necesario que la suma de los diversos valores sea igual al valor original. No obtante, una fuente inactiva casi siempre propicia que el circuito sea de lo más simple.

Sin embargo, el circuito que utilizamos como ejemplo indica que podría enunciarse un teorema de mucho mayor alcance, pues un *grupo* de fuentes independientes puede hacerse activo e inactivo de manera colectiva, si así deseamos. Por ejemplo, suponga que hay tres fuentes independientes. El teorema establece que podriamos encontrar una respuesta dada al considerar que cada una de las tres fuentes actúa sola y después sumamos los tres resultados. De manera alterna, calcularíamos la respuesta debida a la primera y a la segunda fuentes que operan con la tercera inactiva, y sumando luego a ésta la respuesta ocasionada por la tercera fuente actuando sola. Esto equivale a tratar varias fuentes de manera colectiva como una especie de "superfuente".

EJEMPLO 5.1

En el circuito de la figura 5.3*a*, utilice la superposición para escribir la expresión de la corriente de rama desconocida i_x.



■ **FIGURA 5.3** (*a*) Ejemplo de circuito con dos fuentes independientes para las cuales se desea la corriente de rama i_x; (*b*) el mismo circuito con la fuente de corriente en circuito abierto; (*c*) el circuito original con la fuente de tensión en cortocircuito.

Primero igualamos a cero la fuente de corriente y volvemos a dibujar el circuito, como se ilustra en la figura 5.3*b*. La parte de i_x debida a la fuente de tensión se ha denominado i'_x para evitar confusiones; además, se calcula sin ninguna dificultad su valor, que es de 0.2 A.

A continuación igualamos a cero la fuente de tensión de la figura 5.3*a* y de nuevo dibujamos el circuito, como en la figura 5.3*c*. La aplicación rutinaria de la división de corriente nos permite determinar que i''_x (la parte de i_x debida a la fuente de corriente de 2 A) es igual a 0.8 A.

Ahora calculamos la corriente completa i_x como la suma de las dos componentes individuales:

$$i_x = i_{x|3\text{V}} + i_{x|2\text{A}} = i'_x + i''_x$$

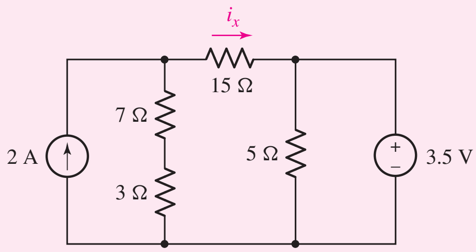
o

$$i_x = \frac{3}{6+9} + 2\left(\frac{6}{6+9}\right) = 0.2 + 0.8 = 1.0 \text{ A}$$

Otra manera de examinar este ejemplo es que la fuente de 3 V y la fuente de 2 A se encuentran cada una efectuando un trabajo sobre el circuito, lo cual origina una corriente total i_x que fluye por la resistencia de 9 Ω. *Sin embargo, la contribución de la fuente de 3 V a i_x no depende de la contribución de la fuente de 2 A, y viceversa*. Por ejemplo, si duplicamos la salida de la fuente de 2 A hasta 4 A, contribuirá ahora con 1.6 A a la corriente total i_x que fluye por la resistencia de 9 Ω. Sin embargo, la fuente de 3 V seguirá contribuyendo con sólo 0.2 A a i_x, para una nueva corriente total de 0.2 + 1.6 = 1.8 A.

PRÁCTICA

5.1 Aplique el principio de superposición en el circuito de la figura 5.4 para calcular la corriente i_x.



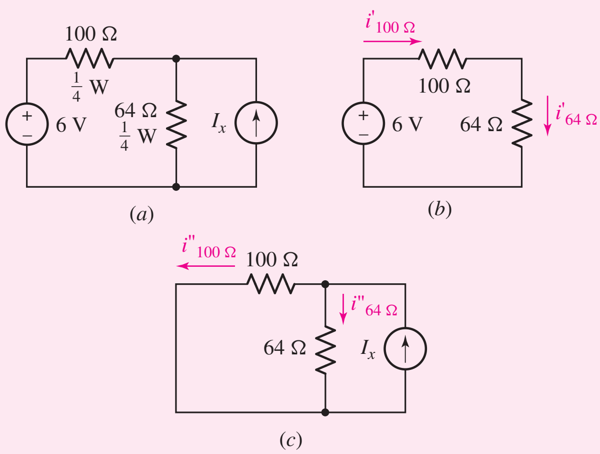
■ **FIGURA 5.4**

Respuesta: 660 mA.

Como veremos, por lo general, la superposición no reduce la carga de trabajo cuando consideramos un circuito particular, puesto que implica el análisis de varios nuevos circuitos para obtener la respuesta deseada. Sin embargo, resulta muy útil para identificar la importancia de varias partes de un circuito más complejo. También constituye la base del análisis fasorial, el cual se presenta en el capítulo 10.

EJEMPLO 5.2

Refiriéndose al circuito de la figura 5.5*a*, determine la corriente *positiva* máxima a la cual la fuente I_x puede ajustarse, antes de que cualquier resistencia supere su valor nominal de potencia y se sobrecaliente.



■ **FIGURA 5.5** (*a*) Circuito con dos resistencias con valor nominal de $\frac{1}{4}$ W cada una. (*b*) Circuito con solamente la fuente de 6 V activa. (*c*) Circuito con la fuente I_x activa.

▶ ***Identificar el objetivo del problema.***

Cada resistencia se especifica hasta un máximo de 250 mW. Si el circuito permite que se exceda este valor (al forzar demasiada corriente a través de cualquier resistencia), ocurrirá un calentamiento excesivo, lo que quizá provoque un accidente. La fuente de 6 V no puede cambiarse, por lo que debemos encontrar una ecuación que incluya a I_x y a la corriente máxima a través de cada resistencia.

(*continúa*)

▶ ***Recopilar la información conocida.***

Con base en su valor nominal de potencia de 250 mW, la corriente máxima que la resistencia de 100 Ω tolera es:

$$\sqrt{\frac{P_{\text{máx}}}{R}} = \sqrt{\frac{0.250}{100}} = 50 \text{ mA}$$

y, de modo similar, la corriente que circula por el resistor de 64 Ω debe ser menor que 62.5 mA.

▶ ***Elegir la técnica disponible que mejor se ajuste al problema.***

Se aplica el análisis nodal o el de malla para la solución de este problema, aunque la superposición quizá dé una visión un poco diferente, puesto que estamos interesados principalmente en el efecto de la fuente de corriente.

▶ ***Construir un conjunto apropiado de ecuaciones.***

Mediante la superposición, volvemos a dibujar el circuito como en la figura 5.5*b* y podemos ver que la fuente de 6 V aporta una corriente de:

$$i'_{100\Omega} = \frac{6}{100 + 64} = 36.59 \text{ mA}$$

a la resistencia de 100 Ω y puesto que la resistencia de 64 Ω está en serie, $i'_{64\Omega} =$ 36.59 mA.

Reconociendo al divisor de corriente de la figura 5.5*c*, observamos que $i''_{64\Omega}$ se *sumará* a $i'_{64\Omega}$, pero $i''_{100\Omega}$ tiene una dirección *opuesta* a $i'_{100\Omega}$. En consecuencia, $I_x 62.5 - 36.59 = 25.91$ mA contribuye con seguridad hasta a la corriente de la resistencia de 64 Ω y hasta $50 - (-36.59) = 86.59$ mA a la corriente de la resistencia de 100 Ω.

La resistencia de 100 Ω impone la siguiente restricción sobre I_x:

$$I_x < (86.59 \times 10^{-3})\left(\frac{100 + 64}{64}\right)$$

y la resistencia de 64 Ω requiere que:

$$I_x < (25.91 \times 10^{-3})\left(\frac{100 + 64}{100}\right)$$

▶ ***Intentar resolver.***

Si hemos considerado primero la resistencia de 100 Ω, podemos ver que I_x está limitada a $I_x < 221.9$ mA. La resistencia de 64 Ω limita a I_x de manera que $I_x < 42.49$ mA. Para satisfacer ambas restricciones, I_x debe ser menor que 42.49 mA. Si se incrementa el valor, la resistencia de 64 Ω se sobrecalentará mucho antes de que lo haga la resistencia de 100 Ω.

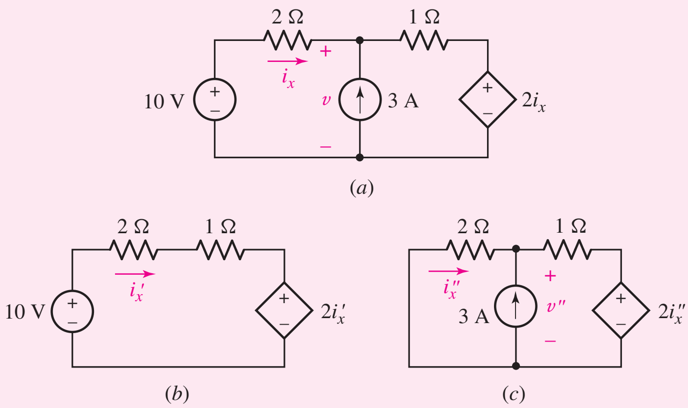
▶ ***Verificar la solución. ¿Es razonable o es la esperada?***

Una manera en particular útil de evaluar nuestra solución consiste en efectuar un análisis de barrido de cd en PSpice, como se describe en el ejemplo siguiente. Sin embargo, una cuestión interesante es si habriamos esperado que la resistencia de 64 Ω se sobrecalentara primero.

Originalmente encontramos que la resistencia de 100 Ω tiene una corriente máxima más pequeña, por lo que podría ser razonable esperar que limitará a I_x. Sin embargo, debido a que I_x se *opone* a la corriente enviada por la fuente de 6 V a través de la resistencia de 100 Ω, pero se *suma* a la contribución de la fuente de 6 V a la corriente que circula por el resistor de 64 Ω resulta que trabaja de otra forma: es la resistencia de 64 Ω lo que fija el límite sobre I_x.

EJEMPLO 5.3

En el circuito de la figura 5.6*a* aplique el principio de la superposición para determinar el valor de i_x.



■ **FIGURA 5.6** (*a*) Ejemplo de un circuito con dos fuentes independientes y una dependiente, para la que se desea la corriente de rama i_x. (*b*) Circuito con la fuente de 3 A en circuito abierto. (*c*) Circuito original con la fuente de 10 V en cortocircuito.

Primero ponemos en circuito abierto la fuente de 3 A (fig. 5.6*b*). La ecuación de una malla es:

$$-10 + 2i_x' + i_x' + 2i_x' = 0$$

por lo que:

$$i_x' = 2 \text{ A}$$

A continuación, ponemos en cortocircuito la fuente de 10 V (fig. 5.6*c*) y escribimos la ecuación de un nodo:

$$\frac{v''}{2} + \frac{v'' - 2i_x''}{1} = 3$$

y relacionamos la cantidad controladora de la fuente dependiente para v'':

$$v'' = 2(-i_x'')$$

Al resolver, encontramos:

$$i_x'' = -0.6 \text{ A}$$

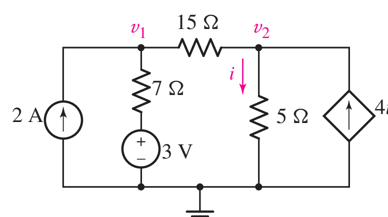
y, por lo tanto,

$$i_x = i_x' = i_x'' = 2 + (-0.6) = 1.4 \text{ A}$$

Observe que al volver a dibujar cada subcircuito siempre hemos tenido cuidado en usar algún tipo de notación para indicar que no estamos trabajando con las variables originales. Esto evita la aparición de errores bastante desastrosos cuando sumamos los resultados individuales.

PRÁCTICA

5.2 Utilice la superposición en el circuito de la figura 5.7 para obtener la tensión a través de cada fuente de corriente.



■ **FIGURA 5.7**

Respuesta: $v_{1|2A} = 9.180$ V, $v_{2|2A} = -1.148$ V, $v_{1|3V} = 1.967$ V, $v_{2|3V} = -0.246$ V; $v_1 = 11.147$ V, $v_2 = -1.394$ V.

Resumen del procedimiento básico de superposición

1. **Seleccionar una de las fuentes independientes. Fijar el valor de las otras fuentes independientes a cero.** Lo anterior significa que las fuentes de tensión se reemplazan con cortocircuitos y las fuentes de corriente con circuitos abiertos. Dejar intactas las fuentes dependientes.
2. **Remarcar las tensiones y corrientes utilizando la notación adecuada** (es decir, v' e i_2''). Asegurarse de remarcar las variables de control de las fuentes dependientes para evitar confusión.
3. **Analizar el circuito simplificado para encontrar las corrientes y/o las tensiones deseadas.**
4. **Repetir los pasos 1 a 3 hasta que cada fuente independiente haya sido considerada.**
5. **Agregar las corrientes y/o tensiones parciales obtenidas a partir del análisis por separado.** Poner especial atención a los signos de las tensiones y direcciones de las corrientes cuando se sumen.
6. **No agregar cantidades de potencia.** Si se requieren cantidades que involucren potencias, calcular solamente después de que las tensiones parciales y/o corrientes hayan sido sumadas.

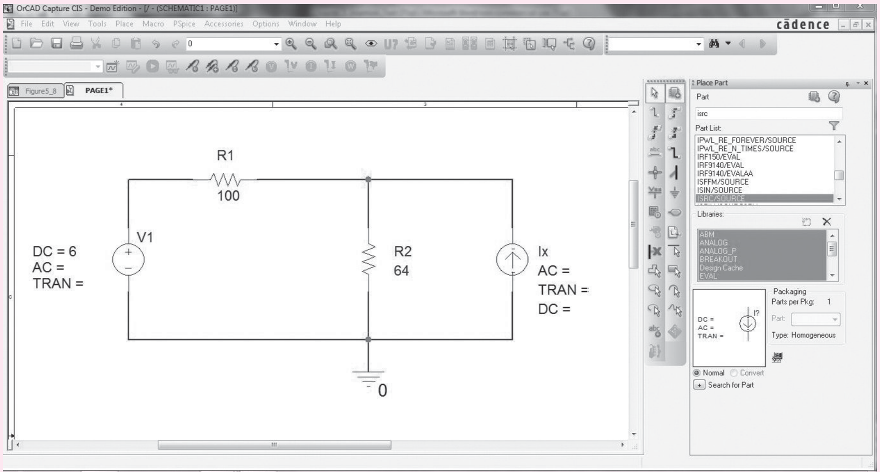
Observe que el paso 1 puede modificarse en diferentes formas. Primero, las fuentes independientes pueden considerarse en grupos en lugar de hacerlo en forma individual si esto simplifica el análisis, siempre y cuando no se incluya ninguna fuente independiente en más de un subcircuito. Segundo, desde el punto de vista técnico no es necesario fijar las fuentes a un valor cero, aunque hacerlo casi siempre es la mejor opción. Por ejemplo, una fuente de 3 V puede aparecer en dos subcircuitos como una fuente de 1.5 V, puesto que $1.5 + 1.5 = 3$ V de la misma forma que $0 + 3 = 3$ V. Sin embargo, debido a que no es probable simplificar el análisis, no tiene caso hacer ese ejercicio.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

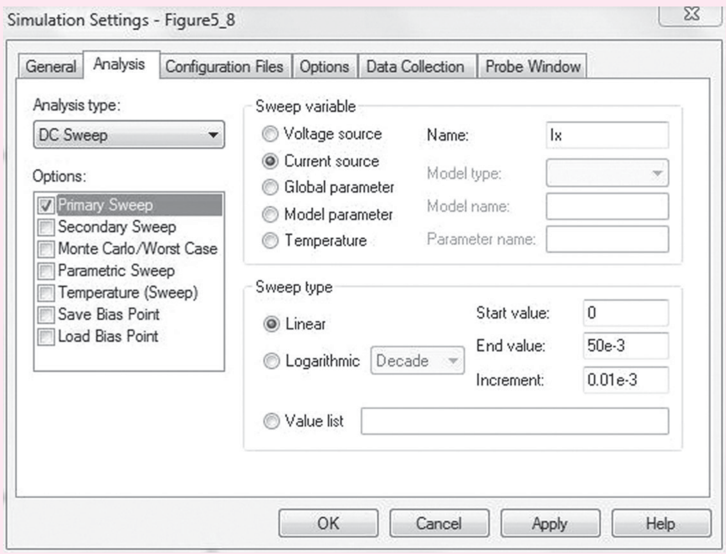
Aunque PSpice es extremadamente útil para verificar que analizamos de manera correcta un circuito completo, también sirve de ayuda para determinar la contribución de cada fuente a una respuesta particular. Para ello, empleamos lo que se conoce como un *barrido de parámetros de cd*.

Considere el circuito del ejemplo 5.2, cuando se nos solicitó determinar la máxima corriente positiva que podría obtenerse de la fuente de corriente sin exceder el valor nominal de potencia de cualquier resistencia en el circuito. En la figura 5.8 se muestra el circuito modificado usando la herramienta esquemática Orcad Capture CIS. Observe que no se asignó un valor a la fuente de corriente.

Después de que se introdujo y se guardó el esquema, el siguiente paso es especificar los parámetros de barrido de cd. Esta opción nos permite especificar un intervalo de valores para una fuente de tensión o de corriente (en el caso presente, la fuente de corriente I_x), en lugar de un valor específico. Si se selecciona **New Simulation Profile** en **PSpice**, se proporciona un nombre para el perfil y se presenta la caja de diálogo que se muestra en la figura 5.9.



■ **FIGURA 5.8** Circuito del ejemplo 5.2.

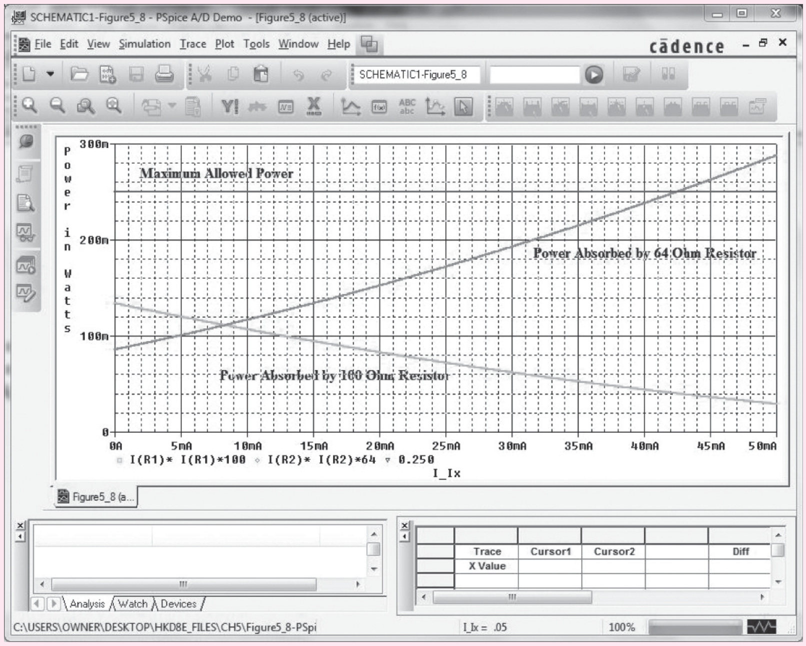


■ **FIGURA 5.9** Ventana de diálogo del barrido cd que se muestra con la I_x elegida como variable.

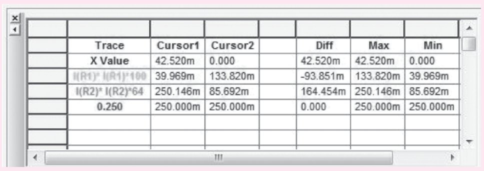
En **Analysis Type**, accedemos a la opción **DC Sweep** y se especifica la "variable de barrido" como **Current Source**, y luego se teclea I_x en la caja de **Name**. Existen varias opciones bajo Sweep Type: **Linear, Logarithmic** y **Value List**. La última opción nos permite especificar cada valor que se asignará a I_x. Sin embargo, para generar una gráfica uniforme eligimos efectuar un barrido **Linear** con un **Start Value** de 0 mA, un **End Value** de 50 mA y un **Increment** de 0.01 mA.

Después de efectuar la simulación, el programa graficador de salida Probe se inicia de manera automática. Cuando aparece la ventana, se presenta el eje horizontal (correspondiente a nuestra variable, I_x) pero debe escogerse la variable del eje vertical. Al seleccionar **Add Trace** del menú **Trace**, hacemos clic en **I(R1)**, luego tecleamos un asterisco en la caja **Trace Expression**, hacemos clic otra vez en

(*continúa*)



(*a*)



Trace	Cursor1	Cursor2		Diff	Max	Min
X Value	42.520m	0.000		42.520m	42.520m	0.000
I(R1)* I(R1)*100	39.969m	133.820m		-93.851m	133.820m	39.969m
I(R2)* I(R2)*64	250.146m	85.692m		164.454m	250.146m	85.692m
0.250	250.000m	250.000m		0.000	250.000m	250.000m

(*b*)

■ **FIGURA 5.10** (*a*) Salida de Probe con leyendas que identifican la potencia absorbida en forma individual por las dos resistencias. También se incluyó una linea horizontal que indica 250 mW, así como leyenda para mejorar la claridad. (b) Ventana de diàlogo Cursor.

I(R1), insertamos incluso otro asterisco y por último, tecleamos 100. Esta rutina permite que Probe grafique la potencia que absorbe la resistencia de 100 Ω. De manera similar, repetimos el proceso para sumar la potencia absorbida por la resistencia de 64 Ω, lo que origina una gráfica similar a la ilustrada en la figura 5.10*a*. A la gráfica también se añadió una recta de referencia horizontal en 250 mW, tecleando 0.250 en la caja **Trace Expression** luego de elegir **Add Trace** del menú **Trace** por tercera vez.

Podemos ver en la gráfica que la resistencia de 64 Ω *supera* su valor de potencia nominal de 250 mW en la vecindad de $I_x = 43$ mA. Sin embargo, observamos que independientemente del valor de la fuente de corriente I_x (siempre y cuando se encuentre entre 0 y 50 mA), la resistencia de 100 Ω nunca disipará 250 mW; en realidad, la potencia absorbida *disminuye* con el aumento de corriente de la fuente de corriente. Si deseamos una respuesta más precisa, sólo es necesario elegir la herramienta del cursor, la cual se invoca seleccionando **Trace, Cursor** y **Display** de la barra de menús. La figura 5.10*b* muestra el resultado al arrastrar ambos cursores hacia 42.52 mA, donde la resistencia de 64 Ω apenas ha superado su valor nominal en de poencial de250 mW. Obtenemos una mayor precisión al reducir el valor de incremento empleado en el barrido de cd.

Esta técnica resulta muy útil para analizar circuitos electrónicos, donde podríamos necesitar determinar, por ejemplo, qué tensión de entrada requerimos para un circuito de amplificador complicado, a fin de obtener una tensión de salida cero. También observamos que hay varios tipos más de barridos de parámetros, incluyendo un barrido de tensión cd. La capacidad para variar la temperatura sólo es útil cuando se trabaja con modelos de componentes que tienen un parámetro de temperatura incorporado, como los diodos y los transistores.

Desafortunadamente, resulta que casi siempre se ahorra poco tiempo, o nada, cuando se analiza un circuito que contiene una o más fuentes dependientes mediante el uso del principio de superposición, ya que siempre debe haber al menos dos fuentes en operación: una fuente independiente y todas las fuentes dependientes.

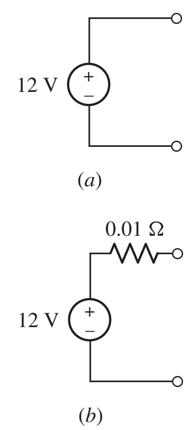
En todo momento debemos estar conscientes de las limitantes de la superposición. Se aplica sólo para respuestas lineales, y en consecuencia la respuesta no lineal más común —la potencia— no está sujeta a la superposición. Por ejemplo, considerar dos baterías de 1 V en serie con una resistencia de 1 Ω. La potencia que se entrega a la resistencia es igual a 4 W, pero si tratamos, de manera errónea, de aplicar la superposición, podriamos decir que cada batería provee 1 W, y por ello la potencia total sería 2 W. Lo anterior es incorrecto, pero es un error que se comete con una facilidad sorprendente.

5.2 TRANSFORMACIONES DE FUENTES

Fuentes de tensión prácticas

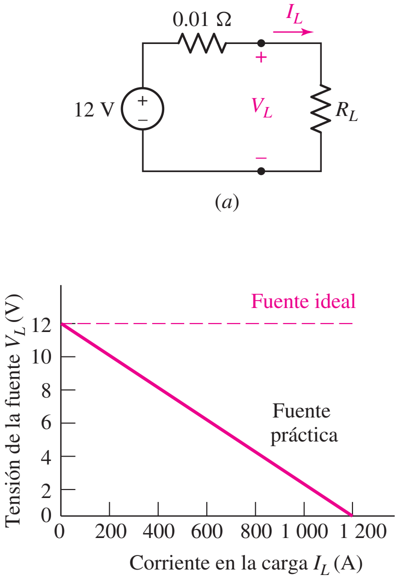
Hasta ahora hemos trabajado solamente con fuentes y elementos *ideales*, cuya tensión terminal es independiente de la corriente que fluya a través de ellos. Para ver la importancia de este hecho, considere una simple fuente independiente "ideal" de 9 V conectada a una resistencia de 1 Ω. La fuente de 9 V demandará una corriente de 9 amperes a través de la resistencia de 1 Ω (quizás esto parezca suficientemente razonable), pero la misma fuente aparentemente demandaría 9 000 000 de amperes a través de una resistencia de 1 mΩ (lo cual no parece razonable). En papel, no hay nada que nos impida reducir el valor de la resistencia hasta 0 Ω…, pero eso llevaría a una contradicción, ya que la fuente estaría "intentando" mantener 9 V a través de un cortocircuito, lo cual la ley de Ohm nos dice que no puede suceder (¿$V = 9 = RI = 0$?).

¿Qué sucede en la vida real cuando se hace este tipo de experimento? Por ejemplo, si tratamos de poner en marcha un automóvil con los faros ya encendidos, lo más probable es que notemos que la intensidad de los faros disminuye cuando se pide a la batería suministrar una alta (∼ 100 A o más) corriente de arranque en paralelo con la corriente que va a los faros. Si modelamos la batería de 12 V con una fuente ideal de 12 V, como en la figura 5.11*a*, nuestra observación no se puede explicar. Otra forma de decir esto es que nuestro modelo falla cuando la carga toma una gran corriente de la fuente.



■ **FIGURA 5.11** (*a*) Fuente de tensión ideal de 12 V cd utilizada para hacer un modelo de una batería de automóvil. (*b*) Modelo más exacto que toma en cuenta la reducción observada en la tensión de terminal a corrientes elevadas.

Para reflejar mejor el comportamiento de un dispositivo real, la fuente de tensión ideal debe modificarse para tomar en cuenta la reducción de su tensión de terminal cuando se extraen de ella grandes corrientes. Supongamos que observamos en forma experimental que la batería de nuestro automóvil tiene una tensión de terminal de 12 V cuando no fluye corriente a través de ella, y una tensión reducida de 11 V cuando circula una corriente de 100 A. ¿Cómo podriamos hacer un modelo de este comportamiento? Bien, un modelo más preciso podría ser una fuente de tensión ideal de 12 V en serie con una resistencia en cuyos extremos aparece 1 V cuando circulan 100 A a través de ella. Un cálculo rápido muestra que la resistencia debe ser de 1 V/100 A = 0.01 Ω, así que la fuente de tensión ideal y la resistencia en serie constituyen una ***fuente de tensión práctica*** (fig.



(b)

■ **FIGURA 5.12** (a) Una fuente práctica que se asemeja al comportamiento de cierta batería de automóvil de 12 V, se muestra conectada a determinada resistencia de carga R_L. (b) La relación entre I_L y V_L es lineal.

5.11*b*). Por consiguiente, estamos utilizando una combinación en serie de dos elementos de circuito ideales, una fuente de tensión independiente y una resistencia, para modelar un dispositivo real.

Desde luego que no esperamos encontrar tal arreglo de elementos ideales dentro de la batería de automóvil. Cualquier dispositivo real se caracteriza por una cierta relación de corriente-tensión en sus terminales, de modo que el problema consiste en desarrollar alguna combinación de elementos ideales que pueda proporcionar una característica de corriente-tensión similar, al menos en algún intervalo útil de corriente, tensión o potencia.

En la figura 5.12*a* exhibimos el modelo práctico de dos piezas de la batería de automóvil conectada ahora a cierta resistencia de carga R_L. La tensión de terminal de la fuente práctica es la misma que la tensión en R_L y se denomina[2] V_L. La figura 5.12*b* muestra una gráfica de la corriente de carga V_L como una función de la tensión de carga I_L para esta fuente práctica. La ecuación de LVK para el circuito de la figura 5.12*a* se expresaría en términos de I_L y V_L como:

$$12 = 0.01\ I_L + V_L$$

y por ello,

$$V_L = -0.01\ I_L + 12$$

Es una ecuación lineal en I_L y V_L, así que la gráfica en la figura 5.12*b* es una línea recta. Cada punto sobre la línea corresponde a un valor diferente de R_L. Por ejemplo, el punto medio de la línea recta se obtiene cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia interna de la fuente práctica, o $R_L = 0.01\ \Omega$. En este caso, la tensión de carga es exactamente la mitad de la tensión de la fuente ideal.

Cuando $R_L = \infty$ y la carga no jala ninguna corriente de ningún tipo, la fuente práctica se encuentra en circuito abierto y la tensión terminal, o la tensión en circuito abierto, es $V_{Loc} = 12$. Si, por otra parte, $R_L = 0$, con lo cual se pone en cortocircuito las terminales de carga, entonces circulará una corriente de carga o de cortocircuito $I_{Lsc} = 1\,200$ A. *(En la práctica, un experimento de este tipo quizá ¡tendría como resultado la destrucción del cortocircuito, la batería y cualesquiera instrumentos de medición incorporados al circuito!*)

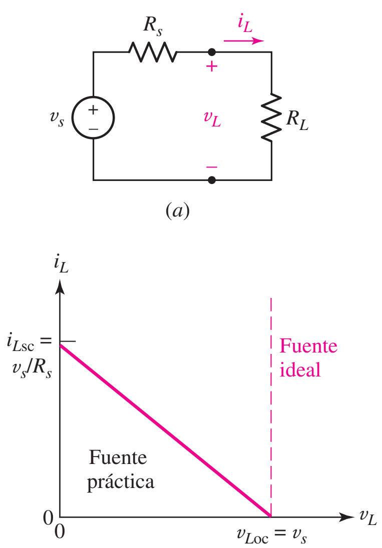
Puesto que la gráfica de V_L en función de I_L es una línea recta para tal fuente de tensión práctica, observaramos que los valores de es V_{Loc} e I_{Lsc} se determinan sólo de la curva $V_L - I_L$ completa.

La línea punteada horizontal que muestra la figura 5.12*b* representa la gráfica $V_L - I_L$ de una fuente de tensión *ideal*; la tensión de terminal permanece constante para cualquier valor de la corriente de carga. En la fuente de tensión práctica, la tensión de terminal tiene un valor cercano al de la fuente ideal sólo cuando la corriente de carga es más o menos pequeña.

Consideremos nuevamente una fuente de tensión práctica *general*, como la de la figura 5.13*a*. La tensión de la fuente ideal es v_s, y se pone en serie con ella una resistencia R_s, llamada *resistencia interna* o *resistencia de salida.* De nuevo, debemos notar que la resistencia no está en realidad presente como un componente separado, sino que sirve para tomar en cuenta una tensión de terminal que disminuye cuando aumenta la corriente de carga. Su presencia permite hacer con mayor exactitud un modelo del comportamiento de una fuente de tensión física.

La relación lineal entre v_L e i_L es:

$$v_L = v_s - R_s i_L \qquad [9]$$



(b)

■ **FIGURA 5.13** (a) Fuente de tensión práctica general conectada a una resistencia de carga R_L. (b) La tensión de terminal de una fuente de tensión práctica disminuye cuando i_L crece y $R_L = v_L/i_L$ disminuye. La tensión de terminal de una fuente de tensión ideal (también graficada) permanece igual para cualquier corriente suministrada a una carga.

[2] De aquí en adelante seguiremos la convención estándar de referirnos en forma estricta a las cantidades de cd mediante letras mayúsculas, en tanto que las letras minúsculas denotan una cantidad que, sabemos, posee alguna componente variable en el tiempo. Sin embargo, al explicar teoremas generales que se aplican a cd o a ca, continuaremos utilizando minúsculas para subrayar la naturaleza general del concepto.

y ésta se grafica en la figura 5.13*b*. La tensión en circuito abierto ($R_L = \infty$, por lo que $i_L = 0$) es:

$$v_{L\text{oc}} = v_s \qquad [10]$$

y la corriente en cortocircuito ($R_L = 0$, por lo que $v_L = 0$) es:

$$i_{L\text{sc}} = \frac{v_s}{R_s} \qquad [11]$$

También en este caso, los valores son las ordenadas al origen de la recta en la figura 5.13*b* y sirven para definirla en forma completa.

Fuentes de corriente prácticas

Una fuente de corriente ideal tampoco existe en el mundo real; no hay dispositivo físico que entregue una corriente constante, sin que importe la resistencia de carga a la que se conecta o la tensión entre sus terminales. Ciertos circuitos transistorizados entregarán una corriente constante a una amplia gama de resistencias de carga, pero la resistencia de carga siempre se hace lo bastante grande para que la corriente que circula por ella se vuelva muy pequeña. La potencia infinita simplemente nunca está disponible (para mala fortuna).

Una fuente de corriente práctica se define como una fuente de corriente ideal en paralelo con una resistencia interna R_p. Tal fuente se muestra en la figura 5.14*a*, donde se indican la corriente i_L y la tensión v_L asociadas con una resistencia de carga R_L. La aplicación de la LCK produce:

$$i_L = i_s - \frac{v_L}{R_p} \qquad [12]$$

que es otra vez una relación lineal. La tensión en circuito abierto y la corriente en cortocircuito están dadas por:

$$v_{L\text{oc}} = R_p i_s \qquad [13]$$

e

$$i_{L\text{sc}} = i_s \qquad [14]$$

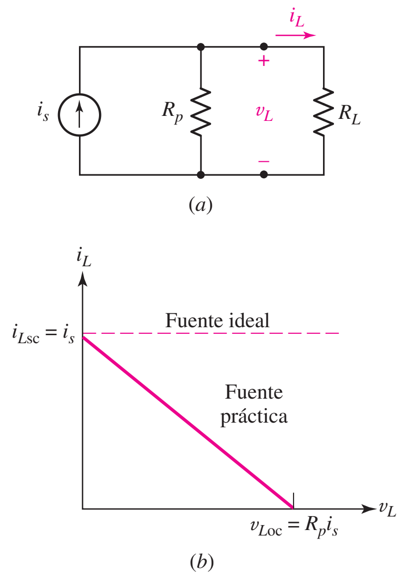


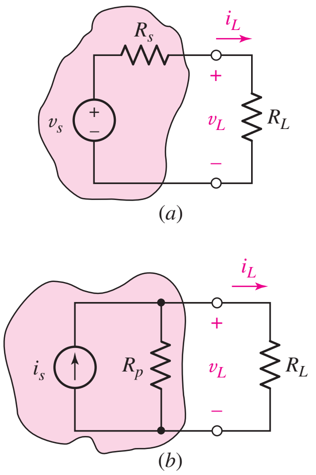
FIGURA 5.14 (*a*) Fuente de corriente práctica general conectada a una resistencia de carga R_L. (*b*) La corriente de carga proporcionada por la fuente de corriente práctica se muestra como una función de la tensión de carga.

La variación de la corriente de carga con la tensión de carga variable puede observarse al modificar el valor de R_L como se ilustra en la figura 5.14*b*. La recta recorre desde el extremo del cortocircuito, o “noroeste”, hasta la terminación en circuito abierto en el extremo “sureste”, al incrementar R_L desde cero hasta un valor infinito de ohms. El punto medio ocurre en $R_L = R_p$. Resulta evidente que la corriente de carga i_L y la corriente de fuente ideal son casi iguales sólo para valores pequeños de la tensión de carga, los cuales se obtienen con los valores de R_L que son pequeños en comparación con R_p.

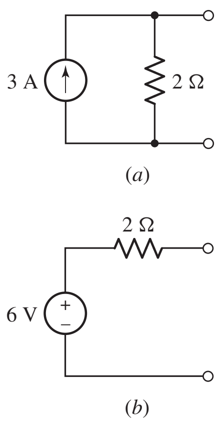
Fuentes prácticas equivalentes

Puede no sorprendernos que puedamos mejorar los modelos para aumentar su exactitud; en este punto, ahora tenemos un modelo práctico de fuente de tensión y también un modelo práctico de fuente de corriente. Sin embargo, antes de proceder, tomemos un momento para comparar la figura 5.13*b* con la figura 5.14*b*. Una corresponde a un circuito con una fuente de tensión y la otra con una fuente de corriente, *¡pero las gráficas son indistinguibles!*

Resulta que esto no es coincidencia. De hecho, estamos a punto de demostrar que una fuente de tensión práctica *puede ser* eléctricamente equivalente a una fuente de corriente práctica; es decir, una baja resistencia R_L conectada a cualquiera de ellas tendrá el mismo v_L y la misma i_L. Esto significa que podemos reemplazar una fuente práctica por la otra, y en el resto del circuito no se sabrá la diferencia.



■ **FIGURA 5.15** (*a*) Una fuente de tensión práctica conectada a una carga R_L. (*b*) La fuente de corriente práctica equivalente conectada a la misma carga.



■ **FIGURA 5.16** (*a*) Una fuente de corriente práctica dada. (*b*) La fuente de tensión práctica equivalente.

Considere la fuente de tensión práctica y la resistencia R_L de la figura 5.15*a*, así como el circuito compuesto por una fuente de corriente práctica y la resistencia R_L de la figura 5.15*b*. Un cálculo simple muestra que la tensión en la carga R_L de la figura 5.15*a* es igual a:

$$v_L = v_s \frac{R_L}{R_s + R_L} \qquad [15]$$

Un cálculo igual de simple señala que la tensión en la carga R_L de la figura 5.15*b* corresponde a:

$$v_L = \left[i_s \frac{R_p}{R_p + R_L} \right] \cdot R_L$$

Las dos fuentes prácticas son eléctronicamente equivalentes, por lo que:

$$R_s = R_p \qquad [16]$$

y

$$v_s = R_p i_s = R_s\, i_s \qquad [17]$$

donde dejamos que ahora R_s represente la resistencia interna de cualesquiera de las fuentes prácticas, lo cual es la notación convencional.

Como ilustración del uso de estas ideas, consideremos la fuente de corriente práctica que se exhibe en la figura 5.16*a*. Debido a que su resistencia interna es igual a 2 Ω, la resistencia interna de la fuente de tensión práctica equivalente también es igual a 2 Ω; la tensión de la fuente de tensión ideal contenida dentro de la fuente de tensión práctica es (2)(3) = 6 V. La fuente de tensión práctica equivalente se muestra en la figura 5.16*b*.

Para confirmar la equivalencia, consideremos una resistencia de 4 Ω conectada a cada fuente. En ambos casos una corriente de 1 A, una tensión de 4 V y una potencia de 4 W se asocian con la carga de 4 Ω. Sin embargo, debemos observar con mucho cuidado que la fuente de corriente ideal entrega una potencia total de 12 W, mientras que la fuente de tensión ideal sólo suministra 6 W. Además, la resistencia interna de la fuente de corriente práctica absorbe 8 W, en tanto que la resistencia interna de la fuente de tensión práctica absorbe sólo 2 W. En consecuencia, observamos que las dos fuentes prácticas son equivalentes sólo con respecto a lo que sucede en las terminales de carga; ¡pero *no* son equivalentes internamente!

EJEMPLO 5.4

Calcule la corriente que circula por la resistencia de 4.7 kΩ de la figura 5.17*a* después de transformar la fuente de 9 mA en una fuente de tensión equivalente.

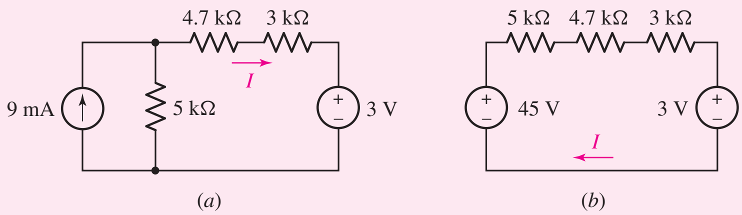
No se trata sólo de la fuente de 9 mA, sino también de la resistencia en paralelo con ella (5 kΩ). Quitamos estos componentes, dejando dos terminales “colgando”. Luego las reemplazamos por una fuente de tensión en serie con una resistencia de 5 kΩ. El valor de la fuente de tensión debe ser (0.009)(5 000) = 45 V.

Modificando el circuito como en la figura 5.17*b*, podemos escribir una sencilla ecuación de a LVK:

$$-45 + 5\,000I + 4\,700I + 3\,000I + 3 = 0$$

que fácilmente se resuelve para dar I = 3.307 mA.

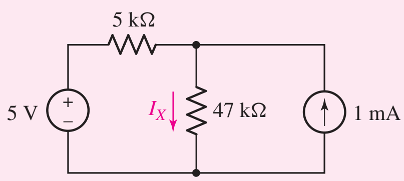
Por supuesto, podamos verificar la respuesta analizando el circuito de la figura 5.17*a*, usando técnicas ya sea nodales o de mallas.



■ **FIGURA 5.17** (a) Circuito con fuente de tensión y con fuente de corriente. (*b*) Circuito después de que la fuente de 9 mA se transformó en una fuente de tensión equivalente.

PRÁCTICA

5.3 Calcule la corriente I_x que circula por la resistencia de 47 kΩ del circuito de la figura 5.18, luego de efectuar una transformación de fuente sobre la fuente de tensión.



■ **FIGURA 5.18**

Respuesta: 192 μA.

EJEMPLO 5.5

Calcule la corriente que circula por la resistencia de 2 Ω de la figura 5.19*a* mediante las transformaciones de fuentes para simplificar primero el circuito.

Comenzamos transformando cada fuente de corriente en una fuente de tensión (fig. 5.19*b*), donde la estrategia consiste en convertir el circuito en un lazo simple.

Debemos tener cuidado de conservar la resistencia de 2 Ω por dos razones: primero, la fuente dependiente que controla la variable aparece en sus extremos, y segundo, deseamos que la corriente fluya a través de él. Sin embargo, podemos combinar las resistencias de 17 Ω y de 9 Ω puesto que aparecen en serie. También observamos que es posible combinar las resistencias de 3 y 4 Ω para obtener una resistencia de 7 Ω, la cual se emplea entonces para transformar la fuente de 15 V en una fuente de 15/7 A, como en la figura 5.19*c*.

Como una simplificación final, observamos que se pueden combinar las dos resistencias de 7 Ω en una resistencia de 3.5 Ω, la cual tal vez usemos para transformar la fuente de corriente de 15/7 A en una fuente de tensión de 7.5 V. El resultado da el circuito de lazo simple que se muestra en la figura 5.19*d*.

La corriente I se puede calcular ahora utilizando la LVK:

$$-7.5 + 3.5I - 51V_x + 28I + 9 = 0$$

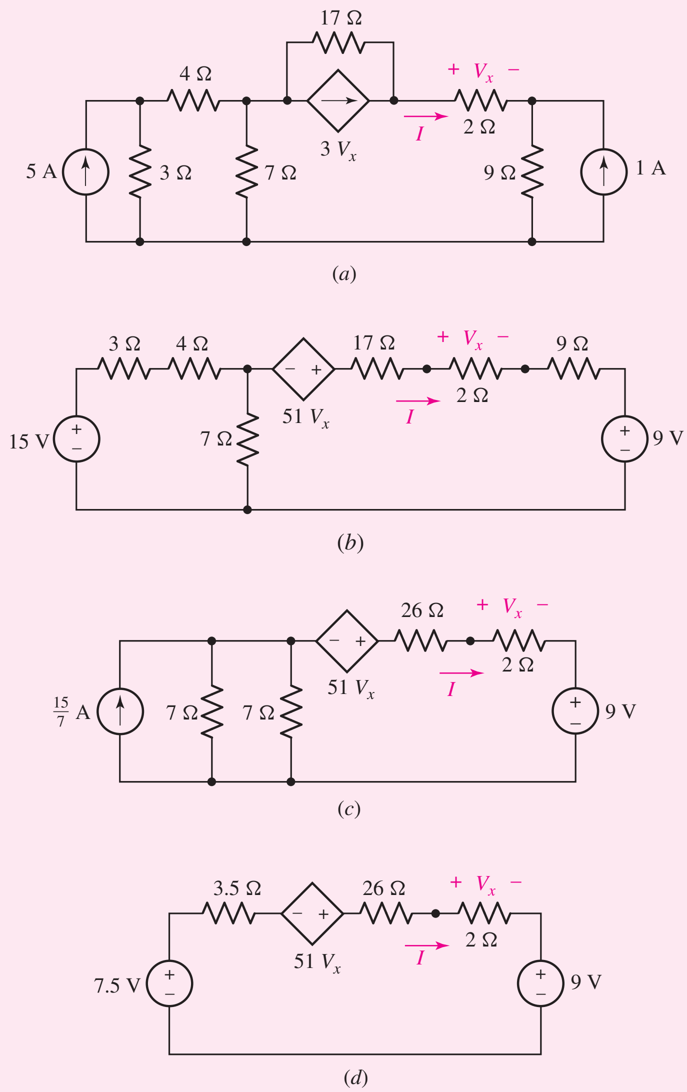
donde

$$V_x = 21$$

De tal modo:

$$I = 21.28 \text{ mA}$$

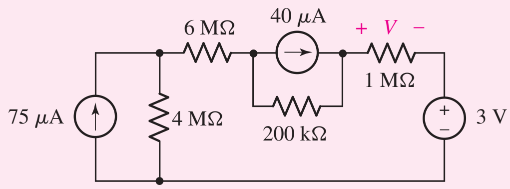
(*continúa*)



■ **FIGURA 5.19** (*a*) Un circuito con dos fuentes de corriente independientes y una dependiente. (*b*) El circuito después de que cada fuente se transformó en una fuente de tensión. (*c*) El circuito después de combinaciones adicionales. (*d*) El circuito final.

PRÁCTICA

5.4 En el circuito de la figura 5.20, determine la tensión V en los extremos de la resistencia de 1 MΩ mediante transformaciones sucesivas de fuentes.



■ **FIGURA 5.20**

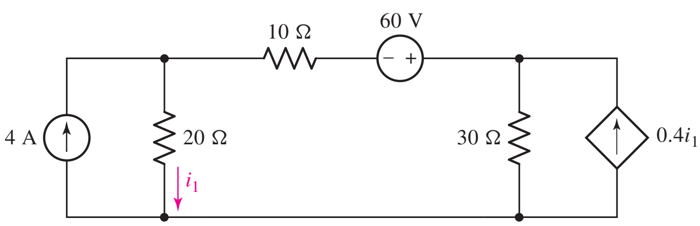
Respuesta: 27.2 V.

Unos cuantos comentarios finales

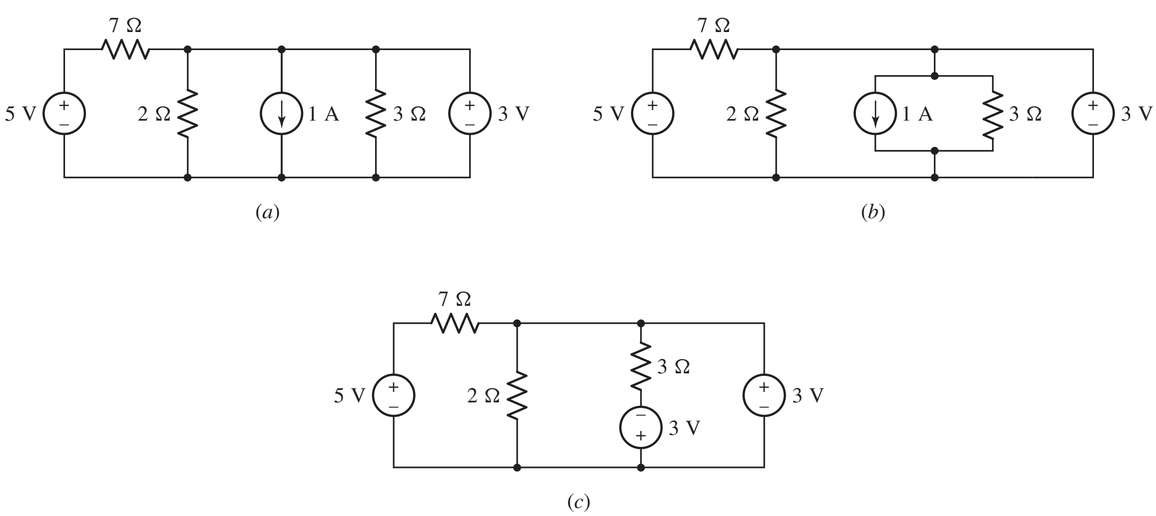
Concluimos el análisis sobre fuentes prácticas y transformaciones de fuentes con unas cuantas observaciones específicas. Primero, cuando transformamos una fuente de tensión, debemos asegurarnos de que la fuente está, en realidad, *en serie* con la resistencia en consideración. Por ejemplo, en el circuito que se muestra en la figura 5.21, es perfectamente válido realizar una transformación de fuente en la fuente de tensión, utilizando la resistencia de 10 Ω ya que está en serie. Sin embargo, sería incorrecto intentar una transformación de fuente utilizando la fuente de 60 V y la resistencia de 30 Ω, lo cual es un tipo de error muy común.

De manera similar, cuando transformamos una combinación de fuente de corriente y resistencia, debemos asegurarnos que éstas se encuentran *en paralelo*. Consideremos la fuente de corriente que se muestra en la figura 5.22*a*. Podemos llevar a cabo una transformación de fuente que incluya a la resistencia de 3 Ω ya que se encuentran en paralelo, pero, después de la transformación, podría haber alguna ambigüedad en cuanto al lugar en dónde colocar la resistencia. En dichas circunstancias, es de mucha ayuda redibujar en primera instancia los componentes que se van a transformar, como se indica en la figura 5.22*b*. Después, la transformación en una fuente de tensión en serie con una resistencia se dibuja de manera correcta como se indica en la figura 5.22*c*; en realidad, la resistencia puede dibujarse sobre o debajo de la fuente de tensión.

Asimismo, vale la pena considerar el raro caso de una fuente de corriente en serie con una resistencia y su dual, el caso de una fuente de tensión en paralelo con una re-



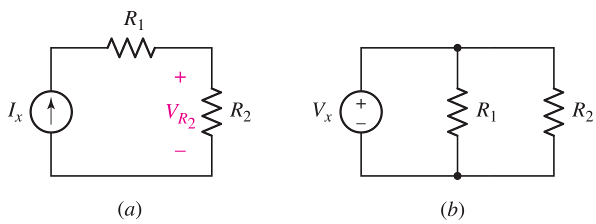
■ **FIGURA 5.21** Ejemplo de circuito que ilustra cómo determinar si puede llevarse a cabo una transformación de fuente.



■ **FIGURA 5.22** (*a*) Circuito con una fuente de corriente que se transformará en una fuente de tensión. (*b*) Circuito redibujado de tal forma que se evitan errores. (*c*) Combinación fuente/resistencia transformada.

sistencia. Comenzamos con el circuito simple de la figura 5.23*a*, donde solamente nos interesa la tensión en la resistencia marcada como R_2. Observamos que sin considerar el valor de la resistencia R_1, $V_{R_2} = I_x R_2$. Aunque podríamos estar tentados a realizar una transformación de fuente en forma inadecuada en dicho circuito, en realidad *simplemente se podemos eliminar la resistencia* R_1 (siempre y cuando no nos interese). Una situación parecida surge con una fuente de tensión en paralelo con una resistencia, como se muestra en la figura 5.23*b*. De nuevo, si solamente estamos interesados en alguna cantidad que involucre a la resistencia R_2, es posible que nos veamos tentados a realizar algunas transformaciones extrañas (e incorrectas) de fuentes en la tensión de fuente y la resistencia R_1. En realidad, podemos eliminar la resistencia R_1 del circuito en lo que respecta a la resistencia R_2 pues su presencia no altera la tensión, la corriente y la potencia disipada por la resistencia R_2.





■ **FIGURA 5.23** (*a*) Circuito con una resistencia R_1 en serie con una fuente de corriente. (*b*) Una tensión de fuente en paralelo con dos resistencias.

Resumen de la transformación de fuentes

1. **Al usar las transformaciones de fuentes, una meta común consiste en terminar con todas las fuentes de corriente o con todas las fuentes de tensión en el circuito.** Esto es especialmente válido si con ello se hace más fácil el análisis nodal o de malla.
2. **Las transformaciones sucesivas de fuentes se utilizan para simplificar un circuito permitiendo la combinación de resistencias y fuentes.**
3. **El valor de la resistencia no varía durante una transformación de fuente, pero no es la misma resistencia.** Ello significa que las tensiones o corrientes asociadas con la resistencia original se pierden sin poderse recuperar cuando se lleva a cabo una transformación de fuentes.
4. **Si la tensión o la corriente asociada con una resistencia particular se emplea como una variable de control para una fuente dependiente, no debe incluirse en las transformaciones de fuente.** La resistencia original debe conservarse intacta en el circuito.
5. **Si la tensión o la corriente asociada con un elemento en particular es de interés, ese elemento no debe incluirse en las transformaciones de fuentes.** El elemento original debe conservarse intacto en el circuito.
6. **Al efectuar una transformación de fuentes, la punta de la flecha de la fuente de corriente corresponde a la terminal "+" de la fuente de tensión.**
7. **Una transformación de fuentes en una fuente de corriente y una resistencia requiere que los dos elementos estén en paralelo.**
8. **Una transformación de fuentes en una fuente de tensión y una resistencia requiere que los dos elementos estén en serie.**

5.3 CIRCUITOS EQUIVALENTES DE THÉVENIN Y NORTON

Ahora que hemos presentado las transformaciones de fuente y el principio de superposición, es posible explicar otras dos técnicas que simplificarán en gran medida el análisis de muchos circuitos lineales. El primero de estos teoremas recibe su nombre en honor a L. C. Thévenin, ingeniero francés quien trabajaba en telegrafía y que publicó el teorema en 1883; el segundo puede considerarse un corolario del primero y se acredita a E. L. Norton, científico de los Bell Telephone Laboratories.

Suponga que necesitamos efectuar sólo un análisis parcial de un circuito. Por ejemplo, quizá requiramos determinar la corriente, la tensión y la potencia que se entregan a una resistencia de "carga" por medio del resto del circuito, el cual quizá consiste en un número considerable de fuentes y resistencias (fig. 5.24*a*). O tal vez deseemos determinar la respuesta para diferentes valores de la resistencia de carga. El teorema de Thévenin dice que se puede sustituir todo, excepto la resistencia de carga, por una fuente de tensión independiente en serie con una resistencia (fig. 5.24*b*); la respuesta medida en la *resistencia de carga* permanecerá invariable. Mediante el teorema de Norton, obtenemos un equivalente compuesto por una fuente de corriente independiente en paralelo con una resistencia (fig. 5.24*c*).

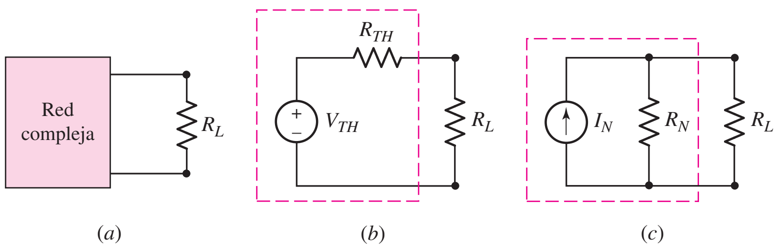


FIGURA 5.24 (*a*) Red compleja que incluye una resistencia de carga R_L. (*b*) Red equivalente de Thévenin conectada a la resistencia de carga R_L. (*c*) Red equivalente de Norton conectada a la resistencia de carga R_L.

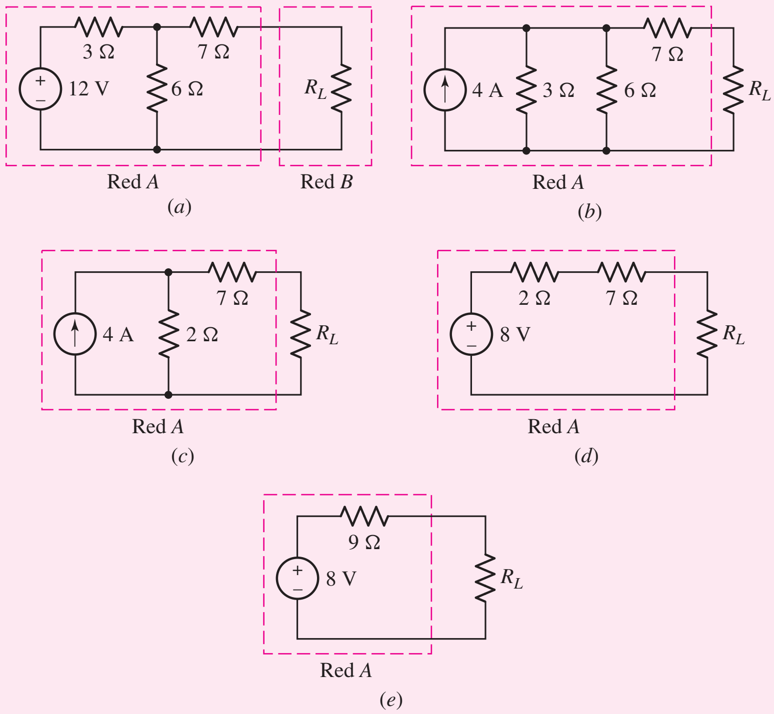
En consecuencia, debe ser patente que una de las principales aplicaciones de los teoremas de Thévenin y de Norton es la sustitución de una gran parte de un circuito, a menudo una parte complicada y no interesante, por un equivalente muy simple. El nuevo circuito más simple permite efectuar cálculos rápidos de la tensión, la corriente y la potencia que el circuito original es capaz de entregar a una carga. También nos ayuda a elegir el mejor valor de esta resistencia de carga. En un amplificador de potencia de transistores, por ejemplo, el equivalente de Thévenin o Norton nos permite determinar la potencia máxima que se toma del amplificador y se entrega a los altavoces.

EJEMPLO 5.6

Considere el circuito de la figura 5.25*a*. Determine el equivalente de Thévenin para la red *A* y calcule la potencia entregada a la resistencia de carga R_L.

Las regiones con líneas punteadas dividen el circuito en dos redes *A* y *B*; el principal interés está en la red *B*, la cual consta sólo de una resistencia de carga R_L. Quizá se simplifique la red *A* mediante transformaciones sucesivas de fuentes.

(*continúa*)



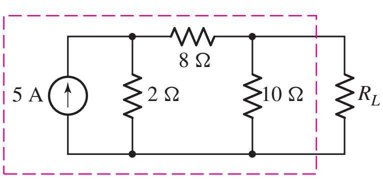
■ **FIGURA 5.25** (*a*) Circuito dividido en dos redes. (*b*)–(*d*) Pasos intermedios para simplificar la red *A*. (*e*) Circuito equivalente de Thévenin.

Consideramos primero la fuente de 12 V y la resistencia de 3 Ω como una fuente de tensión práctica que se sustituye por una fuente de corriente práctica compuesta por una fuente de 4 A en paralelo con 3 Ω (fig. 5.25*b*). Las resistencias en paralelo se combinan luego en 2 Ω (fig. 5.25*c*), y la fuente de corriente práctica que resulta se transforma de nuevo en una fuente de tensión práctica (fig. 5.25*d*). El resultado final se presenta en la figura 5.25*e*.

Vista desde la resistencia de carga R_L, esta red *A* (el equivalente de Thévenin) es equivalente al circuito *A* original; desde nuestro punto de vista, el circuito es mucho más simple, y ahora podemos calcular con facilidad la potencia que se entrega a la carga:

$$P_L = \left(\frac{8}{9 + R_L}\right)^2 R_L$$

Además, gracias al circuito equivalente, podemos ver que la tensión máxima que se obtiene en los extremos de R_L es igual a 8 V y que corresponde a $R_L = \infty$. Una rápida transformación de la red *A* en una fuente de corriente práctica (el equivalente de Norton) indica que la corriente máxima que se entrega a la carga es igual a 8/9 A, lo cual ocurre cuando $R_L = 0$. Ninguno de estos hechos se aprecia con claridad y facilidad a partir del circuito original.



■ **FIGURA 5.26**

PRÁCTICA

5.5 Mediante transformaciones sucesivas de fuentes, determine el equivalente de Norton de la red destacada en el circuito de la figura 5.26.

Respuesta: 1 A, 5 Ω.

Teorema de Thévenin

El empleo de la técnica de transformación de fuentes para encontrar una red equivalente de Thévenin y Norton dio buenos resultados en el ejemplo 5.6, pero puede ser poco práctica en situaciones donde se encuentren presentes fuentes dependientes o el circuito esté compuesto por un gran número de elementos. Una opción es emplear el teorema de Thévenin (o el teorema de Norton). Enunciaremos el teorema[3] como un procedimiento de alguna manera formal y, después, procederemos a considerar diferentes formas para hacer que el método sea más práctico de acuerdo con la situación específica que presentemos.

Enunciado del teorema de Thévenin

1. **Dado cualquier circuito lineal, arreglarlo nuevamente en la forma de dos redes *A* y *B* conectadas por dos alambres.** *A* es la red que se simplificará; *B* se dejará intacta.
2. **Desconectar la red *B*.** Definir una tensión v_{oc} como la tensión que ahora aparece en las terminales de la red *A*.
3. **Apagar o "asignar cero a" toda fuente independiente de la red *A* para formar una red inactiva.** Dejar las fuentes dependientes intactas.
4. **Conectar una fuente de tensión independiente con un valor de v_{oc} en serie con la red inactiva.** No terminar el circuito; dejar desconectadas las dos terminales.
5. **Conectar la red *B* a las terminales de la nueva red *A*.** Todas las corrientes y tensiones de *B* permanecerán intactas.

Observe que si cualquier red contiene una fuente dependiente, *su variable de control debe estar en la misma red*.

Veamos si podemos aplicar con éxito el teorema de Thévenin al circuito que consideramos en la figura 5.25. Ya encontramos el equivalente de Thévenin del circuito a la izquierda de R_L en el ejemplo 5.6, pero queremos ver si existe una manera más fácil de obtener el mismo resultado.

EJEMPLO 5.7

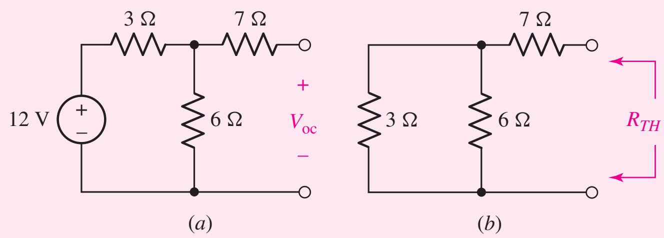
Aplique el teorema de Thévenin a fin de determinar el equivalente de Thévenin para esa parte del circuito de la figura 5.25*a* a la izquierda de R_L.

Para empezar, debemos desconectar R_L, con lo cual observamos que no fluye corriente por la resistencia de 7 Ω en el circuito parcial resultante de la figura 5.27*a*. De tal modo, V_{oc} aparece en los extremos de la resistencia de 6 Ω (sin corriente a través de la resistencia de 7 Ω no hay caída de tensión en ella), y la división de la tensión nos permite determinar que:

$$V_{oc} = 12\left(\frac{6}{3+6}\right) = 8 \text{ V}$$

(*continúa*)

[3] Una prueba del teorema de Thévenin en la forma en la que lo establecemos es bastante larga, por lo tanto se incorporó en el apéndice 3, donde los interesados pueden examinarla a fondo.



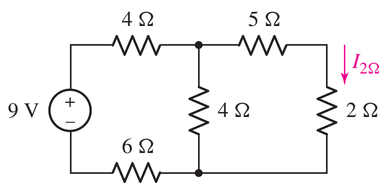
■ **FIGURA 5.27** (a) Circuito de la figura 5.25*a* con la red *B* (la resistencia R_L) desconectada y la tensión entre las terminales de conexión marcada como V_{oc}. (*b*) La fuente independiente de la figura 5.25*a* se suprimió y observamos las terminales donde la red *B* se conectó para determinar la resistencia efectiva de la red *A*.

Al suprimir la red *A* (es decir, al sustituir la fuente de 12 V por un cortocircuito) vemos, al observar de nuevo la red muerta (desconectada), una resistencia de 7 Ω conectada en serie con la combinación en paralelo de 6 y 3 Ω (figura 5.27*b*).

De tal modo, la red muerta puede representarse aquí mediante una resistencia de 9 Ω conocida como ***resistencia equivalente de Thévenin*** de la red *A*. Entonces, el equivalente de Thévenin es V_{oc} en serie con una resistencia de 9 Ω, lo cual concuerda con nuestro resultado anterior.

PRÁCTICA

5.6 Aplique el teorema de Thévenin para determinar la corriente que pasa por la resistencia de 2 Ω del circuito de la figura 5.28. (*Sugerencia:* designe la resistencia de 2 Ω como la red de *B*.)



■ **FIGURA 5.28**

Respuesta: $V_{TH} = 2.571$ V, $R_{TH} = 7.857$ Ω, $I_{2\Omega} = 260.8$ mA.

Unos cuantos puntos clave

El circuito equivalente que aprendimos a obtener resulta del todo independiente de la red *B*, debido a que hemos indicado eliminar primero la red *B* y luego medir la tensión en circuito abierto producida por la red *A*, una operación que en verdad no depende de la red *B* de ninguna manera. La red *B* se menciona en el enunciado del teorema sólo para indicar que tal vez se obtenga un equivalente de *A* sin que importe cuál sea el arreglo de elementos que esté conectado a la red *A*; la red *B* representa esta red general.

Son varios los aspectos del teorema que merecen subrayarse.

- La única restricción que debemos imponer sobre *A* o *B* es que todas las fuentes *dependientes* en *A* tengan sus variables de control en *A*, y de modo similar para *B*.
- No se impusieron restricciones sobre la complejidad de *A* o *B*; pueden contener cualquier combinación de fuentes de tensión o corriente independientes, fuentes de tensión o corriente lineales dependientes, resistencias o cualesquiera otros elementos de circuito que sean lineales.
- Se representa una red muerta (desconectada) *A* mediante una resistencia equivalente R_{TH}, a la que denominaremos resistencia equivalente de Thévenin. Lo ante-

rior sigue siendo válido si existen o no fuentes dependientes en la red inactiva *A*, una idea que se analizaremos más adelante.

- Un equivalente de Thévenin tiene dos componentes: una fuente de tensión en serie con una resistencia. Cualquiera puede ser cero, aunque no suele ser el caso.

Teorema de Norton

El teorema de Norton guarda una cercana semejanza con el teorema de Thévenin y se pudiera establecer como sigue:

Enunciado del teorema de Norton

1. **Dado cualquier circuito lineal, volver a ordenar en la forma de dos redes *A* y *B* conectadas por dos alambres.** La red que se va a simplificar es *A*; *B* se dejará intacta. Como se hizo antes, si cualquiera de las redes contiene una fuente dependiente, *su variable de control debe estar en la misma red.*
2. **Desconectar la red *B* y poner en cortocircuito las terminales de *A*.** Definir una corriente i_{sc} como la corriente que circula ahora a través de las terminales cortocircuitadas de la red *A*.
3. **Apagar o "asignar cero" a todas las fuentes independientes de la red *A* para formar una red inactiva.** Dejar las fuentes dependientes intactas.
4. **Conectar una fuente de corriente independiente de valor i_{sc} en paralelo con la red inactiva.** Dejar el circuito sin terminar; dejar desconectadas las dos terminales.
5. **Conectar la red *B* a las terminales de la nueva red *A*.** Todas las corrientes y tensiones en *B* permanecerán intactas.

El equivalente de Norton de una red lineal es la fuente de corriente de Norton i_{se} en paralelo con la resistencia de Thévenin R_{TH}. En consecuencia, podemos observar que, en realidad, se obtiene el equivalente de Norton de una red mediante una transformación de fuente sobre la equivalente de Thévenin. Lo anterior produce una relación directa entre v_{oc}, i_{sc}, y R_{TH}.

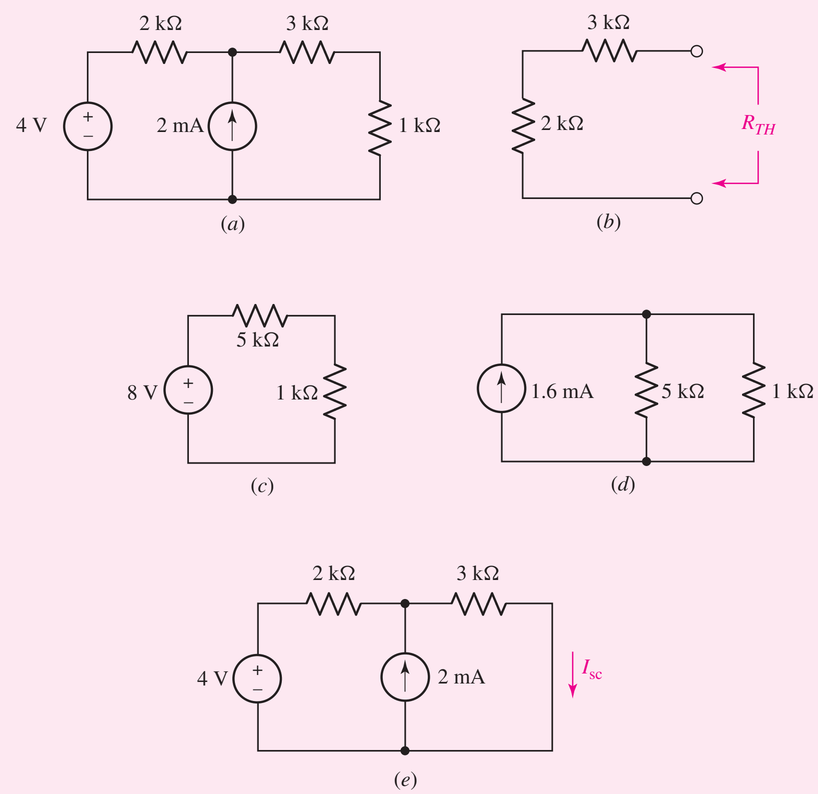
$$v_{oc} = R_{TH} i_{sc} \qquad [18]$$

En circuitos que contienen fuentes dependientes, a menudo veremos que es más conveniente determinar el equivalente de Thévenin o el de Norton al calcular la tensión en circuito abierto y la corriente en cortocircuito y al determinar luego el valor de R_{TH} como su cociente. Por lo tanto, resulta aconsejable volverse adepto a determinar tanto tensiones en circuito abierto como corrientes en cortocircuito, incluso en los problemas simples que siguen. Si los equivalentes de Thévenin y de Norton se determinan de manera independiente, la ecuación [18] sirve como una comprobación útil.

Consideremos tres ejemplos diferentes para determinar el circuito equivalente de Thévenin o Norton.

EJEMPLO 5.8

Encuentre los circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton de la red que se encuentra frente a la resistencia de 1 kΩ en la figura 5.29*a*.



■ **FIGURA 5.29** (*a*) Circuito en el que se identifica la resistencia de 1 kΩ como la red *B*. (*b*) Red *A* con todas las fuentes independientes suprimidas. (*c*) Equivalente de Thévenin de la red *A*. (*d*) Equivalente de Norton de la red *A*. (*e*) Circuito para determinar I_{sc}.

Por la redacción del planteamiento del problema, la red *B* es la resistencia de 1 Ω, de modo que la red *A* es todo lo demás.

Si elegimos encontrar primero el equivalente de Thévenin de la red *A*, aplicamos la superposición, observando que no fluye corriente a través de la resistencia de 3 kΩ una vez que se desconecta la red B. Con la fuente de corriente puesta en cero, $V_{oc|_{4V}} = 4$ V. Con la fuente de tensión puesta en cero,

$$V_{oc|_{2\text{ mA}}} = (0.002)(2\,000) = 4 \text{ V. Por lo tanto, } V_{oc} = 4 + 4 = 8 \text{ V.}$$

Para encontrar R_{TH}, pongamos en cero ambas fuentes como en la figura 5.29*b*. Por inspección, $R_{TH} = 2$ kΩ + 3 kΩ = 5 kΩ En la figura 5.29*c* se muestra el equivalente de Thévenin completo, con la red *B* reconectada.

El equivalente de Norton se encuentra mediante una simple transformación de fuentes del equivalente de Thévenin, dando como resultado una fuente de corriente de 8/5 000 = 1.6 mA en paralelo con una resistencia de 5 kΩ (figura 5.29*d*).

Comprobación: encuentre el equivalente de Norton directamente de la figura 5.29*a*. Quitando la resistencia de 1 kΩ y poniendo en corto las terminales de la

red A, encontramos I_{sc} como se muestra en la figura 5.29e por superposición y división de corriente:

$$I_{sc} = I_{sc|4\text{ V}} + I_{sc|2\text{ mA}} = \frac{4}{2+3} + (2)\frac{2}{2+3}$$
$$= 0.8 + 0.8 = 1.6 \text{ mA}$$

lo que completa la comprobación.

PRÁCTICA

5.7 Determine los equivalentes de Thévenin y de Norton del circuito de la figura 5.30.

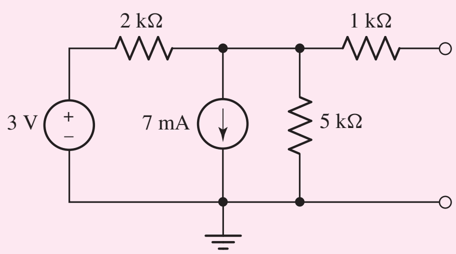


FIGURA 5.30

Respuesta: −7.857 V, −3.235 mA, 2.429 kΩ.

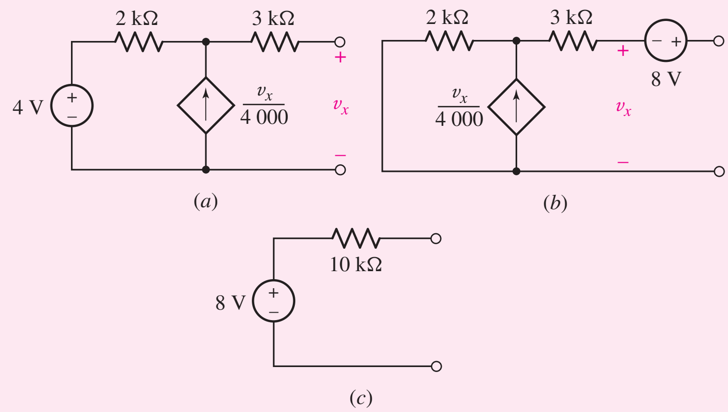
Cuando existen fuentes dependientes

Técnicamente, no siempre debe haber una "red B" para que podamos invocar el teorema de Thévenin o el de Norton; en lugar de eso, podemos pedir encontrar el equivalente de una red con dos terminales que no estén conectadas todavía con otra red. Sin embargo, si *existe* una red B que no quisieramos que estuviera involucrada en este procedimiento de simplificación, debemos ser precavidos si ésta contiene fuentes dependientes. En tales situaciones, la variable de control y el (los) elemento(s) asociado(s) deben incluirse en la red B y ser excluidos de la red A. De otra forma, no habrá otra manera de analizar el circuito final ya que la cantidad controladora se perderá.

Si la red A contiene una fuente dependiente, entonces de nuevo es necesario asegurarnos de que la variable de control y su(s) elemento(s) asociado(s) no pueden estar en la red B. Hasta el momento, sólo hemos considerado circuitos con resistencias y fuentes independientes. Aunque desde el punto de vista técnico es válido dejar intacta una fuente dependiente en la red "muerta" o "inactiva" cuando se realice un equivalente Thévenin o Norton, en la práctica esto no genera ningún tipo de simplificación. Lo que en realidad deseamos es una fuente de tensión independiente en serie con una sola resistencia o una fuente de corriente independiente en paralelo con una sola resistencia; en otras palabras, el equivalente de dos componentes. En los ejemplos siguientes, consideramos varias formas para simplificar redes con fuentes dependientes y resistencias en una sola resistencia.

EJEMPLO 5.9

Determine el equivalente de Thévenin del circuito de la figura 5.31*a*.



■ **FIGURA 5.31** (*a*) Red de la que se desea obtener el equivalente de Thévenin. (*b*) Una forma posible, aunque bastante inútil, del equivalente de Thévenin. (*c*) La mejor forma del equivalente de Thévenin de esta red resistiva lineal.

Para obtener V_{oc} observamos que $v_x = V_{\text{oc}}$ y que la corriente de la fuente dependiente debe pasar por la resistencia de 2 kΩ puesto que no fluye corriente por la resistencia de 3 kΩ. Mediante la aplicación de la LVK alrededor del lazo exterior se tiene:

$$-4 + 2 \times 10^3 \left(-\frac{v_x}{4\,000}\right) + 3 \times 10^3(0) + v_x = 0$$

y

$$v_x = 8 \text{ V} = \text{V}_{\text{oc}}$$

Así, aplicando el teorema de Thévenin, el circuito equivalente podría formarse con la red *A* muerta (inactiva) en serie con la fuente de 8 V, como se ve en la figura 5.31*b*. Ello es correcto, pero no muy simple ni muy útil; en el caso de redes resistivas lineales, debemos mostrar en realidad un equivalente mucho más simple para la red *A* inactiva, a saber, R_{TH}.

La presencia de la fuente dependiente evita determinar de manera directa R_{TH} de la red inactiva, por medio de la combinación de resistencias; en consecuencia buscamos I_{sc}. Luego de poner en cortocircuito las terminales de salida en la figura 5.31*a*, es claro que $V_x = 0$ y que la fuente de corriente dependiente está muerta (desconectada). Por consiguiente, $I_{\text{sc}} = 4/(5 \times 10^3) = 0.8$ mA. De tal modo:

$$R_{TH} = \frac{V_{\text{oc}}}{I_{\text{sc}}} = \frac{8}{0.8 \times 10^{-3}} = 10 \text{ k}\Omega$$

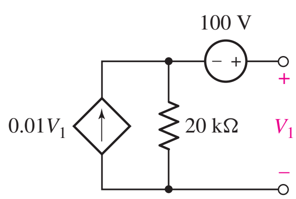
y obtenemos el equivalente de Thévenin aceptable de la figura 5.31*c*.

PRÁCTICA

5.8 Determine el equivalente de Thévenin de la red de la figura 5.32. (*Sugerencia:* podría ser de ayuda efectuar una rápida transformación de fuentes sobre la fuente dependiente.)

Respuesta: −502.5 mV, −100.5 Ω.

Nota: una resistencia negativa puede parecer extraña, ¡y lo es! Tal cosa es físicamente posible sólo si, por ejemplo, hacemos un poco de diseño electrónico ingenioso para crear algo que se comporte como la fuente dependiente de corriente representada en la figura 5.32.



■ **FIGURA 5.32**

Como ejemplo final, examinemos una red que tenga una fuente dependiente pero no una independiente.

EJEMPLO 5.10

Determine el equivalente de Thévenin del circuito de la figura 5.33*a*.

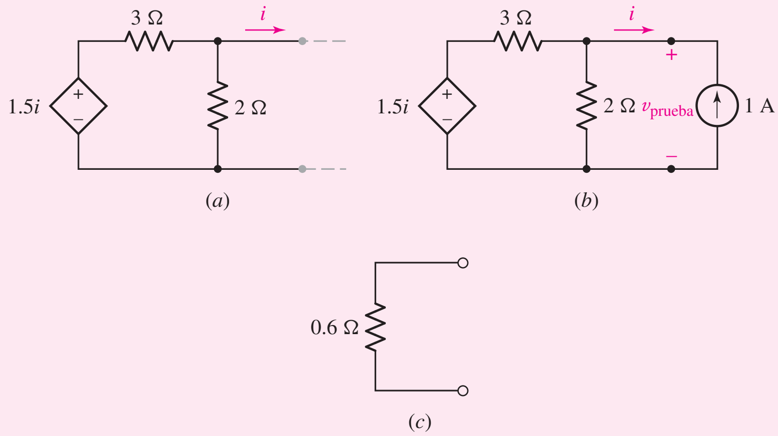


FIGURA 5.33 (*a*) Red sin fuentes independientes. (*b*) Medición hipotética para obtener R_{TH}. (*c*) Equivalente de Thévenin del circuito original.

En razón de que las terminales ubicadas más a la derecha ya están en circuito abierto, entonces $i = 0$. En consecuencia, la fuente dependiente está muerta, por lo que $v_{oc} = 0$.

En seguida determinamos el valor de R_{TH} representado por esta red de dos terminales. Sin embargo, no podemos obtener v_{oc} e i_{sc} ni determinar su cociente, pues no hay fuente independiente en la red; así que tanto v_{oc} como i_{sc} valen cero. Por lo tanto, debemos recurrir a un pequeño truco.

Aplicamos de manera externa una fuente de 1 A, medimos la tensión v_{prueba} que resulta y hacemos $R_{TH} = v_{prueba}/1$. Observando la figura 5.33*b*, vemos que $i = -1$ A. Aplicando el análisis nodal:

$$\frac{v_{prueba} - 1.5(-1)}{3} + \frac{v_{prueba}}{2} = 1$$

por lo que:

$$v_{prueba} = 0.6 \text{ V}$$

así que:

$$R_{TH} = 0.6\ \Omega.$$

El equivalente de Thévenin se muestra en la figura 5.33*c*.

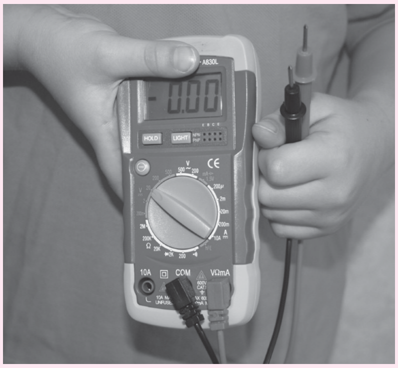
Una recapitulación rápida de procedimientos

Hasta ahora hemos estudiado tres ejemplos en los que determinamos un circuito equivalente de Thévenin o de Norton. El primer ejemplo (fig. 5.29) sólo contenía fuentes independientes y resistencias; además, se podían aplicar varios métodos diferentes. Uno implicaría calcular R_{TH} de la red muerta y luego V_{oc} de la red viva. También podríamos haber calculado R_{TH} e I_{sc} o V_{oc} e I_{sc}.

APLICACIÓN PRÁCTICA

El multímetro digital

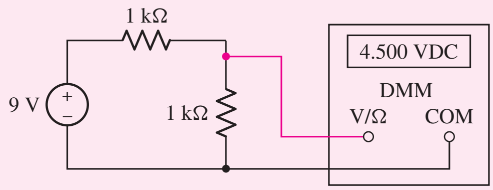
Uno de los aparatos más comunes que forma parte del equipo de prueba eléctrico es el multímetro digital, o MD (fig. 5.34), que se diseñó para medir valores de tensión, corriente y resistencia.



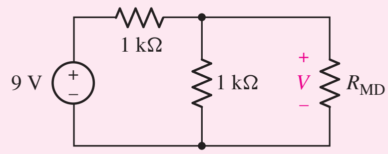
■ **FIGURA 5.34** Multímetro digital de mano.

Para medir tensiones, dos hilos de conducción del multímetro se conectan en los extremos del elemento de circuito apropiado (fig. 5.35). Una terminal de referencia positiva del multímetro suele marcarse "V/Ω" y la terminal de referencia negativa —a menudo se le conoce como *terminal común*— se designa típicamente como "COM". La convención típica es utilizar el hilo en color rojo (a la derecha) para la terminal de referencia positiva y el hilo en color negro (a la izquierda) para la terminal común.

De acuerdo con el análisis de los equivalentes de Thévenin y de Norton, quizás ahora sea evidente para el lector que el multímetro digital tiene su propia resistencia equivalente de Thévenin, la cual aparecerá en paralelo en nuestro circuito, así que su valor puede afectar la medición (fig. 5.36). El multímetro digital no suministra ninguna alimentación al circuito para medir la tensión, por lo que su equivalente de Thévenin consiste sólo en una resistencia, que se llamará R_{MD}.



■ **FIGURA 5.35** Multímetro digital conectado para medir tensión.



■ **FIGURA 5.36** Multímetro de la figura 5.35 que muestra R_{MD} como su resistencia equivalente de Thévenin.

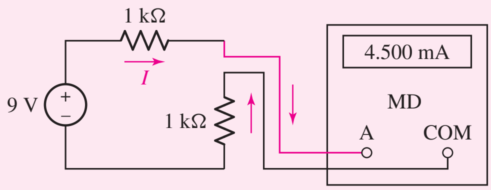
La resistencia de entrada de un buen multímetro digital es por lo común de 10 MΩ o más. La tensión medida V se localiza a nivel del equivalente de 1 kΩ|| 10 MΩ = 999.9 Ω. Mediante la división de tensión, sabemos que $V = 4.4998$ volts, que es un valor un poco menor que el esperado de 4.5 volts. En consecuencia, la resistencia de entrada finita del voltímetro introduce un pequeño error en el valor medido.

En el segundo ejemplo (fig. 5.31) estaban presentes fuentes independientes y dependientes, y que el método utilizado requirió determinar V_{oc} e I_{sc}. No podíamos encontrar con facilidad R_{TH} para la red muerta (inactiva), debido a que no se podía hacer inactiva la fuente dependiente.

El último ejemplo no contiene ninguna fuente independiente, y por lo tanto los equivalentes de Thévenin y de Norton no incluyen una fuente independiente. Determinamos R_{TH} aplicando 1 A y encontrando $v_{prueba} = 1 \times R_{TH}$. También hubiéramos podido aplicar 1 V y determinar $i = 1/R_{TH}$. Estas dos técnicas relacionadas se aplican a cualquier circuito con fuentes dependientes, *siempre y cuando todas las fuentes independientes se igualen primero a cero.*

Existen otros dos métodos que tienen cierto encanto debido a que se emplean para cualquiera de los tres tipos de redes considerados. En el primero, se sustituye simplemente la red B por una fuente de tensión v_s, se define la corriente que sale de su terminal positiva como i, se analiza después la red A para obtener i y se expresa la ecuación en la forma $v_s = ai + b$. Así, $a = R_{TH}$ y $b = v_{oc}$.

Para medir corrientes, el multímetro digital debe ponerse en serie con un elemento de circuito, que por lo general requiere que cortemos un alambre (fig. 5.37). Un hilo de conexión del multímetro se conecta a la terminal a tierra del medidor y el otro se pone en un conector que casi siempre se marca como “A” para indicar la medición de corriente. En este caso, el multímetro digital no proporciona potencia al circuito para este tipo de medición.



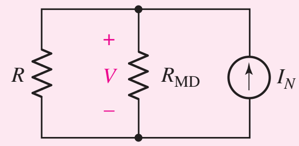
■ **FIGURA 5.37** Multímetro digital (MD) conectado para efectuar una medición de corriente.

Podemos observar a partir de esta figura que la resistencia equivalente de Thévenin R_{MD} del multímetro digital está en serie con nuestro circuito, por lo que su valor afecta la medición. Al escribir una ecuación de la LVK simple alrededor del lazo:

$$-9 + 1\,000I + R_{MD}I + 1\,000I = 0$$

Observe que como hemos reconfigurado el medidor para efectuar una medición de corriente, la resistencia equivalente de Thévenin no es la misma que en el caso en el cual el medidor se configura para medir tensiones. En realidad, sería ideal que R_{MD} fuera 0 Ω idealmente en mediciones de corriente, e ∞ en mediciones de tensión. Si R_{MD} corresponde a 0.1 Ω, vemos que la corriente medida I vale 4.4998 mA, lo que es sólo un poco diferente del valor esperado de 4.5 mA. En función del número de dígitos que el medidor pueda exhibir, tal vez ni siquiera se advirtiera en la medición el efecto de una resistencia diferente de cero del multímetro digital.

Es posible utilizar el mismo medidor para determinar la resistencia, siempre y cuando no haya fuentes independientes activas durante la medición. De manera interna, se hace pasar una corriente conocida a través de la resistencia que se mide, utilizándose la circuitería del voltímetro para medir la tensión resultante. Al sustituir el multímetro digital por su equivalente de Norton (que incluye ahora una fuente de corriente independiente activa para generar la corriente predeterminada), observamos que R_{MD} aparece en paralelo con nuestra resistencia desconocida R (fig. 5.38).



■ **FIGURA 5.38** MD en la configuración de medición de resistencia sustituido por su equivalente de Norton, donde se muestra R_{MD} en paralelo con la resistencia desconocida R que se va a medir.

Como resultado, el multímetro digital mide en realidad $R \| R_{MD}$. Si $R_{MD} = 10$ MΩ y $R = 10$ Ω, $R_{medida} = 9.99999$ Ω, la cual resulta bastante precisa para la mayoría de los fines. Sin embargo, si $R = 10$ MΩ, $R_{medida} = 5$ MΩ. La resistencia de entrada de un multímetro digital impone en consecuencia un límite superior práctico en los valores de resistencia que mide, así que se requiere utilizar técnicas especiales para medir resistencias más grandes. Debemos observar que si un multímetro digital se *programa* de tal forma que se conoce R_{MD}, se pueden compensar y medir resistencias más grandes.

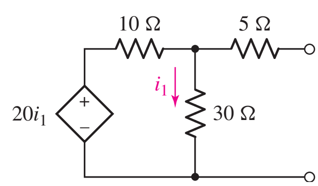
También podríamos aplicar una fuente de corriente i_s, designar a su tensión como v, y determinar entonces $i_s = cv - d$, donde $c = 1/R_{TH}$ y $d_s = i_{sc}$ (el signo menos se presenta al suponer que las flechas de ambas fuentes de corriente se dirigen hacia el mismo nodo). Los dos últimos procedimientos se aplican de manera universal, pero con frecuencia algún otro método resulta más fácil y más rápido.

Si bien se está enfocando la atención casi por completo en el análisis de circuitos lineales, resulta bueno saber que los teoremas de Thévenin y de Norton son válidos aun si la red B es no lineal; solamente la red A debe ser lineal.

PRÁCTICA

5.9 Encuentre el equivalente de Thévenin de la red de la figura 5.39. (*Sugerencia:* inténtelo con una fuente de prueba de 1 V.)

Respuesta: $I_{prueba} = 50$ mA por lo que $R_{TH} = 20$ Ω.

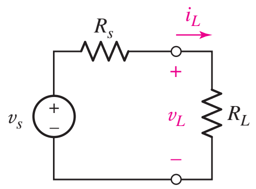


■ **FIGURA 5.39** Véase el problema de práctica 5.9.

5.4 TRANSFERENCIA DE POTENCIA MÁXIMA

Un teorema de potencia muy útil puede formularse con referencia a una fuente de corriente o de tensión práctica. En el caso de la fuente de tensión práctica (fig. 5.40), la potencia que se entrega a la carga R_L es

$$p_L = i_L^2 R_L = \frac{v_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2} \qquad [19]$$



■ **FIGURA 5.40** Una fuente de tensión práctica conectada a una resistencia de carga R_L.

Para determinar el valor de R_L que absorbe una potencia máxima de la fuente práctica dada, se diferencia con respecto a R_L:

$$\frac{dp_L}{dR_L} = \frac{(R_s + R_L)^2 v_s^2 - v_s^2 R_L(2)\,(R_s + R_L)}{(R_s + R_L)^4}$$

e igualando la derivada a cero, obtenemos:

$$2\,R_L\,(R_s + R_L) = (R_s + R_L)^2$$

o

$$R_s = R_L$$

En razón de que los valores $R_L = 0$ y $R_L = \infty$ producen un mínimo ($p_L = 0$) y debido a que ya desarrollamos la equivalencia entre fuentes de tensión y de corriente prácticas, hemos demostrado el siguiente ***teorema de transferencia de potencia máxima***:

> Una fuente de tensión independiente en serie con una resistencia R_s, o una fuente de corriente independiente en paralelo con una resistencia R_s, suministra una potencia máxima a esa resistencia de carga R_L, para la cual $R_L = R_s$.

Tal vez el lector haya visto una forma alterna de considerar el teorema de potencia máxima en términos de la resistencia equivalente de Thévenin de una red:

> Una red suministra la potencia máxima a una resistencia de carga R_L cuando R_L es igual a la resistencia equivalente Thévenin de la red.

Así, el teorema de transferencia de potencia máxima nos indica que una resistencia de 2 Ω extrae la potencia más grande (4.5 W) de cualquier fuente práctica de la figura 5.16, en tanto que una resistencia de 0.01 Ω recibe la potencia máxima (3.6 kW) en la figura 5.11.

Existe una diferencia entre *tomar* la potencia máxima de una *fuente* y *entregar* la potencia máxima a una *carga*. Si la carga se diseña de tal forma que la resistencia de Thévenin sea igual a la resistencia de Thévenin de la red a la que está conectada, recibirá la potencia máxima de la red. *Cualquier cambio de la resistencia de carga reducirá la potencia entregada a la carga.* Sin embargo, considere el equivalente de Thévenin de la red en sí. Tomamos la potencia máxima posible de la fuente de tensión tomando la corriente máxima posible, la cual se logra ¡poniendo en cortocircuito las terminales de la red! Sin embargo, en este ejemplo extremo *entregamos cero potencia* a la "carga" —un cortocircuito en este caso— ya que $p = i^2R$, y fijamos $R = 0$ haciendo un cortocircuito con las terminales de la red.

Si aplicamos un poco de álgebra a la ecuación [19] junto con el requisito de transferencia de potencia máxima que proporcionará la ecuación $R_L = R_s = R_{TH}$, obtendremos

$$p_{\text{máx}}\Big|_{\text{entregada a la carga}} = \frac{v_s^2}{4R_s} = \frac{v_{TH}^2}{4R_{TH}}$$

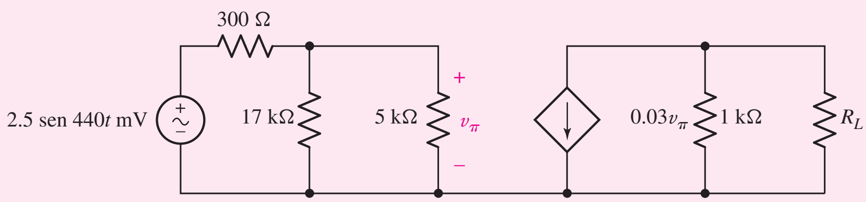
donde v_{TH} y R_{TH} recuerda que la fuente práctica de tensión de la figura 5.40 también puede verse como un equivalente de Thévenin de alguna fuente específica.

Asimismo es muy común que el teorema de potencia máxima se malinterprete. Está diseñado para ayudarnos a seleccionar una carga óptima a fin de maximizar la

absorción de potencia. Sin embargo, si la resistencia de carga ya se especificó, el teorema de potencia máxima no será de ninguna ayuda. Si por alguna razón podemos afectar el tamaño de la resistencia equivalente de Thévenin de la red conectada a la carga, fijarla a un valor igual a la carga no garantizará la transferencia de potencia máxima a la carga predeterminada. Una consideración rápida de la potencia perdida en la resistencia de Thévenin aclarará este punto.

EJEMPLO 5.11

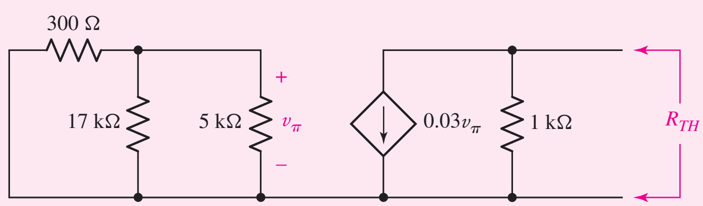
El circuito que se muestra en la figura 5.41 es un modelo del amplificador transistorizado de unión bipolar en emisor común. Seleccione una resistencia de carga de tal forma que la potencia máxima se transfiera a él desde el amplificador y calcule la potencia real absorbida.



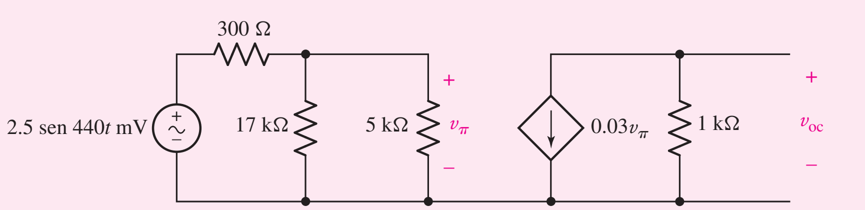
■ **FIGURA 5.41** Modelo de pequeña señal del amplificador emisor común con la resistencia de carga no especificada.

Puesto que se nos solicita determinar la resistencia de carga, es factible aplicar el teorema de potencia máxima. El primer paso es encontrar el equivalente de Thévenin del resto del circuito.

Primero determinamos la resistencia equivalente de Thévenin, lo cual requiere que quitemos R_L y que pongamos en cortocircuito la fuente independiente de la forma en que se muestra en la figura 5.42*a*.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 5.42** (*a*) Circuito con R_L quitada y fuente independiente puesta en cortocircuito. (*b*) Circuito para determinar v_{TH}.

(*continúa*)

Debido a que $v_\pi = 0$, la fuente de corriente dependiente es un circuito abierto, por lo que $R_{TH} = 1$ kΩ. Esto puede verificarse conectando una fuente de corriente independiente de 1 A a través de la resistencia de 1 kΩ; v_π será igual a cero, por lo que la fuente dependiente permanece inactiva y de aquí que no contribuya en nada con R_{TH}.

Con la finalidad de obtener la potencia máxima entregada a la carga, R_L debe fijarse a un valor $R_{TH} = 1$ kΩ.

Para encontrar v_{TH} consideraremos el circuito que se muestra en la figura 5.42*b*, que es la figura 5.41 con la resistencia R_L removida. Podemos escribir:

$$v_{\text{oc}} = -0.03v_\pi(1\,000) = -30v_\pi$$

donde la tensión v_π puede encontrarse a partir de una simple división de tensión:

$$v_\pi = (2.5 \times 10^{-3} \text{ sen } 440t)\left(\frac{3\,864}{300 + 3\,864}\right)$$

por lo que el equivalente de Thévenin es una tensión -69.6 sen $440t$ mV en serie con 1 kΩ.

La potencia máxima está dada por:

$$p_{\text{máx}} = \frac{v_{TH}^2}{4R_{TH}} = \boxed{1.211 \text{ sen}^2\, 440t \ \mu\text{W}}$$

PRÁCTICA

5.10 Considere el circuito de la figura 5.43.

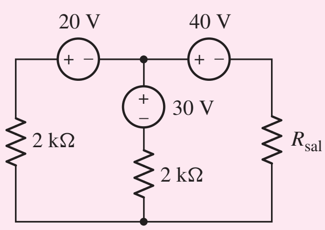


FIGURA 5.43

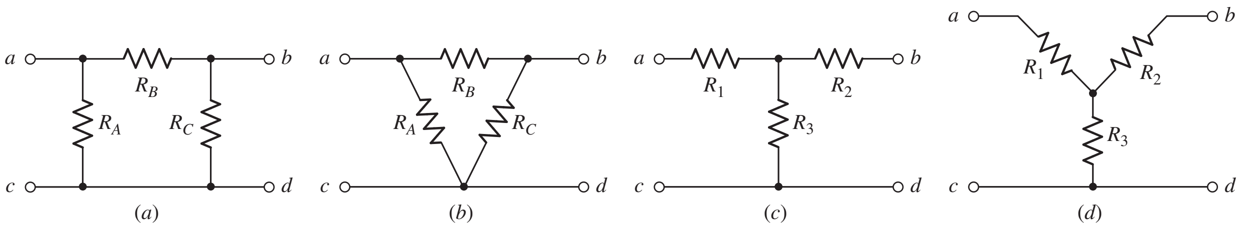
(*a*) Si $R_{sal} = 3$ kΩ encuentre la potencia entregada al circuito.
(*b*) ¿Cuál es la potencia máxima que puede ser entregada a cualquier R_{sal}?
(*c*) Qué par de valores diferentes de R_{sal} entregarán exactamente 20 mW a ellos?

Respuesta: 230 mW; 306 mW; 59.2 kΩ y 16.88 Ω.

5.5 CONVERSIÓN DELTA-ESTRELLA

Como ya vimos, la identificación de combinaciones en paralelo y en serie de resistencias a menudo propicia una reducción importante de la complejidad de un circuito. En situaciones en las que no existen tales combinaciones, muchas veces recurrimos a las transformaciones de fuentes para posibilitar dichas simplificaciones. Existe otra técnica útil, llamada conversión **Δ-*Y* (*delta-estrella*)** que surge de la teoría de redes.

Considere los circuitos de la figura 5.44. No hay combinaciones en serie o en paralelo que se puedan hacer para simplificar más alguno de los circuitos (note que 5.44*a* y 5.44*b* son idénticos, como lo son 5.44*c* y 5.44*d*), así que sin ninguna fuente presente, no se



■ **FIGURA 5.44** (*a*) Red Π con tres resistencias y tres conexiones únicas. (*b*) Misma red dibujada como una red Δ. (*c*) Red T de tres resistencias. (*d*) Misma red dibujada como una red Y.

pueden realizar transformaciones de fuentes. Sin embargo, es viable efectuar una conversión entre estos dos tipos de redes.

Primero definimos dos tensiones v_{ab} y v_{bc}, y tres corrientes i_1, i_2 e i_3, como se muestra en la figura 5.45. Si las dos redes son equivalentes, entonces las tensiones y las corrientes en las terminales deben ser iguales (no hay corriente i_2 en la red conectada en T). Un conjunto de relaciones entre R_A, R_B, R_C y R_1, R_2 y R_3 puede ahora definirse simplemente realizando el análisis de malla. Por ejemplo, para la red de la figura 5.45*a* podemos escribir:

$$R_A i_1 - R_A i_2 = v_{ac} \qquad [20]$$

$$-R_A i_1 + (R_A + R_B + R_C) i_2 - R_C i_3 = 0 \qquad [21]$$

$$R_C i_1 + R_C i_3 = -v_{bc} \qquad [22]$$

Y para la red de la figura 5.45*b* tenemos:

$$(R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_3 = v_{ac} \qquad [23]$$

$$-R_3 i_3 + (R_2 + R_3) i_3 = -v_{bc} \qquad [24]$$

A continuación quitamos i_2 de las ecuaciones [20] y [22] utilizando la ecuación [21], lo que produce:

$$\left(R_A - \frac{R_A^2}{R_A + R_B + R_C}\right) i_1 - \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} i_3 = v_{ac} \qquad [25]$$

y

$$-\frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} i_1 + \left(R_C - \frac{R_C^2}{R_A + R_B + R_C}\right) i_3 =- v_{bc} \qquad [26]$$

Comparando términos entre las ecuaciones [25] y [23], podemos observar que:

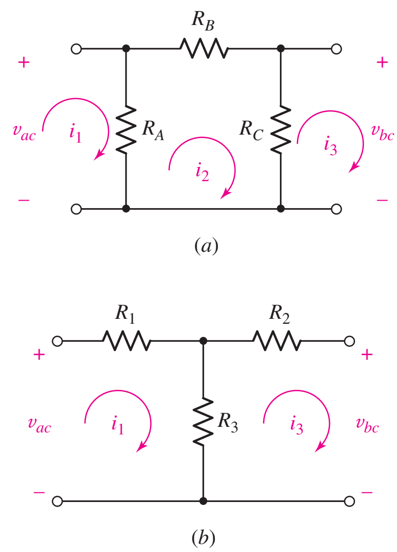
$$R_3 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

De manera similar, podemos encontrar expresiones de R_1 y R_2 en términos de R_A, R_B y R_C, así como expresiones de R_A, R_B y R_C en términos de R_1, R_2 y R_3; dejamos el resto de las deducciones como ejercicio para el lector. Por lo tanto, para convertir una red Y en una Δ, los nuevos valores de las resistencias se calculan utilizando:

$$R_A = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_B = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

$$R_C = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$



■ **FIGURA 5.45** (*a*) Red Π marcada; (*b*) red T marcada.

y para convertir una red Δ a una red Y:

$$R_1 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$$
$$R_2 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$$
$$R_3 = \frac{R_C R_A}{R_A + R_B + R_C}$$

La aplicación de las ecuaciones es directa, aunque la identificación de las redes reales en ocasiones requiere un poco de concentración.

EJEMPLO 5.12

Utilice la técnica de la conversión Δ-Y para determinar la resistencia equivalente de Thévenin del circuito de la figura 5.46*a*.

Observamos que la red de la figura 5.46*a* está compuesta por dos redes conectadas en Δ que comparten la resistencia de 3 Ω. Debemos tener cuidado en este punto y no ser demasiado ambiciosos al convertir ambas redes conectadas en Δ en dos redes conectadas en Y. La razón quizá sea más evidente después de que convirtamos la red superior, consistente en las resistencias de 1, 4 y 3 Ω en una red conectada en Y (fig. 5.46*b*).

Observe que al convertir la red superior en una red conectada en Y, eliminamos la resistencia de 3 Ω. En consecuencia, no hay manera de convertir la red original conectada en Δ compuesta por las resistencias de 2, 5 y 3 Ω en una red conectada en Y.

Procedemos a combinar las resistencias de $\frac{3}{8}$ Ω y 2 Ω así como las de $\frac{3}{2}$ Ω y 5 Ω (fig. 5.46*c*). Tenemos ahora una resistencia de $\frac{19}{8}$ Ω en paralelo con uno de $\frac{13}{2}$ Ω; además, esta combinación en paralelo está en serie con la resistencia de $\frac{1}{2}$ Ω. De tal modo, sustituimos la red original de la figura 5.46*a* por una resistencia de $\frac{159}{71}$ Ω (fig. 5.46*d*).

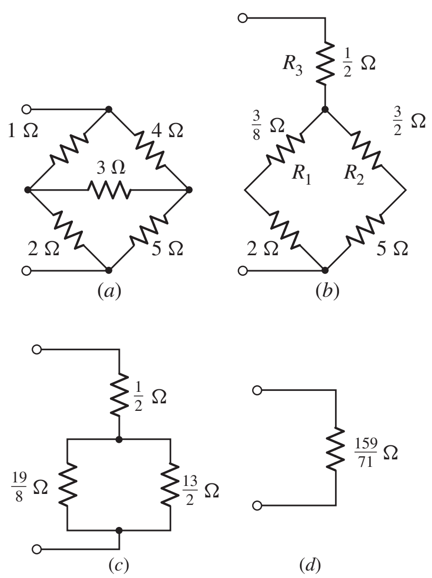


FIGURA 5.32 (*a*) Red resistiva dada cuya resistencia de entrada se desea. (*b*) La red Δ superior se sustituye por una red Y equivalente. (*c*, *d*) Las combinaciones en serie y en paralelo producen un único valor de resistencia.

PRÁCTICA

5.11 Utilice la técnica de conversión Y-Δ para determinar la resistencia equivalente de Thévenin del circuito de la figura 5.47.

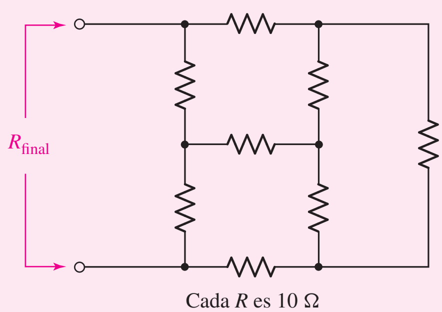


FIGURA 5.47

Respuesta: 11.43 Ω.

5.6 SELECCIÓN DE UN PROCEDIMIENTO: COMPARACIÓN DE DIVERSAS TÉCNICAS

En el capítulo 3 se nos presentaron la ley de corrientes de Kirchhoff (LCK) y la ley de voltajes (tensiones) de Kirchhoff (LVK). Ambas se aplican a cualquier circuito con el que nos encontramos, siempre que tengamos cuidado en considerar el sistema completo que los circuitos representan. La razón radica en que ambas leyes refuerzan la conservación de la carga y de la energía, respectivamente, y ambas son principios muy importantes. Con base en la LCK, formulamos el poderoso método del análisis nodal. Una técnica similar basada en la LVK (sólo aplicable desafortunadamente a circuitos planos) se conoce como análisis de malla y también se usa como un método útil para analizar circuitos.

Este texto, en su mayor parte, se interesa en el desarrollo de habilidades analíticas que se puedan aplicar a circuitos *lineales.* Si sabemos que un circuito está construido sólo por componentes lineales (en otras palabras, todas las tensiones y corrientes se relacionan mediante funciones lineales), entonces a menudo podemos simplificar los circuitos, antes de emplear el análisis de malla o el nodal. Quizás el resultado más importante que surge al saber que trabajamos con un sistema por completo lineal es que se aplica el principio de superposición. Dado un determinado número de fuentes independientes que actúa en un circuito, podemos sumar la contribución de cada fuente, de manera independiente de las otras fuentes. La técnica está muy arraigada en todo el campo de la ingeniería, así que la encontrasemos muy a menudo. En muchas situaciones reales, podemos observar que aunque varias “fuentes” actúan de manera simultánea sobre nuestro “sistema”, por lo común una de ellas domina la respuesta de éste. La superposición permite identificar con rapidez dicha fuente, siempre que tengamos un modelo lineal razonablemente preciso del sistema.

Sin embargo, desde el punto de vista del análisis de circuitos, a menos que se nos pida encontrar la fuente independiente que contribuye más a una respuesta particular, demostremos que arremangar la camisa y proceder de inmediato al análisis nodal o de malla resulta muchas veces una táctica más directa. Esto se debe a que al aplicar la superposición a un circuito con 12 fuentes independientes requerirá que volvamos a dibujar el circuito original 12 veces y, de cualquier modo, con frecuencia tendremos que aplicar el análisis nodal o de malla a cada uno de los circuitos.

No obstante, la técnica de las transformaciones de fuente casi siempre es una herramienta muy útil para el análisis de circuitos. Efectuar las transformaciones de fuentes nos permite consolidar resistencias o fuentes que no están en serie o en paralelo en el circuito original. Las transformaciones de fuentes quizá también nos permitan convertir todas o al menos la mayor parte de las fuentes del circuito original al mismo tipo (que todas sean fuentes de tensión o todas fuentes de corriente), por lo que el análisis nodal o de malla es más directo.

El teorema de Thévenin es extremadamente importante por varias razones. Al trabajar con circuitos electrónicos, siempre conocemos la resistencia equivalente de Thévenin de diferentes partes del circuito, en especial la resistencia de entrada y de salida de las etapas del amplificador. La razón consiste en que igualar las resistencias con frecuencia resulta la mejor forma de optimizar el desempeño de un circuito determinado. Un pequeño anticipo de lo anterior se presentó en el análisis de la transferencia de potencia máxima, donde debe elegirse la resistencia de carga para que iguale la resistencia equivalente de Thévenin de la red a la cual se conecta la carga. Sin embargo, en términos del análisis de circuitos cotidiano, encontraremos que la conversión de parte de un circuito en su equivalente de Thévenin o de Norton implica casi tanto trabajo como analizar el circuito completo. Por lo tanto, al igual que en el caso de la superposición, los teoremas de Thévenin y Norton se aplican por lo común sólo cuando necesitamos información especializada relativa a una parte del circuito.

RESUMEN Y REPASO

Aunque en el capítulo 4 afirmamos que el análisis de nodos y el análisis de mallas son suficientes para analizar cualquier circuito que podamos encontrar (siempre y cuando tengamos los medios para relacionar la tensión y la corriente para cualquier elemento pasivo, tal como la ley de Ohm para las resistencias), la verdad es que con frecuencia no necesitamos *todas* las tensiones o *todas* las corrientes. A veces, la atención se enfoca simplemente a *un* elemento o a una *pequeña porción* de un circuito mayor. Quizás haya cierta incertidumbre en el valor final de un elemento específico, y nos gustaría ver cómo funciona el circuito dentro del rango de valores esperados. En tales casos, podemos aprovechar el hecho de que, por el momento, nos hemos limitado a circuitos *lineales*. Esto permite desarrollar otras herramientas: la *superposición*, en la que se pueden identificar las contribuciones individuales de las fuentes; las *transformaciones de fuentes*, en las que una fuente de tensión en serie con una resistencia se puede reemplazar por una fuente de corriente en paralelo con una resistencia, y la herramienta más poderosa: los *equivalentes de Thévenin* (y *Norton*).

Una variante interesante de estos temas es la idea de *transferencia de potencia máxima*. Suponiendo que podemos representar los circuitos (arbitrariamente complejos) mediante dos redes, una activa y otra pasiva, la transferencia máxima de potencia a la red pasiva se obtiene cuando su resistencia Thévenin es igual a la resistencia Thévenin de la red activa. Finalmente, introdujimos el concepto de conversión delta-ye, un proceso que permite simplificar algunas redes resistivas que a primera vista no son reducibles usando técnicas convencionales de combinaciones serie-paralelo.

Todavía tenemos que enfrentarnos a la pregunta perpetua: "*¿Qué herramienta debo usar para analizar este circuito?*" La respuesta usualmente está en el tipo de información que se necesita acerca de nuestro circuito. La experiencia finalmente sirve un poco de guía, pero no siempre es verdad que haya un procedimiento "óptimo". Ciertamente, un punto en el que hay que enfocarse es si se podrían cambiar uno o más componentes: esto puede indicar si la superposición, un equivalente Thévenin o una simplificación parcial como la que se puede lograr con transformaciones de fuentes o delta-estrella es la ruta más práctica.

Concluimos este capítulo con un repaso de los puntos clave, junto con la identificación de los ejemplos pertinentes.

- ❑ El principio de superposición establece que la *respuesta* en un sistema lineal se obtiene sumando las respuestas individuales causadas por las fuentes *independientes* separadas *que actúan solas*. (Ejemplos 5.1, 5.2, 5.3)
- ❑ La superposición se emplea con mayor frecuencia cuando se necesita determinar la contribución individual de cada fuente a una respuesta particular. (Ejemplos 5.2, 5.3)
- ❑ Un modelo práctico de una fuente de tensión real es una resistencia en serie con una fuente de tensión independiente. Un modelo práctico de una fuente de corriente real es una resistencia en paralelo con una fuente de corriente independiente.
- ❑ Las transformaciones de fuentes convierten una fuente de tensión práctica en una fuente de corriente práctica y viceversa. (Ejemplo 5.4)
- ❑ Las transformaciones sucesivas de fuentes simplifican en gran medida el análisis de un circuito pues ofrecen los medios para combinar resistencias y fuentes. (Ejemplo 5.5)
- ❑ El equivalente de Thévenin de una red es una resistencia en serie con una fuente de tensión independiente. El equivalente de Norton es la misma resistencia en paralelo con una fuente de corriente independiente. (Ejemplo 5.6)

- Hay varias formas de obtener la resistencia equivalente de Thévenin, en función de que existan o no fuentes dependientes en la red. (Ejemplos 5.7, 5.8, 5.9, 5.10)
- La transferencia de potencia máxima ocurre cuando la resistencia de carga iguala la resistencia equivalente de Thévenin de la red a la que se conecta. (Ejemplo 5.11)
- Cuando se analiza una red resistiva conectada en Δ, su conversión en Y es un procedimiento directo. Esto puede ser de utilidad para simplificar la red antes de efectuar el análisis. De manera contraria, una red resistiva conectada en Y puede convertirse en una red conectada en Δ como ayuda de la simplificación de la red. (Ejemplo 5.12)

LECTURAS ADICIONALES

Un libro que trata acerca de la tecnología de baterías, y que incluye las características de la resistencia integrada es:

D. Linden, *Handbook of Batteries,* 2a ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1995.

Un excelente análisis de casos patológicos y teoremas sobre análisis de circuitos se puede encontrar en:

R. A. DeCarlo y P. M. Lin, *Linear Circuit Analysis,* 2a ed. Nueva York: Oxford University Press, 2001.

EJERCICIOS

5.1 Linealidad y superposición

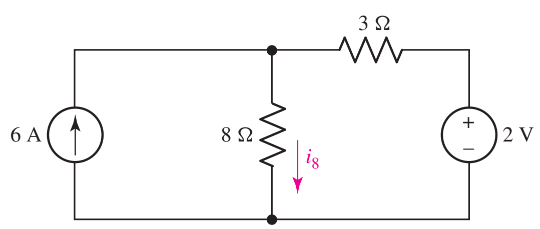
1. Los sistemas lineales son tan fáciles de trabajar que los ingenieros a menudo construyen modelos lineales de sistemas reales (no lineales) como apoyo para el análisis y el diseño. Tales modelos con frecuencia son sorprendentemente exactos dentro de un rango limitado. Por ejemplo, considere la sencilla función exponencial e^x. La representación mediante la serie de Taylor de esta función es:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

   (*a*) Construya un modelo lineal para esta función truncando la expansión de la serie de Taylor después del término lineal. (*b*) Evalúe su función modelo en $x = 0.000001$, 0.0001, 0.01, 0.1 y 1.0. (*c*) ¿Para qué valores de x su modelo es una aproximación "razonable" de e^x? *Explique su razonamiento*.

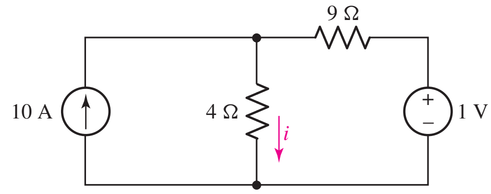
2. Construya una aproximación lineal a la función $y(t) = 4 \text{ sen } 2t$. (*a*) Evalúe su aproximación en $t = 0$, 0.001, 0.01, 0.1 y 1.0. (*b*) ¿Para qué valores de t su modelo es una aproximación "razonable" a la función real (no lineal) $y(t)$? *Explique su razonamiento*.

3. Considerando el circuito de la figura 5.48, utilice la superposición para determinar los dos componentes de i_8 originadas por la acción de las dos fuentes independientes, respectivamente.



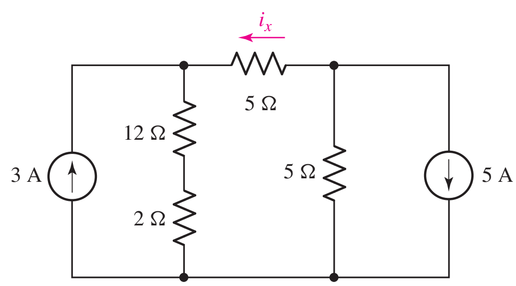
■ FIGURA 5.48

4. (*a*) Use la superposición para determinar la corriente marcada como i en el circuito de la figura 5.49. (*b*) Exprese la contribución que hace la fuente de 1 V a la corriente total i, en términos de porcentaje. (*c*) Cambiando sólo el valor de la fuente de 10 A, ajuste el circuito de la figura 5.49 de tal manera que las dos fuentes contribuyan por igual a la corriente i.



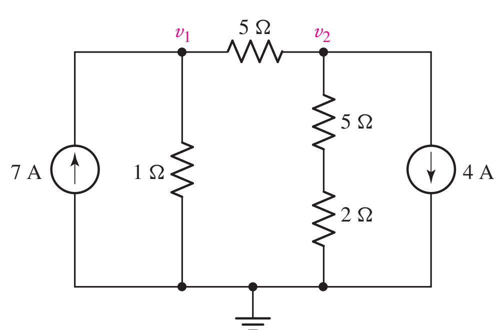
■ **FIGURA 5.49**

5. (*a*) Use la superposición para obtener las contribuciones individuales de cada una de las fuentes en la figura 5.50 a la corriente marcada como i_x. (*b*) Ajustando sólo el valor de la fuente de corriente del extremo derecho, modifique el circuito de tal manera que las dos fuentes contribuyan por igual a i_x.



■ **FIGURA 5.50**

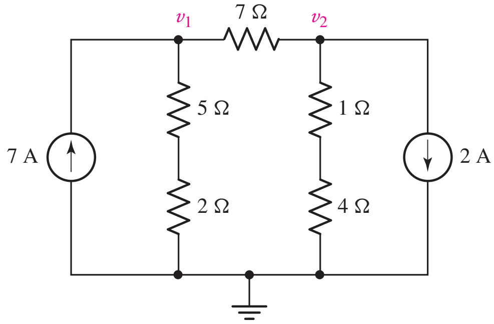
6. (*a*) Determine las contribuciones individuales de cada una de las fuentes de corriente en el circuito de la figura 5.51 a la tensión de nodo v_1. (*b*) Determine la contribución porcentual de cada una de las fuentes para conocer la potencia disipada por la resistencia de 2 Ω.



■ **FIGURA 5.51**

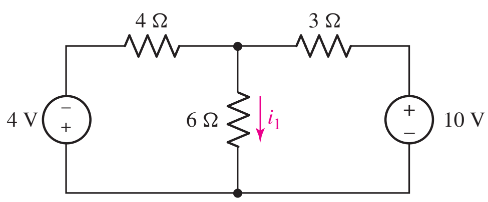
7. (*a*) Determine las contribuciones individuales de cada una de las fuentes de corriente que se muestran en la figura 5.52 de la tensión de nodo marcada como v_2. (*b*) En vez de ejecutar dos simulaciones PSpice separadas, verifique su respuesta usando un solo barrido de

cd. Presente un esquema etiquetado, los resultados pertinentes de Probe y una breve descripción de los resultados.



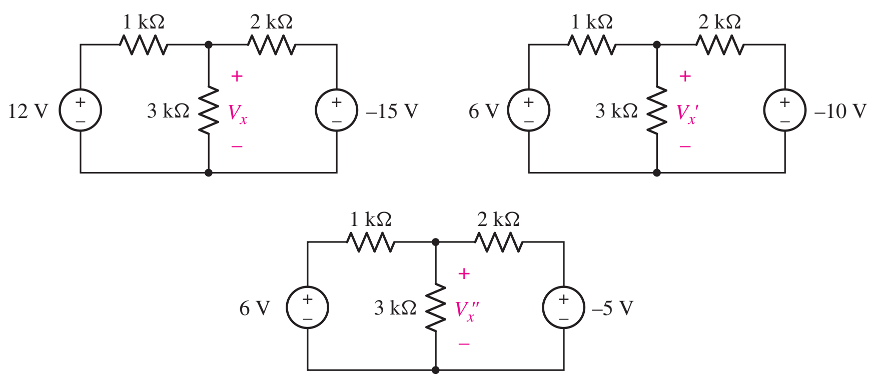
■ **FIGURA 5.52**

8. Después de estudiar el circuito de la figura 5.53, cambie los valores de ambas fuentes de tensión de manera que (*a*) i_1 se duplique; (*b*) el sentido de i_1 se invierta, pero su magnitud no cambie; (*c*) ambas fuentes contribuyan por igual a la potencia disipada por la resistencia de 6 Ω.



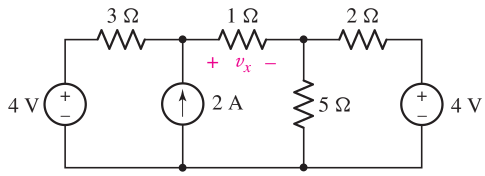
■ **FIGURA 5.53**

9. Considere los tres circuitos que se muestran en la figura 5.54. Analice cada circuito y demuestre que $Vx = V_x' + V_x''$ (es decir, que *la superposición es más útil cuando las fuentes se ponen en cero, pero el principio es, de hecho, mucho más general que esto*).



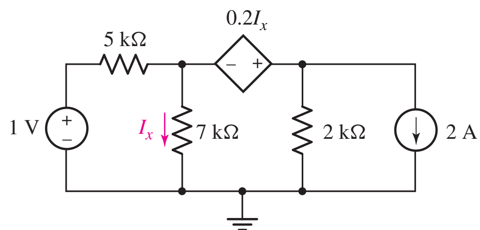
■ **FIGURA 5.54**

10. (*a*) Usando superposición, determine la tensión marcada como v_x en el circuito representado en la figura 5.55. (*b*) ¿A qué valor se debe cambiar la fuente de 2 A para reducir v_x en 10%? (*c*) Verifique sus respuestas realizando las simulaciones de PSpice adecuadas. Presente un esquema etiquetado, las lecturas pertinentes y una breve descripción de los resultados.



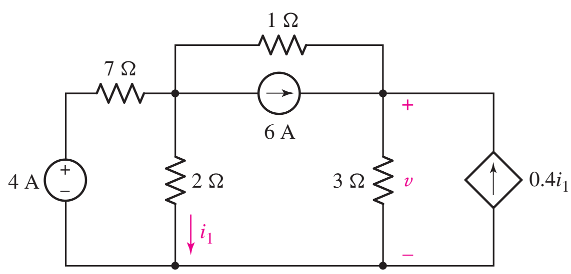
■ **FIGURA 5.55**

11. Use el principio de superposición para obtener el valor para la corriente I_x marcada en la figura 5.56.



■ **FIGURA 5.56**

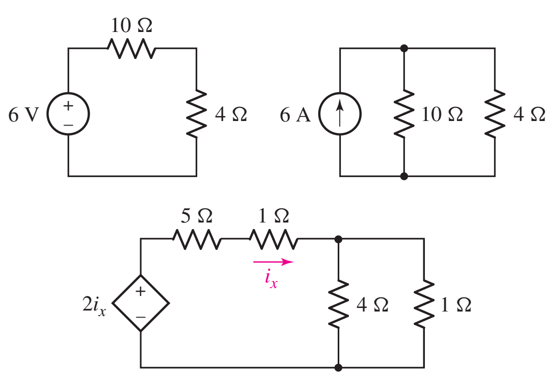
12. (*a*) Use superposición para determinar la contribución individual de cada fuente independiente a la tensión v marcada en el circuito que se muestra en la figura 5.57. (*b*) Calcule la potencia absorbida por la resistencia de 2 Ω.



■ **FIGURA 5.57**

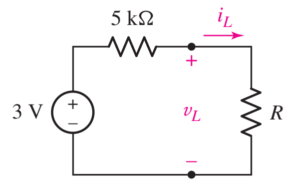
5.2 Transformaciones de fuentes

13. Realice una transformación de fuentes adecuada en cada uno de los circuitos representados en la figura 5.58, teniendo cuidado de conservar la resistencia de 4 Ω en cada circuito modificado.



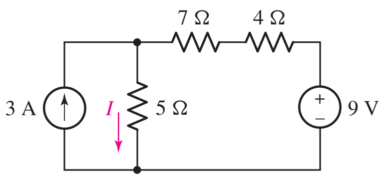
■ **FIGURA 5.58**

14. Para el circuito de la figura 5.59, grafique i_L contra v_L correspondiente al rango $0 \leq R \leq \infty$.



■ **FIGURA 5.59**

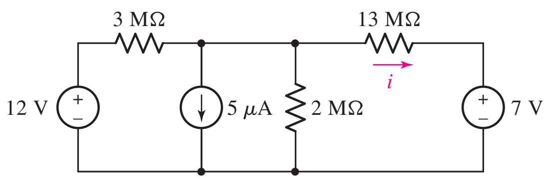
15. Determine la corriente marcada como I en el circuito de la figura 5.60 realizando primero la transformación de fuentes y las combinaciones paralelo-serie según se necesite para reducir el circuito tanto como sea posible.



■ **FIGURA 5.60**

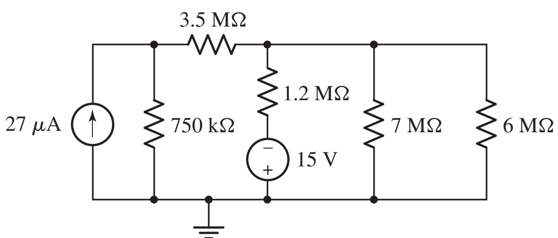
16. Verifique que la potencia absorbida por la resistencia de 7 Ω en la figura 5.22*a* siga igual después de la transformación de fuentes ilustrada en la figura 5.22*c*.

17. (*a*) Determine la corriente marcada como i en el circuito de la figura 5.61 después de transformar el circuito de tal manera que contenga solamente resistencias y fuentes de tensión. (*b*) Simule cada circuito para verificar que fluya la misma corriente en ambos casos.



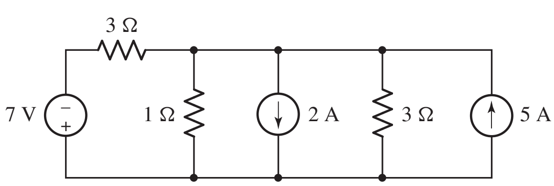
■ **FIGURA 5.61**

18. (*a*) Usando transformaciones sucesivas de fuentes reduzca el circuito de la figura 5.62 a una fuente de tensión en serie con la resistencia, estando ambos elementos en serie con la resistencia de 6 MΩ. (*b*) Calcule la potencia disipada por la resistencia de 6 MΩ usando su circuito simplificado.



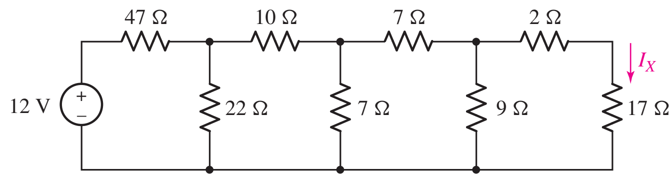
■ **FIGURA 5.62**

19. (*a*) Usando tantas transformaciones de fuentes y técnicas de combinación de elementos como sean necesarias, simplifique el circuito de la figura 5.63 de modo que contenga solamente la fuente de 7 V, una sola resistencia y otra fuente de tensión. (*b*) Verifique que la fuente de 7 V suministre la misma cantidad de potencia en ambos circuitos.



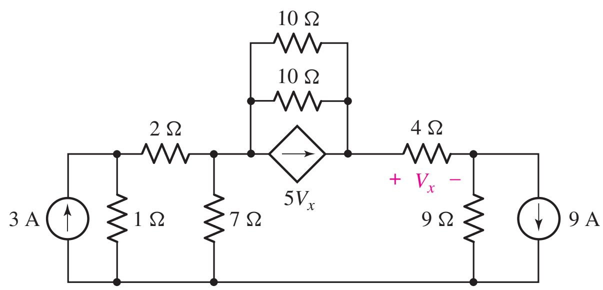
■ **FIGURA 5.63**

20. (*a*) Usando transformaciones de fuentes sucesivas, reduzca el circuito de la figura 5.64 de tal manera que contenga una sola fuente de tensión, la resistencia de 17 Ω y sólo otra resistencia. (*b*) Calcule la potencia disipada por la resistencia de 17 Ω. (*c*) Verifique sus resultados simulando ambos circuitos con PSpice u otra herramienta CAD adecuada.



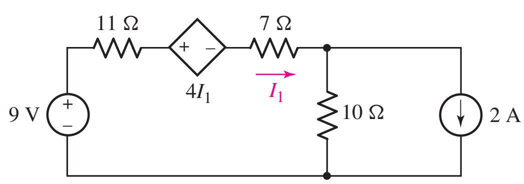
■ **FIGURA 5.64**

21. Use transformaciones de fuentes para convertir primero las tres fuentes de la figura 5.65 a fuentes de tensión; en seguida simplifique el circuito tanto como sea posible y calcule la tensión V_x que aparece a través la resistencia de 4 Ω. Asegúrese de dibujar y etiquetar su circuito simplificado.



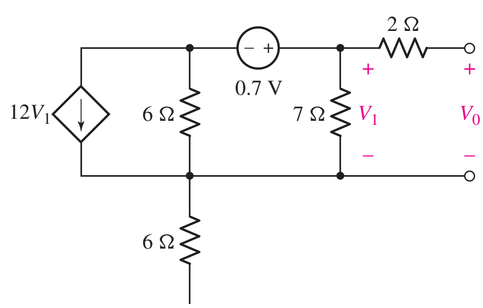
■ **FIGURA 5.65**

22. (*a*) Con la ayuda de transformaciones de fuentes, modifique el circuito de la figura 5.66 de manera que contenga sólo fuentes de corriente. (*b*) Simplifique su nuevo circuito tanto como sea posible y calcule la potencia disipada en la resistencia de 7 Ω. (*c*) Verifique su solución simulando ambos circuitos con PSpice u otra herramienta CAD adecuada.



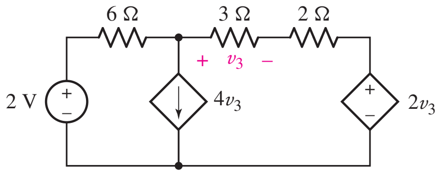
■ **FIGURA 5.66**

23. Transforme la fuente dependiente en la figura 5.67 en una fuente de tensión. Luego calcule V_0.



■ **FIGURA 5.67**

24. Respecto al circuito representado en la figura 5.68, transforme primero ambas fuentes de tensión a fuentes de corriente, reduzca el número de elementos tanto como sea posible y determine la tensión v_3.



■ **FIGURA 5.68**

5.3 Circuitos equivalentes de Thévenin y Norton

25. (*a*) Con referencia a la figura 5.69, determine el equivalente de Thévenin de la red conectada a R_L. (*b*) Determine v_L para $R_L = 1\ \Omega$, 3.5 Ω, 6.257 Ω y 9.8 Ω.

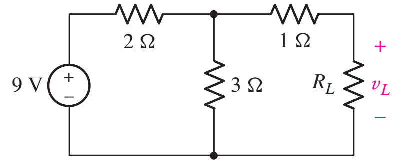
26. (*a*) Respecto al circuito representado en la figura 5.69, obtenga el equivalente de Norton de la red conectada a R_L. (*b*) Grafique la potencia disipada en la resistencia R_L como una función de i_L correspondiente al rango de $0 < R_L < 5\ \Omega$. (*c*) Usando su gráfica, estime qué valor de R_L alcanza su valor máximo de potencia disipada.

27. (*a*) Obtenga el equivalente de Norton de la red conectada a R_L en la figura 5.70. (*b*) Obtenga el equivalente de Thévenin de la misma red. (*c*) Use cualquiera de los equivalentes para calcular i_L para $R_L = 0\ \Omega$, 1 Ω, 4.923 Ω y 8.107 Ω.

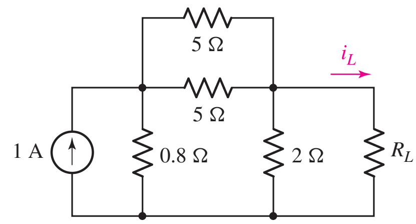
28. (*a*) Determine el equivalente de Thévenin del circuito representado en la figura 5.71 hallando primero V_{oc} e I_{sc} (definida como la corriente que fluye de la terminal de referencia positiva de V_{oc}). (*b*) Conecte una resistencia de 4.7 kΩ a las terminales abiertas de su nueva red y calcule la potencia que disipa.

29. Con referencia al circuito de la figura 5.71: (*a*) Determine el equivalente de Norton del circuito encontrando primero V_{oc} e I_{sc} (definida como la corriente que fluye de la terminal de referencia positiva de V_{oc}). (*b*) Conecte una resistencia de 1.7 kΩ a las terminales abiertas de su nueva red y calcule la potencia suministrada a dicha resistencia.

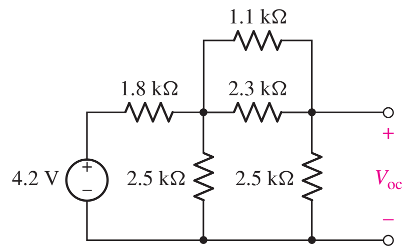
30. (*a*) Utilice el teorema de Thévenin para obtener un equivalente sencillo de dos componentes del circuito que se muestra en la figura 5.72. (*b*) Use su circuito equivalente para determinar la potencia suministrada a una resistencia de 100 Ω conectada en las terminales a circuito abierto. (*c*) Verifique su solución mediante el análisis del circuito original con la misma resistencia de 100 Ω conectada a través de las terminales a circuito abierto.



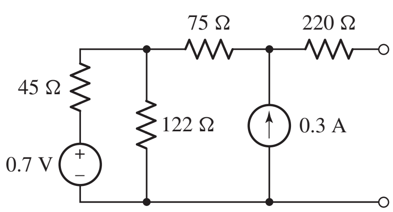
■ **FIGURA 5.69**



■ **FIGURA 5.70**

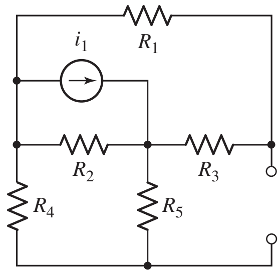


■ **FIGURA 5.71**



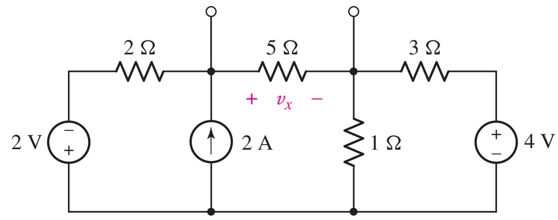
■ **FIGURA 5.72**

31. (*a*) Utilice el teorema de Thévenin para obtener un equivalente de dos componentes para la red que se muestra en la figura 5.73. (*b*) Determine la potencia suministrada a una resistencia de 1 MΩ conectada a la red si $i_1 = 19\ \mu A$, $R_1 = R_2 = 1.6$ MΩ, $R_2 = 3$ MΩ y $R_4 = R_5 = 1.2$ MΩ. (*c*) Verifique su solución mediante la simulación de ambos circuitos con PSpice u otra herramienta CAD adecuada.



■ **FIGURA 5.73**

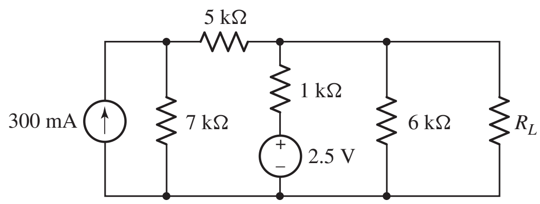
32. Determine el equivalente de Thévenin de la red que se muestra en la figura 5.74 visto desde las dos terminales a circuito abierto.



■ **FIGURA 5.74**

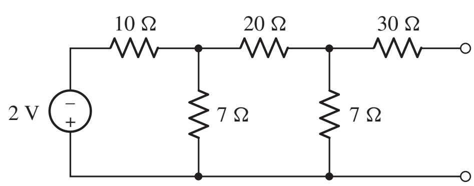
33. (*a*) Determine el equivalente de Norton del circuito representado en la figura 5.74 visto desde las dos terminales a circuito abierto. (*b*) Calcule la potencia disipada en la resistencia de 5 Ω conectada en paralelo con la resistencia existente de 5 Ω. (*c*) Calcule la corriente que fluye a través de un cortocircuito que conecta las dos terminales.

34. Para el circuito de la figura 5.75: (*a*) Utilice el teorema de Norton para reducir la red conectada a R_L a sólo dos componentes. (*b*) Calcule la corriente dirigida hacia abajo que fluye a través de R_L si es una resistencia de 3.3 kΩ. (*c*) Verifique su respuesta mediante la simulación de ambos circuitos con PSpice u otra herramienta CAD comparable.



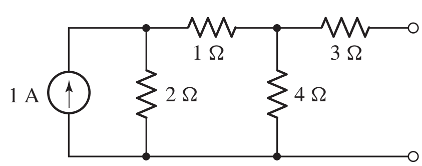
■ **FIGURA 5.75**

35. (*a*) Obtenga el valor para la resistencia equivalente de Thévenin vista desde las terminales a circuito abierto del circuito de la figura 5.76, hallando primero V_{oc} e I_{sc}. (*b*) Conecte una fuente de prueba de 1 A a las terminales abiertas del circuito original después de cortocircuitar la fuente de tensión, y use esto para obtener R_{TH}. (*c*) Conecte una fuente de prueba de 1 V en las terminales a circuito abierto del circuito original, después de poner nuevamente en cero la fuente de 2 V, y ahora obtenga R_{TH}.



■ **FIGURA 5.76**

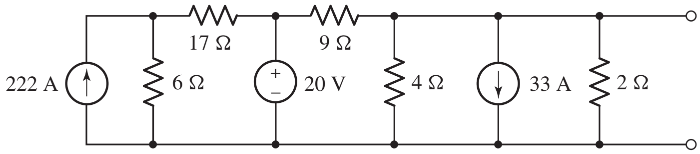
36. Con referencia al circuito representado en la figura 5.77, (*a*) obtenga el valor para la resistencia equivalente de Thévenin vista desde las terminales abiertas, hallando primero V_{oc} e I_{sc}. (*b*) Conecte una fuente de prueba de 1 A en las terminales abiertas del circuito, después



■ **FIGURA 5.77**

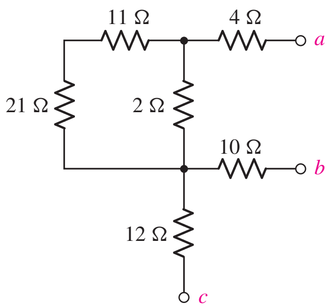
de desactivar la otra fuente de corriente, y ahora obtenga R_{TH}. (*c*) Conecte una fuente de prueba de 1 V en las terminales a circuito abierto del circuito original, nuevamente poniendo en cero la fuente original, y ahora use esto para obtener R_{TH}.

37. Obtenga el valor para la resistencia equivalente de Thévenin vista desde las terminales a circuito abierto del circuito en la figura 5.78 (*a*) determinando V_{oc} e I_{sc} y luego tomando su razón (voltaje entre la corriente); (*b*) poniendo todas las fuentes independientes en cero y usando técnicas de combinación de resistencias; (c) conectando una fuente de corriente no conocida en las terminales, desactivando (poniendo en cero) todas las otras fuentes, encontrando una expresión algebraica para la tensión presente a través de la fuente, y tomando la razón entre las dos cantidades.



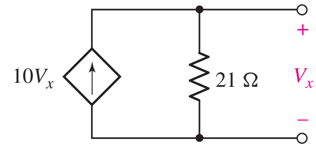
■ **FIGURA 5.78**

38. Respecto a la red representada en la figura 5.79, determine el equivalente de Thévenin visto desde un elemento conectado a las terminales. (*a*) *a* y *b*; (*b*) *a* y *c*; (*c*) *b* y *c*; (*d*) verifique sus respuestas usando PSpice u otra herramienta CAD adecuada. (*Pista*: *conecte una fuente de prueba* en *las terminales de interés*.)



■ **FIGURA 5.79**

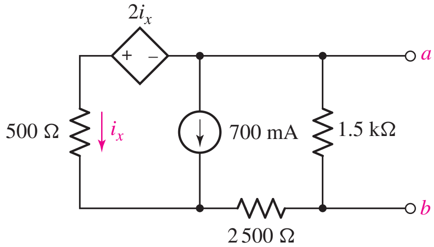
39. Determine los equivalentes de Thévenin y Norton del circuito representado en la figura 5.80 visto desde las terminales a circuito abierto. (No debe haber ninguna fuente dependiente en su respuesta.)



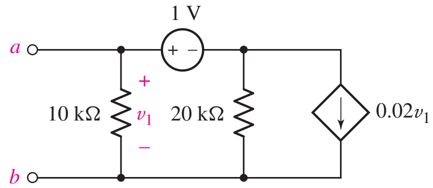
■ **FIGURA 5.80**

40. Determine el equivalente de Norton del circuito dibujado en la figura 5.81 visto desde las terminales *a* y *b*. (No debe haber fuentes dependientes en su respuesta.)

41. Respecto al circuito de la figura 5.82, determine la potencia disipada por (*a*) una resistencia de 1 kΩ conectada entre *a* y *b*; (*b*) una resistencia de 4.7 kΩ conectada entre *a* y *b*; (*c*) una resistencia de 10.54 kΩ conectada entre *a* y *b*.

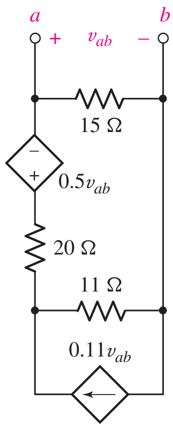


■ **FIGURA 5.81**



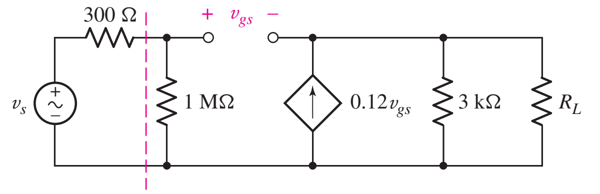
■ **FIGURA 5.82**

42. Determine los equivalentes de Thévenin y Norton del circuito que se muestra en la figura 5.83, visto desde un elemento no especificado conectado entre las terminales *a* y *b*.



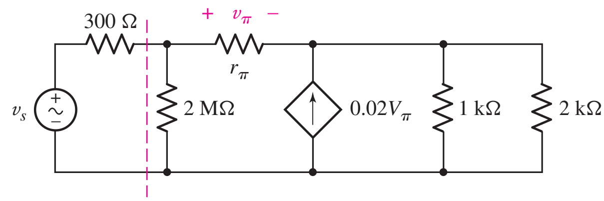
■ **FIGURA 5.83**

43. Con base en el circuito de la figura 5.84, determine la resistencia equivalente de Thévenin del circuito que está a la derecha de la línea punteada. El circuito es un amplificador transistorizado de fuente común del que usted está calculando su resistencia de entrada.



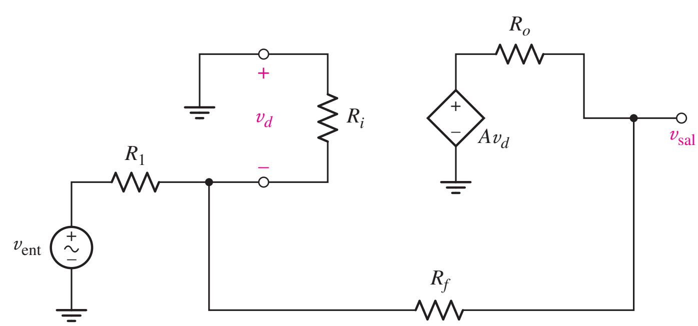
■ **FIGURA 5.84**

44. En el circuito de la figura 5.85 obtenga la resistencia equivalente de Thévenin del circuito que está a la derecha de la línea punteada; es un amplificador transistorizado de colector común del cual se está calculando la resistencia de entrada.

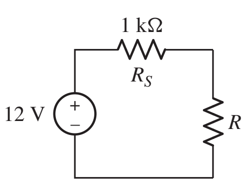


■ **FIGURA 5.85**

45. El circuito que se muestra en la figura 5.86 es un modelo razonablemente aproximado de un amplificador operacional. En casos donde R_1 y A son muy grandes y $R_o \sim 0$, una carga resistiva (como por ejemplo una bocina) conectada entre tierra y la terminal marcada v_{sal} verán una tensión $-R_f/R_1$ veces más grandes que la señal de entrada v_{entr}. Determine el equivalente de Thévenin del circuito y recuerde marcar v_{sal}.



■ **FIGURA 5.86**

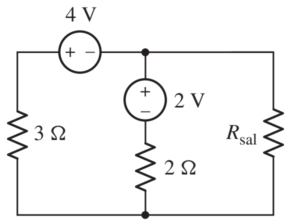


■ **FIGURA 5.87**

5.4 Transferencia de potencia máxima

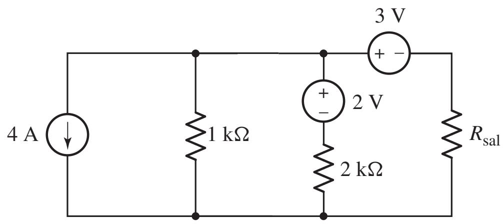
46. (*a*) Para el circuito sencillo de la figura 5.87, grafique la potencia disipada por la resistencia R como función de R/R_S si $0 \leq R \leq 3\,000\ \Omega$. (*b*) Grafique la primera derivada de la potencia contra R/R_S, y verifique que se transfiere potencia máxima a R cuando ésta es igual a R_S.

47. Para el circuito dibujado en la figura 5.88, (*a*) determine el equivalente de Thévenin conectado a R_{sal}. (*b*) Elija R_{sal} de manera que se le suministre máxima potencia.



■ **FIGURA 5.88**

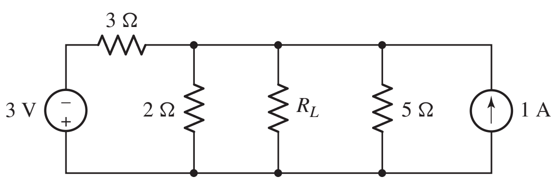
48. Estudie el circuito de la figura 5.89. (*a*) Determine el equivalente de Norton conectado a la resistencia R_{sal}. (*b*) Seleccione el valor para R_{sal} tal que se le suministre potencia máxima.



■ **FIGURA 5.89**

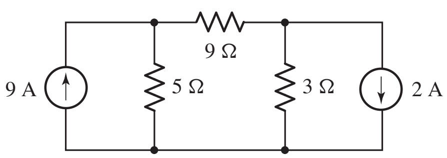
49. Suponiendo que se pueda determinar la resistencia equivalente de Thévenin del tomacorriente de pared, ¿por qué los fabricantes de tostadores, hornos de microondas y televisiones no igualan la resistencia equivalente de Thévenin de cada aparato con dicho valor? Éste no permitiría transferencia de potencia máxima desde la compañía eléctrica hasta los aparatos domésticos?

50. Para el circuito de la figura 5.90, ¿qué valor de R_L asegurará que absorbe la cantidad de potencia máxima posible?



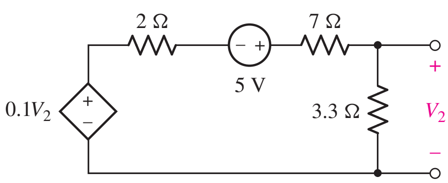
■ **FIGURA 5.90**

51. Con referencia al circuito de la figura 5.91, (*a*) calcule la potencia absorbida por la resistencia de 9 Ω; (*b*) ajuste el valor de la resistencia de 5 Ω de modo que la nueva red suministre potencia máxima a la resistencia de 9 Ω.



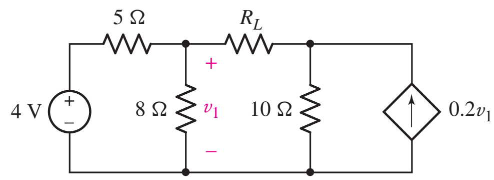
■ **FIGURA 5.91**

52. Con referencia al circuito de la figura 5.92, (*a*) determine la potencia absorbida por la resistencia de 3.3 Ω; (*b*) reemplace la resistencia de 3.3 Ω por otra resistencia tal que absorba potencia máxima del resto del circuito.



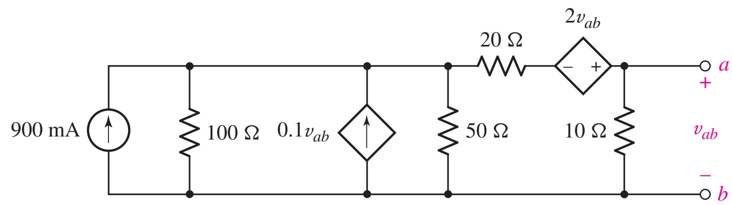
■ **FIGURA 5.92**

53. Seleccione en la figura 5.93 un valor para R_L tal que se asegure que absorba potencia máxima del circuito.



■ FIGURA 5.93

54. Determine qué valor de resistencia absorbería potencia máxima del circuito de la figura 5.94 cuando se conecte a través de las terminales *a* y *b*.

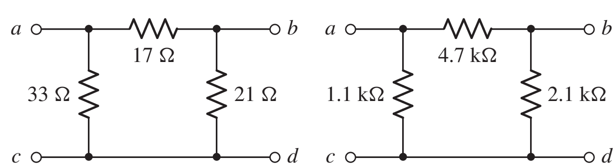


■ FIGURA 5.94

5.5 Conversión delta-estrella

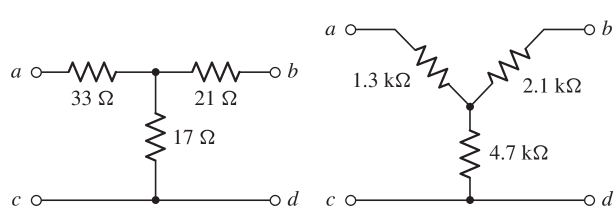
55. Deduzca las ecuaciones necesarias para convertir de una red conectada en estrella a una red conectada en Δ.

56. Convierta las redes conectadas en Δ (o en "Π") en la figura 5.95 a redes conectadas en estrella.

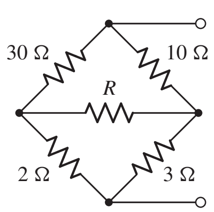


■ FIGURA 5.95

57. Convierta las redes conectadas en Y (o en "T") en la figura 5.96 a redes conectadas en Δ.



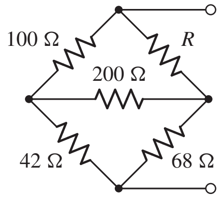
■ FIGURA 5.96



■ FIGURA 5.97

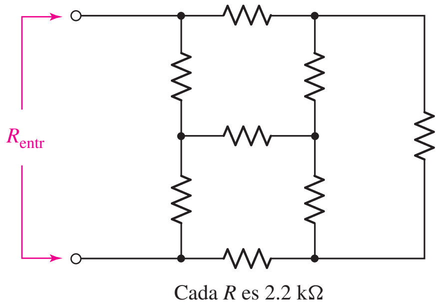
58. Para la red de la figura 5.97, seleccione un valor de *R* tal que la red tenga una resistencia equivalente de 9 Ω. Redondee su respuesta a dos cifras significativas.

59. Para la red de la figura 5.98, seleccione un valor de R tal que la red tenga una resistencia equivalente de 70.6 Ω.



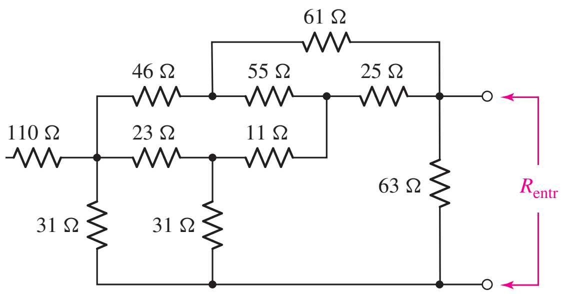
■ **FIGURA 5.98**

60. Determine la resistencia efectiva R_{ent} de la red que se muestra en la figura 5.99.



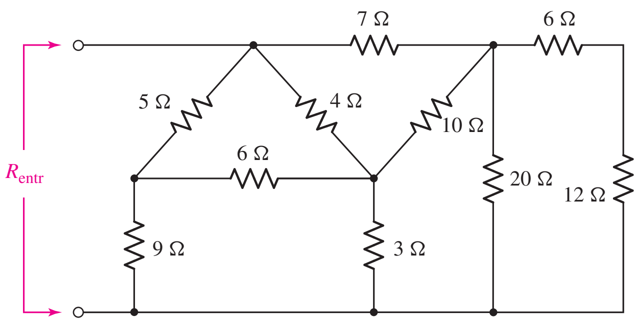
■ **FIGURA 5.99**

61. Calcule R_{ent} como se indica en la figura 5.100.



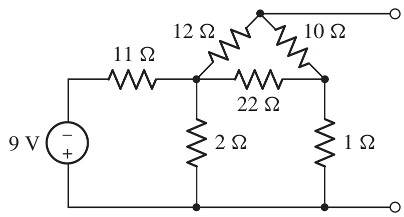
■ **FIGURA 5.100**

62. Utilice las técnicas de conversión Δ/Y como sea adecuado para determinar R_{ent} etiquetada en la figura 5.101.



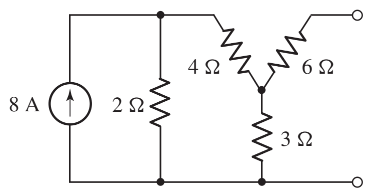
■ **FIGURA 5.101**

63. (*a*) Determine el equivalente de Thévenin de dos componentes de la red de la figura 5.102. (*b*) Calcule la potencia disipada por una resistencia de 1 Ω conectada entre las terminales abiertas.



■ **FIGURA 5.102**

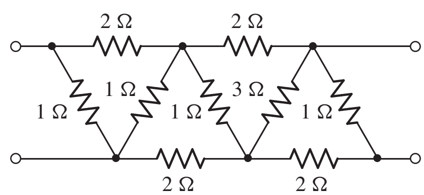
64. (*a*) Use las técnicas adecuadas para obtener los equivalentes tanto de Thévenin como de Norton de la red dibujada en la figura 5.103. (*b*) Verifique sus respuestas simulando cada uno de los tres circuitos conectados a una resistencia de 1 Ω.



■ **FIGURA 5.103**

65. (a) Sustituya la red de la figura 5.104 por una red equivalente en Δ de tres resistencias.

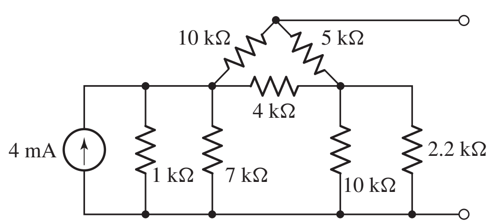
(b) Efectúe una análisis con PSpice para verificar que su respuesta es, en realidad, equivalente. (*Sugerencia:* Trate de agregar una resistencia de carga.)



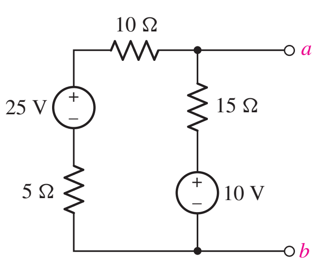
■ **FIGURA 5.104**

5.6 Selección de un procedimiento: comparación de diversas técnicas

66. Determine la potencia absorbida por una resistencia conectada entre las terminales a circuito abierto del circuito que se muestra en la figura 5.105 si tiene un valor de (*a*) 1 Ω; (*b*) 100 Ω; (*c*) 2.65 kΩ; (*d*) 1.13 MΩ.



■ **FIGURA 5.105**



■ **FIGURA 5.106**

67. Se sabe que una resistencia de carga de algún tipo se conectará entre las terminales *a* y *b* de la red de la figura 5.106. (*a*) Cambie el valor de la fuente de 25 V de manera que ambas fuentes de tensión contribuyan por igual a la potencia suministrada a la resistencia de carga, suponiendo que su valor se elige de tal manera que absorba potencia máxima. (*b*) Calcule el valor de la resistencia de carga.

68. Se conecta una carga de 2.57 Ω entre las terminales *a* y *b* de la red dibujada en la figura 5.106. Desafortunadamente, la potencia que se suministra a la carga es sólo el 50% de la cantidad necesaria. Alterando sólo las fuentes de tensión, modifique el circuito de tal manera que se suministre la carga necesaria y ambas fuentes contribuyan por igual.

69. Se conecta una resistencia de carga entre las terminales a circuito abierto del circuito que se muestra en la figura 5.107, y su valor se eligió cuidadosamente para asegurar máxima transferencia de potencia del resto del circuito. (*a*) ¿Cuál es el valor de la resistencia? (*b*) Si la potencia absorbida por la resistencia de carga es tres veces mayor que la necesaria, modifique el circuito de manera que funcione como se desea, sin perder la condición de transferencia de potencia máxima de la que ya se dispone.

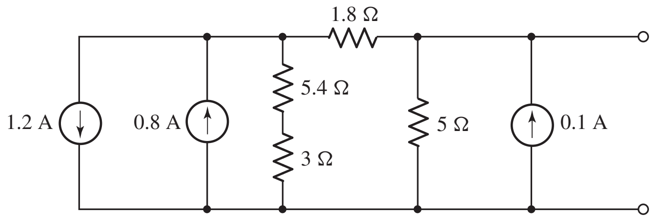


FIGURA 5.107

70. Se necesita un respaldo para el circuito que se muestra en la figura 5.107. No se sabe lo que se conectará a las terminales abiertas, o si será puramente lineal. Si se va a usar una simple batería, ¿qué tensión sin carga (en "circuito abierto") debe tener, y cuál es la resistencia interna máxima tolerable?

Ejercicios de integración de capítulo

71. Tres focos eléctricos de 45 W alambrados originalmente en una configuración de red en Y con una fuente de 120 V ca conectada en cada puerto se vuelve a alambrar como una red en Δ. No se usa la conexión neutra, o central. Si la intensidad de cada luz es proporcional a la potencia que toma, diseñe un circuito de potencia de 120 V ca, de manera que las tres luces tengan la misma intensidad en la configuración en Δ que tenían cuando estaban en una configuración en Y. Verifique su diseño con PSpice al comparar la potencia extraída por cada luz de su circuito (cuyo modelo es un valor de resistencia elegido de manera apropiada), con la potencia que cada uno extraería en el circuito original conectado en Y.

72. (*a*) Explique en términos generales cómo se puede usar la transformación de fuentes para simplificar un circuito antes del análisis. (*b*) Aunque las transformaciones de fuentes puedan simplificar notablemente un circuito específico, ¿cuándo puede no valer la pena el esfuerzo? (*c*) Multiplicando todas las fuentes independientes en un circuito por el mismo factor de escalamiento da como resultado que las otras tensiones y corrientes se escalen en la misma cantidad. Explique por qué no escalamos también las fuentes dependientes. (*d*) En un circuito general, si ponemos en cero una fuente independiente de tensión, ¿qué corriente puede fluir a través de ella? (*e*) En un circuito general, si ponemos en cero una fuente independiente de corriente, ¿qué tensión se puede mantener entre sus terminales?

73. La resistencia de carga en la figura 5.108 puede disipar con seguridad hasta 1 W antes de sobrecalentarse y estallar en llamas. La lámpara se puede considerar como una resistencia de 10.6 Ω si a través de ella fluye menos que 1 A, y como una resistencia de 15 Ω si fluye a través de ella más de 1 A. ¿Cuál es el valor máximo permisible de I_s? Verifique su respuesta con PSpice.

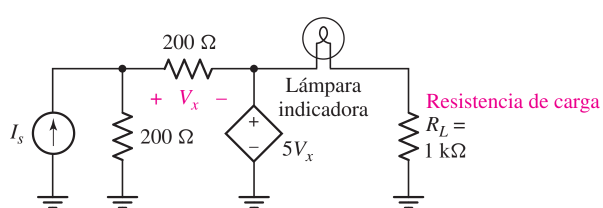


FIGURA 5.108

DP 74. Cierto LED rojo tiene un valor nominal de corriente máxima de 35 mA; si se excede este valor, se producirá un sobrecalentamiento y una falla catastrófica. La resistencia del LED es una función no lineal de su corriente, pero el fabricante garantiza una resistencia mínima de 47 Ω y una máxima de 117 Ω. Sólo se cuenta con una batería de 9 V para activar al LED. Diseñe un circuito adecuado para suministrar la potencia máxima posible al LED sin dañarlo. Utilice sólo combinaciones de los valores de resistencias estándar dados en la contraportada de la portada.

DP 75. Como parte de un sistema de seguridad, un alambre muy delgado de 100 Ω se adhiere a una ventana mediante pegamento epóxico no conductor. Si se cuenta sólo con una caja de 12 baterías AAA de 1.5 V recargables, con mil resistencias de 1 Ω y un piezo zumbador de 2 900 Hz requiere 15 mA, a 6 V, diseñe un circuito sin partes móviles que active el zumbador al romperse la ventana (y consecuentemente también se rompe el alambre delgado). Observe que para funcionar, el zumbador requiere una tensión de cd de al menos 6 V (28 V máximo).



CAPÍTULO 6

El amplificador operacional



CONCEPTOS CLAVE

- Características ideales de los amp op
- Amplificadores inversores y no inversores
- Circuitos amplificadores sumadores y diferenciales
- Etapas de los amp op en cascada
- Utilización de amp op para construir fuentes de tensión y de corriente
- Características no-ideales de los amp op
- Ganancia de tensión y retroalimentación
- Circuitos básicos de comparación y de amplificador de instrumentación

INTRODUCCIÓN

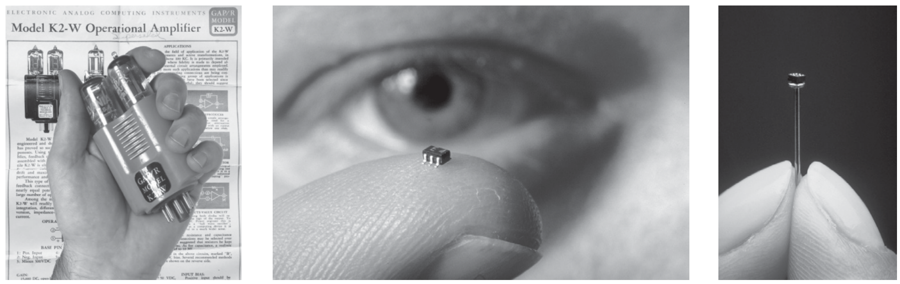
A estas alturas disponemos de un buen conjunto de herramientas de análisis de circuitos, pero el enfoque ha sido sobre todo en circuitos algo generales, compuestos solamente de fuentes y resistencias. En este capítulo introducimos un nuevo componente que, aunque técnicamente es no lineal, se puede tratar en forma eficiente con modelos lineales. Este elemento, conocido como *amplificador operacional* o, en forma abreviada, *amp op*, es de uso diario en una gran variedad de aplicaciones electrónicas. También es un nuevo elemento para usarlo en la construcción de circuitos, y otra oportunidad para probar las habilidades analíticas en desarrollo.

6.1 ANTECEDENTES

Los orígenes del amplificador operacional se remontan a la cuarta década del siglo XX, cuando los circuitos básicos se construían utilizando bulbos de vacío para efectuar operaciones matemáticas tales como la suma, la resta, la multiplicación, la división, la derivación y la integración. Este avance permitió la construcción de computadoras analógicas (en contraste con las digitales) para resolver ecuaciones diferenciales complejas. Se considera que el primer *dispositivo* amplificador operacional comercialmente disponible fue el K2-W, fabricado por la compañía Philbrick Researches, Inc., de Boston, desde 1952 hasta principios de los años de 1970 (figura 6.1*a*). Estos dispositivos de bulbo de vacío pesaban 3 onzas (85 g), medían $1\frac{33}{64}$ pulg × $2\frac{9}{64}$ pulg × $4\frac{7}{64}$ pulg (3.8 cm × 5.4 cm × 10.4 cm), y costaban aproximadamente 22 dólares. En contraste, los modernos amplificadores operacionales en circuitos integrados (CI) como el Fairchild KA741 pesan menos de 500 mg, miden 5.7 mm × 4.9 mm × 1.8 mm, y se venden en aproximadamente 0.22 dólares.

Comparados con los amplificadores operacionales basados en bulbos de vacío, los circuitos integrados modernos de amp op están fabricados con alrededor de 25 o más transistores en la misma "pastilla" de silicio, junto con las resistencias y capacitores nece-





(*a*) (*b*) (*c*)

FIGURA 6.1 (*a*) El amp op K2-W de Philbrick se basa en un par acoplado de bulbos al vacío 12AX7A. (*b*) Amplificador operacional LMV321, utilizado en una gran variedad de aplicaciones de teléfono y juegos. (*c*) Amplificador operacional LMC6035, que alberga 114 transistores en un encapsulamiento tan pequeño que cabe en la cabeza de un alfiler. (*b-c*) *Copyright © 2011 National Semiconductor Corporation (www.national.com). Todos los derechos reservados. Usado con permiso.*

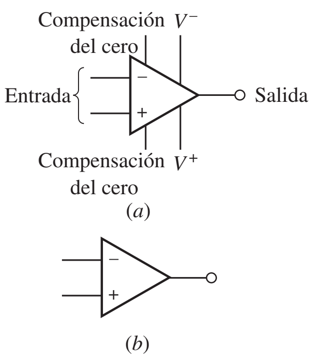


FIGURA 6.2 (*a*) Símbolo eléctrico del amp op. (*b*) Conexiones mínimas que se requieren en un amp op.

sarios para obtener las características deseadas de desempeño. Como resultado, éstos trabajan a tensiones de alimentación de cd mucho menores (±18 V, por ejemplo, en contraste con ±300 V que utilizaban los K2-W), son más confiables y considerablemente más pequeños (fig. 6.1*b*, *c*). En algunos casos, un CI tal vez contenga varios amp op. Además de la patilla de salida y de las dos entradas, otras patillas permiten que se suministre potencia para operar los transistores y que haya ajustes externos a fin de balancear y compensar el amp op. El símbolo que más se usa para un amp op se muestra en la figura 6.2*a*. En este momento no nos interesa la circuitería interna del amp op o del CI, sino sólo las relaciones de tensión y de corriente que existen entre las terminales de entrada y salida. En consecuencia, por ahora se usará un símbolo eléctrico más simple, que se presenta en la figura 6.2*b,* en el que se exhiben dos terminales de entrada a la izquierda y una sola terminal de salida a la derecha. La terminal marcada "+" se conoce como la ***entrada no inversora***, y la terminal marcada "−" recibe el nombre de ***entrada inversora***.

6.2 EL AMP OP IDEAL: UNA INTRODUCCIÓN AMABLE

En la práctica, encontramos que la mayoría de los amp op se desempeñan tan bien que, muchas veces, podemos suponer que trabajamos con un dispositivo "ideal". Las características de un ***amp op ideal*** constituyen la base de dos reglas fundamentales que quizá parezcan un poco inusuales:

Reglas del amp op ideal

1. Nunca fluye corriente hacia ninguna terminal de entrada.
2. No existe diferencia de tensión entre las dos terminales de entrada.

En un amp op real, una pequeña corriente de fuga circulará hacia la entrada (algunas veces tan baja como 40 femtoamperes). También es posible obtener una tensión muy pequeña entre las dos terminales de entrada; sin embargo, en comparación con las tensiones y corrientes de la mayoría de los circuitos, tales valores son tan pequeños que si se incluyeran en el análisis difícilmente afectarían nuestros cálculos.

Al analizar circuitos de amp op debemos tomar otro aspecto en cuenta. En oposición a los circuitos que hemos estudiado hasta ahora, un circuito de amp op siempre tiene una *salida* que depende de algún tipo de *entrada*. Por lo tanto, analizaremos los circuitos de amp op con el objetivo de obtener la expresión de la salida en términos de las cantidades de entrada. *Podremos ver que suele ser una buena idea empezar el análisis de un circuito de amp op en la entrada, y proceder a partir de ahí.*

El circuito que se muestra en la figura 6.3 se conoce como ***amplificador inversor***. Optamos por analizar este circuito mediante la LVK, empezando con la fuente de tensión de entrada. La corriente denominada i fluye sólo a través de las dos resistencias R_1 y R_f, la regla 1 del amp op ideal establece que no fluye ninguna corriente hacia la terminal de entrada inversora. En consecuencia, podemos escribir:

$$-v_{ent} + R_1 i + R_f i + v_{sal} = 0$$

que se ordena para obtener una ecuación que relaciona la salida con la entrada:

$$v_{sal} = v_{ent} - (R_1 + R_f)i \qquad [1]$$

Dado que $v_{ent} = 5$ sen $3t$ mV, $R_1 = 4.7$ kΩ y $R_f = 47$ kΩ, necesitamos una ecuación adicional que exprese i únicamente en términos de v_{sal}, v_{ent}, R_1 y/o R_f.

Es un buen momento para mencionar que aún no se ha recurrido a la regla 2 del amp op ideal. Puesto que la entrada no inversora está conectada a tierra, corresponde a cero volts. Así, por la regla 2 del amp op ideal, ¡la entrada inversora también vale cero volts! *Lo anterior no quiere decir que las dos entradas estén en conjunto puestas en cortocircuito, así que debemos tener mucho cuidado de no hacer una suposición de este tipo*. Más bien, las dos tensiones de entrada sólo se siguen entre sí: si tratáramos de cambiar la tensión en una patilla (terminal de salida), la otra flotará en torno al mismo valor. Por lo tanto, podemos escribir una ecuación de la LVK adicional:

$$-v_{ent} + R_1 i + 0 = 0$$

o

$$i = \frac{v_{ent}}{R_1} \qquad [2]$$

Al combinar la ecuación [2] con la [1], obtenemos una expresión de v_{sal} en términos de v_{ent}:

$$v_{sal} = -\frac{R_f}{R_1} v_{ent} \qquad [3]$$

Al sustituir $v_{ent} = 5$ sen $3t$ mV, $R_1 = 4.7$ kΩ y $R_f = 47$ kΩ.

$$v_{sal} = -50 \text{ sen } 3t \quad \text{mV}$$

Puesto que se indica que $R_f > R_1$, el circuito amplifica la señal de tensión de entrada v_{ent}. Si elegimos $R_f < R_1$, la señal más bien se atenuará. También podemos observar que la tensión de salida tiene el signo opuesto de la tensión de entrada,[1] de donde surge el nombre de "amplificador inversor". La salida se dibuja en la figura 6.4, junto con la forma de onda de entrada con fines comparativos.

En este punto, vale la pena mencionar que el amp op ideal parece violar la LCK. De manera específica, en el circuito anterior no fluye corriente hacia fuera de cualquier terminal de entrada, sino que algo de corriente ¡puede fluir a través de la patilla de salida!, lo cual implicaría que el amp op es de alguna manera capaz de crear electrones de la nada o de almacenarlos de modo indefinido (según sea la dirección del flujo de corriente). Resulta obvio que esto no es posible. El conflicto surge debido a que se trata al amp op de la misma manera que se hace con elementos pasivos como la resistencia. Sin embargo, en realidad el amp op no puede funcionar a menos que se conecte a

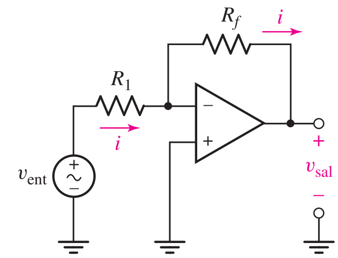


FIGURA 6.3 Un amp op usado para construir un circuito amplificador inversor. La corriente *i* fluye a tierra a través de la patilla de salida del amp op.

El hecho de que la propia terminal de entrada inversora se encuentre en cero volts en este tipo de configuración de circuito propicia lo que a menudo se conoce como una "tierra virtual". Ello no significa que la patilla (terminal) esté en realidad conectada a tierra, por lo que algunas veces resulta una fuente de confusión para los estudiantes. El amp op efectúa cualesquiera ajustes internos necesarios para evitar una diferencia de tensión entre las terminales de entrada, las cuales nunca están en corto al mismo tiempo.

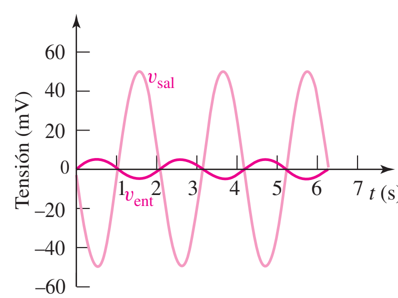
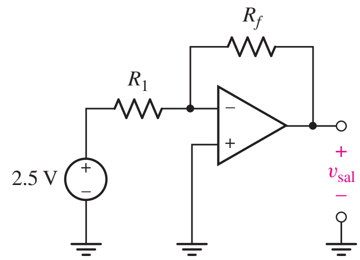


FIGURA 6.4 Formas de onda de entrada y de salida del circuito amplificador inversor.

[1] O, "*la salida está desfasada 180° con respecto a la entrada*", lo cual se oye más impresionante.



■ **FIGURA 6.5** Circuito amplificador inversor con una entrada de 2.5 V.

fuentes de potencia externas. A través de esas fuentes de potencia se dirige el flujo de corriente hacia la terminal de salida.

A pesar de que hemos demostrado que el circuito amplificador no inversor de la figura 6.3 puede amplificar una señal de ca (una onda senoidal en este caso que tenga una frecuencia de 3 rad/s y una amplitud de 5 mV), también funciona adecuadamente con entradas de cd. Consideramos este tipo de situaciones en la figura 6.5, donde los valores de R_1 y R_f se seleccionarán a fin de obtener la tensión de salida de -10 V.

Éste es el mismo circuito que se muestra en la figura 6.3, pero con una entrada de cd de 2.5 V. Debido a que no se ha efectuado ningún otro cambio, la expresión que presentamos en la ecuación [3] también es válida en este circuito. Para obtener la salida deseada, tratamos de encontrar una relación de R_f a R_1 de 10/2.5 o 4. Puesto que lo importante aquí es la relación, sólo es necesario escoger un valor adecuado para una resistencia, y el valor de la otra resistencia se fijará al mismo tiempo. Por ejemplo, pudimos haber seleccionado $R_1 = 400\ \Omega$ (por lo que $R_f = 400\ \Omega$), o aun $R_f = 8$ MΩ (por lo que $R_1 = 2$ MΩ). En la práctica, otras restricciones (como la corriente de polarización) pueden limitar las alternativas.

Por lo tanto, esta configuración del circuito trabaja como un tipo de amplificador de tensión (o ***atenuador***, si la relación de R_f a R_1 es menor que 1), pero tiene a veces el inconveniente de invertir el signo de la entrada. Sin embargo, existe una alternativa que se analiza tan fácil como la anterior, ésta es la del amplificador no inversor que se muestra en la figura 6.6. En el ejemplo siguiente analizamos dicho circuito.

EJEMPLO 6.1

Dibuje la forma de onda de salida del circuito amplificador no inversor de la figura 6.6*a*. Utilice $v_{ent} = 5$ sen $3t$ mV, $R_1 = 4.7$ kΩ y $R_f = 47$ kΩ.

▶ ***Identificar el objetivo del problema.***

Requerimos una expresión para v_{sal} que sólo dependa de las cantidades conocidas v_{ent}, R_1 y R_f.

▶ ***Recopilar la información conocida.***

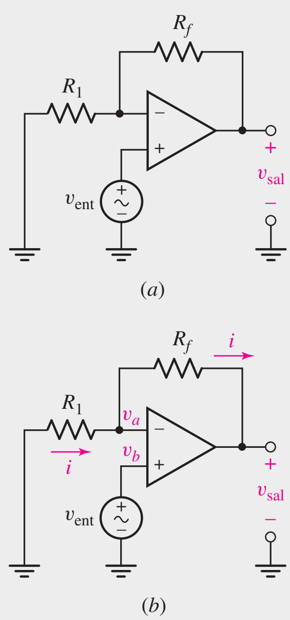
En razón de que se han especificado valores para las resistencias y la forma de onda de entrada, comenzamos denominando la corriente i y las dos tensiones de entrada como puede apreciarse en la figura 6.6*b*. Supondremos que el amp op es ideal.

▶ ***Decidir la técnica disponible que se ajusta mejor al problema.***

Aunque el análisis de malla es la técnica favorita de los estudiantes, resulta más práctico aplicar el análisis nodal en la mayoría de los circuitos de amp op, ya que no hay una forma directa para determinar la corriente que fluye por su salida.

▶ ***Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.***

Observar que se utiliza de manera implícita la regla 1 del amp op ideal al definir la misma corriente a través de ambas resistencias: ninguna corriente fluye hacia la terminal de entrada inversora. Cuando se emplea el análisis nodal para obtener la expresión de v_{sal} en términos de v_{ent}, tenemos que:



■ **FIGURA 6.6** (*a*) Amp op que se emplea para construir un circuito amplificador no inversor. (*b*) Circuito con la corriente definida a través de R_1 y R_f así como con ambas tensiones de entrada marcadas.

En el nodo a:

$$0 = \frac{v_a}{R_1} + \frac{v_a - v_{sal}}{R_f} \qquad [4]$$

En el nodo b:

$$v_b = v_{ent} \qquad [5]$$

Determinar si se requiere información adicional.

Nuestro objetivo consiste en obtener una sola expresión que relacione las tensiones de entrada y salida, aunque ni la ecuación [4] ni la [5] parecen hacerlo. Sin embargo, aún no hemos empleado la regla 2 del amp op ideal, pero veremos que en casi todo circuito de amp op *ambas* reglas necesitan aprovecharse a fin de obtener una expresión como la que se busca.

En consecuencia, podemos reconocer que $v_a = v_b = v_{ent}$, con lo cual la ecuación [4] se convierte en:

$$0 = \frac{v_{ent}}{R_1} + \frac{v_{ent} - v_{sal}}{R_f}$$

Intentar encontrar la solución.

Al reordenar la ecuación anterior, obtenemos una expresión de la tensión de salida en términos de la tensión de entrada v_{ent}:

$$v_{sal} = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) v_{ent} = 11\, v_{ent} = 55 \text{ sen } 3t \quad \text{mV}$$

Verificar la solución. ¿Es razonable o es esperada?

Para fines comparativos, la forma de onda de salida se dibuja en la figura 6.7, junto con la forma de onda de entrada. En contraste con la forma de onda de salida del circuito amplificador inversor, observamos que la entrada y la salida están en fase en el caso del amplificador no inversor. Este resultado no debe ser del todo inesperado: está implícito en el nombre "amplificador no inversor".

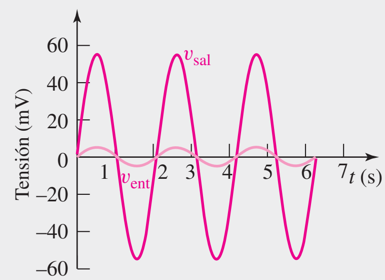


FIGURA 6.7 Formas de onda de entrada y salida del circuito amplificador no inversor.

PRÁCTICA

6.1 En el circuito de la figura 6.8, obtenga la expresión de v_{sal} en términos de v_{ent}.

Respuesta: $v_{sal} = v_{ent}$. El circuito se conoce como un "*seguidor de tensión*", puesto que la tensión de salida rastrea o "*sigue*" a la tensión de entrada.

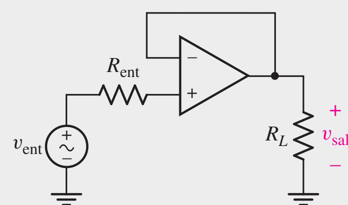


FIGURA 6.8

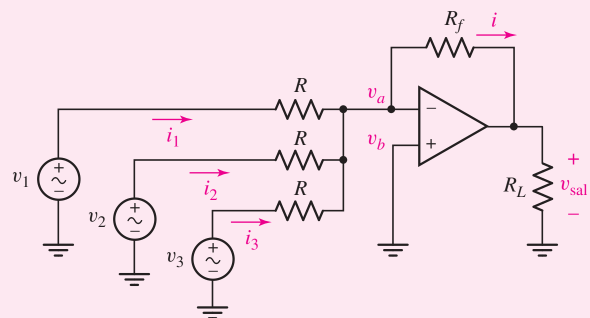
De la misma manera que el amplificador inversor, el no inversor trabaja con entradas de cd y de ca, pero tiene una ganancia de tensión de $v_{sal}/v_{ent} = 1 + (R_f/R_1)$. Por lo tanto, si fijamos el valor de $R_f = 9\ \Omega$ y $R_1 = 1\ \Omega$, obtenemos una salida v_{sal} 10 veces mayor que la tensión de entrada v_{ent}. En contraste con el amplificador inversor, la entrada y la salida del amplificador no inversor posee siempre el mismo signo y la tensión de salida no puede ser menor que la de entrada; la ganancia mínima es 1. El amplificador que seleccionemos dependerá de la aplicación que estemos considerando. En el caso especial del circuito seguidor de tensión que se muestra en la figura 6.8, el cual representa un amplificador no inversor donde el valor de R_1 es ∞ y el de R_f es

cero, la salida es idéntica a la entrada tanto en signo *como* en magnitud. Puede que ello parezca no tener sentido como un tipo general de circuito, pero debemos tener en mente que *el seguidor de tensión no toma corriente de la entrada* (en el caso ideal), por lo cual éste puede actuar como un ***dispositivo de almacenamiento*** entre la tensión v_{ent} y alguna carga resistiva R_L conectada a la salida del amp op.

Mencionamos con anterioridad que el nombre "amplificador operacional" se origina a partir de su uso en operaciones aritméticas en señales analógicas (es decir, no digitalizadas y en tiempo real). Como vemos en los dos circuitos siguientes, sus tareas incluyen tanto la suma como la resta de señales de tensión de entrada.

EJEMPLO 6.2

Obtenga la expresión de v_{sal} en términos de v_1, v_2 y v_3 del circuito de amp op de la figura 6.9, conocido también como *amplificador sumador*.



■ **FIGURA 6.9** Circuito básico de amplificador sumador con tres entradas.

Observemos primero que el circuito es similar al circuito del amplificador inversor de la figura 6.3. También aquí el objetivo es obtener una expresión para v_{sal} (que en este caso aparece a través de una resistencia de carga R_L) en términos de la entrada (en este caso, v_1, v_2 y v_3).

En razón de que no puede circular ninguna corriente en la terminal de entrada inversora, sabemos que:

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

Por lo tanto, expresamos la siguiente ecuación en el nodo marcado v_a:

$$0 = \frac{v_a - v_{\text{sal}}}{R_f} + \frac{v_a - v_1}{R} + \frac{v_a - v_2}{R} + \frac{v_a - v_3}{R}$$

La ecuación contiene tanto a v_{sal} como a las tensiones de entrada, pero desafortunadamente también incluye la tensión nodal v_a. Para eliminar esta cantidad desconocida de nuestra expresión, debemos escribir una ecuación adicional que relacione v_a con v_{sal}, las tensiones de entrada, R_f, y/o R. En este punto, tenemos que recordar que no hemos utilizado aún la regla 2 del amp op ideal, y que casi siempre requerimos ambas reglas para analizar un circuito de amp op. Por lo tanto, puesto que $v_a = v_b = 0$, escribimos lo siguiente:

$$0 = \frac{v_{\text{sal}}}{R_f} + \frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + \frac{v_3}{R}$$

Al reacomodar obtenemos la siguiente expresión de v_{sal}.

$$v_{sal} = -\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2 + v_3) \qquad [6]$$

En el caso especial en el que $v_2 = v_3 = 0$, podemos observar que el resultado concuerda con la ecuación [3], que se dedujo prácticamente para el mismo circuito.

Podemos observar varios aspectos interesantes acerca del resultado. Primero, si elegimos R_f de tal forma que sea igual a R, entonces la salida es el (negativo) de la suma de tres señales de entrada a: v_1, v_2 y v_3. Además, podemos seleccionar el cociente de R_f y R para multiplicar esta suma por una constante determinada. Así que, por ejemplo, si las tres tensiones representaran señales de tres escalas diferentes calibradas de tal forma que -1 V $= 1$ lb, podríamos determinar que fijar $R_f = R/2.205$ para obtener una señal de tensión que representara el peso combinado en kilogramos (con un porcentaje de exactitud de alrededor de 1% debido al factor de conversión).

Además, podemos observar que R_L no aparece en la expresión final. Siempre y cuando su valor no sea muy bajo, la operación del circuito no se verá afectada; hasta el momento, no hemos considerado un modelo lo suficientemente detallado de amp op que pueda predecir dicho evento. Esta resistencia representa el equivalente de Thévenin o cualquier elemento que se use para supervisar la salida del amplificador. Si el dispositivo de salida es un voltímetro simple, R_L representa la resistencia equivalente de Thévenin vista mirando hacia las terminales del voltímetro (por lo común 10 MΩ o más). O bien, el dispositivo de salida podría ser un altavoz (casi siempre de 8 Ω), en cuyo caso escuchamos la suma de las tres fuentes sonoras independientes; v_1, v_2 y v_3 podrían representar los micrófonos en este caso.

Una advertencia: con frecuencia resulta tentador suponer que la corriente denominada i en la figura 6.9 no sólo fluye por R_f, sino también a través de R_L. ¡No es cierto! Es muy posible que la corriente circule también por la terminal de salida del amp op, por lo que *las corrientes que circulan por las dos resistencias no son las mismas*. Por esta razón casi siempre evitamos escribir ecuaciones de la LCK en la patilla de salida de un amp op, lo que lleva a que resulte preferible el análisis nodal sobre el de malla cuando se trabaja con la mayoría de los circuitos de amp op.

Por comodidad, en la tabla 1 resumimos los circuitos de amp op más comunes.

PRÁCTICA

6.2 Obtenga la expresión de v_{sal} en términos de v_1 y v_2 para el circuito que se muestra en la figura 6.10, también conocido como ***amplificador de diferencia***.

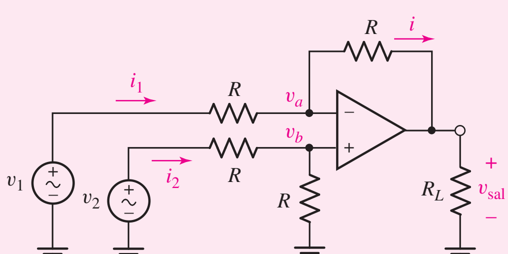
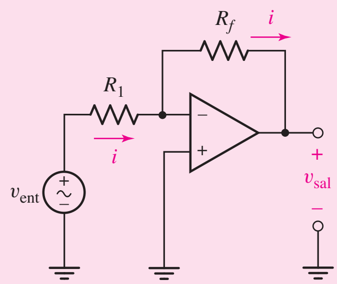
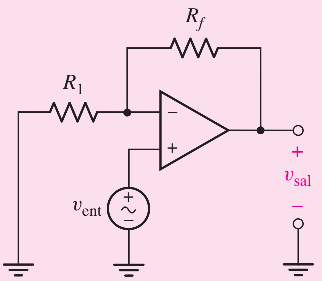
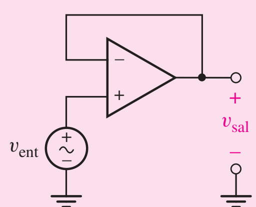
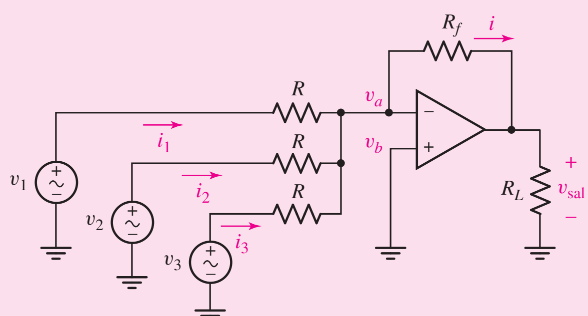
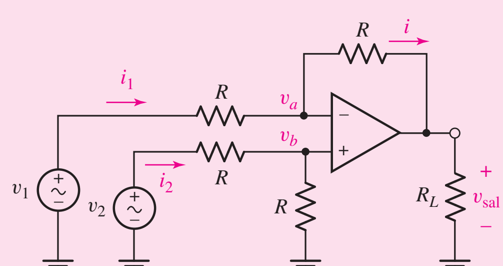


FIGURA 6.10

Respuesta: $v_{sal} = v_2 - v_1$. *Sugerencia*: emplee la división de tensión para obtener v_b.

TABLA 6.1 Resumen de los circuitos básicos de amp op

Nombre	Esquema del circuito	Relación entrada-salida
Amplificador inversor		$v_{sal} = -\frac{R_f}{R_1} v_{ent}$
Amplificador no inversor		$v_{sal} = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) v_{ent}$
Seguidor de tensión (también conocido como amplificador de ganancia unitaria)		$v_{sal} = v_{ent}$
Amplificador sumador		$v_{sal} = -\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2 + v_3)$
Amplificador de diferencia		$v_{sal} = v_2 - v_1$

APLICACIÓN PRÁCTICA

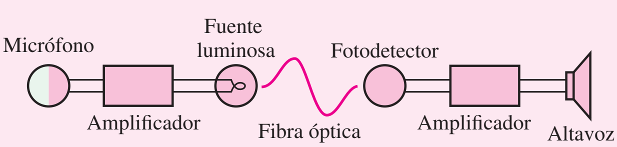
Intercomunicación de fibra óptica

Un sistema de intercomunicación de punto a punto se construye mediante varias técnicas diferentes, según el entorno de aplicación. Los sistemas de radiofrecuencia (RF) de baja potencia funcionan bastante bien y su costo es justo, pero están sujetos a la interferencia de otras señales RF y también a menudo están bajo el asedio de escuchas furtivos. El uso de un alambre simple para conectar, en su lugar, los dos sistemas de intercomunicación puede eliminar en gran parte la interferencia RF, así como incrementar la privacidad. Sin embargo, los alambres sufren de corrosión y cortocircuitos cuando se desgasta el aislamiento plástico, y su peso resulta una complicación cuando se emplean en aeronaves y similares (figura 6.11).



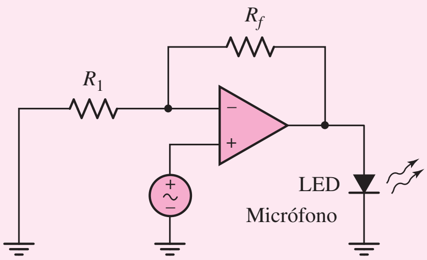
■ **FIGURA 6.11** El entorno donde se instalará la aplicación a menudo impone restricciones de diseño. (© *Michael Melford/Riser/Getty Images*.)

Una alternativa consiste en convertir la señal eléctrica del micrófono en una señal óptica, que se transmite a través de una fibra óptica delgada (~50 μm de diámetro). Luego, la señal óptica se reconvierte en una señal eléctrica, la cual se amplifica y transfiere a un altavoz. En la figura 6.12 se presenta un esquema de un sistema de este tipo; se necesitan dos sistemas de éstos para realizar la comunicación de dos vías.



■ **FIGURA 6.12** Esquema con la mitad de un intercomunicador de fibra óptica simple.

Consideremos el diseño de la transmisión y los circuitos de recepción por separado, puesto que ambos circuitos son en realidad eléctricamente independientes. La figura



■ **FIGURA 6.13** Circuito que se utiliza para convertir la señal eléctrica del micrófono en una señal óptica.

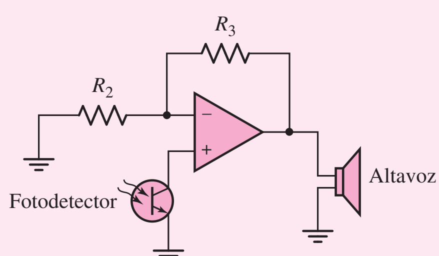
6.13 muestra el circuito de generación de señales, que incluye un micrófono, un diodo emisor de luz (LED) y un circuito de amp op no inversor para accionar al LED; no se muestran en la figura las conexiones para la alimentación que se necesita para el amp op. La salida de luz del LED es casi proporcional a su corriente, aunque es menor para valores de corriente muy pequeños y muy grandes.

Sabemos que la ganancia del amplificador está dada por:

$$\frac{v_{\text{sal}}}{v_{\text{ent}}} = 1 + \frac{R_f}{R_1}$$

que es independiente de la resistencia equivalente del LED. Con la finalidad de seleccionar valores de R_f y R_1, necesitamos saber la tensión de entrada del micrófono y la tensión de salida necesaria para activar el LED. Una medición simple indica que la salida de tensión máxima del micrófono es igual a 40 mV cuando alguien habla normalmente. El fabricante del LED recomienda operarlo a aproximadamente 1.6 V, por lo que se diseña para una ganancia de $1.6/0.04 = 40$. Seleccionando de manera arbitraria $R_1 = 1$ kΩ lleva a un valor de 39 kΩ para R_f.

El circuito de la figura 6.14 es la parte de recepción de nuestro sistema de intercomunicación de una vía. Él convierte la señal óptica proveniente de la fibra en una señal eléctrica, amplificándola de tal forma que un sonido audible se emita por el altavoz.



■ **FIGURA 6.14** Circuito detector que se emplea para convertir la señal óptica en señal de audio.

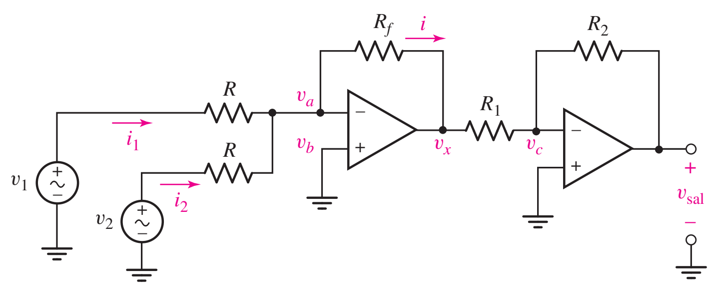
(*continúa*)

Después de acoplar la salida del LED del circuito de transmisión con la fibra óptica, se mide una señal de casi 10 mV máximos en el fotodetector. El altavoz se especifica para un máximo de 100 mW y tiene una resistencia equivalente de 8 Ω, lo que es igual a una tensión máxima de 894 mV, por lo que debemos seleccionar los valores de R_2 y R_3 para obtener una ganancia de $894/10 = 89.4$. Si se selecciona $R_2 = 10$ KΩ, observamos que un valor de 884 kΩ completa el diseño.

El circuito real funcionará en la práctica, aunque la salida sonará un poco distorsionada, puesto que el LED no es lineal. Los diseños mejorados son tema de textos más avanzados.

6.3 ETAPAS EN CASCADA

Si bien el amp op es un dispositivo en extremo flexible, hay numerosas aplicaciones en las que un amp op sencillo no basta. En tales casos, a menudo se cumple con los requisitos de la aplicación colocando en cascada varios amp op individuales al mismo tiempo en el mismo circuito. Un ejemplo de lo anterior se muestra en la figura 6.15, que consiste en el circuito amplificador sumador de la figura 6.9 con sólo dos fuentes de entrada, y la salida alimentada en un amplificador inversor simple. El resultado es un circuito amp op de dos etapas.



■ **FIGURA 6.15** Circuito amp op de dos etapas compuesto por un amplificador sumador en cascada con un circuito de amplificador inversor.

Ya analizamos por separado cada uno de estos circuitos de amp op. Con base en nuestra experiencia previa, si se desconectaran ambos circuitos amp op, tendríamos:

$$v_x = -\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2) \qquad [7]$$

y

$$v_{\text{sal}} = -\frac{R_2}{R_1}v_x \qquad [8]$$

En realidad, puesto que los dos circuitos se encuentran conectados en un solo punto y la tensión v_x no depende de la conexión, podemos combinar las ecuaciones [7] y [8] y obtener:

$$v_{\text{sal}} = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2) \qquad [9]$$

la cual describe las características de entrada-salida del circuito que se muestra en la figura 6.15. Sin embargo, no siempre podremos simplificar dicho circuito a etapas que sean familiares, por lo que vale la pena echar un vistazo a la forma en que el circuito de dos etapas de la figura 6.15 puede analizarse como un todo.

Cuando analizamos los circuitos en cascada, algunas veces resulta útil empezar con la última etapa y trabajar desde atrás hacia la etapa de entrada. Con referencia a la regla 1 del amp op ideal, la misma corriente fluye por R_1 y R_2. La forma de la ecuación nodal apropiada en el nodo marcado v_c es:

$$0 = \frac{v_c - v_x}{R_1} + \frac{v_c - v_{\text{sal}}}{R_2} \qquad [10]$$

Al aplicar la regla 2 del amp op ideal, podemos establecer $v_c = 0$ en la ecuación [10], lo que origina:

$$0 = \frac{v_x}{R_1} + \frac{v_{\text{sal}}}{R_2} \qquad [11]$$

Debido a que el objetivo es la expresión de v_{sal} en términos de v_1 y v_2, procedemos hacia el primer amp op para obtener una expresión relativa de v_x en términos de las dos cantidades de entrada.

Al aplicar la regla 1 del amp op ideal en la entrada inversora del primer amp op, tenemos:

$$0 = \frac{v_a - v_x}{R_f} + \frac{v_a - v_1}{R} + \frac{v_a - v_2}{R} \qquad [12]$$

La regla 2 del amp op ideal nos permite sustituir v_a en la ecuación [12] por cero, ya que $v_a = v_b = 0$. Por lo tanto, dicha ecuación se convierte en:

$$0 = \frac{v_x}{R_f} + \frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} \qquad [13]$$

Tenemos ahora una ecuación para v_{sal} en términos de v_x (ecuación [11]), y una ecuación para v_x en términos de v_1 y v_2 (ecuación [13]). Ambas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones [7] y [8], respectivamente, lo que quiere decir que la puesta en cascada de dos circuitos independientes, como el de la figura 6.15, no afecta la relación entrada-salida de cualquier etapa. Al combinar las ecuaciones [11] y [13], observamos que la relación entrada-salida del circuito amp op en cascada es:

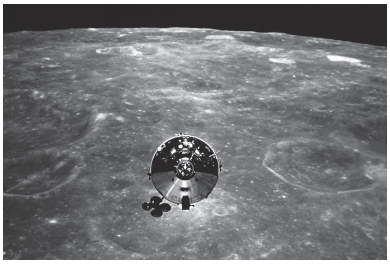
$$v_{\text{sal}} = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2) \qquad [14]$$

que es idéntica a la ecuación [9].

Por consiguiente, el circuito en cascada actúa como un amplificador sumador, pero sin una inversión de fase entre la entrada y la salida. Al elegir con cuidado los valores de la resistencia, podemos ya sea amplificar o atenuar la suma de las dos tensiones de entrada. Si elegimos $R_2 = R_1$ y $R_f = R$, obtenemos también un circuito de amplificador donde $v_{\text{sal}} = v_1 + v_2$, si se desea.

EJEMPLO 6.3

Un sistema de combustible propelente gaseoso de múltiples tanques se instala en un pequeño vehículo orbital lunar. La cantidad de combustible de cualquiera de los tanques se supervisa a través de la medición de la presión en el tanque (en psia).[2] Los detalles técnicos sobre la capacidad del tanque así como de la presión y rango de tensión del sensor se proporcionan en la tabla 6.2. Diseñe un circuito que proporcione una señal de tensión de cd positiva que sea proporcional a la cantidad de combustible total que quede, de modo que 1 V = 100%.



© Corbis

TABLA 6.2 Información técnica del sistema de supervisión de la presión de tanques

Capacidad del tanque 1	10 000 psia
Capacidad del tanque 2	10 000 psia
Capacidad del tanque 3	2 000 psia
Intervalo de presión del sensor	0 a 12 500 psia
Tensión de salida del sensor	0 a 5 Vdc

A partir de la tabla 6.2 podemos observar que el sistema cuenta con tres tanques de gas independientes que requieren tres sensores diferentes. Cada sensor está diseñado para 12 500 psia, con una salida correspondiente de 5 V. Por ende, cuando el tanque 1 esté lleno, su sensor proporcionará una señal de tensión de $5 \times (10\,000/12\,500) = 4$ V; lo mismo es válido para el sensor de supervisión del tanque 2. Sin embargo, el sensor conectado al tanque 3 sólo proporcionará una señal de tensión máxima de $5 \times (2\,000/12\,500) = 800$ mV.

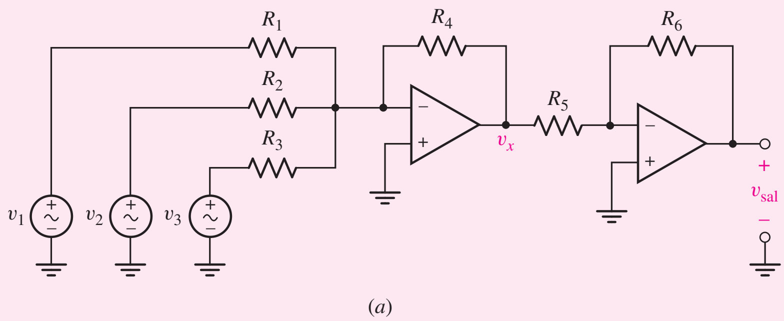
El circuito de la figura 6.16*a* muestra una posible solución, que emplea una etapa de amplificación de suma con v_1, v_2 y v_3 que representan las salidas de los sensores, seguida de un amplificador inversor para ajustar el signo y la magnitud de la tensión. Dado que no se nos pide suministrar la resistencia de salida del sensor, empleamos un dispositivo de almacenamiento para cada uno de ellos en la forma que se muestra en la figura 6.16*b*; el resultado es (en el caso ideal) que no existe flujo de corriente desde el sensor.

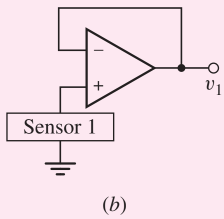
Para mantener el diseño lo más simple posible, comenzamos fijando el valor de las resistencias R_1, R_2, R_3 y R_4 a 1 kΩ; cualquier valor funcionará siempre y cuando las cuatro resistencias sean iguales. Por lo tanto, la salida de la etapa sumadora es:

$$v_x = -(v_1 + v_2 + v_3)$$

La etapa final del circuito invierte esta tensión y la transforma de tal manera que la tensión de salida es de 1 V cuando los tres tanques se encuentren llenos. Esta condición se presenta cuando $v_x = -(4 + 4 + 0.8) = -8.8$ V. Así, la etapa final necesita una relación de tensiones de $R_6/R_5 = 1/8.8$. Si se selecciona de manera arbitraria $R_6 = 1$ kΩ, deducimos que un valor de 8.8 kΩ para R_5 satisface el diseño.

[2] Libras por pulgada cuadrada, absoluta. Ésta es una medición de presión diferencial relativa a una referencia que es el vacío.



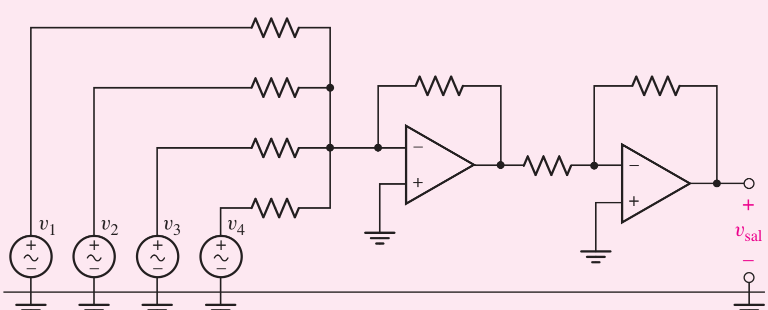


■ **FIGURA 6.16** (*a*) Circuito propuesto que ofrece una lectura del combustible restante total. (*b*) Diseño de un dispositivo de almacenamiento a fin de evitar errores asociados con la resistencia interna del sensor y las limitantes de su capacidad para proporcionar corriente. Uno de estos dispositivos de almacenamiento se utiliza en cada sensor, ofreciendo las salidas v_1, v_2 y v_3 a la etapa amplificadora de suma.

PRÁCTICA

6.3 Un puente con gran importancia histórica muestra signos de deterioro. Se ha decidido que, hasta que se pueda renovar, sólo podrán cruzarlo los vehículos que pesen menos de 1 600 kg. Para supervisar lo anterior, se diseña un sistema de pesado con cuatro capas de colchón. Hay cuatro señales de tensión independientes, una proveniente de cada colchón, donde1 mV = 1 kg. Diseñe un circuito que proporcione una señal de tensión positiva que se desplegará en un MD (multímetro digital) y que represente el peso total del vehículo, de tal forma que 1 mV = 1 kg. Se puede suponer que no es necesario almacenar las señales de tensión de los colchones.

Respuesta: vea la figura 6.17.



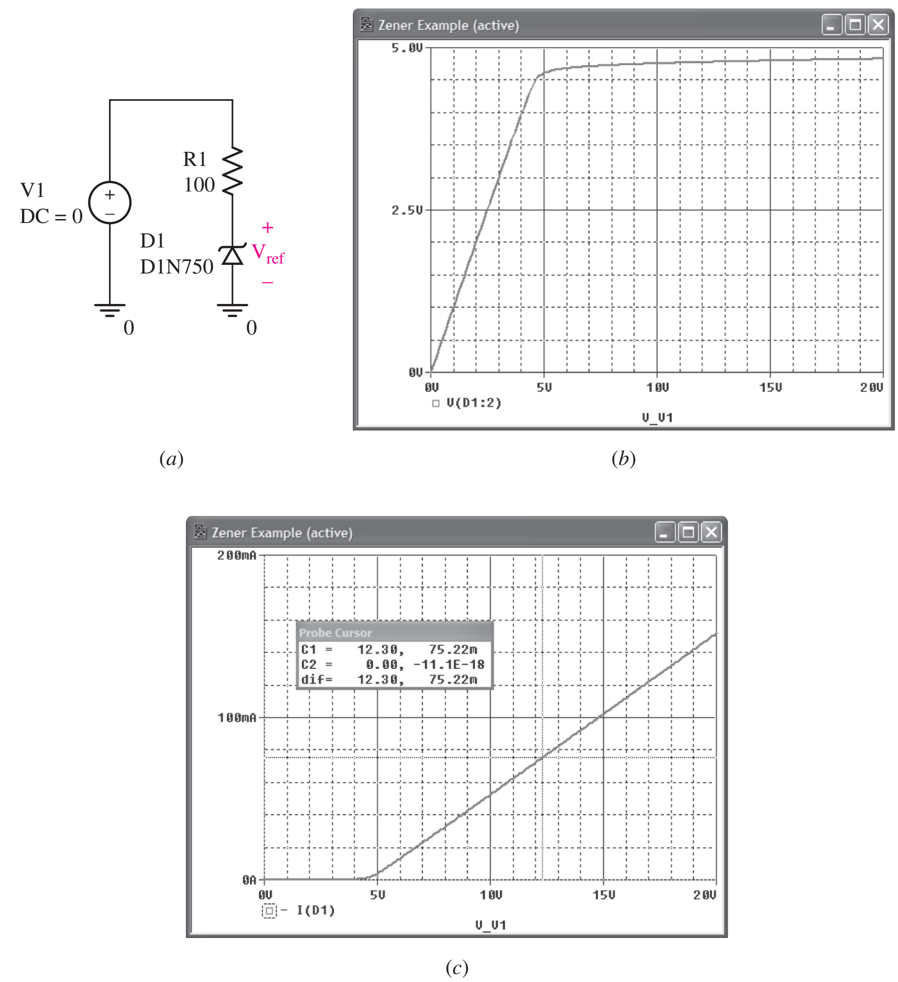
■ **FIGURA 6.17** Una posible solución al problema de práctica 6.3: todas las resistencias son de 10 kΩ cada una (aunque cualquier valor estará bien siempre y cuando sean iguales). Las tensiones de entrada v_1, v_2, v_3 y v_4 representan las señales de tensión de los sensores de los colchones de las cuatro ruedas y v_{sal} es la señal de salida que se conectará a la terminal positiva de entrada del MD. Las cinco tensiones están referidas a tierra y la terminal común del MD también deberá conectarse a tierra.

6.4 CIRCUITOS DE FUENTES DE TENSIÓN Y DE CORRIENTE

En este capítulo y en capítulos anteriores hemos utilizado a menudo fuentes de corriente y de tensión ideales, las cuales suponemos que proporcionan el mismo valor de corriente o de tensión, respectivamente, sin importar cómo se encuentren conectadas en un circuito. Nuestro supuesto de esta independencia tiene sus límites, por supuesto, como se mencionó en la sección 5.2 cuando estudiamos las fuentes prácticas que incluían una resistencia inherente o "integrada". El efecto de dicha resistencia era una reducción de la salida de tensión de una fuente de tensión a medida que se demandaba más corriente o una disminución de la corriente de salida a medida que se requería de más tensión de una fuente de corriente. Como se analizó en esta sección, es posible diseñar circuitos con características más confiables por medio del uso de amp op.

Una fuente de tensión confiable

Una de las formas más comunes para proporcionar una tensión de referencia estable y confiable es por medio del uso de un dispositivo no lineal conocido con el nombre de ***diodo Zener***. Su símbolo es un triángulo con una línea en forma de Z en la parte superior, como se muestra en el diodo 1N750 del circuito de la figura 6.18*a*. Los diodos se



■ **FIGURA 6.18** (*a*) Esquema en PSpice de un circuito simple de tensión de referencia que se basa en el diodo Zener 1N750. (*b*) Simulación del circuito que muestra la tensión del diodo V_{ref} en función de la tensión de control V1. (*c*) Simulación de la corriente de un diodo, donde se muestra que su valor máximo se excede cuando el valor de V1 es más grande que 12.3 V. (Observe que el cálculo de este valor suponiendo un diodo Zener *ideal* da 12.2 V.)

caracterizan por: una relación corriente-tensión fuertemente asimétrica. Para pequeñas tensiones, conducen una corriente esencialmente de cero, o bien, experimentan una corriente que aumenta exponencialmente, dependiendo de la polaridad de la tensión. De esta manera, se distinguen de la simple resistencia, en el que la magnitud de la corriente es la misma para cualquiera de las dos polaridades de la tensión y, por lo tanto, la relación corriente-tensión de resistencia es simétrica. En consecuencia, las terminales del diodo no son intercambiables y tienen nombres específicos: el ***ánodo*** (la parte plana del triángulo) y el ***cátodo*** (la punta del triángulo).

Un diodo *Zener* es un tipo especial de diodo que se diseñó para utilizarse con una tensión positiva en el cátodo con respecto al ánodo; cuando se conecta de esta forma, se dice que el diodo está *polarizado en inversa*. Con bajas tensiones, el diodo actúa como una resistencia con un pequeño incremento lineal en el flujo de corriente a medida que aumenta la tensión. Sin embargo, una vez que se alcanza una cierta tensión (V_{BR}) —conocida como *tensión de ruptura inversa* o ***tensión Zener*** del diodo—, la tensión no aumenta en forma significativa, pero, en esencia, cualquier corriente puede circular hasta el valor máximo del diodo (75 mA en el caso del 1N750, cuya tensión Zener es de 4.7 V).

Consideremos el resultado de la simulación de la figura 6.18*b*, el cual muestra la tensión V_{ref} en el diodo a medida que la fuente de tensión V1 se barre desde 0 hasta 20 V. Siempre y cuando V1 se mantenga arriba de 5 V, *la tensión en el diodo será constante*. Por ende, podríamos sustituir V1 por una batería de 9 V, sin que importen los cambios en nuestra tensión de referencia ya que la de la batería comenzará a disminuir a medida que se descargue. La función de R1 en este circuito es simplemente proporcionar la caída de tensión necesaria entre la batería y el diodo; su valor debe seleccionarse para asegurar que el diodo se encuentra funcionando a su tensión Zener pero por debajo de su corriente máxima de diseño. Por ejemplo, la figura 6.18*c* muestra que el valor de 75 mA es excesivo en el circuito si la tensión V1 de la fuente es mucho mayor que 12 V. Por lo tanto, el valor de la resistencia R1 debe diseñarse para que corresponda con la tensión de fuente disponible, como lo analizaremos en el ejemplo 6.4.

EJEMPLO 6.4

Diseñe un circuito con base en un diodo Zener 1N750 que funcione con una sola batería de 9 V y proporcione una tensión de referencia de 4.7 V.

El diodo 1N750 tiene un valor de corriente máxima de 75 mA y una tensión Zener de 4.7 V. La tensión de una batería de 9 V puede variar ligeramente en función de su estado de carga, valor que despreciaremos en este diseño.

Un circuito simple como el que se muestra en la figura 6.19*a* es apropiado para el propósito de este ejemplo; el único problema es determinar el valor adecuado del resistencia R_{ref}.

Si en el diodo se cae una tensión de 4.7 V, entonces $9 - 4.7 = 4.3$ V deberán caerse en R_{ref}. Por ende,

$$R_{ref} = \frac{9 - V_{ref}}{I_{ref}} = \frac{4.3}{I_{ref}}$$

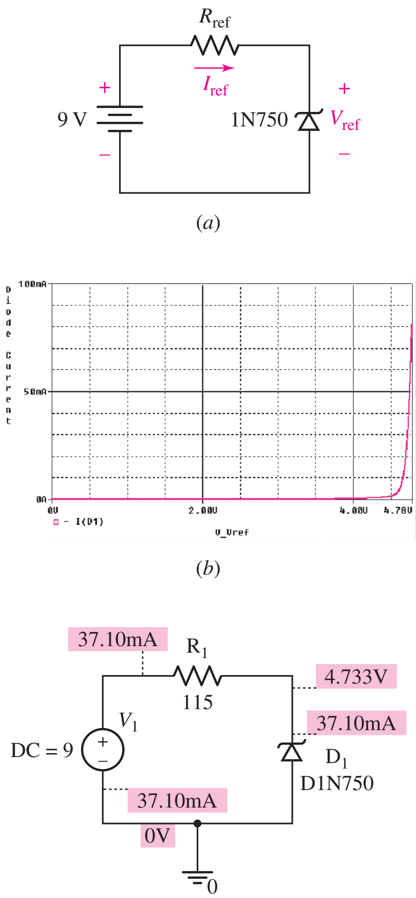
Determinamos el valor de R_{ref} especificando un valor de corriente. Sabemos que no se permite que el valor de I_{ref} exceda de 75 mA en este diodo y que corrientes más grandes descargarán la batería más rápidamente. Sin embargo, como se observa en la figura 6.19*b*, no podemos seleccionar simplemente I_{ref} de manera

(*continúa*)

arbitraria; valores de corriente muy bajos no permitirán que el diodo funcione en la región de ruptura del diodo Zener. En ausencia de una ecuación detallada que muestre la relación tensión-corriente del diodo (la cual es claramente no lineal), como regla general, diseñamos para 50% de la corriente máxima. Por lo tanto,

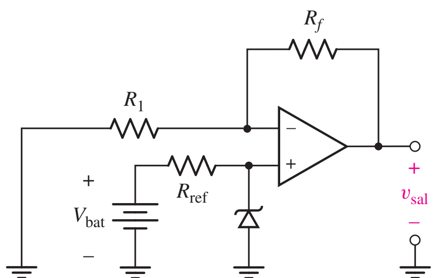
$$R_{\text{ref}} = \frac{4.3}{0.0375} = 115\ \Omega$$

Se pueden obtener algunos “ajustes” llevando a cabo una simulación del circuito final con PSpice, aunque en la figura 6.19*c* observamos que en la primera corrida se logra un valor razonablemente cercano (dentro de 1%) al valor al que se intenta llegar.



■ **FIGURA 6.19** (*a*) Circuito de referencia de tensión basado en el diodo Zener 1N750. (*b*) Relación *I-V* del diodo. (*c*) Simulación PSpice del diseño final.

El circuito básico para referencia de tensión con diodo Zener de la figura 6.18*a* funciona muy bien en muchas situaciones, pero limitamos de alguna manera el valor de la tensión dependiendo de qué diodos Zener se encuentren disponibles. Asimismo, a menudo observamos que el circuito que se muestra no es el más adecuado para aplicaciones que requieren más de unos cuantos miliamperios de corriente. En dichos casos, podemos utilizar el circuito de referencia Zener en conjunto con una simple etapa de amplificación, como se muestra en la figura 6.20. El resultado es una tensión estable que puede controlarse ajustando el valor de R_1 o R_f, sin tener que cambiar a un diodo Zener diferente.



■ **FIGURA 6.20** Fuente de tensión basada en amp op diseñada con una referencia de tensión Zener.

PRÁCTICA

6.4 Diseñe un circuito que proporcione una tensión de referencia de 6 V utilizando un diodo Zener 1N750 y un amplificador no inversor.

Respuesta: utilizando la topología de circuito que se muestra en la figura 6.20, seleccione $V_{\text{bat}} = 9$ V, $R_{\text{ref}} = 115\ \Omega$, $R_1 = 1$ kΩ, y $R_f = 268\ \Omega$.

Una fuente de corriente confiable

Considere el circuito que se muestra en la figura 6.21*a*, donde V_{ref} lo proporciona una fuente de tensión regulada como la que se muestra en la figura 6.19*a*. El lector deberá reconocer este circuito como una simple configuración de amplificador inversor, suponiendo que bloqueamos la patilla de salida del amp op. Sin embargo, también podemos utilizar este circuito como fuente de corriente, donde R_L representa una carga resistiva.

La tensión de salida V_{ref} aparece en la resistencia de referencia R_{ref}, puesto que la entrada no inversora del amp op está conectada a tierra. Como no circula corriente a

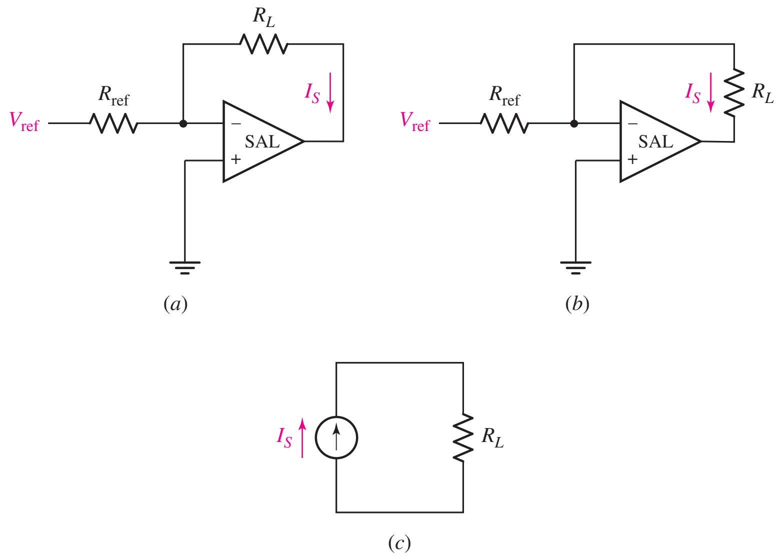


FIGURA 6.21 (*a*) Fuente de corriente basada en amp op, controlada por la tensión de referencia V_{ref}. (*b*) Circuito redibujado para resaltar la carga. (*c*) Modelo del circuito. La resistencia R_L representa el equivalente de Norton de un circuito con una carga pasiva desconocida.

través de la entrada inversora, la corriente que circula a través de la resistencia de carga R_L es, simplemente,

$$I_s = \frac{V_{ref}}{R_{ref}}$$

En otras palabras, la corriente suministrada a R_L no depende de su resistencia, el atributo principal de una fuente ideal de corriente. También vale la pena mencionar que no estamos bloqueando la tensión de salida del amp op como una cantidad de interés, sino que podemos ver la resistencia de carga R_L como el equivalente de Norton (o de Thévenin) de algún circuito con una carga pasiva desconocida, que recibe potencia del circuito amp op. Al redibujar el circuito ligeramente como se muestra en la figura 6.21*b*, observamos que tiene mucho en común con el circuito de la figura 6.21*c*. En otras palabras, podemos utilizar este circuito amp op como una fuente de corriente independiente con características esencialmente ideales, hasta alcanzar la corriente de salida máxima del amp op que se seleccionó.

EJEMPLO 6.5

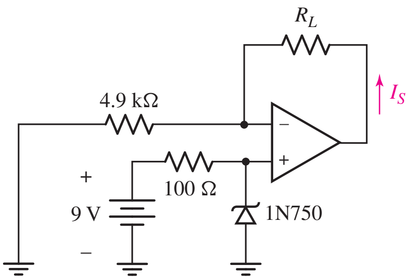
Diseñe una fuente de corriente que entregue 1 mA a una carga resistiva arbitraria.

Con base en nuestro diseño de los circuitos de las figuras 6.20 y 6.21*a*, sabemos que la corriente a través de la carga R_L está dada por:

$$I_s = \frac{V_{ref}}{R_{ref}}$$

donde deben seleccionarse los valores de V_{ref} y R_{ref}, y también diseñarse un circuito que proporcione V_{ref}. Si utilizamos el diodo Zener 1N750 en serie con una batería

(*continúa*)



■ **FIGURA 6.22** Posible diseño de la fuente de corriente que se desea. Observe el cambio en la dirección de la corriente en relación con la figura 6.21*b*.

de 9 V y una resistencia de 100 Ω sabemos a partir de la figura 6.18*b*, habrá una tensión de 4.9 V en el diodo. Por ende, $V_{\text{ref}} = 4.9$ V, dictando un valor de $4.9/10^{-3} = 4.9$ kΩ para R_{ref}. En la figura 6.22 se muestra el circuito completo.

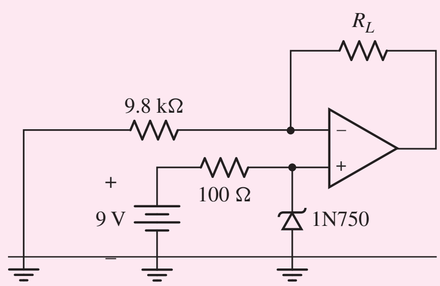
Observe que si hubieramos supuesto una tensión del diodo de 4.7 V, el error en la corriente de nuestro diseño hubiera sido de sólo un pequeño porcentaje, el cual bien podría haber estado dentro del intervalo de porcentaje de tolerancia típico de 5 a 10% de los valores de resistencia que esperamos.

El único problema que queda es si 1 mA puede proporcionarse para cualquier valor de R_L. Para el caso de $R_L = 0$, la salida del amp op será de 4.9 V, el cual es razonable. Sin embargo, a medida que se incrementa la resistencia de carga, la tensión de salida del amp op aumenta. Tarde o temprano tendremos que alcanzar algún límite, como se estudia en la sección 6.5.

PRÁCTICA

6.5 Diseñe una fuente de corriente capaz de proporcionar 500 μA a una carga resistiva.

Respuesta: vea la figura 6.23 donde se muestra una posible solución.

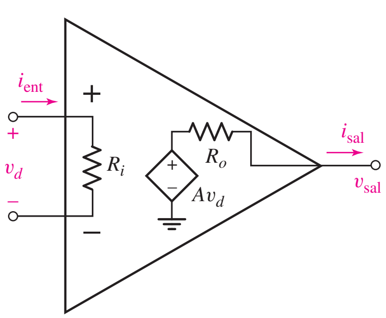


■ **FIGURA 6.23** Posible solución al problema de práctica 6.5.

6.5 CONSIDERACIONES PRÁCTICAS

Un modelo más detallado del amp op

Reducido a sus aspectos esenciales, el amp op se considera como una fuente de tensión dependiente controlada por tensión. La fuente de tensión dependiente proporciona la salida del amp op, y la tensión de la cual depende se aplica a las terminales de entrada. Un esquema de un modelo razonable de un amp op práctico se muestra en la figura 6.24, donde se incluye una fuente de tensión dependiente con ganancia de tensión A, una resistencia de salida R_o y una resistencia de entrada R_i. La tabla 6.3 proporciona valores usuales de tales parámetros respecto de varios tipos de amp op disponibles comercialmente.



■ **FIGURA 6.24** Modelo más detallado del amp op.

El parámetro A se conoce como la ***ganancia de tensión en lazo abierto*** del amp op, y por lo común se ubica en el intervalo de 10^5 a 10^6. Podemos observar que todos los amp op que se presentan en la tabla 6.3 tienen una ganancia de tensión en lazo abierto muy alta, en especial si se la compara con la ganancia de tensión de 11 que caracterizó al circuito amplificador no inversor del ejemplo 6.1. Resulta importante recordar la distinción entre ganancia de tensión en lazo abierto del amp op mismo y la ***ganancia de tensión en lazo cerrado*** que caracteriza a un circuito de amp op particular. En este caso, el "lazo" se refiere a una trayectoria *externa* entre la patilla (terminal) de salida

TABLA 6.3 Valores de parámetros característicos de varios amp op diferentes

Número de parte	μA741	LM324	LF411	AD549K	OPA690
Descripción	Uso general	Quad (cuatro dispositivos de baja potencia)	Entrada JFET de bajo arrastre, compensación baja	Corriente de polarización de entrada ultrabaja	amp op de frecuencia de video de banda ancha
Ganancia en lazo abierto *A*	2×10^5 V/V	10^5 V/V	2×10^5 V/V	10^6 V/V	2 800 V/V
Resistencia de entrada	2 MΩ	*	1 TΩ	10 TΩ	190 kΩ
Resistencia de salida	75 Ω	*	~1 Ω	~15 Ω	*
Corriente de polarización de entrada	80 nA	45 nA	50 pA	75 fA	3 μA
Tensión de compensación de entrada	1.0 mV	2.0 mV	0.8 mV	0.150 mV	±1.0 mV
Razón de rechazo en modo común (CMRR)	90 dB	85 dB	100 dB	100 dB	65 dB
Velocidad de término	0.5 V/μs	*	15 V/μs	3 V/μs	1 800 V/μs
Modelo PSpice	✓	✓	✓		

* No proporcionado por el fabricante.
✓ Indica que un modelo PSpice se incluye en Orcad Capture CIS Lite Edition16.3.

y la patilla (terminal) de entrada inversora; puede ser un alambre, una resistencia u otro tipo de elemento, dependiendo de la aplicación.

El μA741 es un amp op muy común, producido originalmente por Fairchild Corporation en 1968. Se caracteriza por una ganancia de tensión en lazo abierto de 200 000, una resistencia de entrada de 2 MΩ y una de salida de 75 Ω. Para evaluar en qué medida se aproxima el modelo del amp op ideal al comportamiento de este dispositivo particular, volvamos a revisar el circuito amplificador inversor de la figura 6.3.

EJEMPLO 6.6

Utilice los valores apropiados del amp op μA741 del modelo de la figura 6.24 y analice nuevamente el circuito amplificador inversor de la figura 6.3.

Comenzamos sustituyendo el símbolo del amp op ideal de la figura 6.3 por el modelo detallado, lo que da lugar al circuito de la figura 6.25.

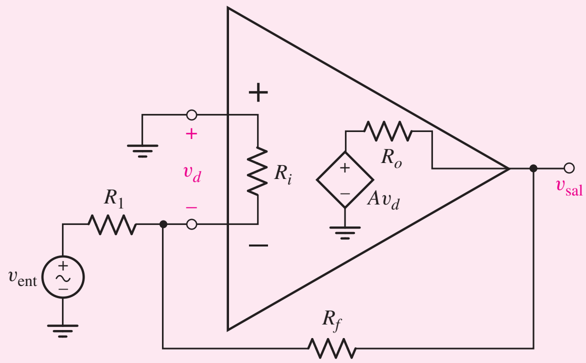
Observe que ya no podemos recurrir a las reglas del amp op ideal, puesto que no estamos utilizando el modelo de amp op ideal. Por lo tanto, podemos escribir dos ecuaciones nodales:

$$0 = \frac{-v_d - v_{\text{ent}}}{R_1} + \frac{-v_d - v_{\text{sal}}}{R_f} + \frac{-v_d}{R_i}$$

$$0 = \frac{v_{\text{sal}} + v_d}{R_f} + \frac{v_{\text{sal}} - Av_d}{R_o}$$

Al efectuar operaciones algebraicas directas pero largas, eliminamos v_d y combinamos las ecuaciones para obtener la siguiente expresión correspondiente a v_{sal} en términos de v_{ent}:

(*continúa*)



■ **FIGURA 6.25** Circuito de amplificador inversor dibujado con el modelo de amp op detallado.

$$v_{sal} = \left[\frac{R_o + R_f}{R_o - AR_f}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_i}\right) - \frac{1}{R_f}\right]^{-1} \frac{v_{ent}}{R_1} \qquad [15]$$

Al sustituir $v_{ent} = 5$ sen $3t$ mV, $R_1 = 4.7$ kΩ, $R_f = 47$ kΩ, $R_o = 75$ Ω, $R_i = 2$ MΩ y $A = 2 \times 10^5$, obtenemos:

$$v_{sal} = -9.999448 v_{ent} = -49.99724 \text{ sen } 3t \quad \text{mV}$$

Luego de comparar ésta con la expresión que se encontró suponiendo un amp op ideal ($v_{sal} = -10 v_{ent} = -50$ sen $3t$ mV), observamos que éste resulta en realidad un modelo razonablemente preciso. Además, el supuesto de un amp op ideal disminuye de manera considerable el nivel de álgebra requerido para efectuar el análisis de circuito. Observe que si se deja que $A \rightarrow \infty$, $R_o \rightarrow 0$ y $R_i \rightarrow \infty$, la ecuación [15] se reduce a:

$$v_{sal} = -\frac{R_f}{R_1} v_{ent}$$

que es la ecuación que obtuvimos antes del amplificador inversor cuando se supuso un amp op ideal.

PRÁCTICA

6.6 Suponiendo una ganancia finita (A) en lazo abierto, una resistencia de entrada finita (R_i) y una resistencia de salida cero (R_o), obtenga una expresión de v_{sal} en términos de v_{ent} del circuito de amp op de la figura 6.3.

Respuesta: $v_{sal}/v_{ent} = -AR_fR_i/[(1 + A)R_1R_i + R_1R_f + R_fR_i]$.

Deducción de las reglas del amp op ideal

Hemos visto que el amp op ideal es un modelo muy exacto del comportamiento de dispositivos prácticos. Sin embargo, si utilizamos el modelo más detallado que incluye una ganancia finita en lazo abierto, una resistencia de entrada finita y una resistencia de salida distinta de cero, en realidad se obtienen de manera directa las dos reglas de amp op ideal.

Con referencia a la figura 6.24, podemos observar que la tensión de salida del circuito abierto de un amp op práctico se expresa como:

$$v_{sal} = Av_d \qquad [16]$$

Al reordenar la ecuación, podemos ver que v_d, denominada algunas veces como ***tensión de entrada diferencial***, se escribe como:

$$v_d = \frac{v_{\text{sal}}}{A} \qquad [17]$$

Como podríamos esperar, hay límites prácticos para la tensión de salida v_{sal} que obtenemos de un amp op real. Según se describe en la sección siguiente, debemos conectar el amp op a suministros de tensión cd externos para alimentar potencia a la circuitería interna. Tales alimentaciones de tensión externas representan el valor máximo de v_{sal} y se ubican por lo común en el intervalo de 5 a 24 V. Si dividimos 24 V entre la ganancia en lazo abierto del μA741 (2×10^5), obtenemos $v_d = 120\ \mu$V. Aunque no es igual a cero volts, un valor tan pequeño comparado con la tensión de salida de 24 V es *prácticamente* cero. Un amp op ideal tendría ganancia infinita en lazo abierto, lo que originaría $v_d = 0$ independientemente de v_{sal}; lo anterior remite a la regla 2 del amp op ideal.

La regla 1 del amp op ideal establece que "*ninguna corriente fluye hacia cualquier terminal de entrada*". De acuerdo con la figura 6.23, la corriente de entrada de un amp op es simplemente:

$$i_{\text{ent}} = \frac{v_d}{R_i}$$

Acabamos de ver que v_d suele ser una tensión muy pequeña. Como observamos en la tabla 6.3, la resistencia de entrada de un amp op característico es muy grande, ¡pues varía de los megaohms a los teraohms! Mediante el valor de $v_d = 120\ \mu$V anterior y $R_i = 2$ MΩ, calculamos que una corriente de entrada de 60 pA, la cual es una corriente en extremo pequeña y para medirla requeriríamos de un amperímetro especializado (conocido como picoamperímetro). En la tabla 6.3, la corriente de entrada característica (denominada con mayor precisión ***corriente de polarización de entrada***) de un μA741 es sólo de 80 nA, tres órdenes de magnitud mayor que el estimado. Ésta es una limitación del modelo del am op que estamos usando y que no está diseñado para proporcionar valores exactos para la corriente de polarización de entrada. Comparada con las otras corrientes que fluyen en un circuito de amp op común, el valor es esencialmente cero. Los amp op más modernos (como el AD549) tienen incluso corrientes de polarización de entrada inferiores. Por lo tanto, concluimos que la regla 1 del amp op ideal es un supuesto bastante razonable.

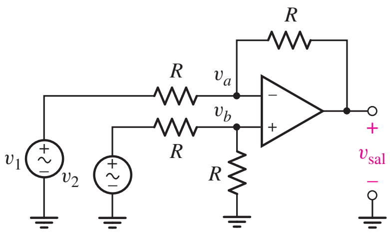
Con esta explicación, queda claro que un amp op ideal tiene una ganancia de tensión en lazo abierto infinita y una resistencia de entrada infinita. Sin embargo, no hemos considerado aún la resistencia de salida del amp op y sus posibles efectos en nuestro circuito. Con referencia a la figura 6.24, vemos que:

$$v_{\text{sal}} = A v_d - R_o i_{\text{sal}}$$

donde i_{sal} circula desde la patilla de entrada del amp op. De tal modo, un valor de R_o distinto de cero actúa para reducir la tensión de salida, un efecto que se vuelve más pronunciado cuando aumenta la corriente de salida. Por esta razón, un amp op *ideal* tiene una resistencia de salida de cero ohms. El μA741 tiene una resistencia de salida máxima de 75 Ω, y el dispositivo más moderno, como el AD549, tiene incluso una resistencia de salida inferior.

Rechazo en modo común

El amp op a veces se conoce como *amplificador diferencial*, debido a que la salida es proporcional a la diferencia de tensión entre las dos terminales de entrada. Ello significa que si aplicamos tensiones idénticas en ambas terminales de entrada, esperamos que la tensión de salida sea cero. Esta capacidad de un amp op es una de sus cualidades



■ **FIGURA 6.26** Amp op conectado con un amplificador diferencial.

más atractivas y se conoce como ***rechazo en modo común***. El circuito de la figura 6.26 se conecta para proporcionar una tensión de salida

$$v_{\text{sal}} = v_2 - v_1$$

Si $v_1 = 2 + 3$ sen $3t$ volts y $v_2 = 2$ volts, deberíamos esperar que la salida fuera -3 sen $3t$ volts; la componente de 2 V común a v_1 y v_2 no se amplificaría ni aparecería en la salida.

En amp op prácticos deducimos que, en realidad, una pequeña contribución a la salida es respuesta a las señales en modo común. Con el fin de comparar un tipo de amp op con otro, a menudo es útil expresar la capacidad de un amp op para rechazar señales en modo común a través de un parámetro conocido como razón de rechazo en modo común, o **CMRR**. Cuando se define v_{oCM} como la salida que se obtiene cuando ambas entradas son iguales ($v_1 = v_2 = v_{\text{CM}}$), podemos determinar A_{CM}, la ganancia en modo común del amp op,

$$A_{\text{CM}} = \left| \frac{v_{\text{oCM}}}{v_{\text{CM}}} \right|$$

A continuación definimos el CMRR en términos del cociente de la ganancia en modo diferencial A y la ganancia en modo común A_{CM}, o

$$\text{CMRR} \equiv \left| \frac{A}{A_{\text{CM}}} \right| \qquad [18]$$

aunque a menudo se expresa en decibeles (dB), que es una escala logarítmica:

$$\text{CMRR}_{(\text{dB})} \equiv 20 \log_{10} \left| \frac{A}{A_{\text{CM}}} \right| \quad \text{dB} \qquad [19]$$

En la tabla 6.3 se proporcionan valores típicos de algunos amp op; un valor de 100 dB corresponde a una relación absoluta de 10^5 de A y A_{CM}.

Retroalimentación negativa

Hemos visto que la ganancia en lazo abierto de un amp op es muy grande e idealmente infinita. Sin embargo, en situaciones prácticas su valor exacto varía respecto del valor que el fabricante especifica como característico. Es posible, por ejemplo, que la temperatura tenga varios efectos importantes en el desempeño de un amp op, de modo que el comportamiento de operación a $-20°$C quizá sea muy diferente del observado en un caluroso día soleado. Además, hay pequeñas variaciones características entre dispositivos fabricados en diferentes momentos. Si diseñamos un circuito en el que la tensión de salida sea la ganancia en lazo abierto multiplicada por la tensión en una de las terminales de entrada, la tensión de salida sería difícil de predecir con un razonable grado de precisión, por lo que podría esperarse que cambiara en función de la temperatura ambiente.

Una solución a tales problemas potenciales consiste en emplear la técnica de ***retroalimentación negativa***, que es el proceso de sustraer una pequeña fracción de la salida y añadirla a la entrada. Si algún suceso cambia las características del circuito de modo que la salida intente aumentar, simultáneamente la entrada se reduce. Una gran cantidad de retroalimentación negativa evitará toda amplificación útil, aunque una canti-

dad pequeña proporciona estabilidad. Un ejemplo de retroalimentación negativa es la desagradable sensación que experimentamos cuando ponemos una mano cerca de una flama. Mientras más la acerquemos, más grande es la señal negativa que se envía desde nuestra mano. Sin embargo, si se exagerara la proporción de retroalimentación negativa, se ocasionaría el rechazo del calor y, a la larga, la muerte por congelamiento. La ***retroalimentación positiva*** es el proceso donde determinada fracción de la señal de salida se suma de nuevo a la entrada. Un ejemplo común es cuando un micrófono se dirige hacia un altoparlante: rápidamente, un sonido muy suave se amplifica cada vez más, hasta que el sistema "chilla". Por lo general, la retroalimentación positiva conduce a un sistema inestable.

Todos los circuitos que se estudian en este capítulo incorporan una retroalimentación negativa a través de la presencia de una resistencia entre la patilla (terminal) de salida y la entrada inversora. El lazo resultante entre la salida y la entrada reduce la dependencia de la tensión de salida respecto del valor real de la ganancia en lazo abierto (como en el ejemplo 6.6). Ello elimina la necesidad de medir la ganancia precisa en lazo abierto de cada amp op que usamos, pues pequeñas variaciones de A no afectarán de manera significativa la operación del circuito. Además, la retroalimentación negativa proporciona una mayor estabilidad en situaciones donde A es sensible en los alrededores de los amp op. Por ejemplo, si A aumenta en forma repentina como respuesta a un cambio en la temperatura del ambiente, se agrega una tensión de retroalimentación mayor a la entrada inversora, lo cual reduce la tensión de entrada diferencial v_d; por lo tanto, el cambio en la tensión de salida Av_d es más pequeño. Debemos notar que la ganancia de circuito en lazo cerrado siempre es menor que la ganancia del dispositivo en lazo abierto. Es el precio que pagamos por la estabilidad y la reducción de la sensibilidad ante los cambios en los parámetros.

Saturación

Hasta ahora, hemos considerado el amp op como un dispositivo puramente lineal, bajo el supuesto de que sus características son independientes de la manera en la que se conecta en un circuito. En realidad, se requiere suministrar potencia a un amp op para accionar la circuitería interna, como se muestra en la figura 6.27. Un suministro positivo, por lo común en el intervalo de 5 a 24 V cd, se conecta a la terminal marcada como V^+, a la vez que un suministro negativo de igual magnitud se conecta a la terminal señalada como V^-. En un número limitado de aplicaciones resulta aceptable un suministro de tensión sencillo, así como situaciones en las que las dos magnitudes de tensión tal vez sean desiguales. El fabricante de amp op casi siempre especificará una tensión del suministro máximo de potencia, más allá del cual ocurrirán daños en los transistores internos.

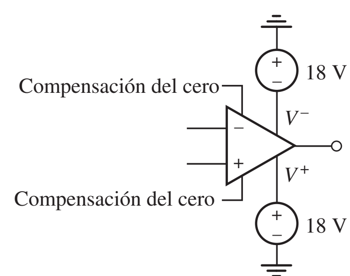
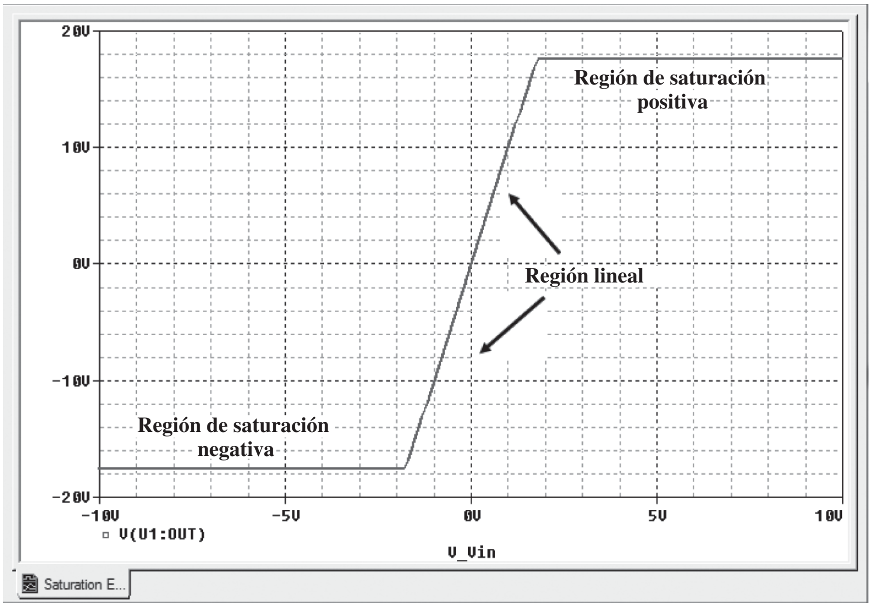


FIGURA 6.27 Amp op con suministros conectados de tensión positiva y negativa. Se utilizan como ejemplo dos suministros de 18 V; observe la polaridad de cada fuente.

Las tensiones del suministro de potencia son una elección crítica cuando se diseña un circuito de amp op, debido a que representan la tensión de salida máxima posible del mismo amp op.[3] Por ejemplo, considere el circuito de amp op que se muestra en la figura 6.26, ahora conectado como un amplificador no inversor con una ganancia de tensión de 10. Como se muestra en la simulación con PSpice de la figura 6.28, observamos un comportamiento lineal en el amp op, pero sólo en el rango de ±1.71 V de la tensión de entrada. Fuera de este rango, la tensión de salida ya no es proporcional a la entrada, y alcanza su magnitud pico de 17.6 V. Este efecto no lineal se conoce con el nombre de ***saturación***, el cual se refiere al hecho de que cualquier incremento adicional en la tensión de entrada no proporciona un cambio en la tensión de salida. Este fenómeno se refiere al hecho de que la salida de un amp op real no puede exceder sus

[3] En la práctica, encontramos una tensión de salida máxima un poco menor que la tensión de suministro de un volt, más o menos.



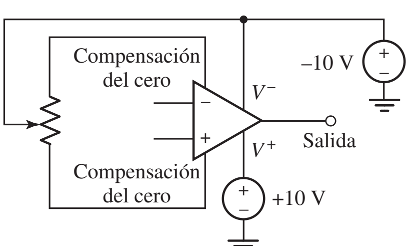
■ **FIGURA 6.28** Características de entrada-salida de un μA741 conectado como amplificador no inversor con una ganancia de 10 y alimentado por fuentes de ± 18 V.

tensiones de suministro. Por ejemplo, si optamos por que el amp op funcione con un suministro de $+9$ V y con uno de -5 V, entonces la tensión de salida estará limitada al intervalo de -5 a $+9$ V. La salida de un amp op es una respuesta lineal limitada acotada por las regiones de saturación positiva y negativa, por lo que, como regla general, diseñamos los circuitos de amp op de manera que no entren en forma accidental en la región de saturación. Ello requiere elegir con cuidado la tensión de operación, con base en la ganancia en lazo cerrado y la tensión de entrada esperada máxima.

Tensión de compensación de entrada

Según hemos descubierto, hay varios aspectos prácticos que debemos considerar cuando trabajamos con los amp op. Una situación no ideal particular que vale la pena mencionar es la tendencia de los amp op reales a tener una salida distinta de cero, incluso cuando las dos terminales de entrada se ponen simultáneamente en corto. El valor de la salida bajo tales condiciones se conoce como tensión de compensación, mientras que la tensión de entrada requerida para disminuir la salida hasta cero recibe el nombre de ***tensión de compensación de entrada***. En la tabla 6.3 podemos observar que los valores característicos de la tensión de compensación de entrada son del orden de unos cuantos milivolts o menos.

La mayoría de los amp op incluyen dos patillas marcadas como “compensación del cero” o “balance”, las cuales se utilizan para ajustar la tensión de salida conectándolas a una resistencia variable, que es un dispositivo de tres terminales empleado con frecuencia en aplicaciones como los controles de volumen de las radios. El dispositivo incluye una perilla que se gira para seleccionar el valor real de resistencia y tiene tres terminales. Si la resistencia variable se conecta utilizando sólo las dos terminales de los extremos, su resistencia se fija sin que importe la posición de la perilla. El uso de la terminal media y de una de las terminales de los extremos la convierten en una resistencia cuyo valor depende de la posición de la perilla. La figura 6.29 muestra el circuito característico mediante el cual se ajusta la tensión de salida de un amp op; la hoja de datos del fabricante quizá sugiera una circuitería alternativa para un dispositivo particular.

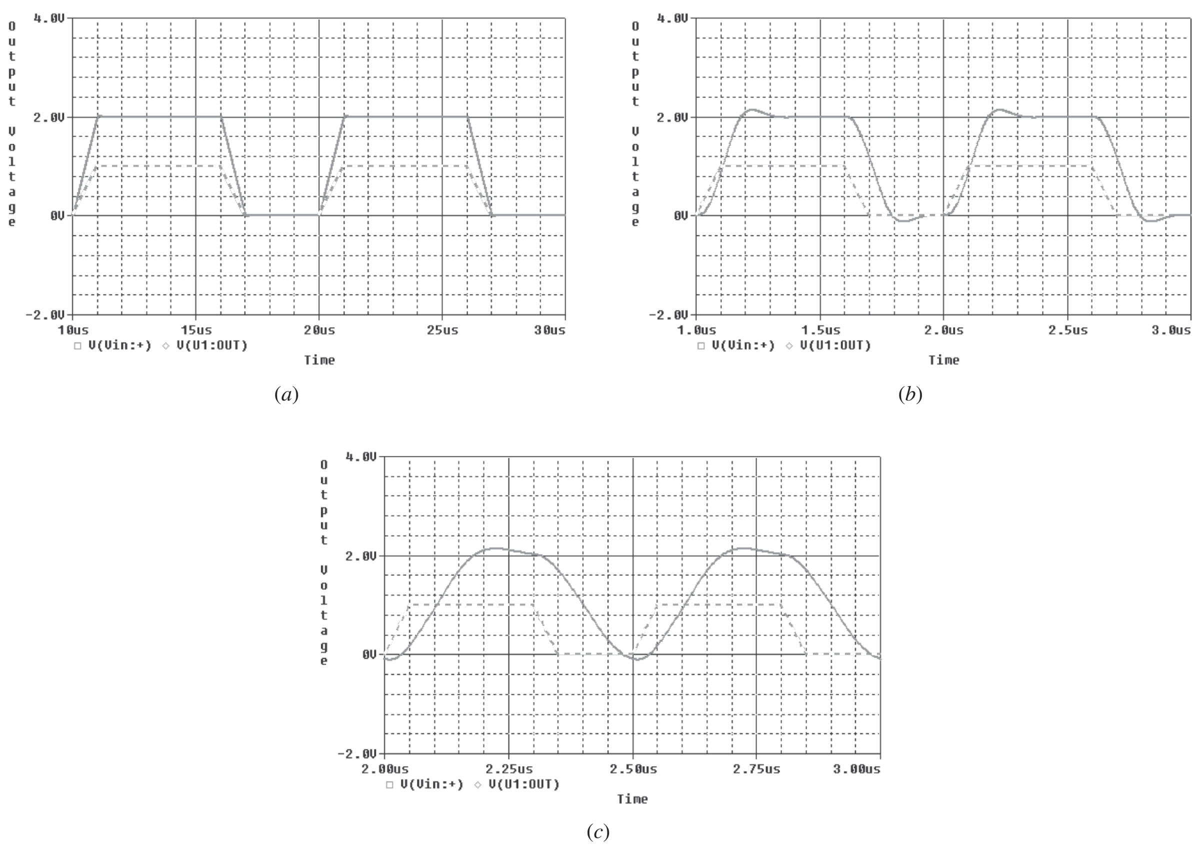


■ **FIGURA 6.29** Circuitería externa sugerida para obtener una tensión de salida cero. Los suministros de ± 10 V se dan como un ejemplo; las tensiones de suministro reales utilizadas en el circuito final se deben elegir en la práctica.

Velocidad de decaimiento

Hasta el momento, hemos supuesto tácitamente que el amp op responderá de la misma forma a las señales de cualquier frecuencia, aunque quizá no nos sorprendería saber que en la práctica existe cierta limitación a este respecto. Puesto que conocemos que los circuitos con amp op funcionan bien en cd, lo cual es, en esencia, una frecuencia igual a cero, lo que debemos considerar es el desempeño a medida que la frecuencia de la señal *aumenta*. Una medida del desempeño en frecuencia de un amp op es su ***velocidad de decaimiento***, la cual es la velocidad a la que la tensión de salida puede responder a los cambios de la entrada; a menudo se expresa como V/μs. La especificación de la velocidad de decaimiento típico de algunos dispositivos disponibles en el mercado se proporciona en la tabla 6.3, la cual muestra los valores del orden de algunos volts por microsegundo. Una excepción importante es el OPA690, que está diseñado como un amp op de alta velocidad para aplicaciones de video que requieren operar a varios cientos de MHz. Como podemos observar, una respetable velocidad de decaimiento de 1 800 V/μs no es nada raro en este dispositivo, aunque sus demás parámetros se vean afectados como consecuencia de esta característica, especialmente la corriente de polarización de entrada y el CMRR.

Las simulaciones con PSpice que se muestran en la figura 6.30 ilustran la degradación del desempeño de un amp op debido a las limitaciones de la velocidad de decaimiento. El circuito simulado es un LF411 configurado como amplificador no inversor con una ganancia de 2 y alimentado por fuentes de ±15 V. La forma de onda de en-

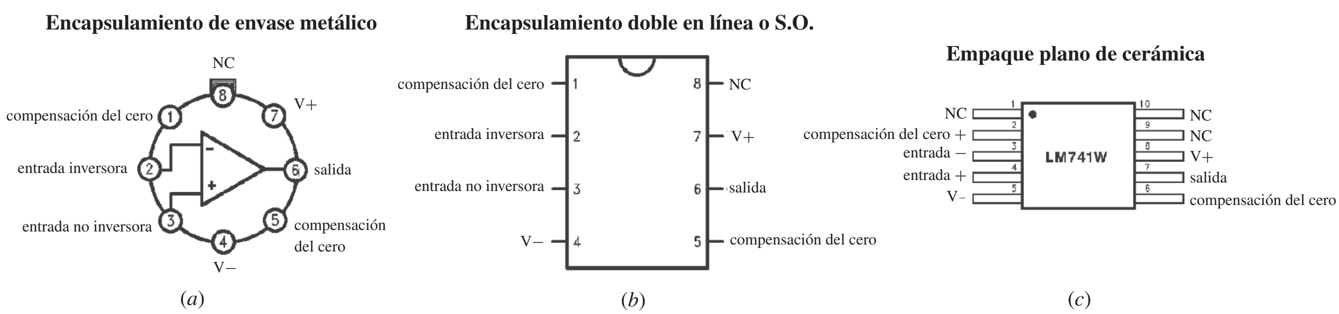


■ **FIGURA 6.30** Simulación del desempeño de un amp op LF411 conectado como amplificador no inversor con una ganancia de 2, alimentación de ±15 V y forma de onda pulsada de entrada. (*a*) Tiempos de subida y bajada = 1 μs, ancho de pulso = 5 μs; (*b*) tiempos de subida y bajada = 100 ns, ancho de pulso = 500 ns; (*c*) tiempos de subida y bajada = 50 ns, ancho de pulso = 250 ns.

trada, que se muestra con la línea punteada, tiene una tensión pico de 1 V; la tensión de salida se muestra con la línea continua. La simulación de la figura 6.30*a* corresponde a un tiempo de subida y de bajada de 1 μs, el cual a pesar de que es un tiempo muy corto para los seres humanos, es fácilmente alcanzable por el LF411. A medida que los tiempos de subida y bajada disminuyen por un factor de 10 a 100 ns (figura 6.30*b*), comenzamos a ver que el LF411 experimenta algunas dificultades para seguir la entrada. En el caso de un tiempo de subida y bajada de 50 ns (figura 6.30*c*), observamos que no sólo existe un retraso significativo entre la salida y la entrada, sino que la forma de onda se distorsiona de manera considerable, lo cual no es una buena característica en un amplificador. Este comportamiento observado es congruente con la típica velocidad de decaimiento de 15 V/μs que se especifica en la tabla 6.3, la cual muestra que es posible que se espere que la salida requiera de 130 ns aproximadamente para cambiar de 0 a 2 V (o 2 a 0 V).

Encapsulamiento

Los amp op modernos se presentan en varios tipos diferentes de encapsulamientos. Algunos estilos son más apropiados para altas temperaturas, por lo que hay una variedad de formas diferentes para montar los CI en los tableros de circuito impreso. La figura 6.31 muestra varios tipos diferentes del LM741 fabricados por National Semiconductor. El término "NC" junto a una patilla significa "no connection". Los estilos de encapsulamiento exhibidos en la figura son configuraciones estándar que se utilizan en un gran número de circuitos integrados diferentes; en ocasiones hay más patillas (terminales) disponibles en un encapsulamiento de las que se requieren.



■ **FIGURA 6.31** Varios estilos de encapsulamiento diferente del amp op LM741. (*a*) Envase metálico; (*b*) encapsulamiento doble en línea; (*c*) empaque plano cerámico.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

Como acabamos de ver, PSpice puede ser de una enorme ayuda en la predicción de la salida de un circuito amp op, especialmente en el caso de entradas que varían con el tiempo. Sin embargo, podremos observar que el modelo ideal de amp op concuerda bastante bien con las simulaciones con PSpice como regla general.

Cuando efectuamos una simulación PSpice de un circuito de amp op, debemos tener el cuidado de recordar que los suministros cd positivo y negativo deben conectarse al dispositivo (con la excepción del LM324, que está diseñado para ser un amp op de suministro simple). Si bien el modelo muestra las patillas de compensación utilizadas para poner en cero la tensión de salida, PSpice no hace ninguna compensación, por lo que las patillas (terminales) se dejan casi siempre flotando (sin conectar).

La tabla 6.3 presenta los diferentes números de serie de los amp op disponibles en la versión de evaluación de PSpice; otros modelos se obtienen en la versión comercial del programa y de otros fabricantes.

EJEMPLO 6.7

Simule el circuito de la figura 6.3 mediante PSpice. Determine el o los puntos en los que empieza la saturación si se utilizan suministros de ±15 V cd para alimentar el dispositivo. Compare la ganancia calculada por PSpice con la que se pronosticó con el modelo de amp op ideal.

Para empezar, es necesario dibujar el circuito de amplificador inversor de la figura 6.3 mediante la herramienta de captura de diagramas, que se muestra en la figura 6.32. Observe que se requieren dos suministros separados de 15 V de cd para accionar el amp op.

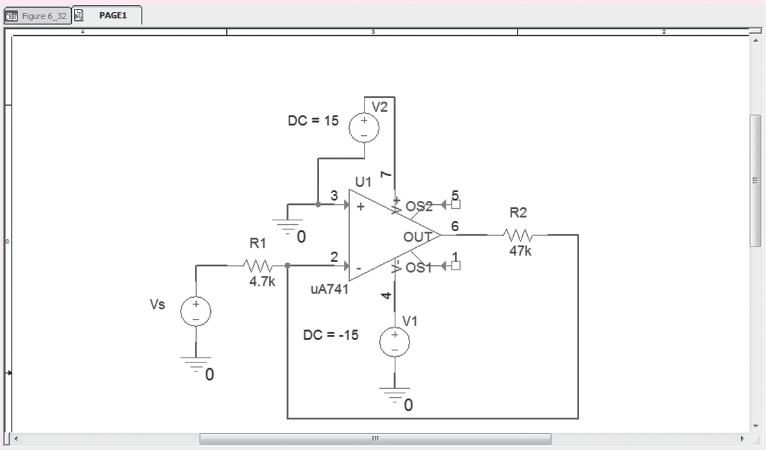


FIGURA 6.32 El amplificador inversor de la figura 6.3 se dibujó utilizando un amp op μA741.

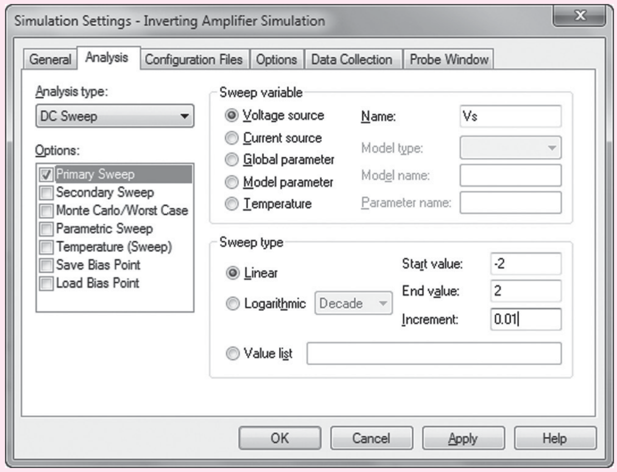
En nuestro análisis previo, un modelo de amp op ideal predijo una ganancia de -10. Con una entrada de 5 sen 3*t* mV, esto provoca una tensión de salida de -50 sen 3*t* mV. Sin embargo, hubo un supuesto implícito en el análisis respecto de que *cualquier* entrada de tensión se amplificaría por un factor de -10. Con base en consideraciones prácticas, se espera que sea cierto para tensiones de entrada *pequeñas*, aunque, a la larga, la salida se saturará hasta un valor comparable a la correspondiente tensión del suministro de potencia.

Llevamos a cabo un barrido de cd de -2 a $+2$ volts, como se muestra en la figura 6.33; éste es un rango ligeramente mayor que la tensión de alimentación dividida entre la ganancia, por lo que se espera que los resultados incluyan las regiones de saturación positivas y negativas.

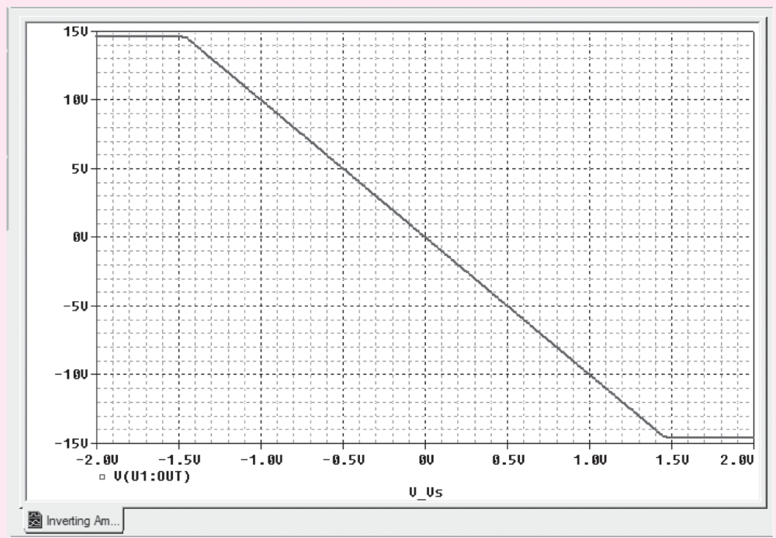
Si utilizamos el cursor en los resultados de la simulación que se muestran en la figura 6.34*a*, la característica de entrada-salida de un amplificador es en realidad lineal a lo largo de un intervalo amplio de entrada, que corresponde aproximadamente a $-1.45 < \text{Vs} < +1.45$ V (figura 6.34*b*). Este intervalo es un poco menor que el que se define al dividir las tensiones positiva y negativa de suministro entre la ganancia. Fuera de dicho intervalo, la salida del amp op se satura, con sólo una ligera dependencia de la tensión de la entrada. De esta forma, en las dos regiones de saturación, el circuito no se comporta como un amplificador lineal.

Al aumentar el número de dígitos del cursor (**Tools, Options, Number of Cursor Digits**) hasta 10, encontramos que la tensión de entrada es de Vs = 1.0V,

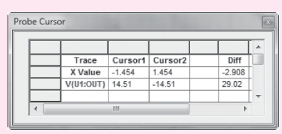
(*continúa*)



■ **FIGURA 6.33** Ventana de configuración del barrido de cd.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 6.34** (*a*) Tensión de salida del circuito amplificador no inversor, con el comienzo de la saturación señalado con el cursor. (*b*) Acercamiento de la ventana del cursor.

la tensión de salida es −9.99548340, ligeramente menor que el valor de −10 predicho a partir del modelo del amp op ideal, y un poco diferente del valor −9.999448 que se obtuvo en el ejemplo 6.6 mediante el modelo analítico. No obstante, los resultados predichos por el modelo μA741 de PSpice están dentro de unos cuantos centésimos de porcentaje de cualquier modelo analítico, lo que demuestra que el modelo de amp op ideal es en realidad una aproximación muy precisa para los modernos circuitos integrados de amplificador operacional.

PRÁCTICA

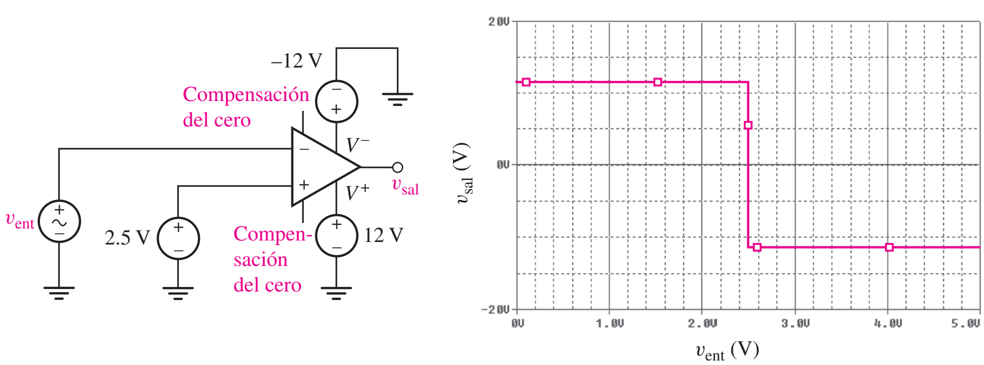
6.7 Simule los restantes circuitos de amp op que se describieron en este capítulo y compare los resultados con los predichos por el modelo ideal del amp op.

6.6 LOS COMPARADORES Y EL AMPLIFICADOR DE INSTRUMENTACIÓN

El comparador

Cada circuito amp op que hemos estudiado hasta ahora ha incluido una conexión eléctrica entre la patilla de salida y la patilla de entrada inversora, a la cual se le conoce como operación de *lazo cerrado* y se utiliza para proporcionar retroalimentación negativa, como se mencionó con anterioridad. La operación de lazo cerrado es el método preferido para utilizar un amp op como amplificador, ya que sirve para aislar el desempeño del circuito de las variaciones en la ganancia de lazo abierto que surgen a partir de las variaciones de temperatura o de defectos de fabricación. Sin embargo, existe un gran número de aplicaciones donde representa una ventaja la utilización del amp op con una configuración de *lazo abierto*. Los dispositivos diseñados para utilizarse en dichas aplicaciones a menudo se conocen como ***comparadores***, ya que están diseñados en forma ligeramente distinta de los amp op normales a fin de mejorar su velocidad cuando trabajan en lazo abierto.

La figura 6.35*a* muestra un simple circuito comparador donde una tensión de referencia de 2.5 V está conectada a la entrada no inversora, y la tensión a comparar (v_{ent}) está conectada a la entrada inversora. En razón de que el amp op tiene una ganancia de lazo abierto A muy grande (típicamente 10^5 o mayor, como se puede observar en la tabla 6.3), no es necesario una diferencia de tensión muy grande entre las terminales de entrada para llevarlo al punto de saturación. En realidad, se requiere una tensión de entrada diferencial tan pequeña como la tensión de alimentación dividida entre A, esto es, aproximadamente $\pm 120\ \mu$V en el caso del circuito de la figura 6.35*a* y $A = 10^5$. En la figura 6.35*b* se muestra la salida distintiva del circuito comparador, donde la respuesta varía entre los valores positivo y negativo de la saturación, sin que haya en esencia una región de “amplificación” no lineal. Por ende, una salida positiva de 12 V



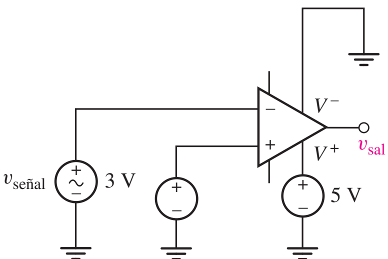
(*a*) (*b*)

■ **FIGURA 6.35** (*a*) Ejemplo de un circuito comparador con una tensión de referencia de 2.5 V. (*b*) Gráfica de la característica entrada-salida.

del comparador indica una tensión de entrada *menor que* la tensión de referencia, mientras que una salida negativa de 12 V señala una tensión de entrada *mayor que* la referencia. Se logra un comportamiento opuesto si conectamos la tensión de referencia a la entrada inversora.

EJEMPLO 6.8

Diseñe un circuito que proporcione una salida "1 lógico" de 5 V si cierta señal de tensión cae por debajo de 3 V y que sea igual a cero en cualquier otro caso.



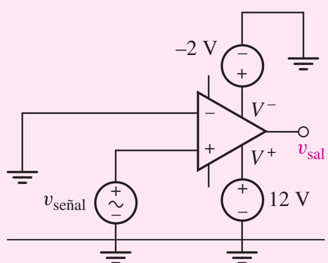
■ **FIGURA 6.36** Posible diseño del circuito requerido.

Como deseamos que la salida del comparador varíe entre 0 y 5 V, utilizaremos un amp op con una única fuente de +5 V conectada como se muestra en la figura 6.36. Conectamos una tensión de referencia de +3 V a la entrada no inversora, la cual puede ser proporcionada por las dos baterías de 1.5 V en serie, o un circuito de referencia a base de un diodo Zener. La señal de tensión de entrada (que se designa como $v_{señal}$) entonces se conecta a la entrada inversora. En realidad, el rango de tensión de saturación de un circuito comparador será ligeramente menor que el de las tensiones de alimentación, por lo que será necesario realizar algunos ajustes en conjunto con la simulación o la prueba.

PRÁCTICA

6.8 Diseñe un circuito que proporcione una salida de 12 V si una cierta tensión ($v_{señal}$) excede el valor de 0 V, y una salida de −2 V en cualquier otro caso.

Respuesta: la posible solución se muestra en la figura 6.37.



■ **FIGURA 6.37** Una posible solución al problema de práctica 6.8.

Amplificador de instrumentación

El circuito comparador básico actúa sobre la diferencia de tensión entre las dos terminales de entrada del dispositivo, aunque desde el punto de vista técnico no amplifica las señales ya que la salida no es proporcional a la entrada. El amplificador diferencial de la figura 6.10 también actúa sobre la diferencia de tensión entre las entradas inversora y no inversora y, siempre y cuando se evite la saturación, *generará* una salida directamente proporcional a esta diferencia. Sin embargo, cuando se esté trabajando con una tensión de entrada muy pequeña, una mejor opción es un dispositivo conocido como ***amplificador de instrumentación***, el cual está formado en realidad por tres dispositivos amp op en un solo encapsulado.

Un ejemplo común de la configuración del amplificador de instrumentación se muestra en la figura 6.38*a* y su símbolo se muestra en la figura 6.38*b*. Cada una de las entradas alimenta directamente a la etapa de seguidor de tensión y la salida de ambos seguidores alimenta una etapa del amplificador diferencial. En particular, el amplificador de instrumentación se adecua muy bien en aplicaciones donde la señal de tensión de entrada es muy pequeña (por ejemplo, del orden de milivolts), como las que generan los termoacopladores o medidores de esfuerzo y donde pueda presentarse una señal grande de ruido en modo común de varios volts.

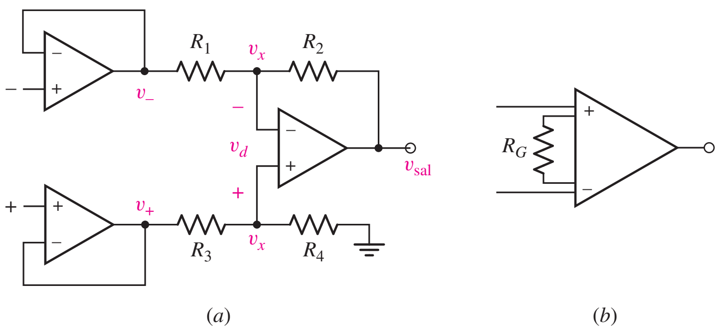


FIGURA 6.38 (*a*) Amplificador de instrumentación básico. (*b*) Símbolo que se utiliza comúnmente.

Si todos los componentes del amplificador de instrumentación se fabricaran en la misma "pastilla" de silicio, sería posible obtener características del dispositivo muy precisas y lograr cocientes exactos de los dos conjuntos de resistencias. Con la finalidad de maximizar el CMRR del amplificador de instrumentación, se espera que $R_4/R_3 = R_2/R_1$, por lo que obtenemos una amplificación igual de componentes en modo común de las señales de entrada. Para analizar esta cuestión con más detalle, identificaremos la tensión a la salida del seguidor de tensión en la parte superior como "v_-" y la tensión a la salida del seguidor de tensión en la parte inferior como "v_+". Bajo el supuesto de que los tres amp op son ideales y eligiendo la tensión en cualquiera de las entradas de la etapa diferencial, v_x, podemos escribir las ecuaciones nodales siguientes:

$$\frac{v_x - v_-}{R_1} + \frac{v_x - v_{sal}}{R_2} = 0 \qquad [20]$$

y

$$\frac{v_x - v_+}{R_3} + \frac{v_x}{R_4} = 0 \qquad [21]$$

Despejando v_x en la ecuación [21], tenemos que:

$$v_x = \frac{v_+}{1 + R_3/R_4} \qquad [22]$$

y sustituyendo este valor en la ecuación [20], obtenemos la expresión de v_{sal} en términos de la entrada:

$$v_{sal} = \frac{R_4}{R_3}\left(\frac{1 + R_2/R_1}{1 + R_4/R_3}\right)v_+ - \frac{R_2}{R_1}v_- \qquad [23]$$

A partir de la ecuación [23] es evidente que el caso general permite la amplificación de los componentes en modo común de las dos entradas. Sin embargo, en el caso particular donde $R_4/R_3 = R_2/R_1 = K$, la ecuación [23] se reduce a $K(v_+ - v_-) = Kv_d$, de tal forma que (suponiendo amplificadores operacionales ideales) se amplificará sólo la diferencia y la ganancia estará determinada por el cociente de las resistencias. En razón de que estas resistencias están en el interior del amplificador de instrumentación y el usuario no puede acceder a ellos, los dispositivos prácticos como el AD622 permiten que pueda fijarse la ganancia en cualquier punto dentro del intervalo de 1 a 1 000 conectando una resistencia externa entre dos de sus patillas (se muestra en la figura 6.38*b* como R_G).

RESUMEN Y REPASO

En este capítulo introdujimos un nuevo elemento de circuito, un dispositivo de tres terminales, que se llama amplificador operacional (o más comúnmente, *am op*). En muchas situaciones de análisis de circuitos, se aproxima a ser un dispositivo ideal, lo cual lleva a dos reglas que se aplican. Hemos estudiado diversos circuitos de am op, incluyendo el *amplificador inversor* con ganancia R_f/R_1, el *amplificador no inversor*, con ganancia $1 + R_f/R_1$ y el *amplificador sumador*. También introdujimos el *seguidor de tensión* y el *amplificador de diferencia*, aunque el análisis de estos dos circuitos se le dejó al lector. El concepto de etapas en cascada se encontró especialmente útil, ya que permite dividir el diseño en unidades distintas, cada una de las cuales tiene una función específica. Nos desviamos un poco para introducir brevemente un elemento no lineal de dos terminales, el *diodo Zener*, ya que proporciona una referencia de tensión práctica y sencilla. Luego usamos este elemento para construir fuentes prácticas de tensión y corriente usando amps op, quitando algo del misterio respecto a sus orígenes.

Los amp op modernos tienen características casi ideales, como hemos descubierto, cuando optamos por un modelo más detallado basado en una fuente dependiente. Con todo, se encuentran ocasionalmente no idealidades, de modo que consideramos el rol *de la retroalimentación negativa* en la reducción del efecto de la temperatura y las variaciones relacionadas con la manufactura en varios parámetros, el *rechazo en modo común* y la *saturación*. Una de las características no ideales más interesantes de cualquier amp op es la *velocidad de decaimiento*. Mediante la simulación de tres casos diferentes, pudimos ver cómo al voltaje de salida le cuesta trabajo seguir la forma de una señal de tensión de entrada una vez que su frecuencia se vuelve suficientemente alta. Concluimos el capítulo con dos casos especiales: el *comparador*, que usa intencionalmente la capacidad de saturar un amp op práctico (no ideal), y el amplificador de instrumentación, que se usa rutinariamente para amplificar tensiones muy pequeñas.

Éste es un buen momento para hacer una pausa, tomar aliento y recapitular algunos de los puntos clave. Al mismo tiempo, destacaremos ejemplos pertinentes como apoyo para usted.

- Existen dos reglas fundamentales que deben aplicarse cuando se analizan los circuitos de amp op *ideales*:
  1. No fluye corriente hacia ninguna terminal de entrada. (Ejemplo 6.1)
  2. Nunca existe tensión entre las terminales de entrada.
- La tensión de salida de los circuitos de amp op suele analizarse en términos de alguna cantidad o cantidades de entrada. (Ejemplos 6.1, 6.2)
- El análisis nodal suele ser la mejor elección para analizar los circuitos de amp op; además, resulta más conveniente empezar en la entrada y trabajar hacia la salida. (Ejemplos 6.1, 6.2)
- No se puede suponer la corriente de salida de un amp op; debe calcularse después de que la tensión de salida se determinó de manera independiente. (Ejemplo 6.2)

- La ganancia de un circuito de amp op inversor está dada por la ecuación

$$v_{\text{sal}} = -\frac{R_f}{R_1} v_{\text{ent}}$$

- La ganancia de un circuito de amp op no inversor se obtiene mediante la ecuación:

$$v_{\text{sal}} = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) v_{\text{ent}}$$

  (Ejemplo 6.1)

- Las etapas en cascada se pueden analizar una a la vez, para relacionar la salida con la entrada. (Ejemplo 6.3)
- Los diodos Zener ofrecen una cómoda referencia de tensión. Sin embargo, no son simétricos, lo cual significa que las dos terminales no son intercambiables. (Ejemplo 6.4)
- Los amps op se pueden usar para construir fuentes de corriente que son independientes de la resistencia de la carga dentro de un rango específico de corriente. (Ejemplo 6.5)
- Una resistencia casi siempre se conecta desde la patilla (terminal) de salida de un amp op hasta su patilla (terminal) de entrada inversora, lo cual incorpora una retroalimentación negativa en el circuito para incrementar la estabilidad.
- El modelo de amp op ideal se basa en la aproximación de la ganancia infinita en lazo abierto A, la resistencia de entrada infinita R_i y la resistencia de salida cero R_o. (Ejemplo 6.6)
- En la práctica, el intervalo de la tensión de salida de un amp op está limitado por las tensiones de suministro utilizadas para activar el dispositivo. (Ejemplo 6.7)
- Los comparadores son amp op diseñados para llevarse al punto de saturación. Estos circuitos operan en lazo abierto y, en consecuencia, no tienen retroalimentación de resistencia externa. (Ejemplo 6.8)

LECTURAS ADICIONALES

Dos libros muy amenos que tratan acerca de las aplicaciones de los amp op son:

R. Mancini (ed.), *Op Amps Are For Everyone,* 2a. ed. Amsterdam: Newnes, 2003. También se encuentra disponible en el sitio web de Texas Instruments (www.ti.com).

W. G. Jung, *Op Amp Cookbook,* 3a. ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1997.

Las características del diodo Zener y otros tipos de diodos se estudian en el capítulo 1 de

W. H. Hayt, Jr. y G. W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design,* 2a. ed. Nueva York: Wiley, 1995.

Uno de los primeros reportes sobre la implementación de un "amplificador operacional" se puede encontrar en

J. R. Ragazzini, R. M. Randall y F. A. Russell, "Analysis of problems in dynamics by electronic circuits", *Proceedings of the IRE* **35**(5), 1947, pp. 444-452.

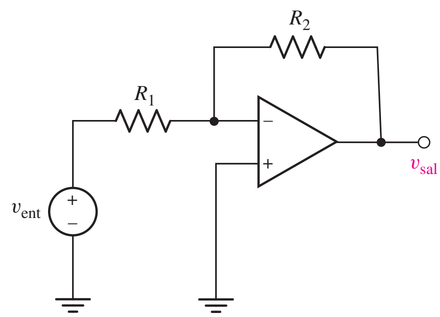
Y una guía de aplicaciones de los amp op se puede encontrar en el sitio web de la compañía Analog Devices, Inc. (www.analog.com):

George A. Philbrick Researches, Inc, *Applications Manual for Computing Amplifiers for Modelling, Measuring, Manipulating & Much Else*. Norwood, Mass.: Analog Devices, 1998.

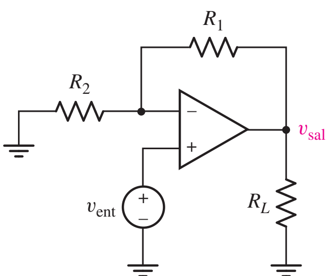
EJERCICIOS

6.2 El amp op ideal

1. Para el circuito amp op que se muestra en la figura 6.39, calcule v_{sal} si (*a*) $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$ y $v_{ent} = 5$ V; (*b*) $R_2 = 200\ R_1$ y $v_{ent} = 1$ V; (*c*) $R_1 = 4.7$ kΩ, $R_2 = 47$ kΩ, y $v_{ent} = 20$ sen $5t$ V.

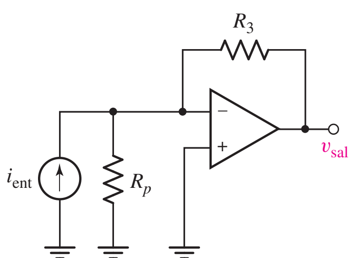


■ FIGURA 6.39



■ FIGURA 6.40

2. Determine la potencia disipada por una resistencia de 100 Ω conectada entre tierra y la terminal de salida del amp op de la figura 6.39 si $v_{ent} = 4$V y (*a*) $R_1 = 2\ R_2$; (*b*) $R_1 = 1$ kΩ y $R_2 = 22$ kΩ; (*c*) $R_1 = 100\ \Omega$ y $R_2 = 101\ \Omega$.
3. Conecte una resistencia de 1 Ω entre tierra y la terminal de salida del amp op de la figura 6.39, y grafique $v_{sal}(t)$ si (*a*) $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$ y $v_{ent} = 5$ sen $10t$ V; (*b*) $R_1 = 0.2R_2 = 1$ kΩ, y $v_{ent} = 5$ cos $10t$ V; (*c*) $R_1 = 10\ \Omega,\ R_2 = 200\ \Omega$, y $v_{ent} = 1.5 + 5e^{-t}$ V.
4. Para el circuito de la figura 6.40, calcule v_{sal} si (*a*) $R_1 = R_2 = 100$ kΩ, $R_L = 100\ \Omega$ y $v_{ent} = 5$ V; (*b*) $R_1 = 0.1R_2$, $R_L = \infty$ y $v_{ent} = 2$ V; (*c*) $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 0$, $R_L = 1\ \Omega$, y $v_{ent} = 43.5$ V.
5. DP (*a*) Diseñe un circuito que convierta una tensión $v_1(t) = 4$ cos $5t$ V en 9 sen $5t$ V. (*b*) Verifique su diseño analizando el circuito final.
6. DP Cierta resistencia de carga necesita un suministro constante de 5 V cd. Por desgracia, su valor de resistencia cambia con la temperatura. Diseñe un circuito que suministre la tensión requerida si sólo se dispone de baterías de 9 V y resistencias estándar con valores con 10% de tolerancia.
7. Para el circuito de la figura 6.40, $R_1 = R_L = 50\ \Omega$. Calcule el valor de R_2 necesario para suministrar 5 W a R_L si V_{ent} es igual a (*a*) 5 V; (*b*) 1.5 V. (*c*) Repita (*a*) y (*b*) si R_L se reduce a 22 Ω.
8. Calcule v_{sal} del circuito de la figura 6.41 si (*a*) $i_{ent} = 1$ mA, $R_p = 2.2$ kΩ, y $R_3 = 1$ kΩ; (*b*) $i_{ent} = 2$ A, $Rp = 1.1\ \Omega$, y $R_3 = 8.5\ \Omega$. (*c*) Para cada caso, indique si el circuito está alambrado como un amplificador inversor o no inversor. *Explique su razonamiento*.

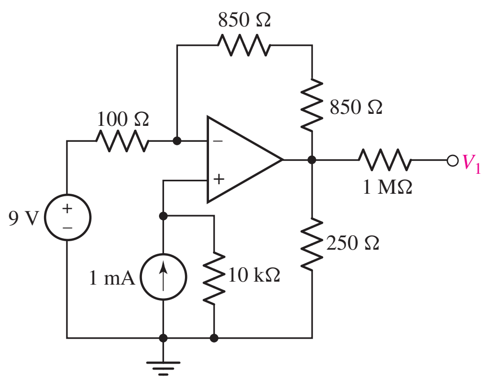


■ FIGURA 6.41

9. DP (*a*) Diseñe un circuito usando solamente un solo amp op que sume dos tensiones v_1 y v_2 y produzca una tensión de salida del doble de su suma (es decir, $v_{sal} = 2\ v_1 + 2\ v_2$). (*b*) Verifique su diseño mediante análisis del circuito final.
10. DP (*a*) Diseñe un circuito que suministre una corriente *i* que es igual en magnitud a la suma de tres tensiones de entrada v_1, v_2 y v_3. (Compare volts con amperes). (*b*) Verifique su diseño mediante análisis del circuito final.
11. DP (*a*) Diseñe un circuito que suministre v_{sal} que sea igual a la diferencia entre dos tensiones v_2 y v_1 (es decir, $v_{sal} = v_2 - v_1$) si usted tiene solamente las siguientes resistencias entre

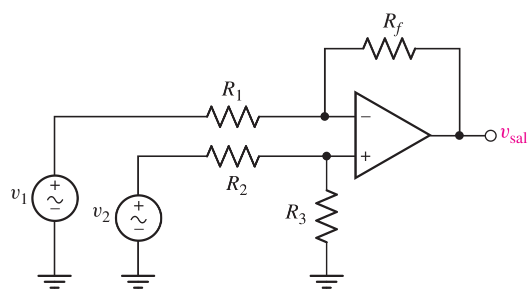
las cuales elegir: dos resistencias de 1.5 kΩ, cuatro de 6 kΩ o tres de 500 Ω.
(*b*) Verifique su diseño mediante análisis del circuito final.

12. Analice el circuito de la figura 6.42 y determine un valor para V_1, con referencia a tierra.



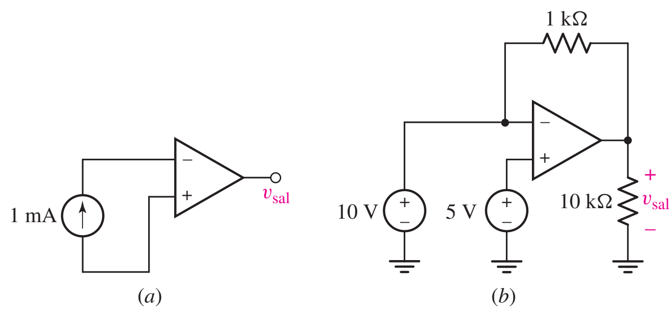
■ **FIGURA 6.42**

13. Deduzca una expresión para v_{sal} como función de v_1 y v_2 para el circuito representado en la figura 6.43.



■ **FIGURA 6.43**

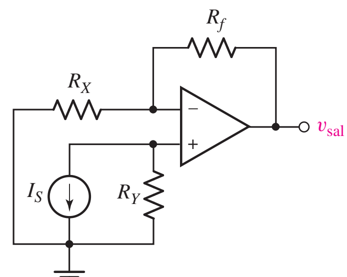
14. Explique lo que está equivocado en cada diagrama de la figura 6.44 si se sabe que los dos amp op son *perfectamente ideales*.



■ **FIGURA 6.44**

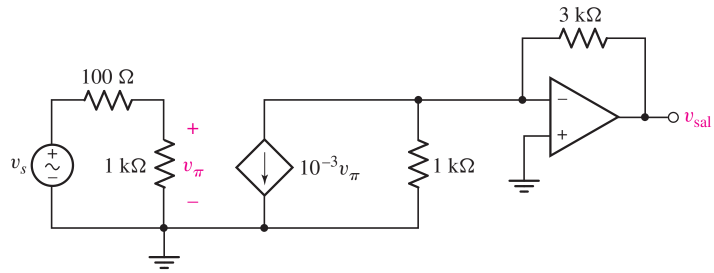
15. Para el circuito representado en la figura 6.45, calcule v_{sal} si $I_S = 2$ mA, $R_Y = 4.7$ kΩ, $R_X = 1$ kΩ y $R_f = 500$ Ω.

16. Considere el circuito amplificador que se muestra en la figura 6.45. ¿Qué valor de R_f dará $v_{sal} = 2$ V cuando $I_s = -10$ mA y $R_Y = 2\,R_X = 500$ Ω?



■ **FIGURA 6.45**

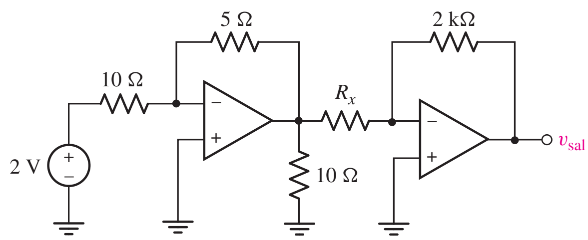
17. Respecto al circuito que se muestra en la figura 6.46, calcule v_{sal} si v_s es igual a (*a*) 2 cos 100*t* mV; (*b*) 2 sen(4*t* + 19°) V.



■ **FIGURA 6.46**

6.3 Etapas en cascada

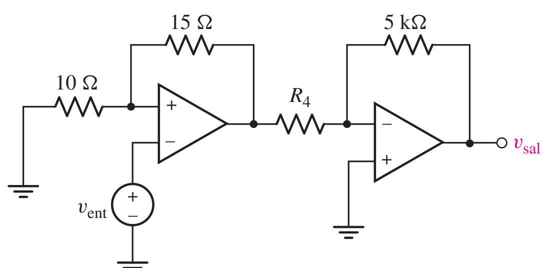
18. Calcule v_{sal} marcada en el circuito de la figura 6.47 si $R_x = 1$ kΩ.



■ **FIGURA 6.47**

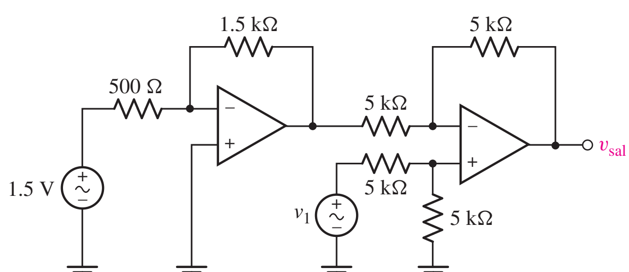
19. Para el circuito de la figura 6.47, determine el valor de R_x que dará como resultado un valor de $v_{sal} = 10$ V.

20. Con referencia a la figura 6.48, grafique v_{sal} como función de (*a*) v_{ent} dentro del rango de $-2\text{ V} \leq v_{ent} \leq +2\text{ V}$, si $R_4 = 2$ kΩ; (*b*) R_4 dentro del rango de $1\text{ k}\Omega \leq R_4 \leq 10\text{ k}\Omega$ si $v_{ent} = 300$ mV.



■ **FIGURA 6.48**

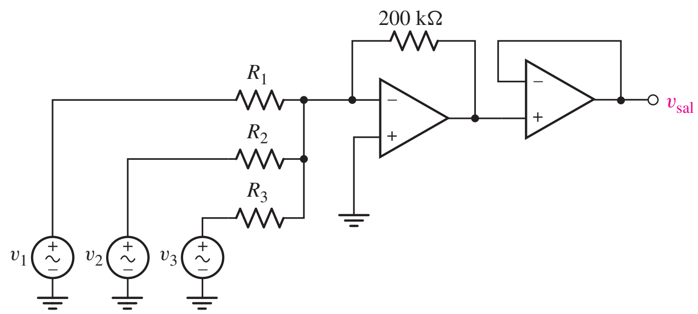
21. Obtenga una expresión para v_{sal} marcada en el circuito de la figura 6.49 si v_1 es igual a (*a*) 0 V; (*b*) 1 V; (*c*) −5 V; (*d*) 2 sen 100*t* V.



■ **FIGURA 6.49**

22. La fuente de 1.5 V de la figura 6.49 está desconectada y, en su lugar, la salida del circuito que se muestra en la figura 6.48 se conecta en la terminal del lado izquierdo de la resistencia de 500 Ω. Calcule v_{sal} si $R_4 = 2$ kΩ y (*a*) $v_{ent} = 2$ V, $v_1 = 1$ V; (*b*) $v_{ent} = 1$ V, $v_1 = 0$; (*c*) $v_{ent} = 1$ V, $v_1 = -1$ V.

23. Para el circuito que se muestra en la figura 6.50, calcule v_{sal} si (*a*) $v_1 = 2v_2 = 0.5v_3 = 2.2$ V y $R_1 = R_2 = R_3 = 50$ kΩ; (*b*) $v_1 = 0$, $v_2 = -8$ V, $v_3 = 9$ V y $R_1 = 0.5R_2 = 0.4R_3 = 100$ kΩ.



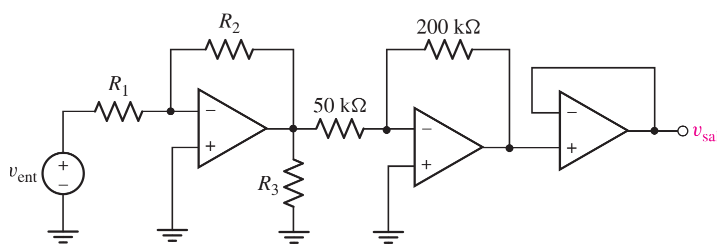
■ **FIGURA 6.50**

DP 24. (*a*) Diseñe un circuito que sume las tensiones producidas por tres sensores de presión separados, cada uno dentro del rango de $0 \leq v_{sensor} \leq 5$ V, y produzca un tensión positiva v_{sal} linealmente correlacionada con la suma de tensiones, de manera que $v_{sal} = 0$ cuando las tres tensiones sean cero, y $v_{sal} = 2$ V cuando las tres tensiones estén en su máximo. (*b*) Verifique su diseño mediante el análisis del circuito final.

DP 25. (*a*) Diseñe un circuito que produzca una tensión de salida v_{sal} proporcional a la diferencia entre dos tensiones positivas v_1 y v_2 de tal manera que $v_{sal} = 0$ cuando ambas tensiones sean iguales, y $v_{sal} = 10$ V cuando $v_1 - v_2 = 1$ V. (*b*) Verifique su diseño analizando el circuito final.

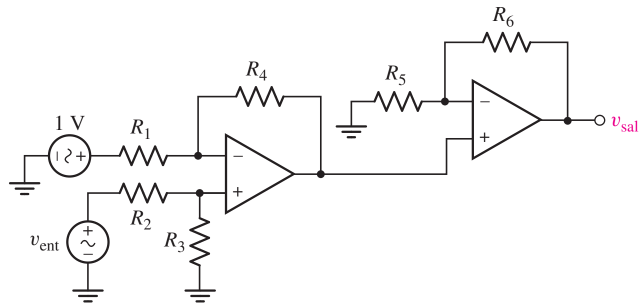
DP 26. (*a*) Se usan tres sensores de presión sensitiva para hacer una verificación doble de las lecturas de peso obtenidas de los sistemas de suspensión de un avión jet de largo alcance. Cada sensor está calibrado de manera que 10 μV correspondan a 1 kg. Diseñe un circuito que sume las tres señales de tensión para producir una tensión de salida calibrada de tal manera que 10 V correspondan a 400 000 kg, el máximo peso de despegue del avión. (*b*) Verifique su diseño mediante el análisis del circuito final.

DP 27. (*a*) El suministro de oxígeno para una batiesfera dada consiste en cuatro tanques separados, cada uno equipado con un sensor de presión capaz de medir entre 0 (correspondiente a una salida de 0 V) y 500 bars (correspondiente a una salida de 5 V). Diseñe un circuito que produzca una tensión proporcional a la presión total en todos los tanques, de manera que 1.5 V corresponda a 0 bars y 3 V corresponda a 2 000 bars. (*b*) Verifique su diseño analizando el circuito final.



■ **FIGURA 6.51**

29. Para el circuito de la figura 6.52, deduzca una expresión para v_{sal} en términos de v_{ent}.



■ **FIGURA 6.52**

6.4 Circuitos para fuentes de tensión y de corriente

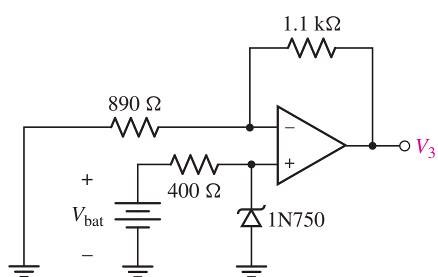
30. Construya un circuito basado en el diodo 1N4740, que da una tensión de referencia de 10 V si únicamente hay disponibles baterías de 9 V. Observe que la tensión de ruptura de este diodo es igual a 10 V a una corriente de 25 mA.

31. Utilice un diodo Zener 1N4733 para construir un circuito que suministre una tensión de referencia de 4 V a una carga de 1 kΩ, si únicamente hay disponibles baterías de 9 V como fuentes. Observe que la tensión de ruptura Zener de este diodo es de 5.1 V a una corriente de 76 mA.

32. (*a*) Diseñe un circuito que suministre una tensión de referencia de 5 V de cd a una carga de resistencia desconocida (diferente de cero), si únicamente hay disponible una batería de 9 V como suministro. (*b*) Verifique su diseño mediante una simulación adecuada. Como parte de esto, determine el rango aceptable para la resistencia de carga.

33. Una red pasiva dada se puede representar por una resistencia equivalente de Thévenin entre 10 y 125 Ω, dependiendo de la temperatura de operación. (*a*) Diseñe un circuito que proporcione 2.2 V constantes a esta red, independientemente de la temperatura. (*b*) Verifique su diseño mediante una simulación adecuada (la resistencia se puede variar desde dentro de una sola simulación, como se describe en el capítulo 8).

34. Calcule la tensión V_1 marcada en el circuito de la figura 6.53 si la batería tiene una tensión nominal V_{bat} igual a (*a*) 9 V; (*b*) 12 V. (*c*) Verifique sus soluciones con simulaciones adecuadas, comentando sobre el posible origen de cualquier discrepancia.



■ **FIGURA 6.53**

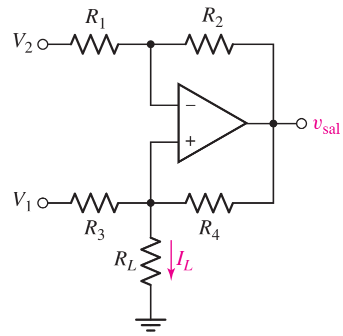
35. (*a*) Diseñe una fuente de corriente basada en el diodo 1N750, que es capaz de suministrar una corriente cd de 750 μA a una carga R_L, de tal manera que 1 kΩ $< R_L <$ 50 kΩ. (*b*) Verifique su diseño mediante una simulación adecuada (observe que la resistencia se puede variar dentro de una sola simulación, como se describe en el capítulo 8).

36. (*a*) Diseñe una fuente de corriente capaz de suministrar una corriente cd de 50 mA a una carga no especificada. Use un diodo 1N4733 ($V_{ruptura}$ = 5.1 V a 76 mA). (*b*) Use una simulación adecuada para determinar el rango permisible de resistencia de carga para su diseño.

37. (*a*) Diseñe una fuente de corriente capaz de suministrar una cd de 10 mA a una carga no especificada. Use un diodo 1N4747 ($V_{\text{ruptura}} = 20$ V a 12.5 mA). (*b*) Use una simulación adecuada para determinar el rango permisible de resistencia de carga para su diseño.

38. El circuito representado en la figura 6.54 se conoce como fuente de corriente de Howland. Deduzca expresiones para v_{sal} e I_L, respectivamente, como función de V_1 y V_2.

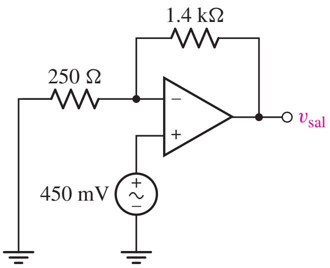
39. Para el circuito que se representa en la figura 6.54, que se conoce como una fuente de corriente de Howland, establezca $V_2 = 0$, $R_1 = R_3$ y $R_2 = R_4$; luego despeje la corriente I_L cuando $R_1 = 2R_2 = 1$ kΩ y $R_L = 100$ Ω.



■ **FIGURA 6.54**

6.5 Consideraciones prácticas

40. (*a*) Utilice los parámetros que aparecen en la tabla 6.3 para el amp op μA741 para analizar el circuito de la figura 6.55 y calcule un valor para v_{sal}. (*b*) Compare su resultado con lo que se predice usando el modelo ideal de amp op.

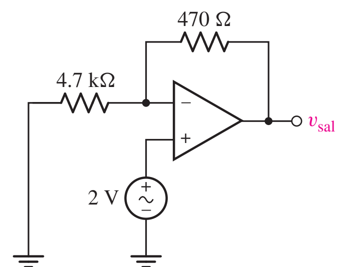


■ **FIGURA 6.55**

41. (*a*) Utilice los parámetros que aparecen en la tabla 6.3 para el amp op μA741 para analizar el circuito de la figura 6.10 si $R = 1.5$ kΩ, $v_1 = 2$ V y $v_2 = 5$ V. (*b*) Compare su solución con lo que se predice usando el modelo ideal de amp op.

42. Defina los siguientes términos, y explique cuándo y cómo cada uno de ellos puede impactar en el funcionamiento de un circuito con amp op: (*a*) relación de rechazo de modo común; (*b*) velocidad de decaimiento; (*c*) saturación; (*d*) retroalimentación.

43. Para el circuito de la figura 6.56, reemplace la resistencia de 470 Ω por un cortocircuito, y calcule v_{sal} usando (*a*) el modelo ideal del amp op; (*b*) los parámetros que aparecen en la tabla 6.3 para el amp op μA741; (*c*) una simulación PSpice adecuada. (*d*) Compare los valores obtenidos en los incisos (*a*) a (*c*) y comente sobre el posible origen de cualquier discrepancia.



■ **FIGURA 6.56**

44. Si el circuito de la figura 6.55 se analiza usando el modelo detallado de un amp op (en contraposición con el modelo ideal de amp op), calcule el valor de la ganancia en lazo abierto A necesario para obtener una ganancia de lazo cerrado dentro de 2% de su valor ideal.

45. Reemplace la fuente de 2 V en la figura 6.56 por una fuente de tensión sinusoidal que tenga una magnitud de 3 V y frecuencia angular $\omega = 2\pi f$. (*a*) ¿Cuál dispositivo, un amp op μA741 o un amp op LF411, seguirá mejor la frecuencia de la fuente dentro del rango 1 Hz $< f <$ 10 MHz? *Explique*. (*b*) Compare el desempeño en frecuencia del circuito dentro del rango 1 Hz $< f <$ 10 MHz, usando simulaciones adecuadas en PSpice, y compare los resultados con su predicción en el inciso (*a*).

46. (*a*) Para el circuito de la figura 6.56, si el amp op (suponga LF411) es alimentado por fuentes iguales de 9 V, estime el valor máximo al que se puede aumentar la resistencia de 470 Ω antes de que sean perceptibles los efectos de la saturación. (*b*) Verifique su predicción mediante una simulación adecuada.

47. Para el circuito de la figura 6.55, calcule la tensión diferencial de entrada y la corriente de polarización de entrada si el amp op es (*a*) μA741; (*b*) LF411; (*c*) AD549K; (*d*) OPA690.

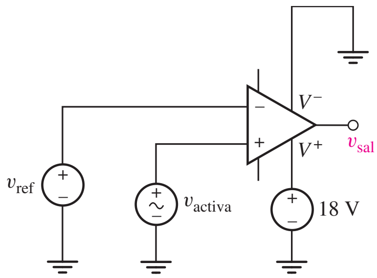
48. Calcule la ganancia en modo común para cada dispositivo listado en la tabla 6.3. Exprese su respuesta en unidades de V/V, no dB.

6.6 Comparadores y el amplificador de instrumentación

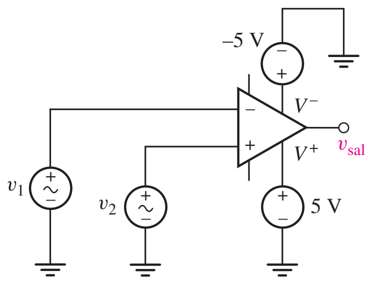
DP 49. La piel humana, especialmente si está húmeda, es un conductor de electricidad razonablemente bueno. Si se supone una resistencia de menos de 10 MΩ para la punta del dedo oprimiendo entre dos terminales, diseñe un circuito que suministre una salida de +1 V si este interruptor no mecánico está "cerrado", y de −1 V si está "abierto".

50. Diseñe un circuito que suministre una tensión de salida v_{sal} basado en el comportamiento de otra tensión v_{ent} de tal manera que

$$v_{sal} = \begin{cases} +2.5 \text{ V} & v_{ent} > 1 \text{ V} \\ 1.2 \text{ V} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



■ FIGURA 6.57



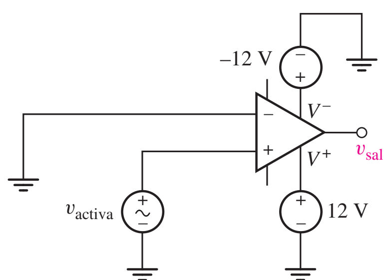
■ FIGURA 6.58

51. Suponga que, en el amplificador de instrumentación que se muestra en la figura 6.38*a*, los tres amp op son ideales. Determine el CMRR del circuito si (*a*) $R_1 = R_3$ y $R_2 = R_4$; (*b*) las cuatro resistencias tienen valores diferentes.

52. En el circuito que se muestra en la figura 6.57, dibuje la tensión de salida esperada v_{sal} en función de v_{activa} para $-5 \text{ V} \leq v_{activa} \leq +5$ V, si v_{ref} es igual a (*a*) −3 V; (*b*) +3 V.

53. En el circuito que se muestra en la figura 6.58, (*a*) dibuje la tensión de salida esperada v_{sal} en función de v_1 para $-5 \text{ V} \leq v_1 \leq +5$ V, si $v_2 = +2$ V; (*b*) grafique la tensión de salida esperada v_{sal} en función de v_2 para $-5 \text{ V} \leq v_2 \leq +5$ V, si $v_1 = +2$ V.

54. En el circuito que se muestra en la figura 6.59, dibuje la tensión de salida esperada v_{sal} en función de v_{activa}, si $-2 \text{ V} \leq v_{activa} \leq +2$ V. Verifique la solución mediante un μA741 (aunque es lento en comparación con los amp op diseñados específicamente para su uso como comparadores, su modelo en PSpice funciona bien, y puesto que ésta es una aplicación de cd, la velocidad no representa ningún problema). Elabore un esquema marcado adecuadamente con los resultados.



■ FIGURA 6.59

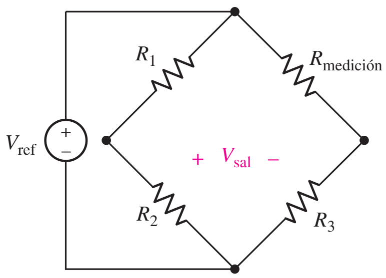
DP 55. En aplicaciones de lógica digital, una señal de +5 V representa un estado lógico "1" y una señal de 0 V un estado lógico "0". Con el fin de procesar información en tiempo real mediante una computadora digital, se requiere de algún tipo de interfaz, la cual típicamente incluye un convertidor analógico-a-digital (A/D), esto es, un dispositivo que convierte las señales analógicas en digitales. Diseñe un circuito que actúe como un A/D de 1 bit, donde cualquier señal menor que 1.5 V represente un "0" lógico y cualquier señal mayor que 1.5 V un "1" lógico.

DP 56. Una aplicación muy común de los amplificadores de instrumentación se realiza para medir tensiones en circuitos de medición de esfuerzo resistivo. Estos sensores de esfuerzo funcionan mediante la detección de los cambios en resistencia que resultan de las distorsiones geométricas, como se muestra en la ecuación [6] del capítulo 2. A menudo son parte de un circuito puente, como se muestra en la figura 6.60*a*, donde el medidor de esfuerzo se identifica como R_G. (*a*) Demuestre que $V_{sal} = V_{ent}\left[\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_3}{R_3+R_{medición}}\right]$. (*b*) Verifique que $V_{sal} = 0$ cuando los valores de las tres resistencias R_1, R_2, y R_3 se seleccionan al mismo valor de la resistencia de medición $R_{medición}$. (*c*) En el caso de esta aplicación, el medidor que se selec-

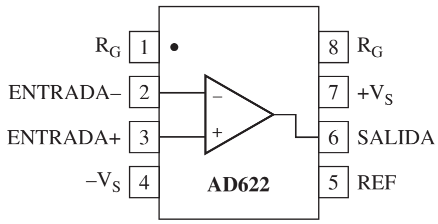
cionó tiene una resistencia al esfuerzo de 5 kΩ y se espera un aumento máximo de resistencia de 50 mΩ. Sólo se tienen disponibles fuentes de ±12 V. Utilizando el amplificador de instrumentación de la figura 6.60*b* diseñe un circuito que proporcione una señal de tensión de +1V cuando el medidor de esfuerzo se encuentre en su carga máxima.

Especificaciones del AD622

La ganancia G del amplificador puede variar de 2 a 1 000 si se conecta una resistencia entre las terminales 1 y 8 con un valor determinado por $R = \dfrac{50.5}{G-1}$ kΩ.



(*a*)



(*b*)

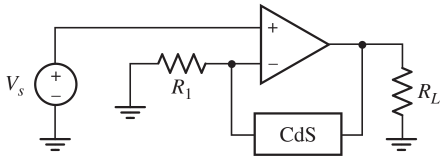
■ **FIGURA 6.60**

Ejercicios de integración de capítulo

DP 57. (*a*) Se le entrega a usted un interruptor electrónico que necesita 5 V a 1 mA para cerrarse; está abierto cuando no hay tensión en su entrada. Si el único micrófono disponible produce una tensión pico de 250 mV, diseñe un circuito que energice el interruptor cuando alguien hable en el micrófono. Observe que el nivel de audio de una voz genérica puede no corresponder a la tensión pico del micrófono. (*b*) Explique cualquier punto que pueda necesitar consideración si su circuito fuera a implementarse.

DP 58. Usted ha formado una banda, a pesar de los consejos que ha recibido en contra. Realmente, la banda es bastante buena, salvo por el hecho de que el cantante principal (quien es el dueño de la batería, los micrófonos y el garaje donde practican) no tiene un muy buen oído musical. Diseñe un circuito que tome la salida de cada uno de los cinco micrófonos que usa su banda, y sume las tensiones para crear una sola señal de tensión que se alimente al amplificador. Pero no todas las tensiones deben amplificarse por igual. La salida de un micrófono se debe atenuar, de modo que su tensión pico sea 10% de la tensión pico de cualquier otro micrófono.

DP 59. El sulfuro de cadmio (CdS) se usa comúnmente para fabricar resistencias cuyo valor depende de la intensidad de la luz que esté brillando en la superficie. En la figura 6.61 se usa una “fotocelda” de CdS como resistencia de retroalimentación R_f. En la oscuridad total, tiene una resistencia de 100 kΩ, y una resistencia de 10 kΩ bajo una intensidad de luz de 6 candelas. R_L representa un circuito que se activa cuando se aplica a sus terminales una tensión de 1.5 V o menor. Elija R_1 y V_S de modo que el circuito representado por R_L se active por una luz con una luminosidad de 2 candelas o mayor.



■ **FIGURA 6.61**

DP 60. Una fuente que se encuentra fuera de cierto edificio de oficinas está diseñada para alcanzar una altura máxima de 5 metros a un caudal de 100 L/s. Una válvula de posición variable en línea con el suministro de agua a la fuente se puede controlar eléctricamente, de tal manera que la aplicación de 0 V da como resultado que la válvula esté totalmente abierta, y 5 V dan como resultado que la válvula esté cerrada. En condiciones de viento adversas, la altura máxima de la fuente debe ajustarse; si la velocidad del viento excede 50 km/h, la altura no puede exceder 2 metros. Hay disponible un sensor de velocidad de viento que suministra una tensión calibrada de tal manera que 1 V corresponde a una velocidad de 25 km/h. Diseñe un circuito que use el sensor de velocidad para controlar la fuente de acuerdo con las especificaciones.

61. Para el circuito de la figura 6.43, suponga que todos los valores de las resistencias sean iguales a 5 kΩ. Grafique v_{sal} como función del tiempo si (*a*) $v_1 = 5$ sen $5t$ V y $v_2 = 5 \cos 5t$ V; (*b*) $v_1 = 4\,e^{-t}$ V y $v_2 = 5\,e^{-2t}$ V; (*c*) $v_1 = 2$ V y $v_2 = e^{-t}$ V.

CAPÍTULO 7

Capacitores e inductores



CONCEPTOS CLAVE

- Relación tensión-corriente de un capacitor ideal
- Relación corriente-tensión de un inductor ideal
- Cálculo de la energía almacenada en capacitores e inductores
- Respuesta de capacitores e inductores a formas de onda variantes en el tiempo
- Combinaciones en serie y en paralelo
- Circuitos de amp op que utilizan capacitores
- Modelado de elementos de almacenamiento de energía con PSpice

INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos dos nuevos elementos pasivos del circuito, el *capacitor* y el *inductor*, ambos capaces de almacenar y entregar cantidades *finitas* de energía. En este aspecto difieren de las fuentes ideales, puesto que no pueden proporcionar un flujo de potencia promedio finito durante un intervalo infinito. A pesar de que estos elementos están clasificados como lineales, las relaciones corriente-tensión de estos dos nuevos elementos dependen del tiempo, lo que da origen a muchos circuitos interesantes. Como veremos a continuación, el intervalo de los valores de capacitancia e inductancia que podemos encontrar es enorme, por lo que, a veces, éstos determinarán el comportamiento del circuito y, en otras ocasiones, serán insignificantes. Dichos problemas siguen siendo relevantes en las aplicaciones modernas de circuitos, en particular, a medida que los sistemas de comunicaciones y de computadoras demanden frecuencias de operación más elevadas y densidades de componentes mayores.

7.1 • EL CAPACITOR

Modelo de capacitor ideal

Denominamos antes a las fuentes de tensión y de corriente independientes y dependientes como elementos *activos*, y a la resistencia lineal como elemento *pasivo*, aunque nuestras definiciones de activo y de pasivo aún siguen confundiéndose y es necesario distinguirlas con claridad. Ahora definimos un ***elemento activo*** como aquel que proporciona una potencia promedio mayor que cero a cierto dispositivo externo, donde el promedio se toma en un intervalo infinito. Las fuentes ideales son elementos activos, así como el amplificador operacional. Por el contrario, un ***elemento pasivo*** se define como el que no puede suministrar una potencia promedio mayor que cero en un intervalo infinito. La resistencia se encuentra en tal categoría; la energía que recibe casi siempre se transforma en calor, y nunca suministra energía.



A continuación presentamos un nuevo elemento de circuito pasivo, el ***capacitor***. Se define la capacitancia C por medio de la relación corriente-tensión

$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad [1]$$

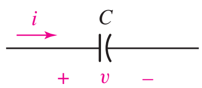


FIGURA 7.1 Símbolo eléctrico y convenciones de corriente-tensión de un capacitor.

donde v e i satisfacen las convenciones de un elemento pasivo, como se muestra en la figura 7.1. Debemos tener presente que v e i son funciones del tiempo; si es necesario, subrayamos este hecho escribiendo en su lugar $v(t)$ e $i(t)$. Con base en la ecuación [1] determinamos la unidad de capacitancia como un amperesegundo por volt, o un coulomb por volt. Luego definimos el ***faradio***[1] (F) como un coulomb por volt y lo utilizamos como la unidad de capacitancia.

El capacitor ideal definido por la ecuación [1] sólo es el modelo matemático de un dispositivo real. Un capacitor se compone de dos superficies conductoras sobre las que puede almacenarse una carga, y están separadas por una delgada capa aislante que tiene una resistencia muy grande. Si suponemos que la resistencia es lo suficientemente grande como para que se pueda considerar infinita, entonces nunca podrán recombinarse cargas iguales y opuestas situadas sobre las "placas" del capacitor, o a menos no se hará mediante ninguna trayectoria dentro del elemento. La construcción del dispositivo físico se sugiere por el símbolo de circuito que se presenta en la figura 7.1.

Consideremos algún dispositivo externo conectado a este capacitor y que provoca que una corriente positiva fluya hacia una placa del capacitor y salga de la otra placa. Corrientes iguales entran y salen de las dos terminales del elemento, lo cual no es más que lo que se espera de cualquier elemento de circuito. Examinemos ahora el interior del capacitor. La corriente positiva que entra a una placa representa la carga positiva que se mueve hacia ella a través de su hilo de conexión terminal; la carga no puede pasar a través del interior del capacitor, por lo cual se acumula sobre la placa. En realidad, la corriente y la carga crecientes se relacionan mediante la ecuación ya familiar

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Consideremos ahora esta placa como un nodo cargado en exceso y apliquemos la ley de corrientes de Kirchhoff; aparentemente no se cumple. La corriente se aproxima a la placa desde el circuito externo, pero no fluye fuera de la placa hacia el "circuito interno". Este dilema inquietó hace más de un siglo al famoso científico escocés James Clerk Maxwell. La teoría electromagnética unificada que después formuló plantea la hipótesis de una "corriente de desplazamiento" que está presente siempre que un campo eléctrico o una tensión varían con el tiempo. La corriente de desplazamiento que fluye de manera interna entre las placas del capacitor es exactamente igual a la corriente de conducción que fluye en los hilos de conexión del capacitor; de esta forma, la ley de corrientes de Kirchhoff se satisface, si incluimos las corrientes de conducción y de desplazamiento. Sin embargo, el análisis de circuitos no se interesa en la corriente de desplazamiento interna, y ya que por fortuna es igual a la corriente de conducción, podremos considerar que la hipótesis de Maxwell relaciona la corriente de conducción con la tensión cambiante a través del capacitor.

Un capacitor construido con dos placas de conducción paralelas de área A, separadas por una distancia d, tiene una capacitancia $C = \varepsilon A/d$, donde ε es la permitividad (una constante del material aislante entre las placas), lo cual supone que las dimensiones lineales de las placas de conducción son mucho mayores que d. En el aire o el vacío, $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854$ pF/m. La mayoría de los capacitores emplean una delgada capa de

[1] Recibe el nombre en honor a Michael Faraday.



(*a*) (*b*) (*c*)

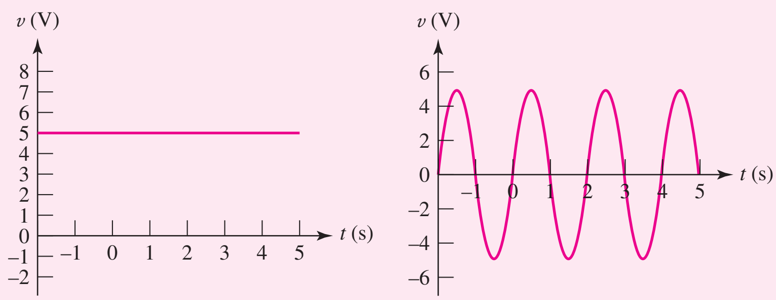
FIGURA 7.2 Ejemplos de los tipos de capacitores disponibles en el mercado. (*a*) De izquierda a derecha: cerámico de 270 pF, tantalio de 20μF, poliéster de 15 nF, poliéster de 150 nF. (*b*) Izquierda: electrolítico de 2 000μF a 40 VDC, 25 000 μF a 35 VDC. (*c*) En el sentido de las manecillas del reloj comenzando por el más pequeño: electrolítico de 100 μF a 63 VDC, electrolítico de 2 200μF a 50 VDC, electrolítico de 55 F a 2.5 VDC y electrolítico de 4 800μF a 50 VDC. Observe que, en general, a medida que aumenta la capacitancia, se requiere de un encapsulado mayor, con una evidente excepción. ¿Cuál fue el compromiso en este caso?

dieléctrico con una permitividad mayor que el aire, a fin de minimizar el tamaño del dispositivo. En la figura 7.2 se presentan ejemplos de diversos tipos de capacitores disponibles comercialmente, aunque debemos recordar que dos superficies, cualesquiera conductoras que no estén en contacto directo entre sí, se caracterizarían mediante una capacitancia diferente de cero (pero quizá pequeña). También debemos observar que una capacitancia de varios cientos de *microfaradios* (μF) se considera “grande”.

Mediante la ecuación [1], ya definida, se descubrirán varias características importantes del nuevo modelo matemático. Una tensión constante en un capacitor produce una corriente cero que pasa a través de él; por ello un capacitor es un “*circuito abierto para la cd*”. Este hecho se representa en forma gráfica mediante el símbolo del capacitor. También resulta posible que un salto de tensión repentino requiera una corriente infinita. En razón de que lo anterior es físicamente inalcanzable, es imposible que la tensión en el capacitor cambie en el tiempo cero.

EJEMPLO 7.1

Determine la corriente *i* que fluye a través del capacitor de la figura 7.1 en las dos formas de onda de tensión de la figura 7.3 si $C = 2$ F.



(*a*) (*b*)

FIGURA 7.3 (*a*) Tensión de cd aplicada a las terminales del capacitor. (*b*) Forma de onda senoidal de tensión aplicada a las terminales de un capacitor.

(*continúa*)

La corriente i está relacionada con la tensión v en el capacitor de la ecuación [1]:

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

En el caso de la forma de onda de tensión que se muestra en la figura 7.3*a*, $dv/dt = 0$ por lo que $i = 0$; el resultado se grafica en la figura 7.4*a*. En el caso de la forma de onda senoidal de la figura 7.3*b*, esperamos que circule una forma de onda senoidal de corriente como respuesta, que tenga la misma frecuencia y dos veces la magnitud (puesto que $C = 2$ F). La gráfica del resultado se muestra en la figura 7.4*b*.

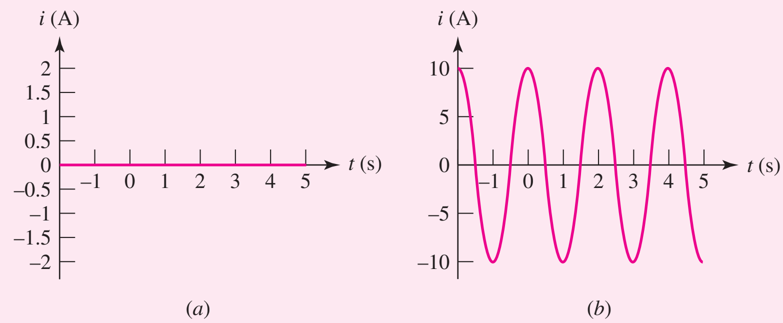


FIGURA 7.4 (*a*) $i = 0$ ya que la tensión aplicada es de cd. (*b*) La corriente es de forma cosenoidal en respuesta a la tensión senoidal.

PRÁCTICA

7.1 Determine la corriente que circula a través de un capacitor de 5 mF como respuesta a una tensión $v =$: (*a*) -20 V; (*b*) $2e^{-5t}$ V.

Respuesta: (*a*) 0 A; (*b*) $-50e^{-5t}$ mA.

Relaciones integrales de tensión-corriente

La tensión del capacitor se expresaría en términos de la corriente que integra la ecuación [1]. Primero obtenemos:

$$dv = \frac{1}{C} i(t)\, dt$$

e integrando[2] entre los tiempos t_0 y t y entre las tensiones correspondientes $v(t_0)$ y $v(t)$ tenemos:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\, dt' + v(t_0) \qquad [2]$$

La ecuación [2] también puede escribirse como una integral indefinida, más una constante de integración:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i\, dt + k$$

[2] Observe que se aplica el procedimiento matemático correcto para la definición de una *variable simulada* t' en situaciones donde la variable de integración t es también un límite.

Por último, en muchos problemas reales encontraremos que no es posible distinguir $v(t_0)$, la tensión inicial en el capacitor. En tales casos, desde el punto de vista matemático será conveniente establecer $t_0 = -\infty$ y $v(-\infty) = 0$, por lo que:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\, dt'$$

Puesto que la integral de la corriente en cualquier intervalo es la carga acumulada en ese periodo sobre la placa del capacitor hacia la cual fluye la corriente, también podemos definir a la capacitancia como:

$$q(t) = Cv(t)$$

donde $q(t)$ y $v(t)$ representan los valores instantáneos de la carga sobre cualquiera de las placas y la tensión entre ellas, respectivamente.

EJEMPLO 7.2

Determine la tensión del capacitor que está asociado con la corriente que se indica en forma gráfica en la figura 7.5*a*. El valor de la capacitancia es de 5 μF.

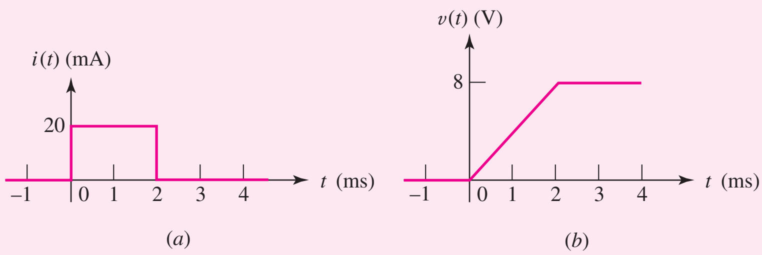


FIGURA 7.5 (*a*) Forma de onda de la corriente aplicada a un capacitor de 5 μF. (*b*) Forma de onda de una tensión resultante que se obtuvo mediante integración gráfica.

La ecuación [2] es la expresión adecuada aquí:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\, dt' + v(t_0)$$

pero ahora se necesita interpretar gráficamente. Para hacer esto, observamos que la diferencia de tensión entre los tiempos t y t_0 es proporcional al área que está debajo de la curva de corriente definida por los mismos dos tiempos. La constante de proporcionalidad es $1/C$.

En la figura 7.5*a* vemos tres intervalos separados: $t \leq 0$, $0 \leq t \leq 2$ ms y $t \geq 2$ ms. Al definir el primer intervalo más específicamente como entre $-\infty$ y 0, de modo que $t_0 = -\infty$, observamos dos cosas, ambas consecuencia del hecho de que la corriente siempre ha sido cero hasta $t = 0$: primera,

$$v(t_0) = v(-\infty) = 0$$

Segunda, la integral de la corriente entre $t_0 = -\infty$ y 0 es simplemente cero, ya que $i = 0$ en el intervalo. Por lo tanto,

$$v(t) = 0 + v(-\infty) \qquad -\infty \leq t \leq 0$$

o

$$v(t) = 0 \qquad t \leq 0$$

(*continúa*)

Si consideramos ahora el intervalo que representa el pulso rectangular, obtenemos:

$$v(t) = \frac{1}{5 \times 10^{-6}} \int_0^t 20 \times 10^{-3}\, dt' + v(0)$$

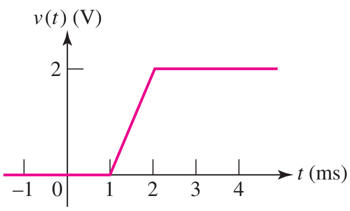
Puesto que $v(0) = 0$,

$$v(t) = 4\,000t \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ ms}$$

En el intervalo semiinfinito que sigue al pulso, la integral $i(t)$ es otra vez cero, de modo que:

$$v(t) = 8 \quad t \geq 2 \text{ ms}$$

Los resultados se expresan con mayor simplicidad mediante un diagrama que a través de estas expresiones analíticas, como se indica en la figura 7.5*b*.



■ **FIGURA 7.6**

PRÁCTICA

7.2 Determine la corriente a través de un capacitor de 100 pF si su tensión, como función del tiempo, está dada por la figura 7.6.

Respuestas: 0 A, $-\infty \leq t \leq 1$ ms; 200 nA, 1 ms $\leq t \leq 2$ ms; 0 A, $t \geq 2$ ms.

Almacenamiento de energía

Para determinar la energía almacenada en un capacitor, empezamos con la potencia entregada a él:

$$p = vi = Cv\frac{dv}{dt}$$

El cambio en la energía almacenada en sus campos eléctricos es simplemente

$$\int_{t_0}^{t} p\, dt' = C \int_{t_0}^{t} v\frac{dv}{dt'}\, dt' = C \int_{v(t_0)}^{v(t)} v'\, dv' = \frac{1}{2}C\left\{[v(t)]^2 - [v(t_0)]^2\right\}$$

por lo que

$$w_C(t) - w_C(t_0) = \tfrac{1}{2}C\left\{[v(t)]^2 - [v(t_0)]^2\right\} \qquad [3]$$

donde la energía almacenada vale $w_C(t_0)$ en joules (J) y la tensión en t_0 es $v(t_0)$. Si elegimos una referencia de energía cero en t_0, queda implícito que la tensión del capacitor es también cero en ese instante, entonces:

$$\boxed{w_C(t) = \tfrac{1}{2}Cv^2} \qquad [4]$$

Consideremos un ejemplo numérico simple. Como se muestra en la figura 7.7, una fuente de tensión senoidal se encuentra en paralelo con una resistencia de 1 MΩ y con un capacitor de 20 μF. Se podría suponer que la resistencia en paralelo representa la resistencia finita del dieléctrico entre las placas del capacitor físico (un capacitor *ideal* tiene resistencia infinita).

EJEMPLO 7.3

Calcule la energía máxima almacenada en el capacitor de la figura 7.7 y la energía que disipa la resistencia en el intervalo $0 < t < 0.5$ s.

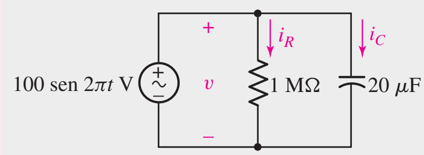


FIGURA 7.7 Una fuente de tensión senoidal se aplica a una red *RC* en paralelo. La resistencia de 1 MΩ podría representar la resistencia finita de la capa dieléctrica "real" del capacitor.

▶ ***Identificar el objetivo del problema.***

La energía almacenada en el capacitor varía con el tiempo; se nos pide el valor *máximo* en un intervalo específico, así como la cantidad *total* de energía disipada por la resistencia en este intervalo. En realidad son dos ecuaciones por completo diferentes.

▶ ***Recopilar la información conocida.***

La única fuente de energía en el circuito es la fuente de tensión independiente, que tiene un valor de $100 \text{ sen } 2\pi t$ V. Sólo nos interesa el intervalo $0 < t < 0.5$ s. El circuito está marcado de manera adecuada.

▶ ***Decidir la técnica disponible que se ajusta mejor al problema.***

La energía en el capacitor se determina mediante la evaluación de la tensión. Para calcular la energía disipada por la resistencia durante el mismo intervalo, es necesario integrar la *potencia* disipada, $p_R = i_R^2 \cdot R$.

▶ ***Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.***

La energía almacenada en el capacitor es simplemente:

$$w_C(t) = \tfrac{1}{2}Cv^2 = 0.1 \text{ sen}^2\ 2\pi t \qquad \text{J}$$

Obtenemos la expresión de la potencia disipada por la resistencia, en términos de la corriente i_R:

$$i_R = \frac{v}{R} = 10^{-4} \text{ sen } 2\pi t \qquad \text{A}$$

por lo que

$$p_R = i_R^2 R = (10^{-4})(10^6) \text{ sen}^2\ 2\pi t$$

de modo que la energía disipada por la resistencia entre 0 y 0.5 s sea

$$w_R = \int_0^{0.5} p_R\, dt = \int_0^{0.5} 10^{-2} \text{ sen}^2\ 2\pi t\, dt \qquad \text{J}$$

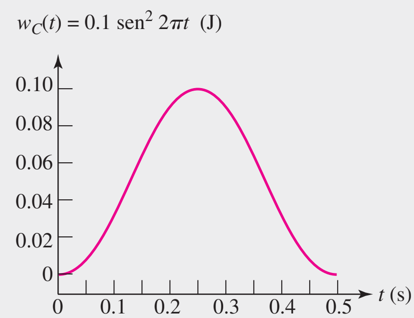


FIGURA 7.8 Gráfica de la energía almacenada en el capacitor como función del tiempo.

▶ ***Determinar si se requiere información adicional.***

Contamos con la expresión de la energía almacenada en el capacitor; en la figura 7.8 se muestra un dibujo. La expresión que se obtuvo de la energía disipada por la resistencia no incluye ninguna cantidad desconocida, por lo cual puede evaluarse con facilidad.

▶ ***Buscar la solución.***

A partir de nuestro bosquejo de la expresión de la energía almacenada en el capacitor, podemos ver que aumenta desde cero a $t = 0$ hasta un máximo de 100 mJ en $t = \frac{1}{4}$ s, y que luego disminuye hasta cero en otro $\frac{1}{4}$ s. Por lo tanto, $w_{C\text{máx}} = 100$ mJ. Al evaluar nuestra expresión integral de la energía disipada por la resistencia, podemos ver que $w_R = 2.5$ mJ.

(*continúa*)

Verificar la solución. ¿Es razonable o esperada?

No esperamos calcular una energía almacenada *negativa*, que no aparece en el diagrama. Además, puesto que el valor máximo de sen $2\pi t$ es 1, la máxima energía esperada sería $(1/2)(20 \times 10^{-6})(100)^2 = 100$ mJ.

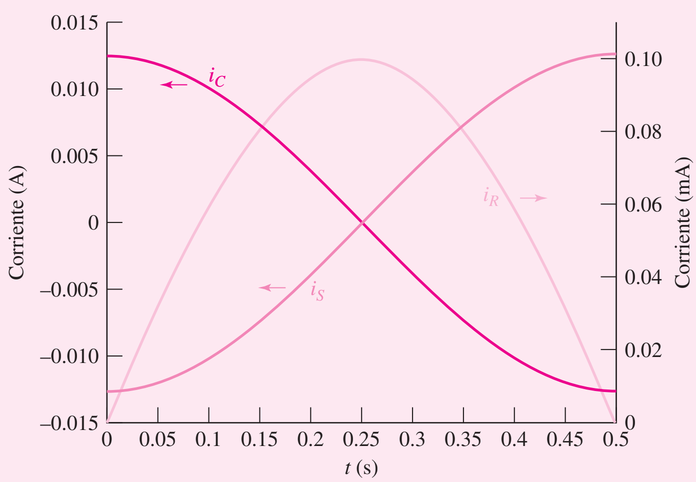
La resistencia disipó 2.5 mJ en el periodo de 0 a 500 ms, aunque el capacitor almacenó una energía máxima de 100 mJ en un punto durante ese intervalo. ¿Qué pasó con los "otros" 97.5 mJ? Para responder a esta pregunta, calculamos la corriente del capacitor:

$$i_C = 20 \times 10^{-6}\frac{dv}{dt} = 0.004\pi \cos 2\pi t$$

y la corriente i_s definida como circulando *hacia* la fuente de tensión

$$i_s = -i_C - i_R$$

los cuales están graficados en la figura 7.9. Observamos que la corriente que circula a través de la resistencia es una pequeña fracción de la corriente de la fuente, lo cual no es para sorprenderse ya que 1 MΩ es un valor de resistencia relativamente grande. A medida que la corriente fluye a partir de la fuente, se desvía una pequeña cantidad hacia la resistencia, mientras que la restante circula hacia el capacitor a medida que éste se carga. Después de $t = 250$ ms, podemos observar que la corriente de la fuente cambia de signo; la corriente ahora circula del capacitor hacia la fuente. La mayor parte de la energía almacenada en el capacitor está regresando a la fuente de tensión ideal, excepto por la pequeña fracción disipada por la resistencia.



■ **FIGURA 7.9** Gráfica de las corrientes en la resistencia, en el capacitor y en la fuente durante el intervalo de 0 a 500 ms.

PRÁCTICA

7.3 Calcule la energía almacenada en un capacitor de 1 000 μF en $t = 50$ μs si la tensión en él es de 1.5 cos $10^5 t$ volts.

Respuesta: 90.52 μJ.

Características importantes de un capacitor ideal

1. No hay corriente a través de un capacitor si la tensión en él no cambia con el tiempo. Por lo tanto, un capacitor es un *circuito abierto en cd*.
2. Se almacena una cantidad finita de energía en un capacitor incluso si la corriente que circula por él es cero, como sucede cuando la tensión entre las placas es constante.
3. Es imposible cambiar la tensión en un capacitor por una cantidad finita en el tiempo cero, ya que lo anterior requiere una corriente infinita a través del capacitor. (Un capacitor se opone a un cambio abrupto de la tensión entre sus placas de una manera análoga a la forma en que un resorte se opone a un cambio abrupto en su desplazamiento.)
4. Un capacitor nunca disipa energía, sólo la almacena. Si bien lo anterior es cierto en el caso del *modelo matemático,* no lo es en el de un capacitor *físico* (real) debido a las resistencias finitas asociadas con el dieléctrico, así como con el empaque.

7.2 EL INDUCTOR

Modelo del inductor ideal

A principios de la década de 1800, el científico danés Oersted demostró que un conductor que lleva corriente produce un campo magnético (la aguja de una brújula resultaba afectada por un alambre cuando por éste circulaba corriente). Un poco después, Ampère realizó algunas mediciones cuidadosas que demostraron que el campo magnético se relacionaba *linealmente* con la corriente que lo producía. El siguiente paso se dio cerca de veinte años después cuando el inglés Michael Faraday y el inventor estadounidense Joseph Henry descubrieron, casi de manera simultánea,[3] que un campo magnético variable podía inducir una tensión en un circuito cercano. Demostraron que la tensión era proporcional a la tasa de cambio en el tiempo de la corriente que producía el campo magnético. La constante de proporcionalidad es lo que ahora llamamos ***inductancia***, simbolizada como L, por lo que:

$$v = L\frac{di}{dt} \qquad [5]$$

donde debemos reconocer que v e i son, en ambos casos, funciones del tiempo. Cuando deseamos subrayar esto, utilizamos los símbolos $v(t)$ e $i(t)$.

El símbolo de circuito del inductor se presenta en la figura 7.10, y debe observarse que se emplea la convención de signos pasiva, exactamente como se hizo con la resistencia y el capacitor. La unidad con la que se mide la inductancia es el ***henry*** (H), y la ecuación de definición muestra que el henry es sólo una expresión más breve de un voltsegundo por ampere.

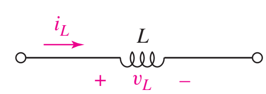


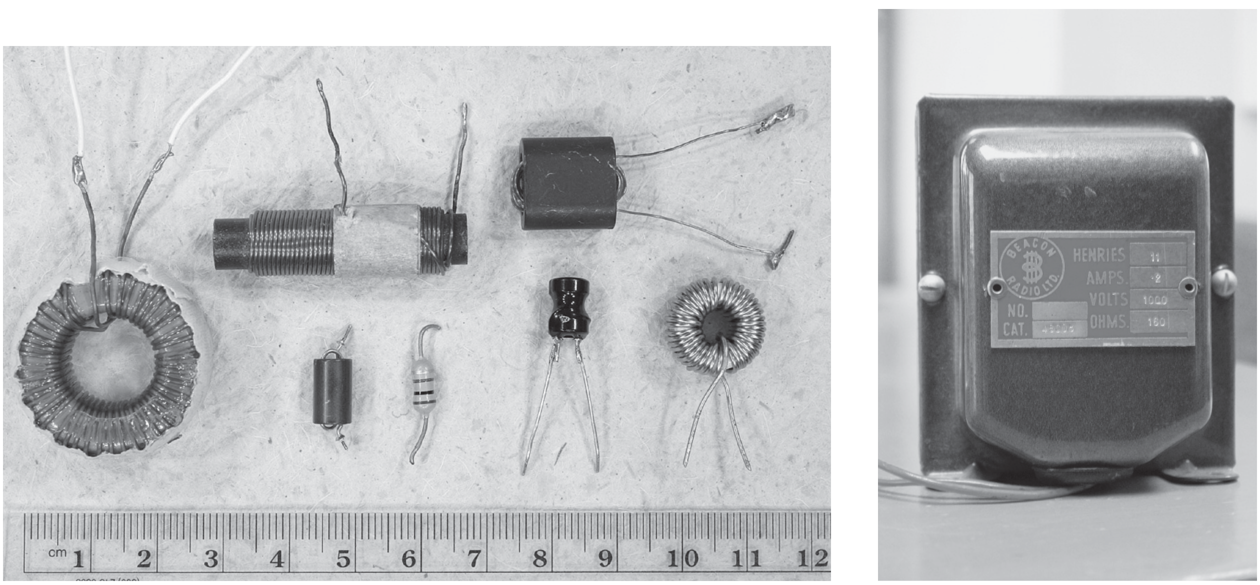
FIGURA 7.10 Símbolo eléctrico y convenciones de corriente-tensión de un inductor.

[3] Ganó Faraday.

El inductor, cuya inductancia se define mediante la ecuación [5], es un modelo matemático; constituye un elemento *ideal* que se puede utilizar para imitar el comportamiento de un dispositivo *real.* Se podría construir un inductor físico enrollando un alambre largo alrededor de un cilindro bobina. Este artefacto sirve para aumentar la corriente que provoca el campo magnético y en su caso incrementar también el "número" de circuitos vecinos en los cuales puede inducirse la tensión de Faraday. El resultado de este efecto doble es que la inductancia de una bobina es casi proporcional al cuadrado del número de vueltas completas que efectúa el conductor y de las cuales está formado. Por ejemplo, un inductor o "bobina" que tiene la forma de una hélice larga con un paso muy pequeño tiene una inductancia igual a $\mu N^2 A/s$, donde A es el área de la sección transversal, s es la longitud axial de la hélice, N es el número de vueltas completas del alambre y μ (mu) es una constante del material dentro de la hélice, llamada permeabilidad. En el espacio libre (y de manera muy aproximada, en el aire), $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m $= 4\pi$ nH/cm. En la figura 7.11 se presentan varios ejemplos de inductores disponibles comercialmente.

Analicemos la ecuación [5] para determinar alguna de las características eléctricas del modelo matemático. La ecuación muestra que la tensión en un inductor resulta proporcional a la tasa de cambio en el tiempo de la corriente que circula a través de él. En particular, prueba que no hay tensión en un conductor que lleva una corriente constante, sin que importe la magnitud de esta corriente. En consecuencia, es posible considerar a un inductor como un *cortocircuito en cd*.

Otro hecho que se deriva de la ecuación [5] es que un cambio repentino o discontinuo en la corriente debe asociarse con una tensión infinita en el inductor. En otras palabras, si deseamos producir un cambio abrupto en una corriente de inductor, tenemos que aplicar una tensión infinita. Aunque una función forzada de tensión infinita podría ser aceptable desde el punto de vista teórico, nunca puede ser parte del fenómeno exhibido por un dispositivo físico real. Como veremos en breve, un cambio abrupto en la



(*a*) (*b*)

■ **FIGURA 7.11** (*a*) Varios tipos de inductores comunes, a los cuales, en ocasiones, también se les conoce como "reactores". En el sentido de las manecillas del reloj, comenzando por la izquierda: inductor toroidal de núcleo de ferrita de 287 μH, inductor cilíndrico con núcleo de ferrita de 266 μH, inductor de núcleo de ferrita de 215 μH diseñado para frecuencias de VHF, inductor toroidal de núcleo de acero laminado de 85 μH, inductor estilo bobina de 10 μH, inductor de plomo axial de 100 μH e inductor de núcleo suelto de 7 μH que se utiliza para suprimir señales de RF. (*b*) Inductor de 11 H cuyas medidas son 10 cm (altura) $\times$ 8 cm (ancho) $\times$ 8 cm (profundidad).

corriente del inductor requiere también una variación abrupta en la energía almacenada en este mismo, y dicho cambio repentino en la energía requiere una potencia infinita en ese instante; también en este caso la potencia infinita no es parte del mundo físico real. Para evitar una tensión infinita y una potencia infinita, no debe permitirse que la corriente del inductor salte en forma *instantánea* de un valor a otro.

Si se intenta poner en circuito abierto un inductor físico a través del cual fluye una corriente finita, quizás aparezca un arco en el interruptor. Esto es útil en el sistema de encendido de algunos automóviles, donde el distribuidor interrumpe la corriente que circula por la bobina y aparece el arco en la bujía. Aunque no ocurre de modo instantáneo, sucede en un intervalo muy corto, lo cual origina la creación de una gran tensión. La presencia de una gran tensión en una distancia pequeña corresponde a un campo eléctrico muy grande; la energía almacenada se disipa al ionizar el aire en la trayectoria del arco.

La ecuación [5] también podría interpretarse (y resolverse, si es necesario) por métodos gráficos, como se observa en el ejemplo 7.4.

EJEMPLO 7.4

Dada la forma de onda de la corriente en un inductor de 3 H, como se muestra en la figura 7.12*a*, determine y grafique la tensión del inductor.

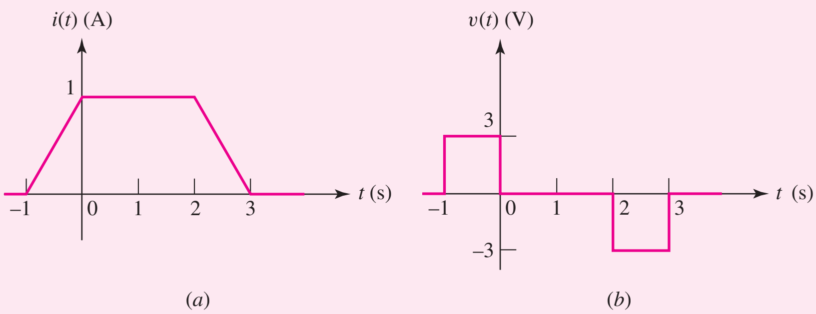


FIGURA 7.12 (*a*) Forma de onda de la corriente en un inductor de 3 H. (*b*) Forma de onda correspondiente a la tensión, $v = 3\, di/dt$.

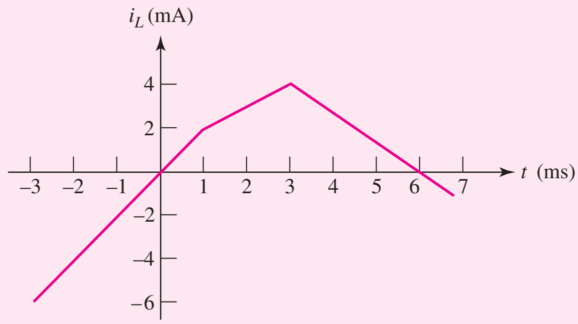
Siempre y cuando la tensión v y la corriente i se definan para cumplir con la convención de signos pasiva, podemos obtener v de la figura 7.12*a* mediante la ecuación [5]:

$$v = 3\frac{di}{dt}$$

Puesto que la corriente es cero para $t < -1$ s, la tensión es cero en este intervalo. Entonces la corriente empieza a aumentar a una razón lineal de 1 A/s, y por ello se produce una tensión constante de $L\, di/dt = 3$ V. Durante el siguiente intervalo de 2 s la corriente es constante y la tensión es, por lo tanto, cero. La disminución final de la corriente origina $di/dt = -1$A/s, que produce $v = -3$ V. Para $t >$ 3 s, $i(t)$ es una constante (cero), de modo que $v(t) = 0$ en ese intervalo. La forma de onda de tensión completa se bosqueja en la figura 7.12*b*.

PRÁCTICA

7.4 En la figura 7.13 se presenta la corriente a través de un inductor de 200 mH. Suponga la convención de signos pasiva y determine v_L en t igual a: (*a*) 0; (*b*) 2 ms; (*c*) 6 ms.



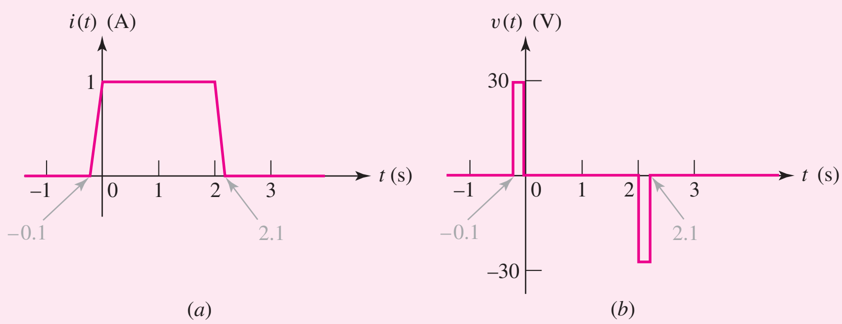
■ **FIGURA 7.13**

Respuesta: 0.4 V; 0.2 V; −0.267 V.

Investigaremos ahora el efecto de un aumento y de un decaimiento más rápido de la corriente entre los valores cero y 1 A.

EJEMPLO 7.5

Calcule la tensión del inductor que resulta al aplicar la forma de onda de corriente de la figura 7.14*a* en el inductor del ejemplo 7.4.



■ **FIGURA 7.14** (*a*) El tiempo requerido para que la corriente de la figura 7.12*a* cambie desde 0 hasta 1, y desde 1 hasta 0 se reduce en un factor de 10. (*b*) Forma de onda de una tensión resultante. Los anchos de los pulsos se exageran para mayor claridad.

Observe que los intervalos del aumento y el descenso se redujeron a 0.1 s. De tal modo, la magnitud de cada derivada será 10 veces más grande; esta condición se muestra en los dibujos de corriente y tensión de la figura 7.14*a* y *b*. En las formas de onda de tensión de las figuras 7.13*b* y 7.14*b*, resulta interesante notar que el área bajo cada pulso de tensión corresponde a 3 V · s.

Por el momento, sólo por curiosidad se continuará en la misma línea. Una reducción adicional de la longitud de ambos intervalos producirá una magnitud de tensión proporcionalmente mayor, pero sólo dentro del intervalo en el que la corriente crece o

disminuye. Un cambio abrupto en la corriente provocará los "picos" de tensión infinita (si cada uno tiene un área de 3 V · s) como se ve en las formas de onda de las figuras 7.15*a* y *b*; o, a partir de un punto de vista igualmente válido pero opuesto, tales picos de tensión infinita se requieren para producir cambios abruptos en la corriente.

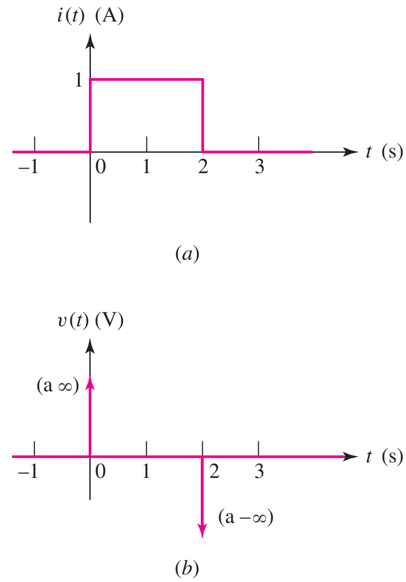


FIGURA 7.15 (*a*) El tiempo requerido para que la corriente de la figura 7.14*a* cambie desde 0 hasta 1, y desde 1 hasta 0, se reduce hasta 0; el aumento y la caída son abruptos. (*b*) La tensión resultante en un inductor de 3 H se compone de un pico infinito positivo y de uno negativo.

PRÁCTICA

7.5 La forma de onda de la corriente de la figura 7.14*a* tiene tiempos iguales de elevación y caída, de 0.1 s (100 ms) de duración. Calcule las tensiones máximas positivas y negativas a través del mismo inductor si los tiempos de elevación y caída se cambian, respectivamente, a (*a*) 1 ms, 1 ms; (*b*) 12 μs, 64 μs; (*c*) 1 s, 1 ns.

Respuestas: 3 kV, −3 kV; 250 kV, −46.88 kV; 3V, −3 GV.

Relaciones integrales de tensión-corriente

Definimos la inductancia por medio de una ecuación diferencial simple,

$$v = L\frac{di}{dt}$$

y hemos extraído varias conclusiones acerca de las características de un inductor a partir de esta relación. Por ejemplo, encontramos que podríamos considerar un inductor como un cortocircuito para la corriente directa, por lo que hemos acordado que no se puede permitir que una corriente de inductor cambie de manera abrupta de un valor a otro, debido a que requeriría que se asociaran al inductor una tensión y una potencia infinitas. Sin embargo, la ecuación de definición simple de inductancia contiene aún más información. Reexpresada en forma un poco diferente,

$$di = \frac{1}{L}v\,dt$$

invita a la integración. Consideremos primero los límites que se establecerán sobre las dos integrales. Deseamos la corriente *i* en el tiempo *t*, así que este par de cantidades proporciona los límites superiores de las integrales que aparecen en el lado izquierdo y en el derecho, respectivamente, de la ecuación; los límites inferiores también pueden expresarse en forma general con sólo suponer que la corriente es $i(t_0)$ en el tiempo t_0. Así

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di' = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$

lo cual conduce a la ecuación

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt'$$

o

$$\boxed{i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' + i(t_0)} \qquad [6]$$

La ecuación [5] expresa la tensión del inductor en términos de la corriente, en tanto que la ecuación [6] ubica la corriente en términos de la tensión. También son posibles

otras formas para la última ecuación. Podríamos considerar la integral como indefinida que incluye una constante de integración k:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int v\,dt + k \tag{7}$$

También podríamos suponer que estamos resolviendo un problema real en el que la selección de (t_0) como $-\infty$ asegura que no habrá corriente o energía en el inductor. Por lo tanto, si $i(t_0) = i(-\infty) = 0$, entonces

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\,dt' \tag{8}$$

Investigaremos el uso de estas diversas integrales mediante un ejemplo simple en el que se especifica la tensión en un inductor.

EJEMPLO 7.6

Se sabe que la tensión en un inductor de 2 H corresponde a 6 cos 5*t* V. Determine la corriente de inductor resultante si $i(t = -\pi/2) = 1$ A.

De la ecuación [6]:

$$i(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} 6\cos 5t'\,dt' + i(t_0)$$

o

$$i(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\right)\text{sen } 5t - \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\right)\text{sen } 5t_0 + i(t_0)$$

$$= 0.6 \text{ sen } 5t - 0.6 \text{ sen } 5t_0 + i(t_0)$$

El primer término indica que la corriente del inductor varía de modo senoidal; el segundo y tercer términos, en conjunto, representan sólo una constante que se determina cuando la corriente se especifica en forma numérica en algún instante. Con base en el hecho de que la corriente es 1 A en $t = -\pi/2$ s, identificamos t_0 como $-\pi/2$ con $i(t_0) = 1$; y resulta:

$$i(t) = 0.6 \text{ sen } 5t - 0.6 \text{ sen}(-2.5\pi) + 1$$

o

$$i(t) = 0.6 \text{ sen } 5t + 1.6$$

Alternativamente, de la ecuación [6]:

$$i(t) = 0.6 \text{ sen } 5t + k$$

y establecemos el valor numérico de k forzando que la corriente sea 1 A en $t = -\pi/2$:

$$1 = 0.6 \text{ sen}(-2.5\pi) + k$$

o

$$k = 1 + 0.6 = 1.6$$

y de ese modo, como antes,

$$i(t) = 0.6 \text{ sen } 5t + 1.6$$

La ecuación [8] provocará problemas con esta tensión particular. Fundamentamos la ecuación en el supuesto de que la corriente era cero cuando $t = -\infty$. Para estar seguros, lo anterior debe ser cierto en el mundo físico real, pero trabajamos en el ámbito del modelo matemático; nuestros elementos y funciones forzadas son ideales. La dificultad surge después de que integramos, con lo cual obtenemos

$$i(t) = 0.6 \,\text{sen}\, 5t' \Big|_{-\infty}^{t}$$

y al tratar de evaluar la integral en el límite inferior:

$$i(t) = 0.6 \text{ sen } 5t - 0.6 \text{ sen}(-\infty)$$

El seno de $\pm\infty$ es indeterminado, y por lo tanto no podemos evaluar la expresión. La ecuación [8] es útil sólo si evaluamos las funciones que se aproximan a cero cuando $t \to -\infty$.

PRÁCTICA

7.6 Un inductor de 100 mH tiene una tensión de $v_L = 2e^{-3t}$ V en sus terminales. Determine la corriente resultante en el inductor si $i_L(-0.5) = 1$ A.

Respuesta: $-\frac{20}{3}e^{-3t} + 30.9$ A.

Sin embargo, no debemos realizar juicios precipitados sobre la forma simple de las ecuaciones [6], [7] y [8] que utilizaremos por siempre, pues cada una tiene sus ventajas, según sean el problema y la aplicación. La ecuación [6] representa un método general y lento, pero que muestra con claridad que la constante de integración es una corriente. La ecuación [7] es una expresión un poco más concisa de la ecuación [6], aunque se suprime la naturaleza de la constante de integración. Por último, la ecuación [8] resulta una expresión excelente, ya que no se necesita ninguna constante; sin embargo, se aplica sólo cuando la corriente es cero en $t = -\infty$ y cuando la expresión analítica de la corriente no está indeterminada ahí.



Almacenamiento de energía

Pongamos atención a la potencia y la energía. La potencia absorbida está dada por el producto corriente-tensión

$$p = vi = Li\frac{di}{dt}$$

La energía ω_L aceptada por el inductor se almacena en el campo magnético alrededor de la bobina. El cambio en esta energía se expresa por medio de la integral de la potencia sobre el intervalo deseado:

$$\int_{t_0}^{t} p\,dt' = L\int_{t_0}^{t} i\frac{di}{dt'}\,dt' = L\int_{i(t_0)}^{i(t)} i'\,di'$$
$$= \frac{1}{2}L\left\{[i(t)]^2 - [i(t_0)]^2\right\}$$

De tal modo,

$$w_L(t) - w_L(t_0) = \tfrac{1}{2}L\left\{[i(t)]^2 - [i(t_0)]^2\right\} \qquad [9]$$

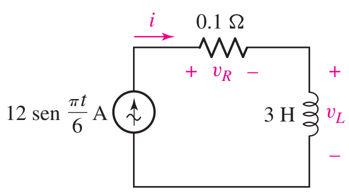
donde hemos supuesto otra vez que la corriente es $i(t_0)$ en el tiempo t_0. Cuando se usa la ecuación de la energía, se acostumbra suponer que se elige un valor de t_0 para el cual la corriente es cero; se acostumbra suponer también que la energía es igual a cero para este tiempo. Entonces, simplemente se tiene:

$$\boxed{w_L(t) = \frac{1}{2}Li^2} \qquad [10]$$

donde entendemos ahora que la referencia de la energía cero es cualquier tiempo para el que la corriente del inductor sea nula. En cualquier tiempo subsecuente, en el que la corriente es cero, encontramos además que no se almacena energía en la bobina. Siempre que la corriente no es nula, e independientemente de su dirección o signo, la energía se almacena en el inductor. Por lo tanto, se concluye que se suministrará energía al inductor durante una parte del tiempo y se recuperará luego de él. Toda la energía almacenada puede recuperarse de un inductor ideal; en el modelo matemático no hay cargos por almacenamiento ni comisiones. Una bobina física, sin embargo, debe construirse a partir de un alambre real, por lo que tendrá siempre una resistencia asociada. No se puede almacenar ni recuperar la energía sin pérdida.

Estas ideas se ilustran mediante un simple ejemplo. En la figura 7.16 se muestra un inductor de 3 H en serie con una resistencia de 0.1 Ω y una fuente de corriente senoidal, $i_s = 12 \text{ sen} \frac{\pi t}{6}$ A. La resistencia debe interpretarse como la resistencia del alambre que se necesita asociar con la bobina física.

EJEMPLO 7.7



■ **FIGURA 7.16** Se aplica una corriente sinusoidal como función forzada a un circuito *RL* en serie. El 0.1 Ω representa la resistencia inherente del alambre con el que el inductor está fabricado.

Determine la máxima energía almacenada en el inductor de la figura 7.16 y la que se disipa en la resistencia durante el tiempo en que se almacena en el inductor y luego se recupera del mismo.

La energía almacenada en el inductor es

$$w_L = \frac{1}{2}Li^2 = 216 \,\text{sen}^2 \frac{\pi t}{6} \qquad \text{J}$$

y esta energía aumenta desde cero en $t = 0$ hasta 216 J en $t = 3$ s. Así, la máxima energía almacenada en el inductor es igual a 216 J.

Después de alcanzar su valor máximo en $t = 3$ s, toda la energía sale del inductor 3 s después. Veamos qué precio pagamos por el privilegio de almacenar y quitar 216 J en 6 segundos con esta bobina. La potencia disipada por la resistencia se calcula con facilidad como

$$p_R = i^2 R = 14.4 \,\text{sen}^2 \frac{\pi t}{6} \qquad \text{W}$$

y la energía que se convierte en calor en la resistencia dentro de este intervalo de 6 s es, por lo tanto,

$$w_R = \int_0^6 p_R \, dt = \int_0^6 14.4 \,\text{sen}^2 \frac{\pi}{6} t \, dt$$

o

$$w_R = \int_0^6 14(4\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}t\right) dt = 43.2 \text{ J}$$

De tal modo, consumimos 43.2 J en el proceso de almacenar y luego recuperar 216 J en un intervalo de 6 s. Lo anterior representa 20% de la máxima energía almacenada, así que representa un valor razonable de muchas bobinas que tienen esta gran inductancia. En bobinas cuya inductancia es alrededor de 100 μH, debemos esperar una cifra cercana a 2 o 3 por ciento.

PRÁCTICA

7.7 Sea $L = 25$ mH en el inductor de la figura 7.10. (*a*) Calcule v_L en $t = 12$ ms si $i_L = 10te^{-100t}$ A. (*b*) Determine i_L en $t = 0.1$ s si $v_L = 6e^{-12t}$ V e $i_L(0) = 10$A. Si $i_L = 8(1 - e^{-40t})$ mA, calcule: (*c*) la potencia que se suministra al inductor en $t = 50$ ms, y (*d*) la energía almacenada en el inductor en $t = 40$ ms.

Respuestas: −15.06 mV; 24.0 A; 7.49 μW; 0.510 μJ.

A continuación resumimos las cuatro características clave de un inductor que se deducen de la ecuación de definición $v = L\, di/dt$:

Características importantes de un inductor ideal

1. No hay tensión en un inductor si la corriente que circula por él no cambia con el tiempo. Desde este punto de vista, un inductor es un *cortocircuito en cd.*
2. Se almacena una cantidad finita de energía en un inductor, incluso si su tensión es nula, como cuando la corriente que pasa por él es constante.
3. Es imposible cambiar la corriente que circula por un inductor por una cantidad finita en el tiempo cero, ya que se necesitaría una tensión infinita en el inductor. (Un inductor se opone a un cambio abrupto en la corriente que pasa por él, de manera análoga a la forma en que una masa se opone a un cambio abrupto en su velocidad).
4. El inductor nunca disipa energía, sólo la almacena. Si bien ello es cierto en el caso del modelo *matemático* no lo es en el de un inductor *físico* debido a las resistencias en serie.

Resulta interesante adelantar la explicación de ***dualidad*** de la sección 7.6 al leer de nuevo los cuatro enunciados anteriores con ciertas palabras sustituidas por sus términos “duales”. Si se intercambian *capacitor* por *inductor, capacitancia* por *inductancia, tensión* por *corriente, en* por *a través, circuito abierto* por *cortocircuito, resorte* por *masa,* y *desplazamiento* por *velocidad* (en cualquier dirección), se obtienen los cuatro enunciados de los capacitores que se acaban de dar.

APLICACIÓN PRÁCTICA

En busca del elemento faltante

Hasta ahora, se nos ha introducido a tres diferentes elementos pasivos de dos terminales: la *resistencia*, el *capacitor* y el *inductor*. Cada uno se ha definido en términos de su relación corriente-tensión ($v = Ri$, $i = C\, dv/dt$, y $v = L\, di/dt$, respectivamente). Desde una perspectiva más fundamental, sin embargo, es posible visualizar estos tres elementos como parte de un cuadro mayor que relaciona cuatro cantidades básicas, a saber; la carga q, la corriente i, la tensión v y el acoplamiento inductivo φ. La carga, la corriente y la tensión se explican en el capítulo 2. El acoplamiento inductivo es el producto del flujo magnético y el número de espiras de alambre conductor vinculadas por el flujo, y se puede expresar en términos de la tensión v a través de la bobina como $\varphi = \int v\, dt$ o $v = d\varphi/dt$.

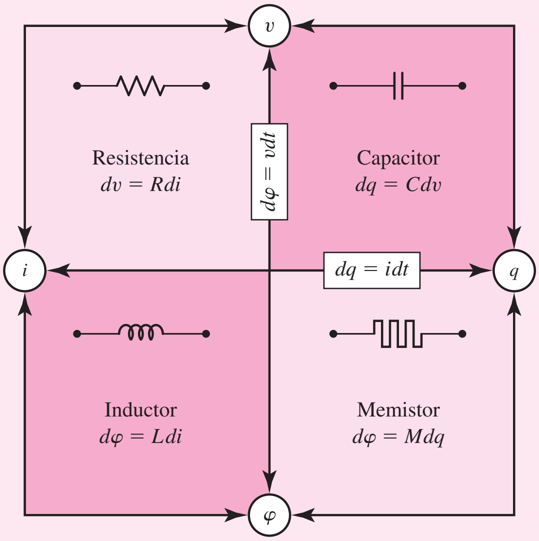


FIGURA 7.17 Representación gráfica de los cuatro elementos pasivos básicos de dos terminales (resistencia, capacitor, inductor y memistor) y sus interrelaciones. Observe que el acoplamiento inductivo se representa más comúnmente por la letra griega λ para distinguirlo del flujo: entonces $\lambda = N\varphi$, donde N es el número de espiras y φ es el flujo. (Se reimprime con permiso de Macmillan Publishers Ltd., Nature Publishing Group, "Electronics: The Fourth Element", volumen 453, p. 42, 2008.)

La figura 7.17 representa gráficamente cómo están interrelacionadas estas cuatro cantidades. Primero, además de cualesquier elementos de circuito y sus características, tenemos $dq = i\, dt$ (capítulo 2) y ahora $d\varphi = v\, dt$. La carga se relaciona con la tensión en el contexto de un capacitor, ya que $C = dq/dv$ o $dq = C\, dv$. El elemento que llamamos resistencia proporciona una relación directa entre la tensión y la corriente, lo cual, por congruencia, se puede expresar como $dv = R\, di$. Continuando con el viaje en sentido antihorario por el perímetro de la figura 7.17, observamos que la expresión original que conecta la tensión y la corriente correspondientes a un inductor se puede escribir en términos de la corriente i, y el acoplamiento inductivo φ, ya que al reacomodar se obtiene $v\, dt = L\, di$, y sabemos que $d\varphi = v\, dt$. Por lo tanto, para el inductor podemos escribir $d\varphi = L\, di$.

Hasta ahora, nuestro viaje ha sido de q a v con la ayuda de un capacitor, de v a i usando la resistencia, y de i a φ usando el inductor. Sin embargo, no hemos usado todavía ningún elemento para conectar φ y q, aunque la simetría sugiere que tal cosa debe ser posible. A principios de la década de 1970, Leon Chua se puso a pensar en esto y postuló un nuevo dispositivo —un elemento "faltante" de circuito de dos terminales— y lo llamó ***memistor***[1] (en inglés "memristor"). Procedió a demostrar que las características eléctricas del memistor deben ser no lineales, y dependen de su historia: en otras palabras, un memistor se puede caracterizar por tener una memoria (de ahí su nombre). Independientemente de su trabajo, otros han propuesto un dispositivo similar, no tanto por su uso práctico en circuitos reales como por su potencial en el modelado de dispositivos y en el procesamiento de señales.

Después, no se oyó mucho sobre este elemento hipotético, al menos hasta que Dmitri Strukov y sus colaboradores en los laboratorios HP en Palo Alto publicaron un breve trabajo en 2008 afirmando haber "encontrado" el memistor.[2] Ofrecen diversas razones por las que se necesitaron casi cuatro décadas para realizar el tipo general de dispositivo sobre el que Chua lanzó su hipótesis en 1971, pero una de las razones más interesantes tenía que ver con el tamaño. Para hacer su memistor prototipo, jugó un papel clave la *nanotecnología* (el arte de fabricar dispositivos con por lo menos una dimensión menor de 1 000 nm, que es aproximadamente 1% del diámetro del cabello humano). Una capa de óxido de 5 nm de espesor emparedada entre electrodos de platino constituye todo el dispositivo. Las características eléctricas no lineales del prototipo generó inmediatamente gran entusiasmo, especialmente por sus aplicaciones potenciales en circuitos integrados, en los que los dispositivos ya están llegando a sus tamaños prácticos más pequeños; y muchos creen que se necesitarán nuevos tipos de dispositivos para aumentar más la densidad y la funcionalidad de los circuitos integrados. Si el memistor es el elemento de circuito que permitirá esto, queda por verse; a pesar del informe de un prototipo, queda mucho trabajo por realizar antes de que se vuelva práctico.

---

[1] L. O. Chua. "Memristor–The missing circuit element", *IEEE Transactions on Circuit Theory* **CT-18** (**5**), 1971, p. 507.

[2] D. V. Strukov, G. S. Snider, D. R. Stewart y R. S. Williams, "The missing memristor found", *Nature* **453**, 2008, p. 80.

7.3 COMBINACIÓN DE INDUCTANCIA Y CAPACITANCIA

Ahora que añadimos el inductor y el capacitor a la lista de elementos de circuitos pasivos, necesitamos decidir si seguirán siendo o no válidos los métodos desarrollados para analizar circuitos resistivos. También será conveniente aprender cómo sustituir combinaciones en serie y en paralelo de cualquiera de estos elementos con equivalentes más simples, del mismo modo que hicimos en el capítulo 3 con resistencias.

Consideraremos primero las dos leyes de Kirchhoff, ya que ambas son axiomáticas. Sin embargo, cuando se supusieron estas dos leyes, lo hicimos sin restricciones en cuanto a los tipos de elementos que constituían la red. Por lo tanto, ambas mantienen su validez.

Inductores en serie

Ahora podríamos ampliar los procedimientos obtenidos para reducir diversas combinaciones de resistencias en una resistencia equivalente a los casos análogos de inductores y capacitores. Consideraremos primero una fuente de tensión ideal aplicada a una combinación en serie de N inductores, como en la figura 7.18*a*. Deseamos un solo inductor equivalente, con inductancia L_{eq}, el cual debe sustituir la combinación en serie, de modo que la corriente de la fuente $i(t)$ permanezca invariable. El circuito equivalente se muestra en la figura 7.18*b*. Aplicando la LVK al circuito original,

$$\begin{aligned} v_s &= v_1 + v_2 + \cdots + v_N \\ &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \cdots + L_N \frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + \cdots + L_N) \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

o, de manera más concisa:

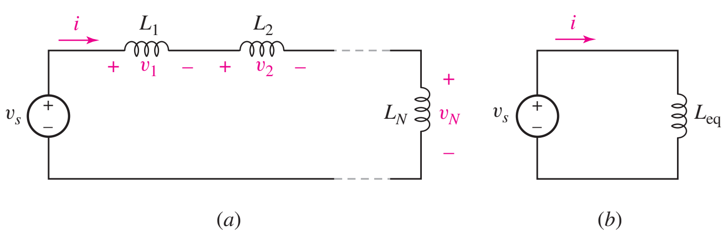
$$v_s = \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} L_n \frac{di}{dt} = \frac{di}{dt} \sum_{n=1}^{N} L_n$$

Sin embargo, en el caso del circuito equivalente tenemos

$$v_s = L_{\text{eq}} \frac{di}{dt}$$

y en consecuencia la inductancia equivalente está dada por

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + \cdots + L_N$$

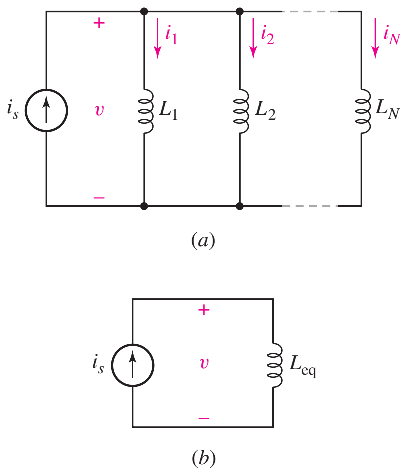


■ **FIGURA 7.18** (*a*) Circuito que contiene N inductores en serie. (*b*) Circuito equivalente deseado, en el que $L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + \cdots + L_N$.

o

$$L_{eq} = \sum_{n=1}^{N} L_n \qquad [11]$$

El inductor equivalente a varios inductores conectados en serie es aquel cuya inductancia equivalga a la suma de las inductancias del circuito original, que *es exactamente el mismo resultado que se obtuvo en el caso de resistencias en serie.*



■ **FIGURA 7.19** (*a*) Combinación en paralelo de *N* inductores. (*b*) Circuito equivalente, donde $L_{eq} = [1/L_1 + 1/L_2 + \cdots + 1/L_N]^{-1}$.

Inductores en paralelo

La combinación de varios inductores en paralelo se logra escribiendo la ecuación nodal particular del circuito original, el cual se muestra en la figura 7.19*a*,

$$i_s = \sum_{n=1}^{N} i_n = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{L_n} \int_{t_0}^{t} v\,dt' + i_n(t_0) \right]$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{L_n} \right) \int_{t_0}^{t} v\,dt' + \sum_{n=1}^{N} i_n(t_0)$$

y comparándola con el resultado del circuito equivalente de la figura 7.19*b*, se obtiene

$$i_s = \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^{t} v\,dt' + i_s(t_0)$$

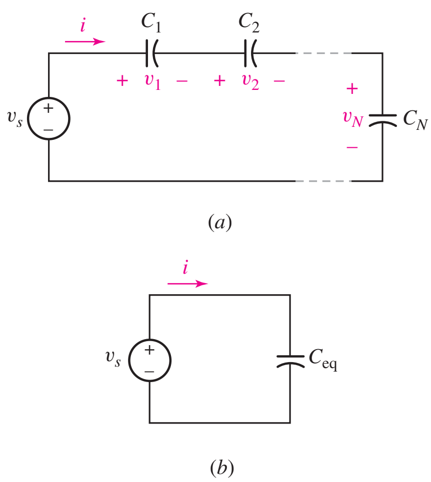
En razón de que la ley de corrientes de Kirchhoff exige que $i_s(t_0)$ sea igual a la suma de las corrientes de rama en t_0, los dos términos integrales deben ser iguales; por consiguiente:

$$L_{eq} = \frac{1}{1/L_1 + 1/L_2 + \cdots + 1/L_N} \qquad [12]$$

En el caso especial de dos inductores en paralelo tenemos:

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \qquad [13]$$

en donde observamos que los inductores en paralelo se combinan de la misma forma en que lo hacen las resistencias en paralelo.



■ **FIGURA 7.20** (*a*) Circuito que contiene *N* capacitores. (*b*) Circuito equivalente deseado, donde $C_{eq} = [1/C_1 + 1/C_2 + \cdots + 1/C_N]^{-1}$.

Capacitores en serie

Para determinar un capacitor que es equivalente a *N* capacitores en serie, usamos el circuito de la figura 7.20*a* y su equivalente de la figura 7.20*b* para escribir

$$v_s = \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{C_n} \int_{t_0}^{t} i\,dt' + v_n(t_0) \right]$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{C_n} \right) \int_{t_0}^{t} i\,dt' + \sum_{n=1}^{N} v_n(t_0)$$

y

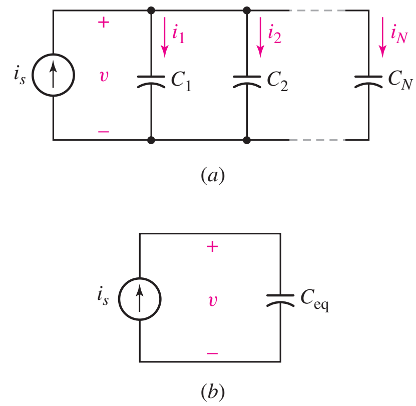
$$v_s = \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^{t} i\,dt' + v_s(t_0)$$

Sin embargo, la ley de tensiones de Kirchhoff establece la igualdad de $v_s(t_0)$ y la suma de las tensiones de capacitores en t_0; de tal modo,

$$C_{eq} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + \cdots + 1/C_N} \qquad [14]$$

por lo que los capacitores en serie se combinan como lo hacen las conductancias en serie, o las resistencias en paralelo. El caso especial de dos capacitores en serie, desde luego, da como resultado:

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \qquad [15]$$



■ **FIGURA 7.21** (*a*) Combinación en paralelo de N capacitores. (*b*) Circuito equivalente, donde $C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$.

Capacitores en paralelo

Por último, los circuitos de la figura 7.21 permiten establecer el valor del capacitor equivalente a N capacitores en paralelo, como

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N \qquad [16]$$

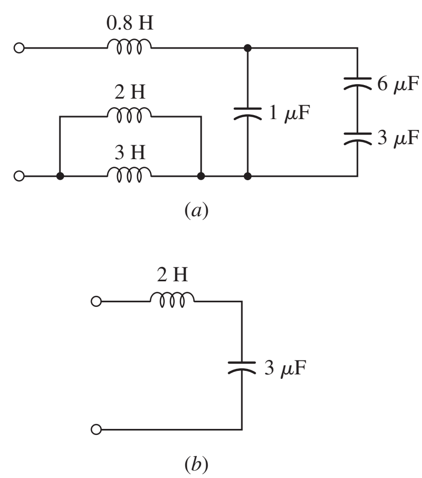
así que no resulta sorprendente observar que los capacitores en paralelo se combinan de la misma manera en que lo hacen las resistencias en serie; esto es, simplemente se suman las capacitancias individuales.

Bien vale la pena memorizar estas fórmulas. Las que se aplican a combinaciones de inductores en serie y en paralelo resultan idénticas a las de resistencias, por lo que suelen parecer “obvias”. Sin embargo, hay que tener cuidado en el caso de las expresiones correspondientes a las combinaciones de capacitores en serie y en paralelo, ya que son opuestas a las de resistencias e inductores s, y con frecuencia provocan errores cuando los cálculos se hacen muy a la ligera.

EJEMPLO 7.8

Simplifique la red de la figura 7.22*a* mediante combinaciones serie/paralelo.

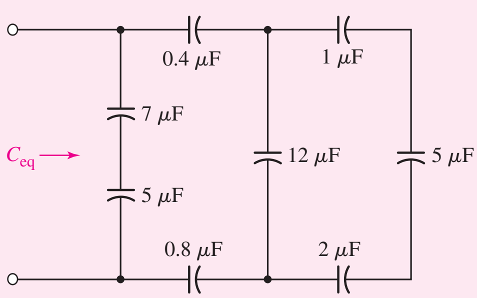
Los capacitores de 6 μF y 3 μF se combinan primero en un capacitor equivalente de 2 μF y éste luego se combina con un elemento de 1 μF con el que está en paralelo para producir una capacitancia equivalente de 3 μF. Además, los inductores de 3 H y 2 H se sustituyen por un inductor equivalente de 1.2 H, que se suma después al elemento de 0.8 H para formar una inductancia total equivalente de 2 H. La red equivalente mucho más simple (y quizá menos costosa) se muestra en la figura 7.22*b*.



■ **FIGURA 7.22** (*a*) Red *LC* dada. (*b*) Circuito equivalente más simple.

PRÁCTICA

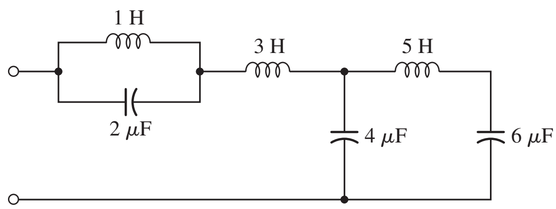
7.8 Determine C_{eq} de la red de la figura 7.23.



■ **FIGURA 7.23**

Respuesta: 3.18 μF.

La red de la figura 7.24 contiene tres inductores y tres capacitores, pero no pueden hacerse combinaciones en serie o paralelo de los inductores o los capacitores. No podemos simplificar esta red mediante las técnicas que se presentan en este texto.



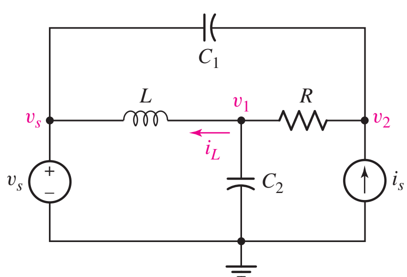
■ **FIGURA 7.24** Red *LC* en la que no es posible efectuar combinaciones en serie o en paralelo de inductores o de capacitores.

7.4 CONSECUENCIAS DE LA LINEALIDAD

Ahora volvamos al análisis nodal y de malla. En razón de que ya sabemos que podríamos aplicar con seguridad las leyes de Kirchhoff, las escribiremos en un conjunto de ecuaciones que sean suficientes e independientes. Sin embargo, serán ecuaciones integrodiferenciales lineales con coeficientes constantes, que si son difíciles de pronunciar, son más difíciles de resolver. En consecuencia, las escribiremos ahora para familiarizarnos con el uso de las leyes de Kirchhoff en circuitos *RLC*; además, explicaremos la solución de los casos más simples en los capítulos subsecuentes.

EJEMPLO 7.9

Escriba las ecuaciones nodales apropiadas del circuito de la figura 7.25.



■ **FIGURA 7.25** Circuito *RLC* de cuatro nodos con tensiones de nodo asignadas.

Las tensiones de nodo se eligen como se indica y sumamos las corrientes que salen del nodo central:

$$\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}(v_1 - v_s)\,dt' + i_L(t_0) + \frac{v_1 - v_2}{R} + C_2\frac{dv_1}{dt} = 0$$

donde $i_L(t_0)$ es el valor de la corriente del inductor en el tiempo en el que empieza la integración. En el nodo del lado derecho,

$$C_1\frac{d(v_2 - v_s)}{dt} + \frac{v_2 - v_1}{R} - i_s = 0$$

Al reexpresar estas ecuaciones,

$$\frac{v_1}{R} + C_2\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_1\,dt' - \frac{v_2}{R} = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_s\,dt' - i_L(t_0)$$

$$-\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + C_1\frac{dv_2}{dt} = C_1\frac{dv_s}{dt} + i_s$$

Éstas son las ecuaciones integrodiferenciales prometidas y observamos varios asuntos interesantes en relación con ellas. Primero, ocurre que la fuente de tensión v_s entra en las ecuaciones como una integral y como una derivada, no simplemente como v_s. Puesto que ambas fuentes están especificadas para todo el tiempo, podríamos evaluar la derivada o la integral. Segundo, el valor inicial de la corriente del inductor, $i_L(t_0)$, actúa como una corriente de fuente (constante) en el nodo central.

PRÁCTICA

7.9 Si $v_C(t) = 4 \cos 10^5 t$ V en el circuito de la figura 7.26, determine $v_s(t)$.

Respuesta: $-2.4 \cos 10^5 t$ V.

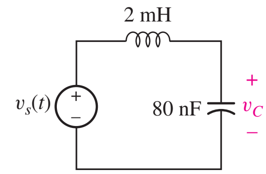


FIGURA 7.26

No intentaremos resolver la ecuación integrodiferencial en este momento. Sin embargo, vale la pena señalar que cuando las funciones forzadas de tensión son funciones senoidales del tiempo, se podrá definir una razón de tensión-corriente (denominada ***impedancia***) o una razón de corriente-tensión (llamada ***admitancia***) para cada uno de los tres elementos pasivos. Los factores que funcionan bajo las dos tensiones de nodo de las ecuaciones precedentes, se convertirán entonces en simples factores multiplicadores, por lo que las ecuaciones serán otra vez algebraicas lineales y podríamos resolverlas mediante determinantes o por una simple eliminación de variables, como antes.

También podríamos demostrar que los beneficios de la linealidad se aplican de igual modo a los circuitos *RLC*. De acuerdo con nuestra definición previa de un circuito lineal, tales circuitos son también lineales, debido a que las relaciones tensión-corriente para el inductor y el capacitor son lineales. Para el inductor, tenemos

$$v = L\frac{di}{dt}$$

y la multiplicación de la corriente por alguna constante K tiene como resultado una tensión que es también más grande por un factor K. En la formulación integral,

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\, dt' + i(t_0)$$

puede verse que si cada término se incrementa por un factor de K, entonces el valor inicial de la corriente debe aumentarse por este mismo factor.

El análisis correspondiente del capacitor muestra que también es lineal. Por consiguiente, un circuito compuesto por fuentes independientes, fuentes dependientes lineales, y resistencias, inductores y capacitores lineales es un circuito lineal.

En este circuito lineal la respuesta resulta otra vez proporcional a la función forzada. La prueba del enunciado se obtiene escribiendo primero un sistema general de ecuaciones integrodiferenciales. Coloquemos todos los términos que tienen la forma Ri, $L\, di/dt$ y $1/C \int i\, dt$ en el miembro izquierdo de cada ecuación, y conservemos las tensiones de fuente independiente en el miembro derecho. Como simple ejemplo, una de las ecuaciones podría tener la forma

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\, dt' + v_C\,(t_0) = v_s$$

Si cada fuente independiente se incrementa ahora por un factor K, el miembro derecho de cada ecuación es multiplicado por ese mismo factor. En estas condiciones, cada término del miembro izquierdo es un término lineal que incluye alguna corriente de lazo, o una tensión de capacitor inicial. A fin de provocar que todas las respuestas (corrientes de lazo) se incrementen por un factor K, resulta patente que también debemos aumentar las tensiones de capacitor iniciales por un factor K. Es decir, debemos tratar a la tensión inicial del capacitor como una tensión de fuente independiente e incrementarla del mismo modo por un factor K. De manera similar, las corrientes de inductor iniciales aparecen como corrientes de fuente independiente en el análisis nodal.

Por lo tanto, el principio de proporcionalidad entre fuentes y respuesta se extiende al circuito *RLC* general, y se deduce que también se aplica el principio de superposición. Debe subrayarse que las corrientes iniciales del inductor y las tensiones iniciales

del capacitor deben considerarse como fuentes independientes al aplicar el principio de superposición; cada valor inicial se desactiva de acuerdo con su turno. En el capítulo 5 aprendimos que el principio de superposición es una consecuencia natural de la naturaleza lineal de los circuitos resistivos, los cuales son lineales debido a que la relación tensión-corriente de la resistencia es lineal, al igual que las leyes de Kirchhoff.

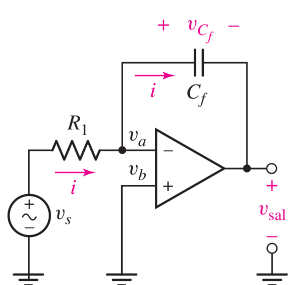
Sin embargo, antes de aplicar el principio de superposición a circuitos *RLC* debemos establecer métodos para resolver las ecuaciones que describen a estos circuitos cuando sólo está presente una fuente independiente. Esta vez es importante estar convencidos de que un circuito lineal poseerá una respuesta cuya amplitud es proporcional a la amplitud de la fuente. Debemos estar preparados para aplicar después la superposición, al considerar una corriente de inductor o una tensión de capacitor especificada en $t = t_0$ como una fuente que debe eliminarse cuando le llega su turno.

Los teoremas de Thévenin y Norton se basan en la linealidad del circuito inicial, en la aplicabilidad de las leyes de Kirchhoff y en el principio de superposición. El circuito *RLC* general satisface por completo estos requisitos, por lo cual se concluye que todos los circuitos lineales que contienen cualesquiera combinaciones de fuentes de tensión y de corriente independientes, fuentes de tensión y de corriente lineales dependientes, y resistencias, inductores y capacitores lineales se analizan con el uso de ambos teoremas, si lo deseamos.

7.5 CIRCUITOS DE AMP OP SIMPLES CON CAPACITORES

En el capítulo anterior se nos presentaron varios tipos diferentes de circuitos de amplificador basados en el amp op ideal. En casi todos los casos demostramos que la salida se relacionaba con la tensión de entrada mediante alguna combinación de razones de resistencias. Si sustituimos una o más de tales resistencias por un capacitor, obtendremos algunos circuitos interesantes en los que la salida resulta proporcional a la derivada o la integral de la tensión de entrada. Dichos circuitos tienen amplias aplicaciones en la práctica. Por ejemplo, se conecta un sensor de velocidad a un circuito de amp op que da una señal proporcional a la aceleración, o se obtiene una señal de salida que representa la carga total incidente sobre un electrodo metálico durante un tiempo específico al sólo integrar la corriente medida.

Para crear un integrador mediante un amp op ideal, conectamos a tierra la entrada no invertida, instalamos un capacitor ideal como un elemento de retroalimentación desde la salida de regreso a la entrada invertida y conectamos una fuente de señales v_s a la entrada invertida a través de una resistencia ideal, como se muestra en la figura 7.27.



■ **FIGURA 7.27** Amp op ideal conectado como un integrador.

Al efectuar el análisis nodal en la entrada invertida,

$$0 = \frac{v_a - v_s}{R_1} + i$$

Podemos relaciona la corriente i con la tensión en el capacitor,

$$i = C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

lo cual da

$$0 = \frac{v_a - v_s}{R_1} + C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

Con base en la regla 2 del amp op, sabemos que $v_a = v_b = 0$, por lo que

$$0 = \frac{-v_s}{R_1} + C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

Integrando y despejando v_{sal}, obtenemos

$$v_{C_f} = v_a - v_{sal} = 0 - v_{sal} = \frac{1}{R_1 C_f}\int_0^t v_s\, dt' + v_{C_f}(0)$$

o

$$v_{sal} = -\frac{1}{R_1 C_f}\int_0^t v_s\, dt' - v_{C_f}(0) \qquad [17]$$

Por lo tanto, combinamos una resistencia, un capacitor y un amp op para formar un integrador. Observamos que el primer término de la salida es $1/RC$ veces el negativo de la integral de la entrada desde $t' = 0$ hasta t, además, el segundo término es el negativo del valor inicial de v_{Cf}. El valor de $(RC)^{-1}$ se iguala con la unidad si deseamos elegir $R = 1$ MΩ y $C = 1\mu$F, por ejemplo; podríamos hacer otras elecciones que aumentaran o disminuyeran la tensión de salida.

Antes de concluir con el circuito integrador, podríamos anticipar una pregunta al lector crítico: ¿*Podríamos usar un inductor en lugar del capacitor y obtener un diferenciador*? En realidad sí, pero los diseñadores de circuito suelen evitar, siempre que es posible, el uso de inductores debido a su tamaño, peso y costo, así como a la resistencia y a la capacitancia asociadas. En vez de eso, intercambiamos las posiciones de la resistencia y el capacitor en la figura 7.27 y obtenemos un diferenciador.

EJEMPLO 7.10

Obtenga la expresión de la tensión de salida del circuito de amp op que se muestra en la figura 7.28.

Comenzamos escribiendo una ecuación nodal en la patilla (terminal) de entrada invertida, con $v_{C_1} \triangleq v_a - v_s$:

$$0 = C_1\frac{dv_{C_1}}{dt} + \frac{v_a - v_{sal}}{R_f}$$

De acuerdo con la regla 2 del amp op, $v_a = v_b = 0$. De tal modo,

$$C_1\frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{v_{sal}}{R_f}$$

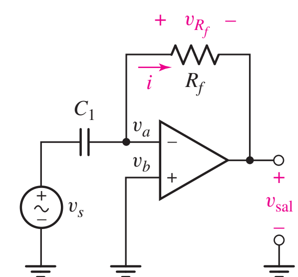
Despejando para v_{sal},

$$v_{sal} = R_f C_1\frac{dv_{C_1}}{dt}$$

Puesto que $v_{C_1} = v_a - v_s = -v_s$,

$$v_{sal} = -R_f C_1\frac{dv_s}{dt}$$

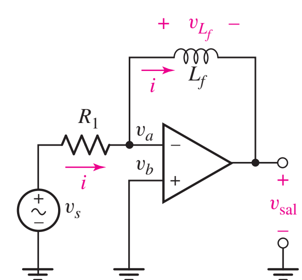
Así, al intercambiar la resistencia y el capacitor entre sí en el circuito de la figura 7.27, obtenemos un diferenciador en lugar de un integrador.



■ **FIGURA 7.28** Amp op ideal conectado como un diferenciador.

PRÁCTICA

7.10 Obtenga la expresión de v_{sal} en términos de v_s en el circuito de la figura 7.29.

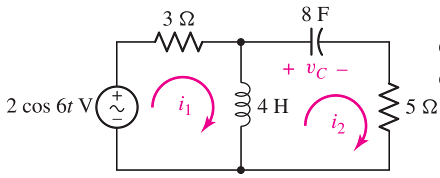


■ **FIGURA 7.29**

Respuesta: $v_{sal} = -L_f/R_1 dv_s/dt$.

7.6 DUALIDAD

La idea de ***dualidad*** se aplica a muchos conceptos fundamentales de ingeniería. En esta sección definiremos la dualidad en términos de las ecuaciones de circuito. Dos circuitos son "duales" si las ecuaciones de malla que caracterizan a uno de ellos tienen la *misma forma matemática* que las ecuaciones nodales que caracterizan al otro. Se dice que son duales exactos si cada ecuación de malla de un circuito es numéricamente idéntica a la ecuación nodal correspondiente del otro; desde luego, las variables de corriente y de tensión por sí mismas no pueden ser idénticas. La dualidad misma se refiere sólo a cualquiera de las propiedades exhibidas por los circuitos duales.



■ **FIGURA 7.30** Circuito dado para el que la definición de dualidad se aplica a fin de determinar el circuito dual. Observe que $v_C(0) = 10$ V.

Interpretaremos la definición y utilicémosla para construir un circuito dual exacto escribiendo las dos ecuaciones de malla para el circuito de la figura 7.30. Asignamos dos corrientes de malla i_1 e i_2 y obtenemos las siguientes ecuaciones de malla:

$$3i_1 + 4\frac{di_1}{dt} - 4\frac{di_2}{dt} = 2\cos 6t \qquad [18]$$

$$-4\frac{di_1}{dt} + 4\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{8}\int_0^t i_2\,dt' + 5i_2 = -10 \qquad [19]$$

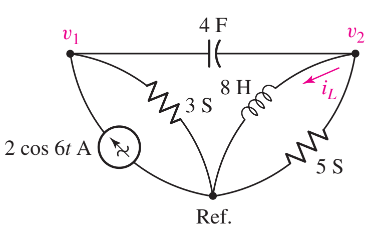
Podríamos ahora construir las dos ecuaciones que describen el dual exacto de nuestro circuito. Deseamos que sean ecuaciones nodales; por ello, comenzamos por la sustitución de las corrientes de mallas i_1 e i_2 en las ecuaciones [18] y [19] por dos tensiones de nodo con referencia a v_1 y v_2. Así obtenemos

$$3v_1 + 4\frac{dv_1}{dt} - 4\frac{dv_2}{dt} = 2\cos 6t \qquad [20]$$

$$-4\frac{dv_1}{dt} + 4\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{8}\int_0^t v_2\,dt' + 5v_2 = -10 \qquad [21]$$

y ahora buscamos el circuito representado por ambas ecuaciones nodales.

Dibujemos primero una línea para representar el nodo de referencia y luego establezcamos dos nodos en los que se ubiquen las referencias positivas de v_1 y v_2. La ecuación [20] indica que una fuente de corriente de 2 cos 6*t* A se conecta entre el nodo 1 y el nodo de referencia, orientado para proporcionar la corriente que entra en el nodo 1. La ecuación muestra también que aparece una conductancia de 3 S entre el nodo 1 y el nodo de referencia. Regresemos a la ecuación [21] y consideremos primero los términos no mutuos, es decir, aquellos que no aparecen en la ecuación [20]. Ellos indican que se conecta un inductor de 8 H y una conductancia de 5 S (en paralelo) entre el nodo 2 y el de referencia. Los dos términos semejantes de las ecuaciones [20] y [21] representan un capacitor de 4 F presente de manera mutua en los nodos 1 y 2; el circuito se completa conectando dicho capacitor entre los dos nodos. El término constante en el miembro derecho de la ecuación [21] es el valor de la corriente del inductor en $t = 0$; en otras palabras, $i_L(0) = 10$ A. El circuito dual se presenta en la figura 7.31; puesto que los dos conjuntos son numéricamente idénticos, los circuitos son duales exactos.



■ **FIGURA 7.31** Dual exacto del circuito de la figura 7.30.

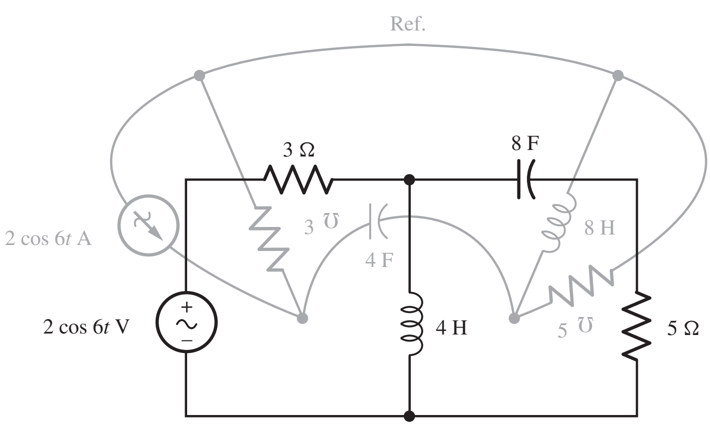
Los circuitos duales se pueden obtener con mayor rapidez por este método, ya que las ecuaciones no necesitan escribirse. Para construir el dual de un circuito dado, debemos considerar al circuito en términos de ecuaciones de malla. Con cada malla es necesario asociar un nodo de no referencia, y además, proporcionar el nodo de referencia. Por lo tanto, en el esquema del circuito dado ponemos un nodo en el centro

de cada malla e indicamos el nodo de referencia como una línea cerca del esquema o un lazo que lo encierra. Cada elemento que aparece de manera colectiva en las dos mallas es un elemento mutuo y origina términos idénticos, excepto por el signo, en las dos ecuaciones de malla correspondientes, por lo cual debemos sustituirlo por un elemento que proporcione el término dual en las dos ecuaciones nodales correspondientes. Por lo tanto, dicho elemento dual debe conectarse de manera directa entre los dos nodos de no referencia que están dentro de las mallas en las que aparecen los elementos mutuos dados.

La naturaleza del elemento dual se determina con facilidad; la forma matemática de las ecuaciones será la misma sólo si la inductancia se sustituye por la capacitancia, ésta por la inductancia, la conductancia por la resistencia, y la resistencia por la conductancia. De esta forma, el inductor de 4 H que es común a las mallas 1 y 2 del circuito de la figura 7.30 aparece como un capacitor de 4 F conectado en forma directa entre los nodos 1 y 2 del circuito dual.

Los elementos que aparecen sólo en una malla deben tener duales que aparezcan entre el nodo correspondiente y el nodo de referencia. Al considerar otra vez la figura 7.30, la fuente de tensión 2 cos 6*t* V aparece sólo en la malla 1; su *dual* es una fuente de corriente 2 cos 6*t* A, que se conecta sólo al nodo 1 y al de referencia. En razón de que la fuente de tensión se dirige en el sentido de las manecillas del reloj, la de la corriente debe estar dentro del nodo de no referencia dirigido. Por último, es necesario tomar provisiones respecto del dual de la tensión inicial presente en el capacitor de 8 F del circuito dado. Las ecuaciones nos demostraron que el dual de la tensión inicial en el capacitor es una corriente inicial a través del inductor del circuito dual; los valores numéricos son los mismos, así que el signo correcto de la corriente inicial tal vez se determine con mayor facilidad si consideramos como fuentes la tensión inicial en el circuito dado y la corriente inicial en el circuito dual. En consecuencia, si v_C en el circuito dado se ve como una fuente, aparecería como $-v_C$ en el miembro derecho de la ecuación de malla; en el circuito dual, si se pensara que la corriente i_L fuese una fuente, produciría un término $-i_L$ en el miembro derecho de la ecuación nodal. Debido a que cada una tiene el mismo signo cuando se consideran como fuente, entonces si $v_C(0) =$ 10 V, $i_L(0)$ debe ser 10 A.

El circuito de la figura 7.30 se repite en la figura 7.32, y su dual exacto se construye en el propio diagrama de circuito al dibujar sólo el dual de cada elemento dado entre los dos nodos que están dentro de las dos mallas comunes al elemento en cuestión. Quizá sea de utilidad un nodo de referencia que rodee al circuito dado. Después de que el circuito dual se vuelve a dibujar en una forma más normal, aparece como en la figura 7.31.



■ **FIGURA 7.32** Dual del circuito de la figura 7.30 que se construye en forma directa del diagrama de circuito.

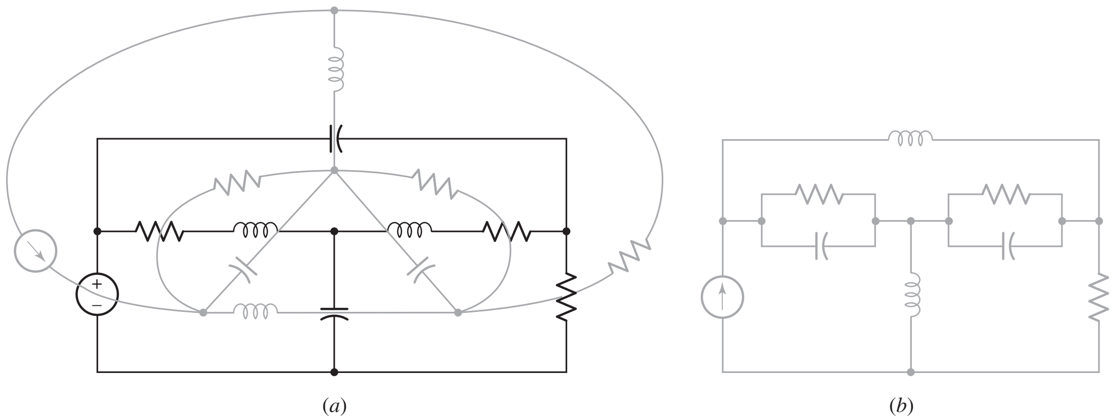


FIGURA 7.33 (*a*) Dual (en gris) de un circuito dado (en negro) construido sobre este último. (*b*) Circuito dual dibujado en forma más convencional a fin de compararlo con el original.

Un ejemplo adicional de la construcción de un circuito dual se presenta en las figuras 7.33*a* y *b*. Puesto que no se especifican valores de elementos particulares, ambos circuitos son duales, pero no necesariamente duales exactos. El circuito original tal vez se recupere del dual, al colocar un nodo en el centro de cada una de las cinco mallas de la figura 7.33*b* y proceder como se hizo con anterioridad.

El concepto de dualidad también se expresa con el lenguaje utilizado para describir el análisis o la operación de circuitos. Por ejemplo, si tenemos una fuente de tensión en serie con un capacitor, quizá deseemos plantear un importante enunciado: "*La fuente de tensión provoca que fluya una corriente por el capacitor*", cuyo enunciado dual es: "*la fuente de corriente ocasiona que exista una tensión entre los extremos del inductor*". El dual de un enunciado expresado de manera menos cuidadosa, como "*la corriente circula una y otra vez por un circuito en serie*", quizá requiera un poco menos de inventiva.[4]

Podemos practicar el uso del lenguaje dual leyendo el teorema de Thévenin en este sentido; de ello debe resultar el teorema de Norton.

Hemos hablado de elementos, lenguaje y circuitos duales. ¿Qué sucede con una red dual? Consideremos una resistencia R y un inductor L en serie. El dual de dicha red de dos terminales existe y se obtiene con mayor facilidad al conectar alguna fuente ideal a esa red. El circuito dual se obtiene entonces como la fuente dual en paralelo con una conductancia G de misma magnitud que R, y una capacitancia C que tiene la misma magnitud que L. Consideramos la red dual como la red de dos terminales que se conecta a una fuente dual; así pues, corresponde a un par de terminales entre las cuales G y C se conectan en paralelo.

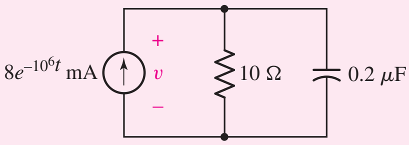
Antes de dejar la definición de dualidad, debemos señalar que se define con base en las ecuaciones de malla y nodales. En razón de que los circuitos no planares (forma no plana) se describen mediante un sistema de ecuaciones de malla, un circuito que no pueda dibujarse en forma planar no posee un dual.

Sobre todo, usamos la dualidad a fin de reducir el trabajo que debemos efectuar para analizar los circuitos estándares simples. Luego de analizar el circuito *RL* en serie, el circuito *RC* en paralelo requiere menos atención, no porque sea menos importante, sino en virtud de que ya se conoce el análisis de la red dual. Debido a que el análisis de algunos circuitos complicados no se presta a conocerse bien, a menudo la dualidad no proporcionará una solución rápida.

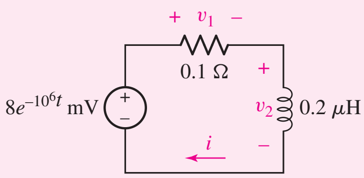
[4] Alguien sugirió: "la tensión es la misma en los extremos del circuito en paralelo".

PRÁCTICA

7.11 Escriba una ecuación nodal simple del circuito de la figura 7.34*a*, y muestre, mediante sustitución directa, que $v = -80e^{-10^6 t}$ mV es una solución. Con base en lo anterior, determine (*a*) v_1; (*b*) v_2, y (*c*) i para el circuito de la figura 7.34*b*.



(*a*)



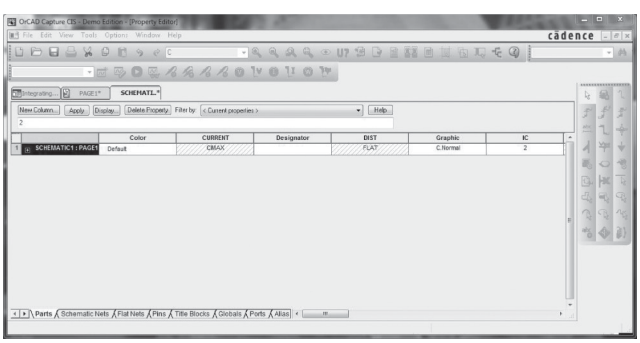
(*b*)

FIGURA 7.34

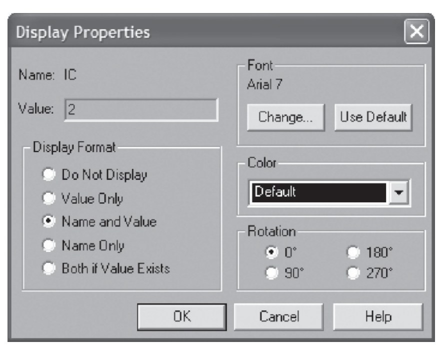
Respuestas: $-8e^{-10^6 t}$ mV; $16e^{-10^6 t}$ mV; $-80e^{-10^6 t}$ mA.

7.7 CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DE CAPACITORES E INDUCTORES CON PSPICE

Cuando se usa PSpice para analizar circuitos que contienen inductores y capacitores, con frecuencia se necesita especificar la condición inicial de cada elemento [es decir, $v_C(0)$ e $i_L(0)$]. Lo anterior se consigue haciendo doble clic sobre el símbolo del elemento, lo que despliega la ventana de diálogo que se muestra en la figura 7.35*a*. En el extremo derecho (no se muestra), podemos ver el valor de la capacitancia, el cual es por omisión igual a 1 nF. Especificamos también la condición inicial (**IC**), a 2 V en la figura 7.35*a*. Si hacemos clic en el botón derecho del ratón y seleccionamos **Display**, se presenta la ventana de diálogo que se muestra en la figura 7.35*b*, la cual permite que se despliegue la condición inicial en el diagrama. El procedimiento para configurar la condición inicial de un inductor es, esencialmente, el mismo. Asimismo, podemos observar que cuando el capacitor se pone primero en el esquema aparece en forma horizontal; la terminal de referencia positiva de la tensión inicial es la terminal *izquierda*.



(*a*)

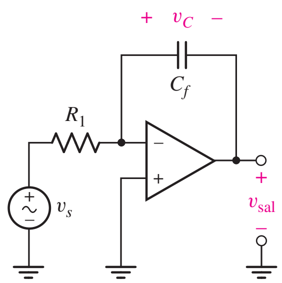


(*b*)

FIGURA 7.35 (*a*) Ventana de edición de las propiedades del capacitor. (*b*) Ventana de diálogo de las propiedades de despliegue obtenida al hacer clic derecho en condición inicial (IC).

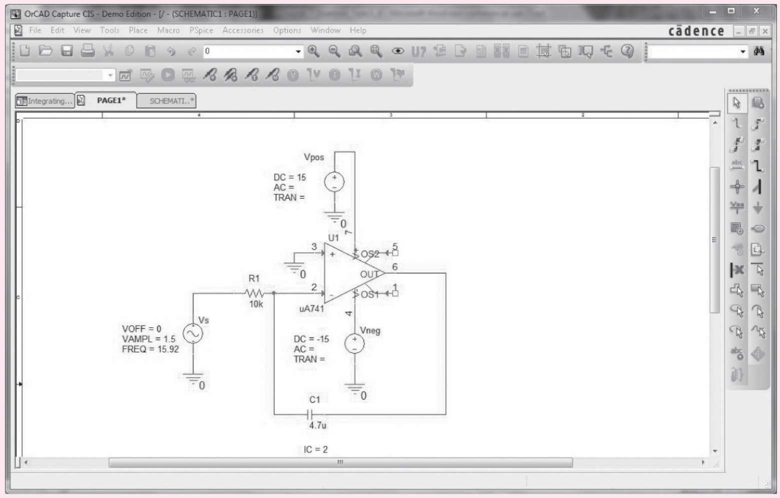
EJEMPLO 7.11

Simule la forma de onda de la tensión de salida del circuito de la figura 7.36 si $v_s = 1.5$ sen $100t$ V, $R_1 = 10$ kΩ, $C_f = 4.7$ μF y $v_C(0) = 2$ V.



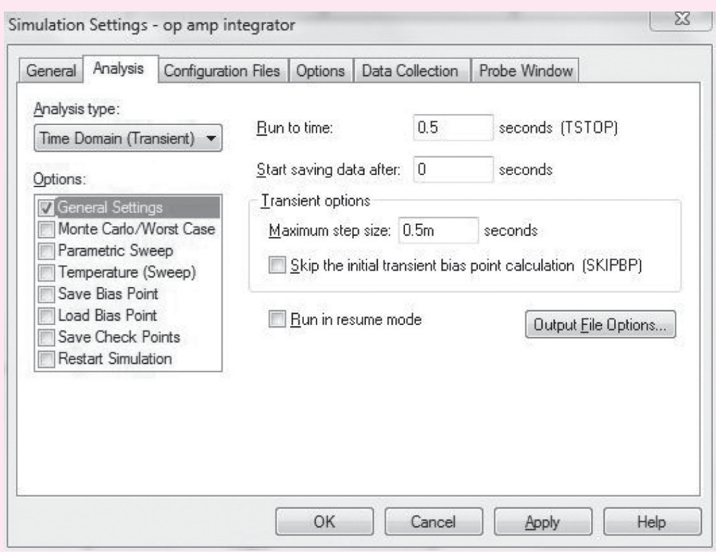
■ **FIGURA 7.36** Circuito de un amp op integrador.

Empezamos dibujando el circuito esquemático, cerciorándonos de establecer la tensión inicial en el capacitor (fig. 7.37). Observe que fue necesario convertir la frecuencia de 100 rad/s en $100/2\pi = 15.92$ Hz.



■ **FIGURA 7.37** Representación esquemática del circuito que se muestra en la figura 7.36 donde la tensión inicial del capacitor tiene un valor de 2 V.

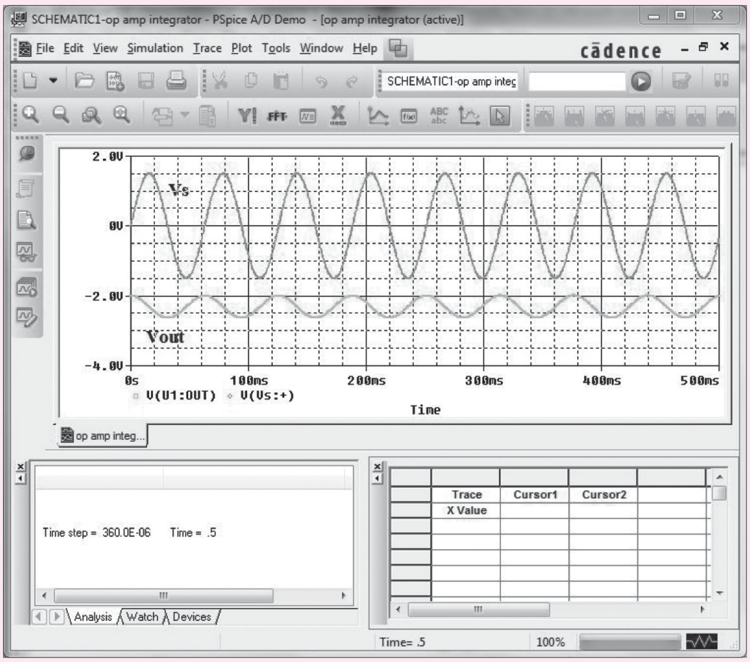
Para obtener tensiones y corrientes variables en el tiempo, necesitamos efectuar lo que se conoce como *análisis transitorio*. En el menú **PSpice** se crea un **New Simulation Profile** con el nombre **op amp integrator**, el cual conduce al cuadro de diálogo que se muestra en la figura 7.38. **Run to time** representa el



■ **FIGURA 7.38** Ventana de diálogo para configurar un análisis transitorio. Seleccionamos un tiempo final de 0.5 s para obtener varios periodos de la forma de onda de salida ($1/15.92 \approx 0.06$ s).

momento en el que terminará la simulación; PSpice seleccionará sus tiempos discretos en los que hará los cálculos de las diferentes tensiones y corrientes. En ocasiones obtenemos un mensaje de error que anuncia que no pudo converger la solución transitoria o que la forma de onda de salida no está tan pareja como esperábamos. En dichas situaciones, es de utilidad configurar un valor en **Maximum step size,** el cual se fijó en 0.5 en este ejemplo.

Del análisis anterior y de la ecuación [17], esperamos que la salida sea proporcional a la integral negativa de la forma de onda de entrada, es decir, $v_{sal} = 0.319 \cos 100t - 2.319$ V, como se muestra en la figura 7.39. La condición inicial de 2 V en el capacitor se combina con un término constante a partir de la integración para dar como resultado un *valor promedio diferente de cero* a la salida, a diferencia de la entrada que tiene un valor promedio de cero.



■ **FIGURA 7.39** Salida de prueba del circuito integrador simulado junto con la forma de onda de entrada para efectos de comparación.

RESUMEN Y REPASO

Se puede modelar eficazmente un gran número de circuitos prácticos usando únicamente resistencias y fuentes de tensión y corriente. Sin embargo, los casos más interesantes de la vida diaria incluyen de alguna manera algo que cambia con el tiempo y, en tales casos, las capacitancias e inductancias intrínsecas pueden volverse importantes. Asimismo, empleamos deliberadamente tales elementos de almacenamiento de energía, por ejemplo, en el diseño de filtros selectivos de frecuencia, bancos de capacitores y motores de vehículos eléctricos. Un capacitor *ideal* se modela como si tuviera una resistencia en derivación infinita y una corriente que depende de la rapidez de cambio entres sus terminales con respecto al tiempo. La capacitancia se mide en unidades *faradios* (F). Recíprocamente, un inductor *ideal* se modela como si tuviera cero resistencia en serie y una tensión entre sus terminales que depende de la rapidez de cambio de la corriente con respecto al tiempo. La inductancia se mide en unidades *henrys* (H).

Cualquiera de estos elementos puede *almacenar energía*; la cantidad de energía presente en un capacitor (almacenada en su campo eléctrico) es proporcional al *cuadrado* de la tensión entre sus terminales, y la cantidad de energía presente en un inductor (almacenada en su campo magnético) es proporcional al *cuadrado* de su corriente.

Como se encontró para las resistencias, se pueden simplificar algunas conexiones de capacitores (o inductores) usando combinaciones en serie y en paralelo. La validez de tales equivalentes proviene de las leyes LCK y LVK. Una vez que hemos simplificado un circuito tanto como sea posible (cuidando de no "eliminar por combinación" un componente que se usa para definir una corriente o una tensión que interesa), podemos aplicar el análisis nodal y de mallas a circuitos con capacitores e inductores. Sin embargo, las ecuaciones integrodiferenciales que resultan con frecuencia no son triviales para su resolución y, por lo tanto, consideraremos algunos procedimientos prácticos en los dos capítulos siguientes. Los circuitos sencillos, sin embargo, tales como los que incluyen un solo amplificador operacional, se pueden analizar fácilmente. Hemos descubierto (con sorpresa) que tales circuitos se pueden usar como *integradores* o *diferenciadores* de señal. En consecuencia, generan una señal de salida que nos dice cómo varía con el tiempo alguna cantidad introducida (por ejemplo, acumulando carga durante la implantación de iones en una oblea de silicio).

Como nota final, los capacitores y los inductores constituyen un ejemplo especialmente fuerte del concepto llamado *dualidad*. Las leyes LCK y LVK, el análisis nodal y de mallas, son otros ejemplos. Los circuitos rara vez se analizan usando esta idea; sin embargo, es importante, ya que la implicación es que únicamente se necesita conocer cerca de "la mitad" del conjunto completo de conceptos y luego saber cómo interpretar el resto. Hay personas que encuentran que esto ayuda; otras no. De cualquier manera, los capacitores y los inductores son sencillos de modelar en PSpice y otras herramientas de simulación de circuitos, lo cual permite verificar las respuestas. La diferencia entre estos elementos y las resistencias en tales paquetes de software es que debemos tener cuidado de *establecer correctamente las condiciones iniciales.*

Como ayuda adicional para el repaso, aquí damos una lista de algunos puntos clave del capítulo e identificamos los ejemplos pertinentes.

- La corriente que circula por el capacitor está dada por $i = C\,dv/dt$. (Ejemplo 7.1)
- La tensión en el capacitor se relaciona con su corriente por medio de:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt' = v(t_0)$$

  (Ejemplo 7.2)
- Un capacitor es un *circuito abierto* en cd. (Ejemplo 7.1)
- La tensión en un inductor está dada por $v = L\,di/dt$. (Ejemplos 7.4, 7.5)
- La corriente que circula por un inductor se relaciona con su tensión mediante:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' + i(t_0)$$

  (Ejemplo 7.6)
- Un inductor es un *cortocircuito* en cd. (Ejemplos 7.4, 7.5)
- La energía almacenada en el capacitor está dada por $\frac{1}{2}Cv^2$; mientras que la energía almacenada en el inductor está dada por $\frac{1}{2}Li^2$; ambas están referidas al momento en el que no se almacenó energía. (Ejemplos 7.3, 7.7)
- Las combinaciones de inductores en serie y en paralelo se combinan mediante la aplicación de las mismas ecuaciones que las de resistencias. (Ejemplo 7.3)

- Las combinaciones de capacitores en serie y en paralelo funcionan de manera *opuesta* a la de las resistencias. (Ejemplo 7.8)
- En razón de que los capacitores y los inductores son elementos lineales, la LVK, la LCK, la superposición, los teoremas de Thévenin y Norton, así como los análisis nodal y de malla, se aplican también en sus circuitos. (Ejemplo 7.9)
- Un capacitor como el elemento de retroalimentación de un amp op inversor origina una tensión de salida proporcional a la *integral* de la tensión de entrada. El intercambio de la resistencia de entrada y el capacitor de retroalimentación causa una tensión de salida proporcional a la *derivada* de la tensión de entrada. (Ejemplo 7.10)
- PSpice nos permite establecer la tensión inicial en un capacitor y la corriente inicial a través de un inductor. Un análisis transitorio proporciona detalles de la respuesta, en función del tiempo, de los circuitos que contienen estos tipos de elementos. (Ejemplo 7.11)

LECTURAS ADICIONALES

En los libros que se mencionan a continuación se puede encontrar una guía detallada de las características y selección de varios tipos de capacitores e inductores:

H. B. Drexler, *Passive Electronic Component Handbook,* 2a. ed., C. A. Harper, ed. Nueva York: McGrawHill, 2003, pp. 69-203.

C. J. Kaiser, *The Inductor Handbook,* 2a. ed. Olathe, Kans.: C. J. Publishing,1996.

Dos buenos libros que describen los circuitos amp op basados en capacitores son:

R. Mancini (ed), *Op Amps Are For Everyone,* 2a. ed. Amsterdam: Newnes, 2003.

W. G. Jung, *Op Amp Cookbook,* 3a. ed. Upper Saddle River, N. J.: Prentice Hall, 1997.

EJERCICIOS

7.1 El capacitor

1. Usando la convención pasiva de signos, determine la corriente que fluye a través de un capacitor de 220 nF para $t \geq 0$ si su tensión $v_C(t)$ dada por (*a*) -3.35 V; (*b*) $16.2e^{-9t}$ V; (*c*) 8 cos $0.01t$ mV; (*d*) $5 + 9$ sen $0.08t$ V.
2. Grafique la corriente que fluye por un capacitor de 13 pF para $t \geq 0$ como resultado de las formas de onda que se muestran en la figura 7.40. Siga la convención pasiva de signos.

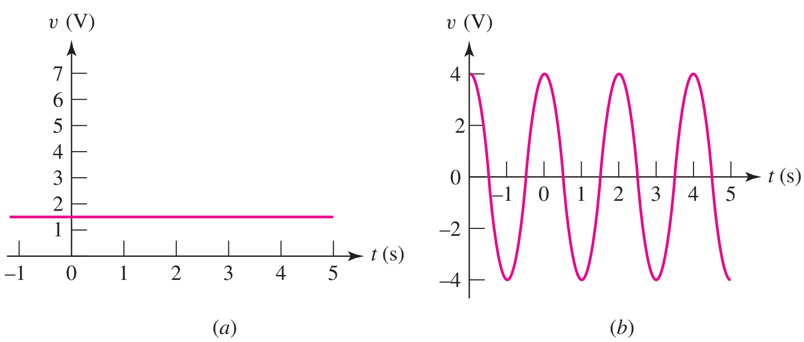


FIGURA 7.40

3. (*a*) Si la forma de onda de tensión representada en la figura 7.41 se aplica entre las terminales de un capacitor electrolítico de 1 μF, grafique la corriente resultante, ajustándose a la convención pasiva de signos. (*b*) Repita el inciso (*a*) si el capacitor se reemplaza por un capacitor de 17.5 pF.

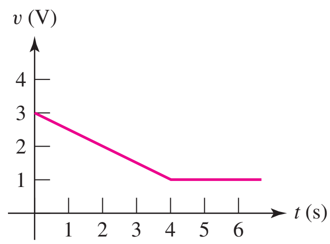


FIGURA 7.41

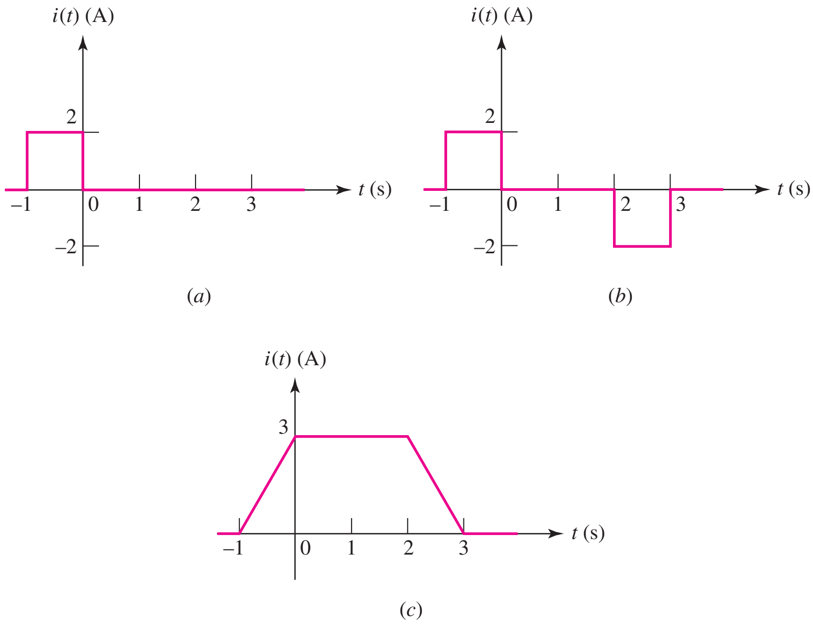
4. Se construye un capacitor de dos placas de cobre, cada una de las cuales mide 1 mm × 2.5 mm y 155 μm de espesor. Las dos placas se colocan frente a frente y están separadas por una brecha de 1 μm. Calcule la capacitancia resultante si (*a*) el dieléctrico intermedio tiene una permitividad de 1.35ε_0; (*b*) el dieléctrico intermedio tiene una permitividad de 3.5 ε_0; (*c*) la separación de las placas se aumenta en 3.5 μm, y la brecha se llena de aire; (*d*) se duplica el área de las placas y la brecha de 1 μm se llena de aire.
5. Dos trozos de gadolinio, cada uno de los cuales mide 100 μm × 750 μm y 640 nm de espesor, se usan para construir un capacitor. Las dos placas se colocan frente a frente, y están separadas por una brecha de 100 nm. Calcule la capacitancia resultante si (*a*) el dieléctrico intermedio tiene una permitividad de 13.8ε_0; (*b*) el dieléctrico intermedio tiene una permitividad de 500ε_0; (*c*) se aumenta la separación entre las placas en 100 nm y la brecha se llena de aire; (*d*) se cuadruplica el área de las placas y se llena de aire la brecha de 100 nm.
6. Diseñe un capacitor de 100 nF construido con lámina de oro de 1 μm de espesor, y que quepa completo dentro de un volumen igual al de una batería estándar AAA, si el único dieléctrico disponible tiene una permitividad de 3.1ε_0.
7. Diseñe un capacitor cuya capacitancia se pueda variar mecánicamente con un simple movimiento vertical, entre los valores de 100 pF y 300 pF.
8. Diseñe un capacitor cuya capacitancia se pueda variar mecánicamente dentro del rango entre 50 nF y 100 nF haciendo girar 90° una perilla.
9. Un diodo de silicio de unión *pn* se caracteriza por una capacitancia de unión definida como

$$C_j = \frac{K_s \varepsilon_0 A}{W}$$

donde $K_s = 11.8$ del silicio, ε_0 es la permisividad del vacío, $A =$ el área de la sección transversal de la unión, y W se conoce como el ancho de agotamiento de la unión. W no sólo depende de la manera en que se fabrica el diodo, sino también de la tensión aplicada en sus dos terminales. Puede calcularse por medio de

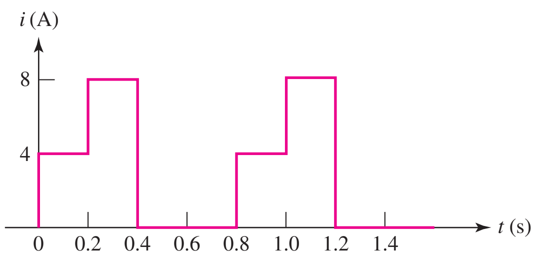
$$W = \sqrt{\frac{2K_s\varepsilon_0}{qN}(V_{\text{bi}} - V_A)}$$

De tal forma, los diodos se emplean con frecuencia en circuitos electrónicos, puesto que se consideran como capacitores controlados por tensión. Suponiendo valores de parámetros de $N = 10^{18}$ cm^{-3}, $V_{\text{bi}} = 0.57$ V, y empleando $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C, calcule la capacitancia de un diodo con área de sección transversal $A = 1\ \mu\text{m} \times 1\ \mu\text{m}$ a tensiones aplicadas de $VA = -1, -5$ y -10 volts.
10. Siguiendo la convención pasiva de signos, dibuje la tensión que se presenta entre las terminales de un capacitor de 2.5 F en respuesta a las formas de onda de corriente que se muestran en la figura 7.42.



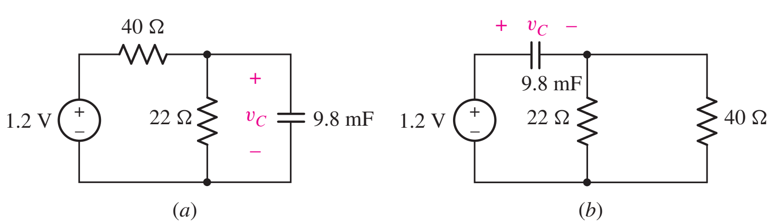
■ **FIGURA 7.42**

11. En la figura 7.43 se muestra la corriente que fluye a través de un capacitor de 33 mF. (*a*) Siguiendo la convención pasiva de signos, dibuje la forma de onda de la tensión resultante entre las terminales del dispositivo. (*b*) Calcule la tensión a 300 ms, 600 ms y 1.1 s.



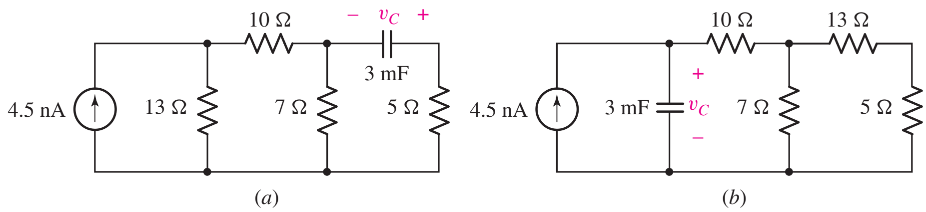
■ **FIGURA 7.43**

12. Calcule la energía almacenada en un capacitor en el tiempo $t = 1$ s, si (*a*) $C = 1.4$ F y $v_C = 8$V, $t > 0$; (*b*) $C = 23.5$ pF y $v_C = 0.8$ V, $t > 0$; (*c*) $C = 17$ nF, $v_C(1) = 12$ V, $v_C(0) = 2$ V y $\omega_C(0) = 295$ nJ.
13. Un capacitor de 137 pF está conectado a una fuente de tensión de tal manera que $v_C(t) = 12e^{-2t}$V, $t \geq 0$ y $v_C(t) = 12$ V, $t < 0$. Calcule la energía almacenada en el capacitor en t igual a (*a*) 0; (*b*) 200 ms; (*c*) 500 ms; (*d*) 1 s.
14. Calcule la potencia disipada en la resistencia de 40 Ω y la tensión marcada como v_C en cada uno de los circuitos representados en la figura 7.44.



■ **FIGURA 7.44**

15. Para cada uno de los circuitos que se muestran en la figura 7.45, calcule la tensión marcada como v_C.

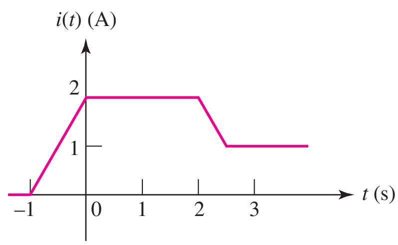


■ **FIGURA 7.45**

7.2 El inductor

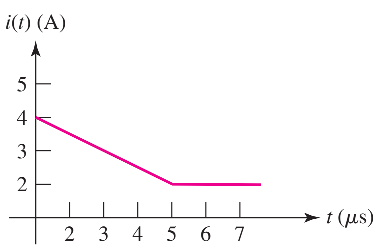
DP 16. Diseñe un inductor de 30 nH usando alambre macizo de cobre suave de calibre 29 AWG. Incluya un esquema de su diseño y marque los parámetros geométricos como sea necesario para la claridad. Suponga que la bobina tiene núcleo solo de aire.

17. Si la corriente que fluye a través de un inductor de 75 mH tiene la forma de onda que se muestra en la figura 7.46, (*a*) grafique la tensión que se presenta entre las terminales del inductor para $t \geq 0$, adoptando la convención pasiva de signos; y (*b*) calcule la tensión en $t = 1$ s, 2.9 s y 3.1 s.



■ **FIGURA 7.46**

18. En la figura 7.47 se muestra la corriente a través de un inductor de aluminio de 17 nH. Dibuje la forma de tensión resultante para $t \geq 0$, siguiendo la convención pasiva de signos.

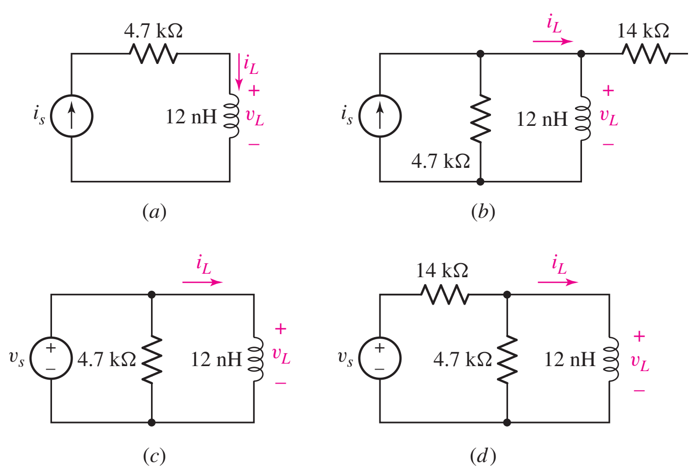


■ **FIGURA 7.47**

19. Determine la tensión para $t \geq 0$ que se presenta entre las terminales de un inductor de 4.2 mH, si la corriente (definida congruentemente con la convención pasiva de signos) es (*a*) -10 mA; (*b*) 3 sen $6t$ A; (*c*) $11 + 115\sqrt{2}\cos(100\pi t - 9°)$ A; (*d*) $13e^{-t}$ nA; (*e*) $3 + te^{-14t}$ A.

20. Determine la tensión para $t \geq 0$ que se presenta entre las terminales de un inductor de 8 pH, si la corriente (definida congruentemente con la convención pasiva de signos) es (*a*) 8 mA: (*b*) 800 mA; (*c*) 8 A; (*d*) $4\ e^{-t}$ A; (*e*) $-3 + te^{-t}$ A.

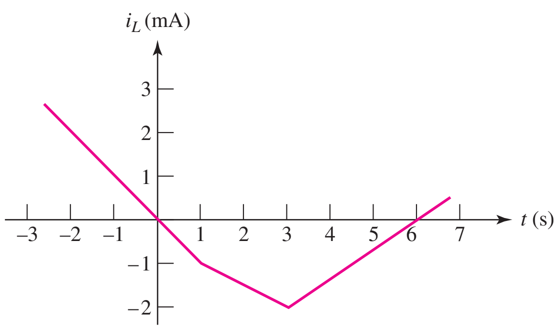
21. Calcule v_L e i_L para cada uno de los circuitos representados en la figura 7.48, si $i_s = 1$ mA y $v_s = 2.1$ V.



■ **FIGURA 7.48**

22. La forma de onda de corriente que se muestra en la figura 7.14 tiene un tiempo de elevación de 0.1 s (100 ms) y un tiempo de caída de la misma duración. Si la corriente se aplica a la terminal de referencia de tensión "+" de un inductor de 200 nH, dibuje la forma de onda de tensión esperada si los tiempos de elevación y caída se cambian, respectivamente, a (*a*) 200 ms, 200 ms; (*b*) 10 ms, 50 ms; (*c*) 10 ns, 20 ns.

23. Determine la tensión del inductor que es el resultado de la forma de onda de corriente que se muestra en la figura 7.49 (adoptando la convención pasiva de signos) en t igual a (*a*) −1 s; (*b*) 0 s; (*c*) 1.5 s; (*d*) 2.5 s; (*e*) 4 s; (*f*) 5 s.



■ **FIGURA 7.49**

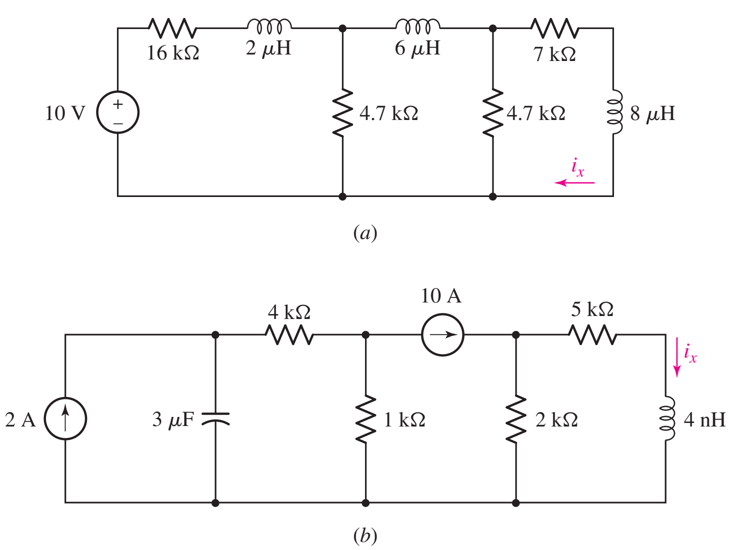
24. Determine la corriente que fluye a través de un inductor de 6 mH si la tensión (definida de tal manera que sea congruente con la convención pasiva de signos) está dada por (*a*) 5 V; (*b*) 100 sen $120\pi t$, $t \geq 0$ y 0, $t < 0$.

25. La tensión entre las terminales de un inductor de 2 H está dada por $v_L = 4.3t$, $0 \leq t \leq 50$ ms. Sabiendo que $i_L(-0.1) = 100\ \mu$A, calcule la corriente (suponiendo que está definida en forma congruente con la convención pasiva de signos) en t igual a (*a*) 0; (*b*) 1.5 ms; (*c*) 45 ms.

26. Calcule la energía almacenada en un inductor de 1 nH si la corriente que fluye a través de éste es (*a*) 0 mA; (*b*) 1 mA; (*c*) 20 A; (*d*) 5 sen $6t$ mA, $t > 0$.

27. Determine la cantidad de energía almacenada en un inductor de 33 mH en $t = 1$ ms, como resultado de una corriente i_L dada por (*a*) 7 A; (*b*) $3 - 9e^{-103t}$ mA.

28. Suponiendo que los circuitos de la figura 7.50 han estado conectados durante un tiempo muy largo, determine el valor de cada corriente marcada como i_x.



■ **FIGURA 7.50**

29. Calcule la tensión marcada como v_s en la figura 7.51, suponiendo que el circuito ha estado funcionando durante un tiempo muy largo, si (*a*) una resistencia de 10 Ω está conectada entre las terminales *x* y *y*; (*b*) un inductor de 1 H está conectado entre las terminales *x* y *y*; (*c*) un capacitor de 1 F está conectado entre terminales *x* y *y*; (*d*) un inductor de 4 H, en paralelo con una resistencia de 1 Ω, está conectado entre las terminales *x* y *y*.

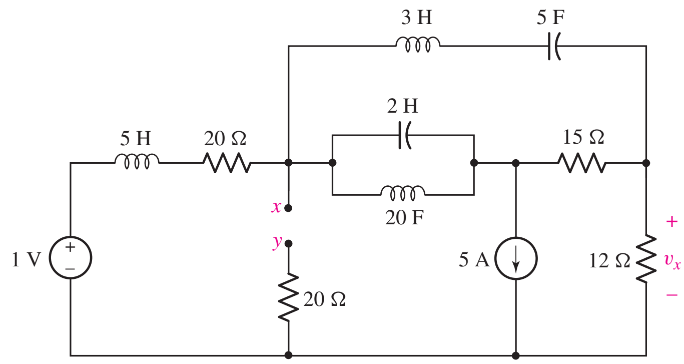


FIGURA 7.51

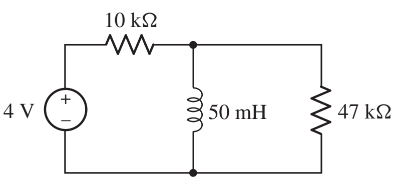


FIGURA 7.52

30. Para el circuito que se muestra en la figura 7.52, (*a*) calcule el equivalente de Thévenin desde la perspectiva del inductor; (*b*) determine la potencia que disipan las dos resistencias; (*c*) calcule la energía almacenada en el inductor.

7.3 Combinaciones de inductancia y capacitancia

31. Si cada capacitor tiene un valor de 1 F, determine la capacitancia equivalente de la red que se muestra en la figura 7.53.

32. Determine la inductancia equivalente para la red que se muestra en la figura 7.54 si cada inductor tiene un valor *L*.

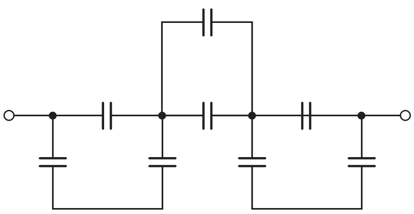


FIGURA 7.53

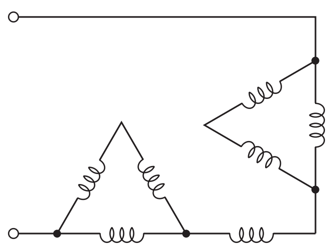


FIGURA 7.54

DP 33. Usando tantos inductores de 1 nH como quiera, diseñe dos redes, de manera que cada una tenga una inductancia equivalente de 1.25 nH.

34. Calcule la capacitancia equivalente C_{eq} como está marcada en la figura 7.55.

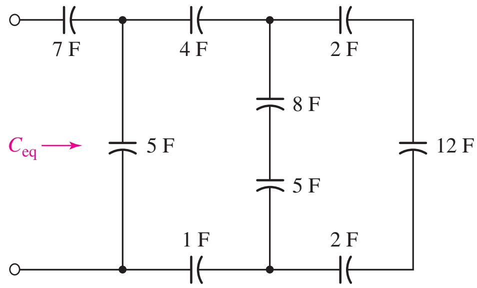
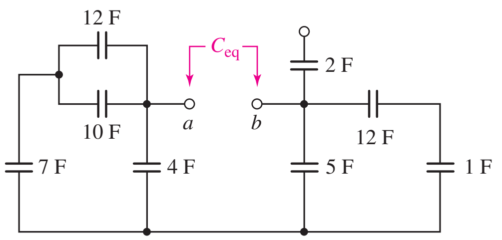


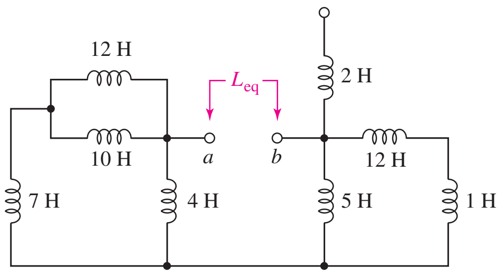
FIGURA 7.55

35. Determine la capacitancia equivalente C_{eq} de la red de la figura 7.56.



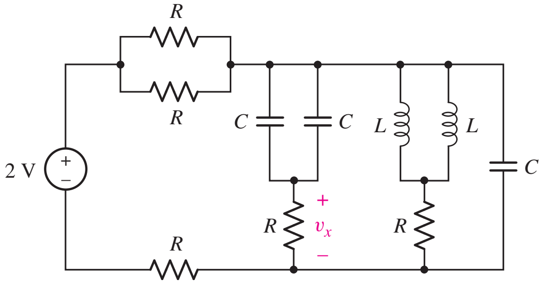
■ **FIGURA 7.56**

36. Aplique las técnicas combinatorias apropiadas para obtener un valor de inductancia L_{eq} marcada en la red de la figura 7.57.

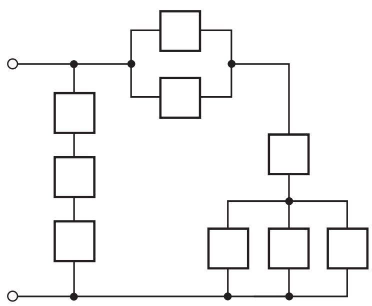


■ **FIGURA 7.57**

37. Reduzca el circuito representado en la figura 7.58 al número de componentes más pequeño posible.



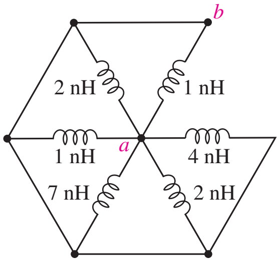
■ **FIGURA 7.58**



■ **FIGURA 7.59**

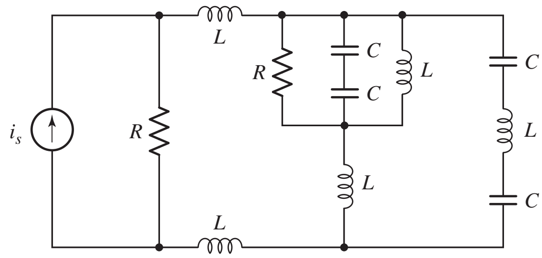
38. Observe la red de la figura 7.59 y calcule: (*a*) R_{eq} si cada elemento es una resistencia de 10 Ω; (*b*) L_{eq} si cada elemento es un inductor de 10 H: (*c*) C_{eq} si cada elemento es un capacitor de 10 F.

39. Determine la inductancia equivalente como se observa en las terminales marcadas como *a* y *b* en la red de la figura 7.60.



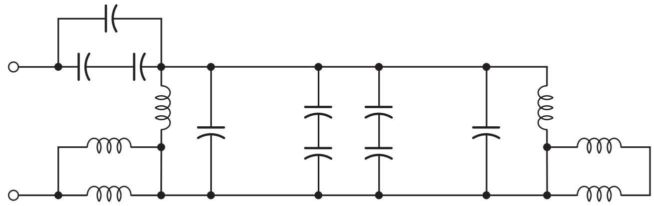
■ **FIGURA 7.60**

40. Reduzca el circuito representado en la figura 7.61 al número de componentes más pequeño posible.



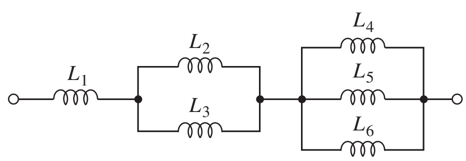
■ **FIGURA 7.61**

41. Reduzca la red de la figura 7.62 al menor número de componentes posible si cada inductor es de 1 nH y cada capacitor es de 1 mF.

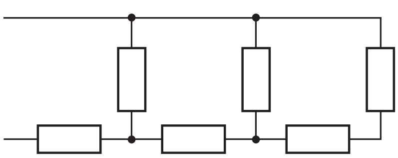


■ **FIGURA 7.62**

42. En la red de la figura 7.63, $L_1 = 1$ H, $L_2 = L_3 = 2$ H, $L_4 = L_5 = L_6 = 3$ H. (*a*) Calcule la inductancia equivalente. (*b*) Obtenga la expresión de una red general de este tipo que tenga *N* etapas, suponiendo que la etapa *N* está compuesta por *N* inductores, cada uno con una inductancia de *N* henrys.



■ **FIGURA 7.63**

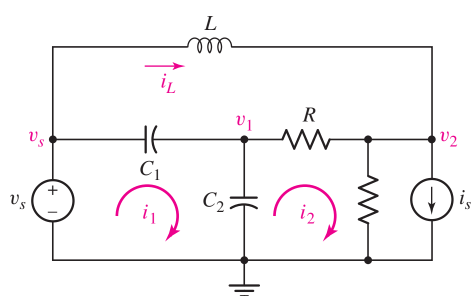


■ **FIGURA 7.64**

43. Simplifique la red de la figura 7.64, si cada elemento es un capacitor de 2 pF.
44. Simplifique la red de la figura 7.64, si cada elemento es un inductor de 1 nH.

7.4 Consecuencias de la linealidad

45. Con referencia al circuito representado en la figura 7.65, (*a*) escriba un sistema de ecuaciones nodales completo y (*b*) escriba un sistema de ecuaciones de malla completo.

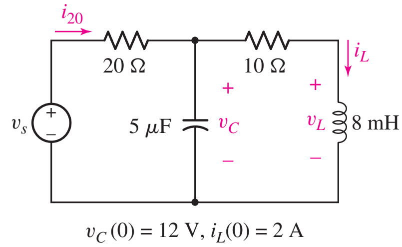


■ **FIGURA 7.65**

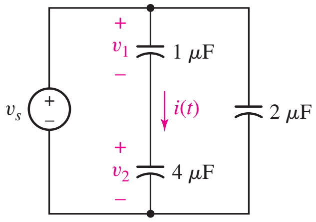
46. (*a*) Escriba las ecuaciones nodales del circuito de la figura 7.66. (*b*) Escriba las ecuaciones de malla del mismo circuito.

47. En el circuito de la figura 7.67, sea $i_s = 60e^{-200t}$ mA con $i_1(0) = 20$ mA. (*a*) Proporcione $v(t)$ para cualquier t. (*b*) Determine $i_1(t)$ para $t \geq 0$. (c) Encuentre $i_2(t)$ para $t \geq 0$.

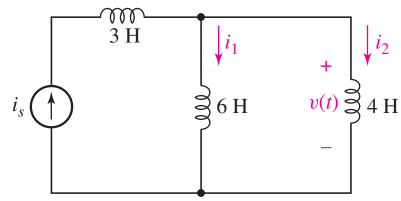
48. Sea $v_s = 100e^{-80t}$ V y $v_1(0) = 20$ V en el circuito de la figura 7.68, (*a*) calcule $i(t)$ para cualquier t; (*b*) determine $v_1(t)$ para $t \geq 0$; (*c*) proporcione $v_2(t)$ para $t \geq 0$.



■ **FIGURA 7.66**

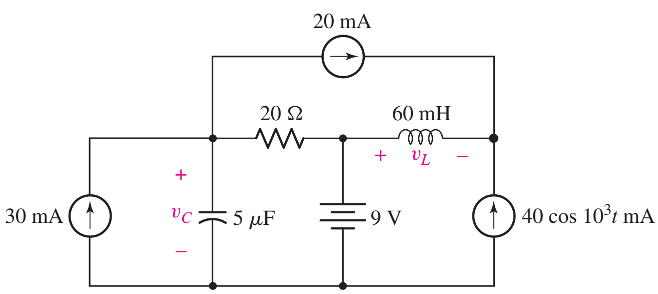


■ **FIGURA 7.68**



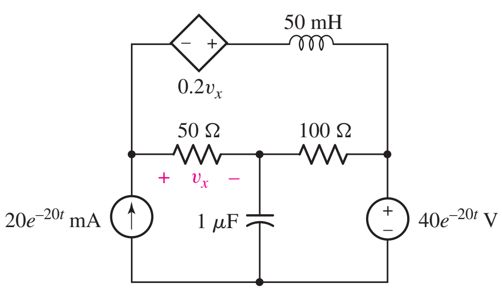
■ **FIGURA 7.67**

49. Si se supone que todas las fuentes del circuito de la figura 7.69 se conectaron y operaron durante mucho tiempo, aplique el principio de superposición para calcular $v_C(t)$ y $v_L(t)$.



■ **FIGURA 7.69**

50. En el circuito de la figura 7.70, suponga que no hay energía almacenada en $t = 0$, y escriba un conjunto completo de ecuaciones nodales.

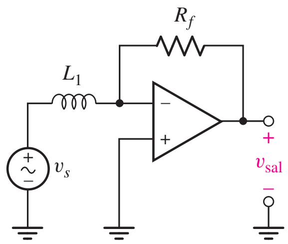


■ **FIGURA 7.70**

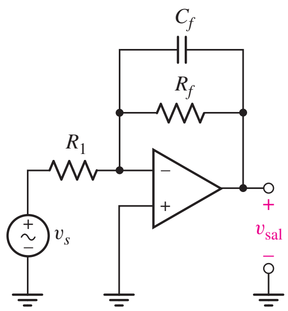
7.5 Circuitos de amp op simples con capacitores

51. Intercambie la ubicación de R_1 y C_f en el circuito de la figura 7.27, y suponga que $R_i = \infty$, $R_o = 0$ y $A = \infty$ para el amp op. (*a*) Determine $v_{sal}(t)$ como función de $v_s(t)$. (*b*) Obtenga una ecuación que relacione $v_O(t)$ y $v_s(t)$ si A no se supone infinita.

52. Para el circuito amplificador integrador de la figura 7.27, $R_1 = 100$ kΩ, $C_f = 500$ μF y $v_s = 20$ sen $540t$ mV. Calcule v_{salida} si (*a*) $A = \infty$, $R_i = \infty$ y $R_o = 0$; (*b*) $A = 5\,000$, $R_i = 1$ MΩ y $R_o = 3$ Ω.



■ **FIGURA 7.71**



■ **FIGURA 7.72**

53. Deduzca una expresión para v_{sal} en términos de v_s para el circuito amplificador que se muestra en la figura 7.71.

54. En la práctica, circuitos como los que se representan en la figura 7.27 pueden no funcionar correctamente a menos que haya una ruta de conducción entre las terminales de entrada y salida del amp op. (*a*) Analice el circuito modificado amplificador integrante que se muestra en la figura 7.72 para obtener una expresión para v_{sal} en términos de v_s, y (*b*) compare esta expresión con la ecuación [17].

55. DP Un nuevo equipo diseñado para hacer cristales de ingredientes fundidos está teniendo demasiadas fallas (productos resquebrajados). El gerente de producción desea monitorear la rapidez de enfriamiento para ver si está relacionada con el problema. El sistema tiene dos terminales de salida disponibles, en las que la tensión entre ellas es linealmente proporcional a la temperatura del crisol, de modo que 30 mV corresponde a 30°C y 1 V corresponde a 1 000°C. Diseñe un circuito cuya salida de tensión represente la rapidez de enfriamiento, calibrado de manera que 1 V y 1°C/s.

56. DP Una compañía de dulcería ha decidido aumentar la tasa de producción de sus barras de chocolate con leche para compensar un reciente aumento en el costo de las materias primas. Sin embargo, la unidad de envoltura no puede aceptar más de 1 barra por segundo, arriba de lo cual deja caer las barras. Hay disponible una señal de tensión sinusoidal de 200 mV pico a pico proveniente del sistema de fabricación de barras que alimenta a la unidad de envoltura, de modo que su frecuencia corresponde a la frecuencia de la producción de barras (es decir, 1 Hz = 1 barra/s). Diseñe un circuito que suministre una salida de tensión suficiente para energizar una alarma audible de 12 V cuando la tasa de producción exceda la capacidad de la unidad envolvedora.

57. DP Un problema al que se enfrentan los satélites es la exposición a partículas de alta energía, que pueden causar daño a los sensibles circuitos electrónicos, así como a las baterías solares que se usan para suministrar potencia. Un nuevo satélite de comunicación está provisto de un detector de protones de alta energía, que mide 1 cm × 1 cm. Proporciona una corriente directamente igual al número de protones que impactan la superficie por segundo. Diseñe un circuito cuya tensión de salida suministre el total acumulativo del número de impactos de protones, calibrado de tal manera que 1 V = 1 millón de impactos.

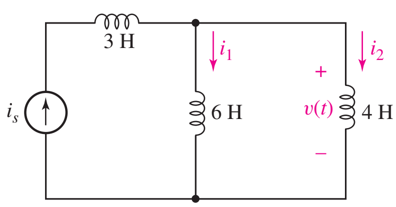
58. DP La salida de un sensor de velocidad conectado a una pieza sensible de un equipo móvil se calibra para dar una señal tal que 10 mV corresponda a movimiento lineal a 1 m/s. Si el equipo se sujeta a un choque súbito, puede dañarse. Como fuerza = masa × aceleración, se puede usar el monitoreo de la tasa de cambio de la velocidad para determinar si el equipo se transporta incorrectamente. (*a*) Diseñe un circuito que suministre una tensión proporcional a la aceleración lineal de modo que 10 mV = 1 m/s^2. (*b*) ¿Cuántas combinaciones sensor-circuito necesita esta aplicación?

59. DP Un sensor flotante en cierto tanque de combustible está conectado a una resistencia variable (que a menudo se llama potenciómetro), de modo que un tanque lleno (100 litros) corresponda a 1 Ω, y un tanque vacío corresponda a 10 Ω. (*a*) Diseñe un circuito que dé una tensión de salida que indique la cantidad de combustible que queda, de modo que 1 V = vacío y 5 V = lleno. (*b*) Diseñe un circuito que indique el caudal de consumo de combustible dando una salida de tensión calibrada para dar 1 V = 1 L/s.

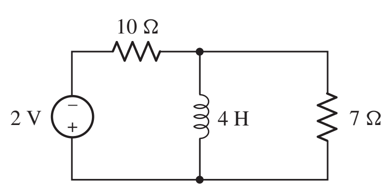
7.6 Dualidad

60. (*a*) Dibuje un dual exacto del circuito representado en la figura 7.73. (*b*) Marque las variables nuevas (duales). (*c*) Escriba ecuaciones nodales para ambos circuitos.

61. (*a*) Dibuje un dual exacto del circuito simple que se muestra en la figura 7.74. (*b*) Marque las variables nuevas (duales). (*c*) Escriba ecuaciones de malla para ambos circuitos.

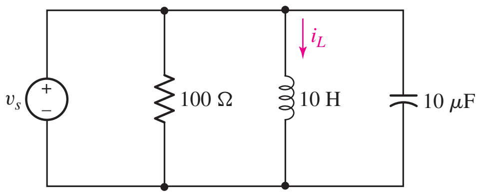


■ **FIGURA 7.73**



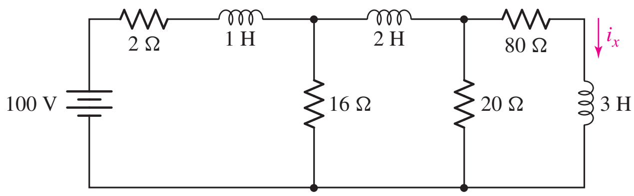
■ **FIGURA 7.74**

62. (*a*) Dibuje el circuito dual exacto del circuito simple que se muestra en la figura 7.75. (*b*) Marque las variables nuevas (duales). (*c*) Escriba las ecuaciones de malla para ambos circuitos.



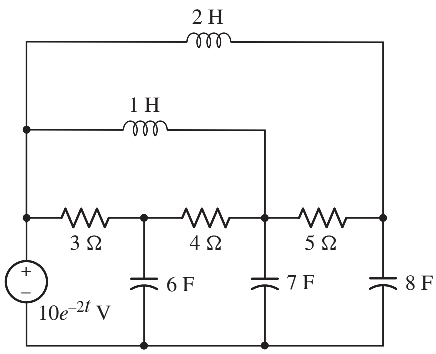
■ **FIGURA 7.75**

63. (*a*) Dibuje el circuito dual exacto del circuito simple que se muestra en la figura 7.76. (*b*) Marque las variables nuevas (duales). (*c*) Escriba las ecuaciones nodales y de malla para ambos circuitos.

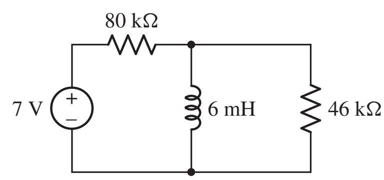


■ **FIGURA 7.76**

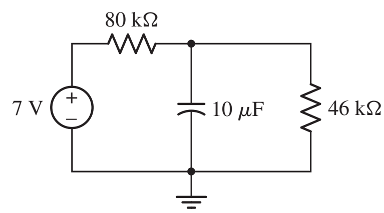
64. Dibuje el dual exacto del circuito de la figura 7.77. ¡Manténgalo limpio!



■ **FIGURA 7.77**



■ **FIGURA 7.78**



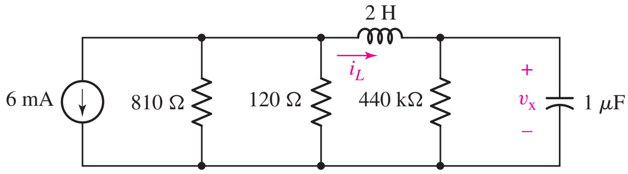
■ **FIGURA 7.79**

7.7 Construcción de modelos de capacitores e inductores con PSpice

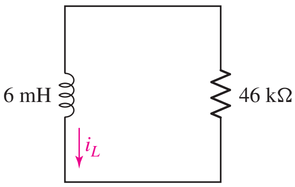
65. Tomando el nodo inferior del circuito de la figura 7.78 como terminal de referencia, calcule (*a*) la corriente a través del inductor y (*b*) la potencia disipada por la resistencia de 7 Ω. (*c*) Verifique sus respuestas con la simulación PSpice adecuada.

66. Para el circuito de cuatro elementos que se muestra en la figura 7.79, (*a*) calcule la potencia absorbida por cada resistencia; (*b*) determine la tensión a través del capacitor; (*c*) calcule la energía almacenada en el capacitor, y (*d*) verifique sus respuestas mediante la simulación PSpice adecuada. (Recuerde que los cálculos se pueden realizar en Probe.)

67. (*a*) Calcule i_L y v_x como se indican en el circuito de la figura 7.80. (*b*) Determine la energía almacenada en el inductor y el capacitor. (*c*) Verifique sus respuestas con la simulación PSpice adecuada.



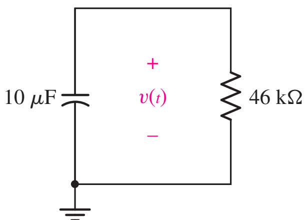
■ **FIGURA 7.80**



■ **FIGURA 7.81**

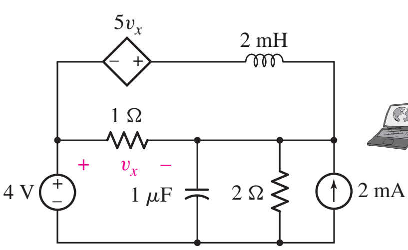
68. Para el circuito representado en la figura 7.81, el valor de $i_L(0) = 1$ mA. (*a*) Calcule la energía almacenada en el elemento en $t = 0$. (*b*) Realice una simulación del estado transitorio del circuito dentro del intervalo $0 \leq t \leq 500$ ns. Determine el valor de i_L en $t = 0$, 130 ns, 260 ns y 500 ns. (*c*) ¿Qué fracción de la energía inicial permanece en el inductor en $t = 130$ ns? ¿Y en $t = 500$ ns?

69. Suponga una tensión inicial de 9 V entre las terminales del capacitor de 10 μF que se muestra en la figura 7.82 (es decir, $v(0) = 9$ V). (*a*) Calcule la energía inicial almacenada en el capacitor. (*b*) Para $t > 0$, ¿usted espera que la energía permanezca en el capacitor? *Explique*. (*c*) Realice una simulación del estado transitorio del circuito dentro del intervalo $0 \leq t \leq 2.5$ s y determine $v(t)$ en $T = 460$ ms, 920 ms y 2.3 s. (*c*) ¿Qué fracción de la energía inicial permanece almacenada en el capacitor en $t = 460$ ms? ¿Y en $t = 2.3$ s?



■ **FIGURA 7.82**

70. Con referencia al circuito de la figura 7.83, (*a*) calcule la energía almacenada en cada elemento de almacenamiento de energía; (*b*) verifique sus respuestas mediante una simulación PSpice adecuada.



■ **FIGURA 7.83**

Ejercicios de integración de capítulo

71. Para el circuito de la figura 7.28, (*a*) dibuje v_{sal} dentro del intervalo $0 \leq t \leq 5$ ms si $R_f = 1$ kΩ, $C_1 = 100$ mF y v_s es una fuente sinusoidal de 1 kHz que tiene una tensión pico de 2 V. (*b*) Verifique su respuesta mediante una simulación del estado transitorio adecuada, graficando tanto v_s como v_{sal} en Probe. (*Pista*: entre los trazos de las gráficas añada un segundo eje *y* usando **Plot, Add Y Axis**. Esto permite ver claramente ambos trazos.)

72. (*a*) Grafique la función de salida v_{sal} del circuito amplificador de la figura 7.29 dentro del intervalo $0 \leq t \leq 100$ ms si v_s es una fuente sinusoidal de 60 Hz que tiene una tensión pico de 400 mV, R_1 es 1 kΩ y L_f es 80 nH. (*b*) Verifique su respuesta con una simulación del estado transitorio adecuada, graficando tanto v_s como v_{sal} en Probe. (*Pista:* Entre los trazos de las gráficas añada un segundo eje *y* usando **Plot, Add Y Axis**. Esto permite ver claramente ambos trazos.)

73. Para el circuito de la figura 7.71, (*a*) trace v_{sal} sobre el intervalo de $0 \leq t \leq 2.5$ ms si $R_f = 100$ kΩ, $L_1 = 100$ mH y v_s es una fuente sinusoidal que tiene una tensión pico de 5 V. (*b*) Verifique su respuesta con una simulación transitoria apropiada, trazando ambos v_s y v_{sal} en Probe. (*Pista*: entre los trazos de la gráfica añada un segundo eje *y* usando **Plot, Add Y Axis.** Esto permite ver claramente ambos trazos.)

74. Considere el integrador modificado representado en la figura 7.72. Considere $R_1 = 100$ Ω, $R_f = 10$ MΩ y $C_1 = 10$ mF. La fuente v_s proporciona una tensión sinusoidal de 10 Hz que tiene una amplitud pico de 0.5 V. (*a*) Grafique v_{sal} dentro del intervalo $0 \leq t \leq 500$ ms. (*b*) Verifique su respuesta mediante una simulación del estado transitorio adecuada graficando tanto v_s como v_{sal} en Probe. (*Pista*: entre los trazos de las gráficas añada un segundo eje *y* usando **Plot, Add Y Axis**. Esto permite ver claramente ambos trazos.)

CAPÍTULO

8

Circuitos *RL* y *RC* básicos

CONCEPTOS CLAVE

- Constantes de tiempo *RL* y *RC*
- Respuesta natural y forzada
- Determinación de la respuesta en función del tiempo de una excitación de CD
- Cómo determinar las condiciones iniciales y su efecto en la respuesta del circuito
- Análisis de circuitos con funciones de entrada escalón y con interruptores
- Construcción de formas de onda pulsantes mediante funciones escalón unitario
- Respuesta de circuitos conmutados secuencialmente



INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior presentamos ecuaciones que gobiernan la respuesta de varios circuitos en inductancia y capacitancia, pero no resolvimos ninguna de ellas. En este momento podemos proceder a la solución de los circuitos más simples, restringiendo la atención a aquellos que contienen sólo resistencias e inductores, o sólo resistencias y capacitores.

Si bien los circuitos que analizaremos tienen una apariencia muy elemental, también son de importancia práctica. Las redes de esta forma se emplean en amplificadores electrónicos, sistemas de control automático, amplificadores operacionales, equipo de comunicaciones y en otras muchas aplicaciones. La familiarización con estos circuitos simples nos permitirá predecir con qué exactitud puede la salida de un amplificador seguir una entrada que cambia con rapidez con el tiempo, o predecir cuán rápidamente cambiará la velocidad de un motor como respuesta a un cambio en su corriente de campo. Nuestro conocimiento del desempeño de los circuitos *RL* y *RC* simples permitirá sugerir modificaciones para el amplificador o el motor a fin de obtener una respuesta más deseable.

8.1 EL CIRCUITO *RL* SIN FUENTE

El análisis de circuitos que contienen inductores y/o capacitores depende de la formulación y solución de ecuaciones integrodiferenciales que caracterizan a los circuitos. Llamaremos *ecuación diferencial lineal homogénea* al tipo especial de ecuación que se obtiene, la cual es simplemente una ecuación diferencial en la que cada término es de primer grado en la variable dependiente o en una de sus derivadas. Obtenemos una solución cuando se encuen-



tra la expresión de la variable dependiente que satisface la ecuación diferencial y también la distribución de energía preescrita en los inductores o capacitores en el instante preestablecido, por lo general $t = 0$.

La solución de la ecuación diferencial representa una respuesta del circuito y se conoce con muchos nombres. Puesto que depende de la "naturaleza" general del circuito (los tipos de elementos, sus tamaños, la interconexión de los elementos), se denomina a menudo como ***respuesta natural***. Sin embargo, todo circuito real que construyamos no puede almacenar energía por siempre; necesariamente, las resistencias asociadas con los inductores y capacitores a la larga convertirán toda la energía almacenada en calor. La respuesta debe al final extinguirse (o sea, desaparecer), razón por la cual con frecuencia se le conoce como ***respuesta transitoria***. Por último, también es necesario familiarizarnos con la aportación de los matemáticos a la nomenclatura: asignan el nombre de *función complementaria* a la solución de una ecuación diferencial lineal homogénea.

Cuando analizamos fuentes independientes que actúan sobre un circuito, parte de la respuesta recordará la naturaleza de la fuente particular (o *función forzada*) que se utiliza; dicha parte, denominada *solución particular, respuesta de estado permanente* o ***respuesta forzada***, se "complementa" con la respuesta complementaria producida en el circuito sin fuente. La respuesta completa del circuito estará dada entonces por la suma de la función complementaria y la solución particular. En otras palabras, la respuesta completa consiste en la suma de la respuesta natural y la respuesta forzada. La respuesta sin fuente podría llamarse respuesta *natural*, respuesta *transitoria,* respuesta *libre* o *función complementaria,* pero debido a su naturaleza más descriptiva a menudo se denomina respuesta *natural*.

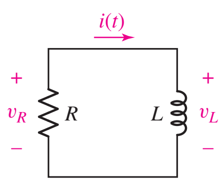


FIGURA 8.1 Circuito *RL* en serie para el que se va a determinar $i(t)$ sujeto a la condición inicial $i(0) = I_0$.

¡Quizá parezca bastante extraño analizar una corriente variable en el tiempo que fluye en un circuito sin fuentes! Tenga presente que sólo conocemos la corriente en el tiempo específico $t = 0$; no la conocemos antes de ese tiempo. En ese sentido, tampoco sabemos cómo se veía el circuito antes de $t = 0$. Para que circule una corriente, sería necesaria la presencia de una fuente en algún punto, pero no se ha proporcionado información al respecto. Por fortuna, ello no se requiere para analizar el circuito indicado.

Examinaremos varios métodos diferentes de solución de estas ecuaciones diferenciales. Sin embargo, la manipulación matemática no significa analizar los circuitos. Nuestro mayor interés se encuentra en las propias soluciones, en su significado y su interpretación, así que trataremos de familiarizarnos lo suficiente con la forma de la respuesta de modo que podamos elaborar respuestas para los nuevos circuitos con sólo un simple razonamiento. Si bien se necesitan métodos analíticos complicados cuando fallan los enfoques más simples, una intuición bien desarrollada constituye un recurso invaluable en este tipo de situaciones.

Comenzaremos nuestro estudio con el análisis transitorio considerando el simple circuito *RL* en serie que se presenta en la figura 8.1. Designemos la corriente variable en el tiempo como $i(t)$; representaremos el valor de $i(t)$ en $t = 0$ como I_0; en otras palabras, $i(0) = I_0$. Por lo tanto, tenemos

$$Ri + v_L = Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

o

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \qquad [1]$$

La meta es una expresión de $i(t)$ que satisfaga esta ecuación y también tenga el valor I_0 en $t = 0$. La solución se obtiene mediante varios métodos diferentes.

Método directo

Un método muy directo para resolver una ecuación diferencial consiste en expresarla de manera que se separen las variables y luego se integre cada miembro de la ecuación.

Las variables en la ecuación [1] son i y t, y resulta evidente que la ecuación se podría multiplicar por dt, dividirse entre i y arreglarse con base en las variables separadas:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\,dt \tag{2}$$

En razón de que la corriente es I_0 en $t = 0$ e $i(t)$ en el tiempo t, igualaremos las dos integrales definidas que se obtienen al integrar cada miembro entre los límites correspondientes:

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di'}{i'} = \int_0^t -\frac{R}{L}\,dt'$$

Efectuando la integración indicada,

$$\ln i'\Big|_{I_0}^{i} = -\frac{R}{L}t'\Big|_0^t$$

la cual tiene como resultado

$$\ln i - \ln I_0 = -\frac{R}{L}(t-0)$$

Después de un poco de manipulación, podemos ver que la corriente $i(t)$ está dada por

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L} \tag{3}$$

Comprobamos nuestra solución si demostramos primero que la sustitución de la ecuación [3] en la ecuación [1] produce la identidad $0 = 0$, y después que la sustitución de $t = 0$ en la ecuación [3] tiene como resultado $i(0) = I_0$. Ambos pasos son necesarios; la solución debe satisfacer la ecuación diferencial que caracteriza al circuito y también la condición inicial.

EJEMPLO 8.1

Si el inductor de la figura 8.2 tiene una corriente $i_L = 2$ A en $t = 0$, encuentre la expresión de $i_L(t)$ válida para $t > 0$, y su valor en $t = 200$ μs.

Este tipo de circuito es idéntico al que se vio con anterioridad, por lo que esperamos que la corriente que circula por el inductor sea de la forma

$$i_L = I_0 e^{-Rt/L}$$

donde $R = 200\ \Omega$, $L = 50$ mH e I_0 es la corriente inicial que circula a través del inductor en $t = 0$. Por ende,

$$i_L(t) = 2e^{-4\,000t}$$

Sustituyendo $t = 200 \times 10^{-6}$ s, podemos ver que $i_L(t) = 898.7$ mA, que es menor que la mitad del valor inicial.

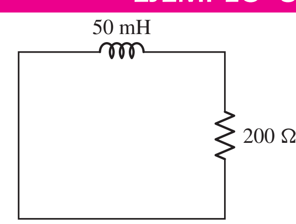


FIGURA 8.2 Circuito *RL* simple en el que la energía se almacena en el inductor en $t = 0$.

PRÁCTICA

8.1 Determine la corriente i_R que circula a través de la resistencia de la figura 8.3 en $t = 1$ ns si $i_R(0) = 6$ A.

Respuesta: 812 mA.

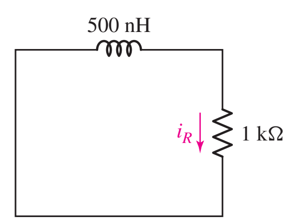


FIGURA 8.3 Circuito para el problema de práctica 8.1.

Método alterno

La solución también se podría obtener por medio de una ligera variación del método anterior. Luego de separar variables, también incluimos una constante de integración. De tal modo,

$$\int \frac{di}{i} = -\int \frac{R}{L} dt + K$$

y la integración origina

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + K \qquad [4]$$

La constante K no puede evaluarse mediante la sustitución de la ecuación [4] en la ecuación diferencial original [1]; resultará la identidad $0 = 0$, pues la ecuación [4] es una solución de la ecuación [1] para *cualquier* valor de K (compruébelo usted mismo). La constante de integración debe elegirse para satisfacer la condición inicial $i(0) = I_0$. Así, en $t = 0$, la ecuación [4] se convierte en

$$\ln I_0 = K$$

y se emplea este valor de K en la ecuación [4] para obtener la respuesta deseada:

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + \ln I_0$$

o

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

como se hizo antes.

Método general

Cualquiera de estos métodos se utiliza cuando las variables son separables, aunque ésta no es siempre la situación. En los casos restantes se confiará en un método muy poderoso, cuyo éxito dependerá de nuestra intuición o experiencia. Sólo adivinaremos o supondremos una forma de solución y luego se probarán los supuestos, primero mediante la sustitución en la ecuación diferencial y luego a través de la aplicación de las condiciones iniciales dadas. Debido a que no podemos adivinar la expresión numérica exacta de la solución, consideraremos una solución que contenga varias constantes desconocidas y elegiremos los valores para ellas con el fin de satisfacer la ecuación diferencial y las condiciones iniciales. Muchas de las ecuaciones diferenciales que se encuentran en el análisis de circuitos tienen una solución que puede representarse mediante la función exponencial o la suma de varias funciones exponenciales. Supongamos una solución de la ecuación [1] en forma exponencial,

$$i(t) = Ae^{s_1 t} \qquad [5]$$

donde A y s_1 son constantes que se deben determinar. Después de sustituir esta solución supuesta en la ecuación [1], tenemos:

$$As_1 e^{s_1 t} + A\frac{R}{L}e^{s_1 t} = 0$$

o

$$\left(s_1 + \frac{R}{L}\right) Ae^{s_1 t} = 0 \qquad [6]$$

Con el fin de satisfacer la ecuación para todos los valores del tiempo, se requiere que $A = 0$, o $s_1 = -\infty$, o $s_1 = -R/L$. Pero si $A = 0$ o si $s_1 = -\infty$, entonces toda respuesta es nula; ninguna puede ser una solución para el problema en cuestión. Por lo tanto, debemos elegir:

$$s_1 = -\frac{R}{L} \qquad [7]$$

así que nuestra solución supuesta toma la forma

$$i(t) = Ae^{-Rt/L}$$

La constante restante debe evaluarse aplicando la condición inicial $i(0) = I_0$. De tal modo, $A = I_0$, y la forma final de la solución supuesta es (otra vez)

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

En la figura 8.4 se muestra un resumen del método básico.

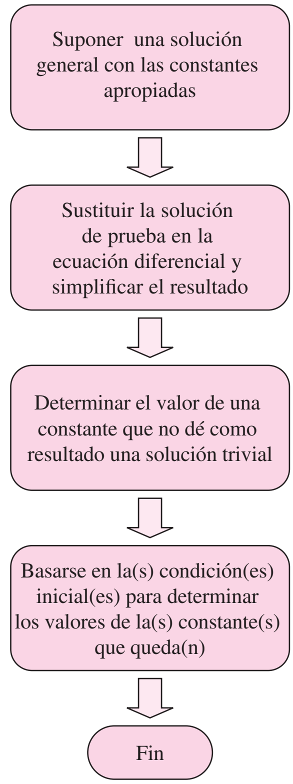


FIGURA 8.4 Diagrama de flujo del método general para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden donde podemos adivinar la forma de la solución con base en la experiencia.

Una ruta directa: la ecuación característica

En realidad, podemos tomar una ruta más directa. Para obtener la ecuación [7], resolvemos

$$s_1 + \frac{R}{L} = 0 \qquad [8]$$

que se conoce como ***ecuación característica***. Esta última la obtenemos directamente de la ecuación diferencial, sin que sea necesaria la sustitución en la solución de prueba. Consideremos la ecuación diferencial general de primer orden

$$a\frac{df}{dt} + bf = 0$$

donde a y b son constantes. Sustituimos s^1 en df/dt y s^0 en f, lo cual da como resultado

$$a\frac{df}{dt} + bf = (as + b)f = 0$$

A partir de aquí podemos obtener directamente la ecuación característica

$$as + b = 0$$

la cual tiene una sola raíz $s = -b/a$. Entonces, la solución de la ecuación diferencial es

$$f = Ae^{-bt/a}$$

El procedimiento básico se puede extender fácilmente a ecuaciones diferenciales de segundo orden, como lo estudiaremos en el capítulo 9.

EJEMPLO 8.2

En el circuito de la figura 8.5*a*, calcule la tensión marcada como v en $t = 200$ ms.

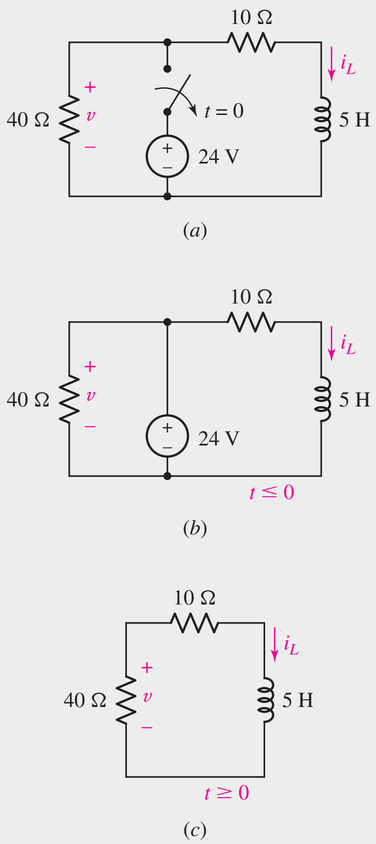


FIGURA 8.5 (*a*) Circuito *RL* simple con un interruptor disparado en el tiempo $t = 0$. (*b*) El circuito como se encuentra antes de $t = 0$. (*c*) El circuito después de que el interruptor es activado y se ha quitado la fuente de 24 V.

▶ ***Identificar el objetivo del problema.***
En realidad, el diagrama de la figura 8.5*a* representa *dos circuitos* diferentes: uno con el interruptor cerrado (figura 8.5*b*) y otro con el interruptor abierto (figura 8.5*c*). Determine $v(0.2)$ en el circuito que se muestra en la figura 8.5*c*.

▶ ***Recopilar la información conocida.***
Primero debemos verificar que ambos circuitos se encuentren dibujados y marcados correctamente. A continuación elaboramos el supuesto de que el circuito de la figura 8.5*b* se conectó por un largo periodo, para que todo transitorio se haya disipado. Podemos hacer dicho supuesto bajo estas circunstancias a menos que se ordene lo contrario. Este circuito determina $i_L(0)$.

▶ ***Elaborar un plan.***
El circuito de la figura 8.5*c* puede analizarse escribiendo una ecuación LVK. A fin de cuentas, deseamos una ecuación diferencial con v y t sólo como variables; para realizar esta tarea, pueden ser necesarias ecuaciones adicionales y algunas sustituciones. A continuación resolveremos la ecuación diferencial para encontrar $v(t)$.

▶ ***Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.***
Con referencia a la figura 8.5*c*, podemos escribir

$$-v + 10i_L + 5\frac{di_L}{dt} = 0$$

Sustituyendo $i_L = -v/40$, observamos que

$$\frac{5}{40}\frac{dv}{dt} + \left(\frac{10}{40} + 1\right)v = 0$$

o, más simplemente,

$$\frac{dv}{dt} + 10v = 0 \qquad [9]$$

▶ ***Determinar si se requiere de información adicional.***
A partir de la experiencia previa, sabemos que una expresión completa de v requerirá el conocimiento de v en un momento específico, donde $t = 0$ es el más conveniente. Podríamos sentirnos tentados a mirar la figura 8.5*b* y escribir $v(0) = 24$ V, lo cual es válido *sólo justo antes de que el interruptor abre.* La tensión en la resistencia puede cambiar a cualquier valor en el instante en el que se opera; únicamente permanecerá sin sufrir ningún cambio la corriente que circula por el inductor.

En el circuito de la figura 8.5*b*, $i_L = 24/10 = 2.4$ A, puesto que el inductor actúa como un corto circuito ante una corriente directa. Por lo tanto, $i_L(0) = 2.4$ A en el circuito de la figura 8.5*c*, es también un punto clave en el análisis de este tipo de circuitos. Por lo tanto, en el circuito de la figura 8.5*c*, $v(0) = (40)(-2.4) = -96$V.

▶ ***Intentar resolver.***
Podemos tomar en cuenta cualquiera de las tres técnicas básicas de solución. Con base en la experiencia, empecemos escribiendo la ecuación característica correspondiente a la ecuación [9]:

$$s + 10 = 0$$

Resolviendo, podemos ver que $s = -10$, por lo que

$$v(t) = Ae^{-10t} \qquad [10]$$

(la cual, una vez sustituida en el lado izquierdo de la ecuación [9], da como resultado

$$-10Ae^{-10t} + 10Ae^{-10t} = 0$$

como se esperaba).

Encontramos el valor de A fijando el valor de $t = 0$ en la ecuación [10] y haciendo uso del hecho que $v(0) = -96$ V. Por lo tanto,

$$v(t) = -96e^{-10t} \qquad [11]$$

y $v(0.2) = -12.99$ V, de un máximo de -96 V.

Verificar la solución. ¿Es razonable o esperada?

En vez de escribir una ecuación diferencial en v, podríamos haber escrito la ecuación diferencial en términos de i_L:

$$40i_L + 10i_L + 5\frac{di_L}{dt} = 0$$

o

$$\frac{di_L}{dt} + 10i_L = 0$$

que tiene la solución $i_L = Be^{-10t}$. Con $i_L(0) = 2.4$, encontramos que $i_L(t) = 2.4e^{-10t}$. Como $v = -40i_L$, una vez más obtenemos la ecuación [11]. Debemos observar: ¡**no es coincidencia** que la corriente del inductor y la tensión de la resistencia tengan la misma dependencia exponencial!

PRÁCTICA

8.2 Determine la tensión v en el inductor del circuito de la figura 8.6 para $t > 0$.

Respuesta: $-25e^{-2t}$ V.

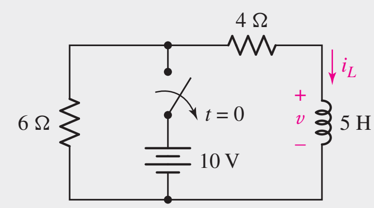


FIGURA 8.6 Circuito del problema de práctica 8.2.

Determinación de la cantidad de energía

Antes de enfocar nuestra atención en la interpretación de la respuesta, volvamos a observar el circuito de la figura 8.1 y verifiquemos las relaciones de potencia y de energía. La potencia que se está disipando en la resistencia es

$$p_R = i^2 R = I_0^2 R e^{-2Rt/L}$$

y podemos encontrar la energía total que se convierte en calor en la resistencia mediante la integración de la potencia instantánea desde un tiempo cero hasta el infinito:

$$w_R = \int_0^\infty p_R\, dt = I_0^2 R \int_0^\infty e^{-2Rt/L}\, dt$$

$$= I_0^2 R \left(\frac{-L}{2R}\right) e^{-2Rt/L}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2} L\, I_0^2$$

Éste es el resultado que esperamos, ya que la energía total almacenada inicialmente en el inductor es $\frac{1}{2}LI_0^2$, y no existe ninguna energía almacenada en el inductor en el infinito, puesto que su corriente desciende hasta cero de un momento a otro. Por lo tanto, toda la energía inicial se consume en la resistencia por disipación.

8.2 PROPIEDADES DE LA RESPUESTA EXPONENCIAL

Consideremos la naturaleza de la respuesta del circuito *RL* en serie. Sabemos que la corriente del inductor se representa por medio de

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

En $t = 0$, la corriente tiene un valor I_0, pero cuando el tiempo aumenta, la corriente disminuye y se aproxima a cero. La forma de este decaimiento exponencial se observa en la gráfica de $i(t)/I_0$ como función de t que se exhibe en la figura 8.7. Puesto que la función que graficaremos es $e^{-Rt/L}$, la curva no cambiará si R/L se mantiene constante. En consecuencia, debemos obtener la misma curva para cada circuito *RL* en serie que tenga la misma razón L/R. Veamos cómo afecta esta razón la forma de la curva.

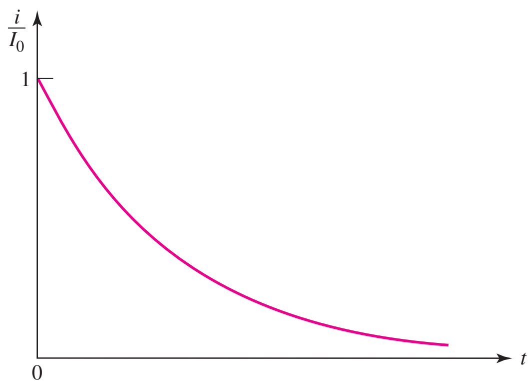


FIGURA 8.7 Gráfica de $e^{-Rt/L}$ en función de t.

Si duplicamos la razón entre L y R, el exponente no cambiará si t se duplica también. En otras palabras, la respuesta original ocurrirá en un tiempo posterior, así que la nueva curva se obtiene moviendo cada punto de la curva original dos veces más hacia la derecha. Con esta proporción L/R más grande, la corriente tarda más en decaer hasta cualquier fracción dada de su valor original. Podríamos decir que el "ancho" de la curva se duplica, o que el ancho es proporcional a L/R. Sin embargo, se nos dificulta definir el término *ancho*, debido a que cada curva se extiende ¡desde $t = 0$ hasta ∞! En vez de eso, debemos considerar el tiempo que se requeriría para que la corriente decreciera hasta cero *si continuara disminuyendo a su tasa inicial.*

La tasa inicial de decaimiento se calcula evaluando la derivada en el tiempo cero:

$$\left.\frac{d}{dt}\frac{i}{I_0}\right|_{t=0} = -\frac{R}{L}e^{-Rt/L}\bigg|_{t=0} = -\frac{R}{L}$$

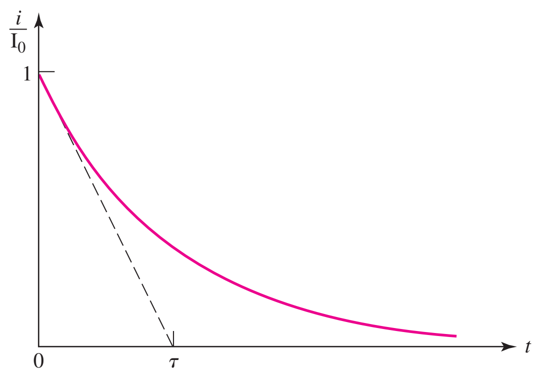
Designamos el valor del tiempo que tarda i/I_0 en disminuir desde la unidad hasta cero, suponiendo una tasa de decaimiento constante, mediante la letra griega τ (tau). De tal modo,

$$\left(\frac{R}{L}\right)\tau = 1$$

o

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}} \qquad [12]$$

La proporción L/R se mide en segundos, pues el exponente $-Rt/L$ debe ser adimensional. El valor del tiempo τ se denomina ***constante de tiempo*** y se muestra de manera gráfica en la figura 8.8. Es posible encontrar en forma gráfica la constante de tiempo de un circuito *RL* en serie a partir de la curva de respuesta; sólo se requiere dibujar la tangente a la curva en $t = 0$ y determinar la intersección de dicha tangente con el eje de tiempo. A menudo, esta operación constituye una manera conveniente de aproximar la constante de tiempo a partir de la imagen exhibida en un osciloscopio.

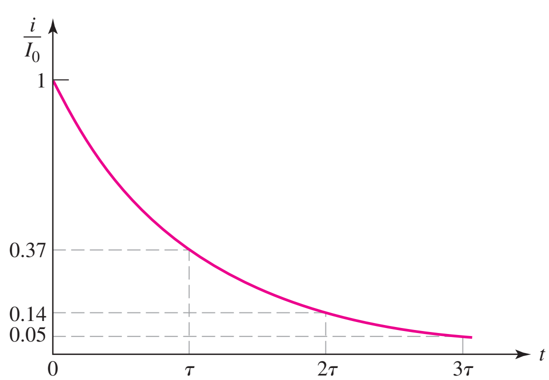


■ **FIGURA 8.8** La constante de tiempo τ de un circuito *RL* en serie es *L*/*R*, la cual constituye el tiempo requerido para que la curva de respuesta disminuya hasta cero, si ésta aminora a una tasa constante igual a su tasa de decaimiento inicial.

Obtenemos una interpretación igual de importante de la constante de tiempo τ determinando el valor *de* $i(t)/I_0$ y $t = \tau$. Tenemos:

$$\frac{i(\tau)}{I_0} = e^{-1} = 0.3679 \qquad \text{o} \qquad i(\tau) = 0.3679 I_0$$

Así, en una constante de tiempo la respuesta disminuyó hasta 36.8% de su valor inicial; el valor de τ también se determina en forma gráfica a partir de este hecho, como se indica en la figura 8.9. Resulta conveniente medir el decaimiento de la corriente en intervalos de una constante de tiempo; además, al recurrir a una calculadora manual, ésta indica que $i(t)/I_0$ es 0.3679 en $t = \tau$, 0.1353 en $t = 2\tau$, 0.04979 en $t = 3\tau$, 0.01832 en $t = 4\tau$ y 0.006738 en $t = 5\tau$. En algunos puntos, entre tres a cinco constantes de tiempo después del tiempo cero, coincidiríamos en que la corriente es una fracción ínfima de lo que era al principio. En consecuencia, si se nos preguntara: *¿Cuánto tarda la*



■ **FIGURA 8.9** La corriente en un circuito *RL* en serie se reduce hasta 37% de su valor inicial en $t = \tau$, 14% en $t = 2\tau$ y 5% en $t = 3\tau$.

corriente en decaer hasta cero?, la respuesta podría ser: *Cerca de cinco constantes de tiempo*. En este punto, ¡la corriente es menor que 1% de su valor original!

PRÁCTICA

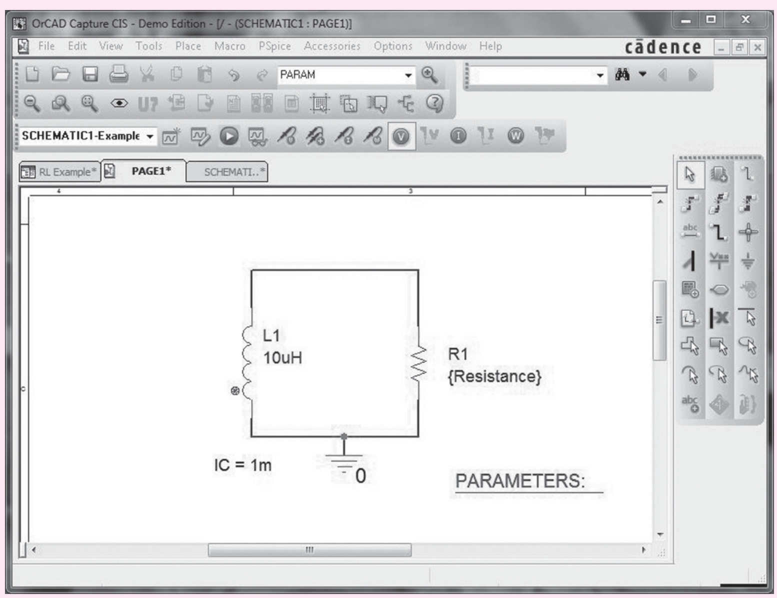
8.3 En un circuito *RL* en serie sin fuente, calcule el valor numérico de la razón: (*a*) $i(2\tau)/i(\tau)$, (*b*) $i(0.5\tau)/i(0)$, y (*c*) t/τ si $i(t)/i(0) = 0.2$; (*d*) t/τ si $i(0) - i(t) = i(0)\ \ln 2$.

Respuesta: 0.368; 0.607; 1.609; 1.181.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

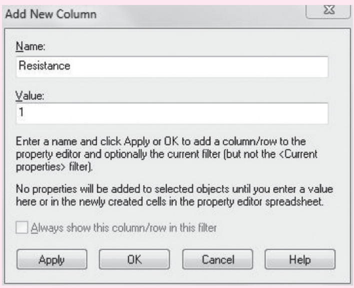
La capacidad de realizar un análisis transitorio de PSpice resulta muy útil cuando se considera la respuesta de circuitos sin fuente. En este ejemplo, usamos una característica especial que permite variar un parámetro de componente, similar a la forma en la que variamos la tensión de cd en otras simulaciones. Este objetivo se logra si se le agrega la componente **PARAM** a nuestro esquema, el cual puede colocarse en cualquier parte, pues no se alambra en el circuito. El circuito *RL* completo se muestra en la figura 8.10 e incluye una corriente de inductor inicial de 1 mA.

Con la finalidad de relacionar el valor de la resistencia con el parámetro de barrido propuesto, debemos llevar a cabo tres tareas. Primero, proporcionamos un nombre al parámetro, al cual decidimos llamar Resistencia para efectos de simplicidad. Lo anterior se logra mediante un doble clic en la etiqueta **PARAMETERS:** anotado en el esquema que abre Property Editor para este pseudocomponente. Luego, si hacemos clic en los resultados de **New Column** aparece la ventana de diálogo que se muestra en la figura 8.11*a*, en la cual se ingresa *Resistance* en

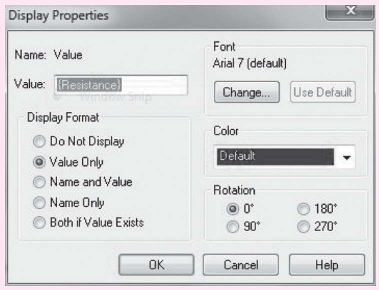


■ **FIGURA 8.10** Circuito *RL* simple dibujado empleando la herramienta de captura de esquemas.

Name y un valor de 1 en **Value**. La segunda tarea consiste en enlazar el valor de R1 a nuestro parámetro de barrido, lo cual logramos haciendo doble clic en el valor por omisión de R1 en el esquema, y aparece la ventana de diálogo de la figura 8.11*b*. En **Value** se ingresa simplemente *{Resistance}*. (Observe que es necesario escribirlo entre llaves.)

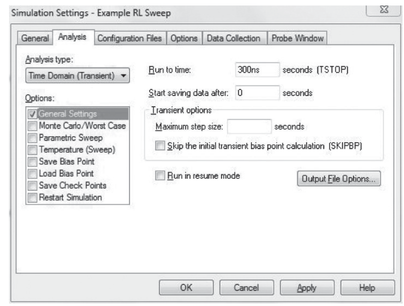


(*a*)

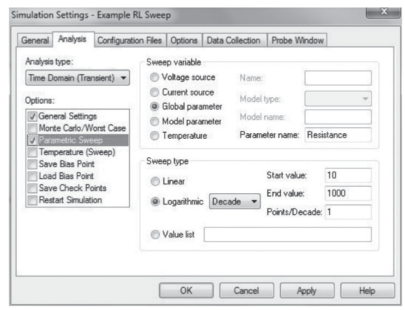


(*b*)

FIGURA 8.11 (*a*) Ventana de diálogo Add New Column en el Property Editor de PARAM. (*b*) Ventana de diálogo para asignar valor a resistencias.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 8.12 (*a*) Ventana de diálogo de simulación. (*b*) Ventana de diálogo de parámetros de barrido.

La tercera tarea consiste en configurar la simulación, lo que incluye la configuración de los parámetros para el análisis de transitorios, así como los valores que se desean para R1. En **PSpice** seleccionamos **New Simulation Profile** (figura 8.12*a*), en la cual se selecciona **Time Domain (Transient)** de **Analysis type**, 300 ns de **Run to time**, y se marca la selección **Parametric Sweep box** en **Options**. La última opción aparece en el cuadro de diálogo que se muestra en la figura 8.12*b*, en la que se selecciona **Global parameter** de **Sweep variable** y se ingresa *Resistance* en **Parameter name**. La última selección que se requiere es marcar **Logarithmic** en **Sweep type**, un **Start value** de 10, un **End value** de 1 000 y 1 **Points/Decade**; de forma alterna, pudimos haber listado los valores deseados de resistencia utilizando **Value list**.

Después de correr la simulación, aparece la caja de notificación que se muestra en la figura 8.13, que presenta los grupos de datos disponibles de la gráfica

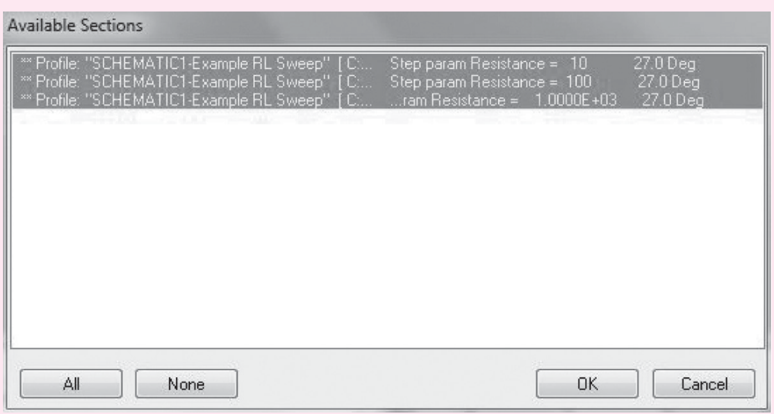


FIGURA 8.13 Ventana de diálogo de las secciones de datos disponibles.

(*continúa*)

(**Resistance** = 10, 100 y 1 000 en este caso). Al seleccionar la corriente en el inductor de las opciones de variables en **Trace** en Probe, obtenemos al mismo tiempo tres gráficas, como se muestra (después de marcarlas manualmente) en la figura 8.14.

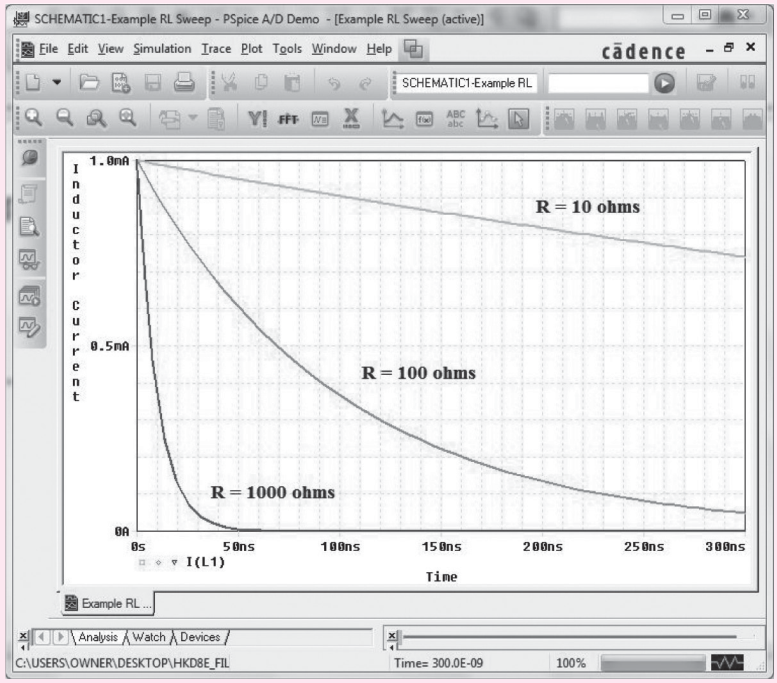


FIGURA 8.14 Salida de Probe de los tres valores de resistencias.

¿Por qué un valor más grande de la constante de tiempo L/R da origen a una curva de respuesta que decae con más suavidad? Analicemos el efecto de cada elemento.

En términos de la constante de tiempo τ; la respuesta del circuito *RL* en serie se escribiría simplemente como

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

Un aumento de L permite un mayor almacenamiento de energía de la misma corriente inicial, así que esta energía más grande requiere un tiempo más largo para que se disipe en la resistencia. De igual forma podríamos aumentar L/R al reducir R. En este caso, la potencia que fluye hacia la resistencia es menor para la misma corriente inicial; también en este caso se requiere un tiempo mayor para disipar la energía almacenada. Dicho efecto se observa con claridad en el resultado de simulación de la figura 8.14.

8.3 CIRCUITO *RC* SIN FUENTE

Los circuitos que se basan en combinaciones resistencia-capacitor son más comunes que sus análogos resistencia-inductor. Las principales razones consisten en las menores pérdidas que se generan en un capacitor físico, el menor costo y el hecho de que el modelo matemático simple concuerda mejor con el comportamiento real del dispositivo, así como su tamaño y peso menores (que son dos aspectos muy importantes en las aplicaciones de circuitos integrados).

Veamos en qué grado el análisis del circuito *RC* en paralelo (¿o está en serie?) que se muestra en la figura 8.15 corresponde al del circuito *RL*. En el capacitor seleccionado supondremos una energía almacenada inicial de

$$v(0) = V_0$$

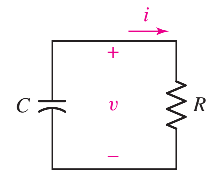


FIGURA 8.15 Circuito *RC* en paralelo para el que $v(t)$ se va a determinar, sujeto a la condición inicial $v(0) = V_0$.

La corriente total que sale del nodo de la parte superior del esquema de circuito debe ser cero, por lo que deberíamos escribir

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

La división entre C da como expresión

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \qquad [13]$$

La ecuación [13] tiene una forma familiar; mientras que la comparación con la ecuación [1]:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \qquad [1]$$

muestra que la sustitución de i por v y L/R por RC da una ecuación idéntica a la que consideramos antes. Así debe ser, pues el circuito *RC* que analizaremos ahora resulta el dual del circuito *RL* considerado primero. Dicha *dualidad* obliga a que $v(t)$ en el circuito *RC* e $i(t)$ en el circuito *RL* tengan expresiones idénticas, si la resistencia de un circuito es igual al recíproco de la resistencia del otro circuito y si L es numéricamente igual a C. En consecuencia, la respuesta del circuito *RL*,

$$i(t) = i(0)e^{-Rt/L} = I_0e^{-Rt/L}$$

permite escribir de inmediato

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC} = V_0e^{-t/RC} \qquad [14]$$

para el circuito *RC*.

Supongamos que hubiéramos elegido la corriente i como la variable del circuito *RC* en vez de la tension v. Al aplicar la ley de tensiones de Kirchhoff,

$$\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\ dt' - v_0(t_0) + Ri = 0$$

obtenemos una ecuación integral que se opone a la ecuación diferencial. Sin embargo, al tomar la derivada del tiempo de ambos lados de esta ecuación,

$$\frac{i}{C} + R\frac{di}{dt} = 0 \qquad [15]$$

y sustituyendo i por v/R, obtenemos de nuevo la ecuación [13]:

$$\frac{v}{RC} + \frac{dv}{dt} = 0$$

La ecuación [15] podría utilizarse como punto de partida, pero la aplicación de los principios de dualidad no habría sido tan natural.

Analicemos la naturaleza física de la respuesta de tensión del circuito *RC* según se expresa por medio de la ecuación [14]. En $t = 0$ obtenemos la condición inicial correcta, y a medida que t se vuelve infinita, la tensión tiende a cero. Este último resultado concuerda con la idea de que si cualquier tensión se conserva en el capacitor, la energía continuaría fluyendo hacia la resistencia y se disiparía como calor. *En consecuencia, se requiere una tensión final nula*. La constante de tiempo del circuito *RC* se determinaría mediante las relaciones de dualidad con respecto a la expresión de la constante de

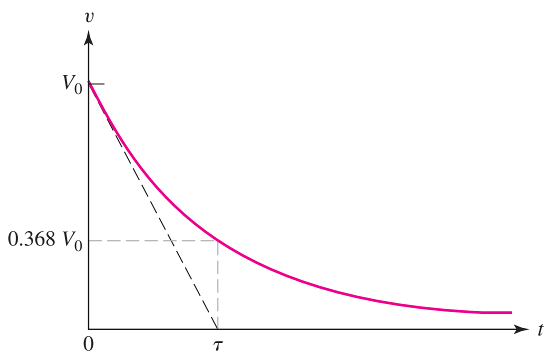
tiempo del circuito *RL* o sólo con observar el tiempo en el que la respuesta disminuyó hasta 37% de su valor inicial:

$$\frac{\tau}{RC} = 1$$

por lo que:

$$\boxed{\tau = RC} \qquad [16]$$

Nuestra familiaridad con la exponencial negativa y la importancia de la constante de tiempo τ nos permite bosquejar con rapidez la curva de respuesta (fig. 8.16). Valores más grandes de R o C proporcionan mayores constantes de tiempo y una disipación más lenta de la energía almacenada. Una resistencia mayor disipará una potencia más pequeña con una tensión determinada entre sus extremos, por lo que requiere mayor tiempo para convertir la energía almacenada en calor; una capacitancia más grande almacena mayor energía con una tensión determinada en ella, lo que también en este caso requiere un tiempo mayor para disipar su energía inicial.



■ **FIGURA 8.16** La tensión $v(t)$ en el capacitor del circuito *RC* en paralelo se grafica como una función del tiempo. El valor inicial de $v(t)$ es V_0.

EJEMPLO 8.3

Encuentre la tensión marcada v en $t = 200\ \mu$s del circuito de la figura 8.17*a*.

Para encontrar la tensión que se pide, necesitaremos dibujar y analizar dos circuitos separados: uno antes de que se dispare el interruptor (figura 8.17*b*), y otro después (figura 8.17*c*).

El único propósito de analizar el circuito de la figura 8.17*b* es obtener una tensión inicial del capacitor; suponemos que cualquier transitorio en ese circuito desapareció hace mucho tiempo y quedó un circuito de cd puro. Si no existe ninguna corriente que circule a través del capacitor o la resistencia de 4 Ω, entonces,

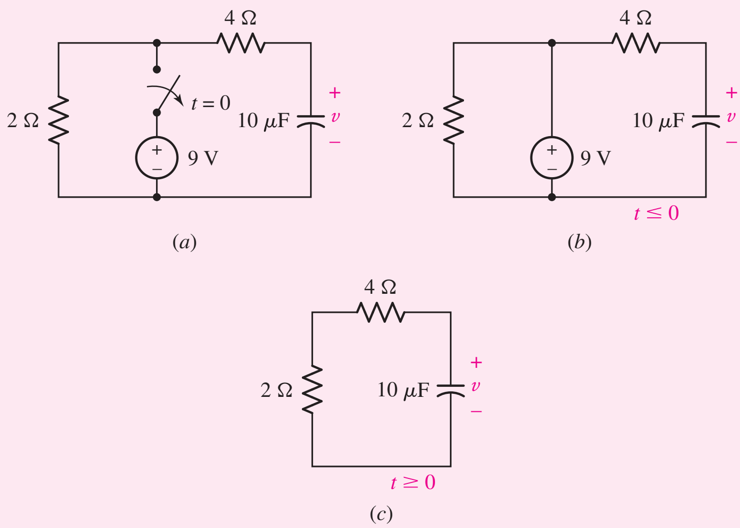
$$v(0) = 9 \text{ V} \qquad [17]$$

En seguida enfocamos la atención en el circuito de la figura 8.17*c*, reconociendo que

$$\tau = RC = (2 + 4)(10 \times 10^{-6}) = 60 \times 10^{-6}\text{s}$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación [14],

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC} = v(0)e^{-t/60 \times 10^{-6}} \qquad [18]$$



■ **FIGURA 8.17** (*a*) Circuito *RC* simple con un interruptor disparado en el tiempo $t = 0$. (*b*) El circuito antes de $t = 0$. (*c*) El circuito después de que se dispara el interruptor y se quita la fuente de 9 V.

La tensión en el capacitor debe ser igual en ambos circuitos en $t = 0$; en ninguna otra tensión o corriente se pone dicha restricción. Sustituyendo la ecuación [17] en la [18],

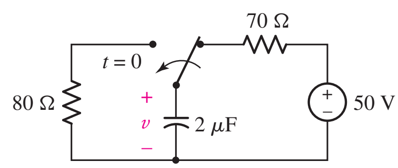
$$v(t) = 9e^{-t/60 \times 10^{-6}} \text{ V}$$

por lo que $v(200 \times 10^{-6}) = 321.1$ mV (menos de 4% de su valor máximo).

PRÁCTICA

8.4 Al observar con cuidado cómo cambia el circuito una vez que se acciona el interruptor en el circuito de la figura 8.18, determine $v(t)$ en $t = 0$ y en $t = 160$ μs.

Respuestas: 50 V, 18.39 V.



■ **FIGURA 8.18**

8.4 UNA PERSPECTIVA MÁS GENERAL

Como hemos visto de manera indirecta en los ejemplos 8.2 y 8.3, independientemente de cuántas resistencias tengamos en el circuito, obtenemos una sola constante de tiempo (ya sea $\tau = L/R$ o $\tau = RC$) cuando únicamente está presente un elemento de almacenamiento. Podemos formalizar esto percatándonos de que el valor que se necesita para R es de hecho la resistencia equivalente de Thévenin vista por el elemento de almacenamiento de energía. (*¡Aunque parezca extraño, es incluso posible calcular una constante de tiempo para un circuito que contenga fuentes dependientes!*)

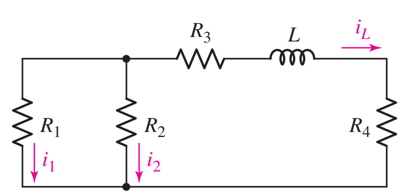
Circuitos *RL* generales

Como ejemplo, examine el circuito que se ilustra en la figura 8.19. La resistencia equivalente que el inductor enfrenta es

$$R_{eq} = R_3 + R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

y por lo tanto la constante de tiempo vale

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} \qquad [19]$$



■ **FIGURA 8.19** Circuito sin fuente que contiene un inductor y varias resistencias, que se analiza mediante la determinación de la constante de tiempo $\tau = L/R_{eq}$.

También podemos enunciar esto como

$$\tau = \frac{L}{R_{TH}},$$

donde R_{TH} es la resistencia equivalente de Thévenin "vista" por el inductor L.

Si varios inductores están presentes en un circuito y pueden combinarse mediante arreglos en serie y/o en paralelo, entonces la ecuación [19] puede generalizarse más como

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} \qquad [20]$$

donde L_{eq} representa la inductancia equivalente.

Pequeñas diferencias: distinción entre 0^+ y 0^-

Si regresamos al circuito de la figura 8.19 y suponemos que alguna cantidad finita de energía se almacena en el inductor en $t = 0$, entonces $i_L(0) \neq 0$.

La corriente i_L en el inductor está dada por:

$$i_L = i_L(0)e^{-t/\tau}$$

así que lo anterior representa lo que podríamos llamar la solución básica del problema. Es muy probable que se necesitemos alguna otra corriente o tensión aparte de i_L como la corriente i_2 en R_2. Siempre podemos aplicar las leyes de Kirchhoff y la ley de Ohm a la parte resistiva del circuito sin ninguna dificultad, pero la división de corriente proporciona la respuesta más rápida en este circuito:

$$i_2 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2}[i_L(0)e^{-t/\tau}]$$

También es posible conocer el valor inicial de alguna corriente aparte de la del inductor. En razón de que *la corriente en una resistencia puede cambiar de manera instantánea,* indicaremos el instante posterior a cualquier cambio que podría ocurrir en $t = 0$ mediante el uso del símbolo 0^+; en un lenguaje más matemático, $i_1(0^+)$ es el límite de la derecha de $i_1(t)$ a medida que t tiende a cero.[1] Por lo tanto, si se nos proporciona el valor inicial de i_1 como $i_1(0^+)$, entonces el valor inicial de i_2 es

$$i_2(0^+) = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}$$

A partir de tales valores, obtenemos el valor inicial necesario de i_L:

Observe que $i_L(0^+)$ es *siempre* igual a $i_L(0^-)$. Lo anterior no es necesariamente válido para la tensión en el inductor o para la tensión o corriente en la resistencia, ya que pueden cambiar en el tiempo cero.

$$i_L(0^+) = -[i_1(0^+) + i_2(0^+)] = -\frac{R_1 + R_2}{R_2}i_1(0^+)$$

así que la expresión de i_2 se convierte en

$$i_2 = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}e^{-t/\tau}$$

Veamos si podemos obtener esta última expresión de modo más directo. En razón de que la corriente en el inductor decae de manera exponencial como $e^{-t/\tau}$, *toda corriente que circula por el circuito debe seguir el mismo comportamiento funcional*. Lo anterior resulta claro al considerar la corriente en el inductor como una fuente de corriente que se aplica a una red resistiva. Cada corriente y tensión en la red resistiva deben tener la misma dependencia de tiempo. Por lo tanto, mediante estas ideas podemos expresar i_2 como:

$$i_2 = Ae^{-t/\tau}$$

donde

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

[1] Observe que *sólo* es una conveniencia de notación. Cuando se contrapone con $t = 0^+$ o su compañera $t = 0^-$ en una ecuación, simplemente se emplea el valor cero. La notación permite diferenciar con claridad entre los tiempos anterior y posterior al acontecimiento, tal como la apertura o cierre del interruptor, o en un suministro de potencia que se activa o desactiva.

y A debe determinarse a partir del conocimiento del valor inicial de i_2. Puesto que se conoce $i_1(0^+)$, la tensión a través de R_1 y de R_2 se determina como

$$R_2 i_2(0^+) = R_1 i_1(0^+)$$

lo que nos conduce a

$$i_2(0^+) = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}$$

Por lo tanto,

$$i_2(t) = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}e^{-t/\tau}$$

Una secuencia similar de pasos proporcionará una solución rápida a un gran número de problemas. Reconocemos primero la dependencia del tiempo de la respuesta como un decaimiento exponencial, determinamos la constante de tiempo apropiada combinando resistencias, escribimos la solución con una amplitud desconocida y luego determinamos la amplitud a partir de una condición inicial.

Esta misma técnica se aplica a cualquier circuito con un inductor y cualquier número de resistencias, así como a circuitos especiales que contengan dos o más inductores, y también dos o más resistencias que se puedan simplificar mediante la combinación de resistencias o inductancias en un inductor y en una resistencia.

EJEMPLO 8.4

Determine tanto i_1 como i_L del circuito de la figura 8.20*a* para $t > 0$.

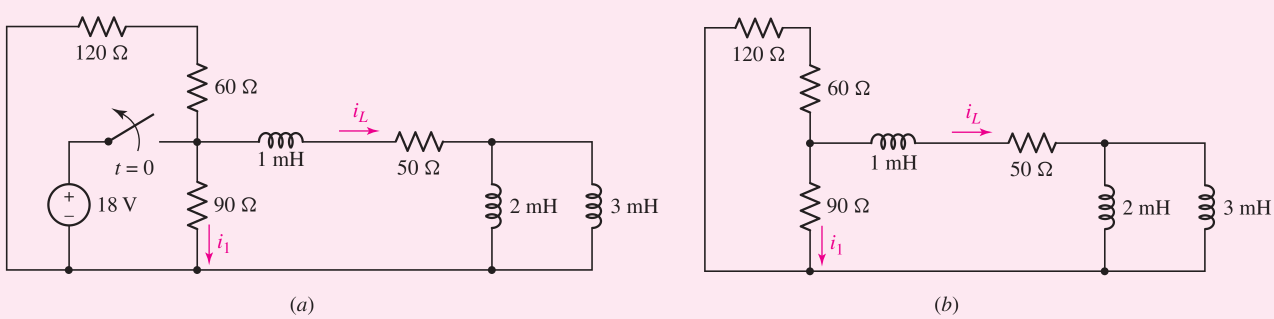


FIGURA 8.20 (*a*) Circuito con resistencias e inductores múltiples. (*b*) Después de $t = 0$, el circuito se simplifica a una resistencia equivalente de 110 Ω en serie con $L_{eq} = 2.2$ mH.

Después de $t = 0$, cuando la fuente de tensión se desconecta como se muestra en la figura 8.20*b*, calculamos con facilidad una inductancia equivalente,

$$L_{eq} = \frac{2 \times 3}{2 + 3} + 1 = 2.2 \text{ mH}$$

una resistencia equivalente, en serie con la inductancia equivalente,

$$R_{eq} = \frac{90(60 + 120)}{90 + 180} + 50 = 110\ \Omega$$

(*continúa*)

y una constante de tiempo,

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} = \frac{2.2 \times 10^{-3}}{110} = 20\ \mu\text{s}$$

De tal modo, la forma de la respuesta natural es $Ke^{-50\,000t}$, donde K es una constante desconocida. Si consideramos al circuito justo antes de la apertura del interruptor ($t = 0^-$), $i_L = 18/50$ A. En razón de que $i_L(0^+) = i_L(0^-)$, sabemos que $i_L = 18/50$ A o 360 mA en $t = 0^+$, por lo que

$$i_L = \begin{cases} 360 \text{ mA}, & t < 0 \\ 360e^{-50\,000t} \text{ mA}, & t \geq 0 \end{cases}$$

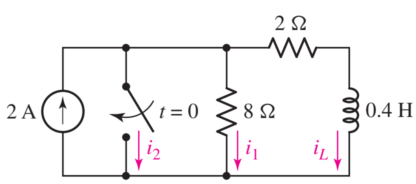
No existe ninguna restricción sobre i_1 para que cambie instantáneamente en $t = 0$, por lo que su valor en $t = 0^-$ (18/90 A o 200 mA) no es relevante para encontrar i_1 en $t > 0$. En lugar de eso, debemos encontrar $i_1(0^+)$ a través del conocimiento de $i_L(0^+)$. Mediante la división de corriente, tenemos

$$i_1(0^+) = -i_L(0^+)\frac{120 + 60}{120 + 60 + 90} = -240 \text{ mA}$$

Por consiguiente,

$$i_1 = \begin{cases} 200 \text{ mA}, & t < 0 \\ -240e^{-50\,000t} \text{ mA}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Podemos verificar el análisis mediante PSpice y el modelo de interruptor **Sw_tOpen**, aunque debemos recordar que, en realidad, esta parte son solamente dos valores de resistencias: uno correspondiente a antes de que el interruptor se active en el tiempo especificado (el valor por omisión es de 10 mΩ) y el otro es después de que el interruptor se active (el valor por omisión es de 1 MΩ). Si la resistencia equivalente del resto del circuito es comparable con cualquiera de los valores, éstos deberán editarse mediante doble clic en el símbolo del interruptor del diagrama del circuito. Observe que también hay un modelo de interruptor que cierra en un tiempo específico: **Sw_tClose**.



■ **FIGURA 8.21**

PRÁCTICA

8.5 Para $t = 0.15$ s en el circuito de la figura 8.21, encuentre el valor de (*a*) i_L; (*b*) i_1; (*c*) i_2.

Respuesta: 0.756 A; 0; 1.244 A.

Ahora consideramos la tarea de determinar la respuesta natural de cualquier circuito que pueda representarse mediante un inductor equivalente en serie con una resistencia equivalente. *Un circuito que contenga varias resistencias e inductores no siempre posee una forma que permite que las resistencias o los inductores se combinen en elementos equivalentes individuales.* En tales casos, no hay un solo término exponencial negativo o una sola constante de tiempo asociado con el circuito, sino que habrá, en general, varios términos exponenciales negativos, cuyo número será igual al de inductores que quedan luego de haber efectuado todas las combinaciones posibles de inductores.

Circuitos *RC* generales

Muchos de los circuitos *RC* para los que desearíamos encontrar una respuesta natural contienen más de una sola resistencia y un solo capacitor. Del mismo modo en que hicimos con los circuitos *RL*, analizamos primero los casos en los que el circuito dado puede reducirse a un circuito equivalente consistente en sólo una resistencia y un capacitor.

Supongamos primero que abordaremos un circuito que nada más contiene un capacitor, pero un número cualquiera de resistencias. Se puede sustituir la red resistiva de dos terminales que se encuentra en las terminales del capacitor por una resistencia equivalente, y luego podríamos escribir de inmediato la expresión de la tensión del capacitor. En dichas circunstancias, el circuito tiene una constante de tiempo efectiva dada por

$$\tau = R_{eq}C$$

donde R_{eq} es la resistencia equivalente de la red. Una perspectiva alterna es que R_{eq} sea en realidad la resistencia equivalente de Thévenin "vista" por el capacitor.

Si el circuito tiene más de un capacitor, pero puede reemplazarse de alguna forma mediante combinaciones en serie y/o en paralelo con una capacitancia C_{eq}, entonces el circuito tendrá una constante de tiempo efectiva dada por

$$\tau = RC_{eq}$$

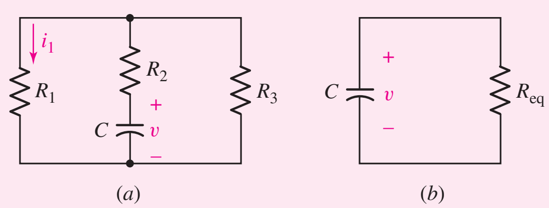
expresándose el caso general como:

$$\tau = R_{eq}C_{eq}$$

Sin embargo, vale la pena mencionar que los capacitores en paralelo sustituidos por una capacitancia equivalente tendrían que contar con condiciones iniciales idénticas.

EJEMPLO **8.5**

Determine $v(0^+)$ e $i_1(0^+)$ del circuito de la figura 8.22*a* si $v(0^-) = V_0$.



■ **FIGURA 8.22** (*a*) Circuito que contiene un capacitor y varias resistencias. (*b*) Las resistencias se sustituyen por una sola resistencia equivalente; la constante de tiempo es ahora simplemente $\tau = R_{eq}C$.

Primero simplificamos el circuito de la figura 8.22*a* como se muestra en la figura 8.22*b*, lo que nos permite escribir

$$v = V_0 e^{-t/R_{eq}C}$$

(*continúa*)

donde

$$v(0^+) = v(0^-) = V_0 \qquad \text{y} \qquad R_{eq} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

Toda corriente y toda tensión en la parte resistiva de la red debe tener la forma $Ae^{-t/R_{eq}C}$, donde A es el valor correspondiente a las condiciones iniciales de esa corriente o tensión. Así, la corriente en R_1, por ejemplo, se expresaría como:

$$i_1 = i_1(0^+)e^{-t/\tau}$$

donde

$$\tau = \left(R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}\right) C$$

e $i_1(0^+)$ queda por determinarse a partir de la condición inicial. Cualquier corriente que fluya en el circuito cuando $t = 0^+$ debe provenir del capacitor. Por lo tanto, ya que v no puede cambiar de forma instantánea, $v(0^+) = v(0^-) = V_0$ y

$$i_1(0^+) = \frac{V_0}{R_2 + R_1 R_3/(R_1 + R_3)} \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

PRÁCTICA

8.6 Calcule los valores de v_C y de v_o del circuito de la figura 8.23 para t igual a: (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) 1.3 ms.

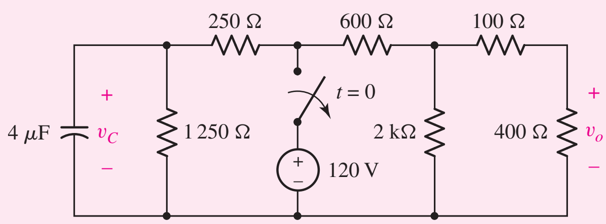


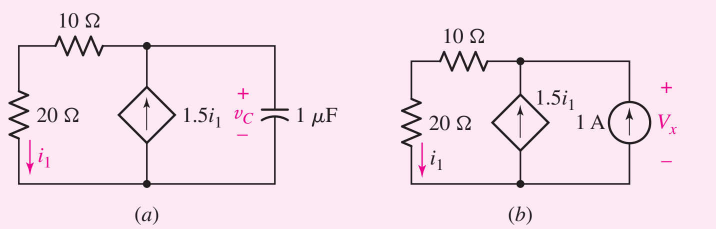
FIGURA 8.23

Respuesta: 100 V, 38.4 V; 100 V, 25.6 V; 59.5 V, 15.22 V.

Nuestro método puede aplicarse a circuitos que cuenten con un elemento de almacenamiento de energía y también con una o más fuentes dependientes. En dichos casos, podemos escribir una ecuación LCK o LVK apropiada junto con cualquiera otra ecuación de soporte que sea necesaria, reducir todo a una sola ecuación diferencial y extraer la ecuación característica para encontrar la constante de tiempo. De forma alternativa, podemos empezar a buscar la resistencia equivalente de Thévenin de la red conectada al capacitor o inductor y utilizarla en el cálculo de la constante de tiempo *RL* o *RC* apropiada, a menos que la fuente dependiente esté controlada por una tensión o corriente asociada con el elemento de almacenamiento de energía, en cuyo caso no podrá utilizarse el método de Thévenin.

EJEMPLO 8.6

En el circuito de la figura 8.24*a*, encuentre la tensión marcada v_C para $t > 0$ si $v_C(0^-) = 2$ V.



■ **FIGURA 8.24** (*a*) Circuito *RC* simple que contiene una fuente dependiente no controlada por una tensión o corriente de capacitor. (*b*) Circuito para encontrar el equivalente de Thévenin de la red conectada al capacitor.

La fuente dependiente no está controlada por una tensión o corriente de capacitor, por lo que podemos comenzar por buscar el equivalente de Thévenin de la red a la izquierda del capacitor. Si conectamos una fuente de referencia de 1 A, como en la figura 8.24*b*,

$$V_x = (1 + 1.5i_1)(30)$$

donde

$$i_1 = \left(\frac{1}{20}\right)\frac{20}{10+20}V_x = \frac{V_x}{30}$$

Mediante un poco de álgebra podemos ver que $V_x = -60$ V, por lo que la red tiene una resistencia equivalente de Thévenin de $-60\ \Omega$ (inusual, pero no imposible cuando se trabaja con una fuente dependiente). Por lo tanto, el circuito tiene una constante de tiempo *negativa*

$$\tau = -60(1 \times 10^{-6}) = -60\ \mu\text{s}$$

Por lo tanto, la tensión en el capacitor es:

$$v_C(t) = Ae^{t/60 \times 10^{-6}} \quad \text{V}$$

donde $A = v_C(0^+) = v_C(0^-) = 2$ V. Por ende,

$$v_C(t) = 2e^{t/60\times10^{-6}} \quad \text{V} \qquad [21]$$

lo cual, sorprendentemente, es inestable: crece de manera exponencial con el tiempo. Esto no puede continuar de forma indefinida; uno o más elementos del circuito fallarán en un momento u otro.

De manera alternativa, podríamos escribir una ecuación LCK simple para el nodo superior de la figura 8.24*a*

$$v_C = 30\left(1.5i_1 - 10^{-6}\frac{dv_C}{dt}\right) \qquad [22]$$

donde

$$i_1 = \frac{v_C}{30} \qquad [23]$$

(*continúa*)

Sustituyendo la ecuación [23] en la [22] y con un poco de álgebra, obtenemos

$$\frac{dv_C}{dt} - \frac{1}{60 \times 10^{-6}} v_C = 0$$

la cual tiene como ecuación característica

$$s - \frac{1}{60 \times 10^{-6}} = 0$$

Por lo tanto,

$$s = \frac{1}{60 \times 10^{-6}}$$

y, así

$$v_C(t) = Ae^{t/60 \times 10^{-6}} \quad \text{V}$$

como calculamos con anterioridad. La sustitución de $A = v_C(0^+) = 2$ da como resultado la ecuación [21], que es nuestra expresión del cálculo de la tensión del capacitor para $t > 0$.

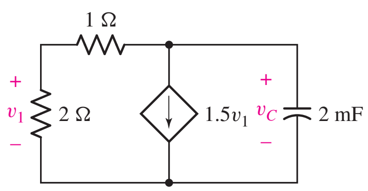


FIGURA 8.25 Circuito del problema de práctica 8.7.

PRÁCTICA

8.7 (*a*) Considerando el circuito de la figura 8.25, determine la tensión para $v_C(t)$ para $t > 0$ si $v_C(0^-) = 11$ V. (*b*) ¿Es "estable" este circuito?

Respuesta: (*a*) $v_C(t) = 11e^{-2 \times 10^3 t/3}$V, $t > 0$. (*b*) Sí, decae (exponencialmente) en lugar de crecer conforme transcurre el tiempo.

Algunos circuitos que contienen varios capacitores y resistencias se podrían sustituir por un circuito equivalente que contenga sólo una resistencia y un capacitor; se requiere que el circuito original pueda descomponerse en dos partes, una que incluya todas las resistencias y la otra todos los capacitores, de modo que ambas partes sólo se conecten mediante dos conductores ideales. Por otro lado, se necesitarán varias constantes de tiempo múltiples y términos exponenciales múltiples para describir el comportamiento del circuito (una constante de tiempo para cada elemento de almacenamiento de energía que quede en el circuito después de reducirlo tanto como sea posible).

Como comentario, debemos ser precavidos ante ciertas situaciones que impliquen sólo elementos ideales que se conectan en conjunto de manera repentina. Por ejemplo, podemos imaginar que se conectan dos capacitores ideales en serie que tienen tensiones desiguales previas a $t = 0$. Lo anterior plantea un problema al usar modelo matemático de un capacitor ideal; sin embargo, los capacitores reales tienen resistencias asociadas, a través de las cuales se disipa energía.

8.5 LA FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

Hemos estudiado la repuesta de los circuitos *RL* y *RC* cuando no se presentan fuentes o funciones forzadas; la denominamos *respuesta natural* debido a que su forma depende sólo de la naturaleza del circuito. La razón de que se obtenga alguna respuesta surge de la presencia de almacenamiento de energía inicial dentro de los elementos inductivos o capacitivos en el circuito. En algunos casos podemos encontrar circuitos que contie-

nen fuentes e interruptores; se nos informó que ciertas operaciones de conmutación se efectuaron en $t = 0$ con el fin de eliminar todas las fuentes del circuito, al tiempo que se dejaron cantidades de energía almacenadas aquí y allá. En otras palabras, hemos resuelto problemas en los que las fuentes de energía se *eliminan* en forma repentina del circuito; debemos considerar ahora el tipo de respuesta que se producirá cuando las fuentes de energía se *apliquen* de forma súbita a un circuito.

Nos enfocaremos en la respuesta que aparece cuando las fuentes de energía que se aplican de repente son fuentes de cd. Puesto que al parecer todo dispositivo eléctrico se energiza al menos una vez y debido a que la mayoría se activa y desactiva muchas veces en el curso de su vida útil, nuestro estudio se aplica a muchos casos prácticos. Aun cuando por el momento se nos restringe a fuentes de cd, se presentan innumerables casos en los que dichos ejemplos más simples corresponden al funcionamiento de dispositivos físicos. Por ejemplo, el primer circuito que analizaremos podría representar la formación de la corriente cuando se arranca un motor de cd. La generación y el uso de los pulsos de tensión rectangulares necesarios para representar un número o un comando en un microprocesador proporciona muchos ejemplos en el campo de la circuitería electrónica o transistorizada. Se presentan circuitos similares en los circuitos de sincronización y barrido de los receptores de televisión, en sistemas de comunicación que utilizan modulación por pulsos y en los sistemas de radar, por nombrar unos cuantos ejemplos.

Hemos hablado de la "aplicación repentina" de una fuente de energía, y por esta frase entendemos que su aplicación es en el tiempo cero.[2] Por lo tanto, la operación de un interruptor en serie con una batería es equivalente a la función forzada que es nula hasta el instante en que se cierra el interruptor y es igual, de ahí en adelante, a la tensión de la batería. La función forzada tiene un rompimiento, o discontinuidad, en el instante en el que se cierra el interruptor. Ciertas funciones forzadas especiales que son discontinuas o tienen derivadas discontinuas se denominan ***funciones singulares***, las más importantes de las cuales son la ***función escalón unitario*** y la ***función impulso unitario***.

Definimos la función forzada de escalón unitario como una función del tiempo que es nula para todos los valores de su argumento que son menores que cero y que es la unidad para todos los valores positivos de su argumento. Sea $(t - t_0)$ el argumento y representemos la función de escalón unitario por u, entonces $u(t - t_0)$ debe ser cero para todos los valores de t menores que t_0, y será la unidad para todos los valores de t mayores que t_0. En $t = t_0$, $u(t - t_0)$ cambia en forma *abrupta* desde 0 hasta 1. Su valor en $t = t_0$ no está definido, pero se conoce en todos los instantes de tiempo que están arbitrariamente cerca de $t = t_0$. A menudo indicamos lo anterior escribiendo $u(t_0^-) = 0$ y $u(t_0^+) = 1$. La definición matemática concisa de la función forzada de escalón unitario es

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

y la función se muestra de manera gráfica en la figura 8.26. Observe que una recta vertical de longitud unitaria se presenta en $t = t_0$. A pesar de que este "aumento" no es, de manera estricta, una parte de la definición del escalón unitario, suele mostrarse en cada dibujo.

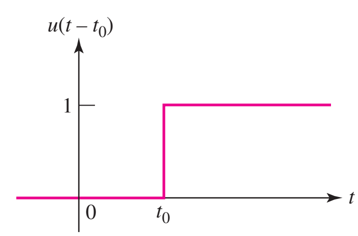
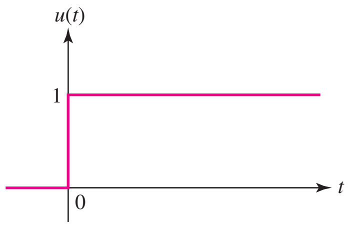


FIGURA 8.26 Función forzada de escalón unitario $u(t - t_0)$.

[2] Desde luego, esto no es físicamente posible. Sin embargo, si es muy corta la escala de tiempo en la cual ocurre un suceso de este tipo comparada con las demás escalas de tiempo relevantes que describen la operación del circuito; el señalamiento aludido es más o menos cierto, así como matemáticamente conveniente.

Observamos también que el escalón unitario no necesita ser una función del tiempo. Por ejemplo, $u(x - x_0)$ podría usarse para denotar una función de escalón unitario, donde x podría ser una distancia en metros, por ejemplo, o una frecuencia.

A menudo en el análisis de circuitos ocurre una discontinuidad o una acción de conmutación en un instante, el cual se define como $t = 0$. En ese caso, en $t_0 = 0$, representamos la función forzada de escalón unitario correspondiente mediante $u(t - 0)$, o en forma más simple $u(t)$. Esto se ilustra en la figura 8.27. Así,



■ **FIGURA 8.27** La función forzada de escalón unitario $u(t)$ se muestra como una función de t.

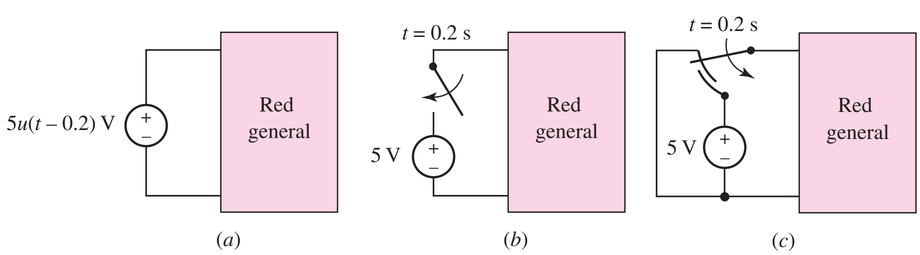
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

La función forzada de escalón unitario es en sí misma adimensional. Si deseáramos representar una tensión, se requeriría multiplicar $u(t - t_0)$ por alguna tensión constante, como 5 V. De tal modo, $v(t) = 5u(t - 0.2)$ V constituye una fuente de tensión ideal que es cero antes de $t = 0.2$ s y una constante de 5 V después de $t = 0.2$ s. La función forzada se muestra en la figura 8.28*a* conectada a una red general.

Fuentes físicas y la función de escalón unitario

Ahora es necesario preguntarnos de modo lógico cuál fuente física es la equivalente a esta función forzada discontinua. Por equivalente, entendemos simplemente que las características de tension-corriente de las dos redes son idénticas. En la fuente de tensión de escalón de la figura 8.28*a*, la característica de tension-corriente es bastante simple: la tensión es cero antes de $t = 0.2$ s de 5 V después de $t = 0.2$ s, y la corriente puede tener cualquier valor (finito) en cualquier intervalo de tiempo. Nuestro primer pensamiento podría llevar a intentar un equivalente como el que se muestra en la figura 8.28*b*, una fuente de cd de 5 V en serie con un interruptor que se cierra en $t = 0.2$ s. Sin embargo, no es equivalente para $t < 0.2$ s, debido a que la tensión entre la batería y el interruptor no está especificada por completo en dicho intervalo. La fuente "equivalente" es un circuito abierto y la tensión en ella *quizá sea cualquiera*. Después de $t = 0.2$ s, las redes son equivalentes, y si es el único intervalo que interesa, y si las corrientes iniciales que fluyen de las dos redes son idénticas en $t = 0.2$ s, entonces la figura 8.28*b* se convierte en un equivalente útil de la figura 8.28*a*.

Con el fin de obtener un equivalente exacto de la función forzada de escalón unitario, podríamos instalar un interruptor de dos vías y un polo. Antes de $t = 0.2$ s, el interruptor sirve para asegurar la tensión cero entre las terminales de entrada de la red general. Después de $t = 0.2$ s, el interruptor se cierra para proporcionar una tensión de entrada constante de 5 V. En $t = 0.2$ s, la tensión es indeterminada (como en la función forzada de escalón), y la batería se encuentra por el momento en cortocircuito (¡por suerte estamos trabajando con modelos matemáticos!). El equivalente exacto de la figura 8.28*a* se ilustra en la figura 8.28*c*.



■ **FIGURA 8.28** (*a*) Una función forzada de escalón de tensión se muestra como la fuente de una red general. (*b*) Un circuito simple que, a pesar de que no es el equivalente del inciso (*a*), se podría utilizar en muchos casos como su equivalente. (*c*) Equivalente exacto del inciso (*a*).

La figura 8.29*a* presenta una función forzada de corriente de escalón que activa a una red general. Si intentamos sustituir este circuito por una fuente de cd en paralelo con un interruptor (que se abre en $t = t_0$), debemos reconocer que los circuitos son equivalentes después de $t = t_0$, pero que las respuestas posteriores a ese instante son semejantes sólo si las condiciones iniciales resultan iguales. El circuito de la figura 8.29*b* implica que no existe tensión entre las terminales de la fuente de corriente durante $t < t_0$. Éste no es el caso del circuito de la figura 8.29*a*. Sin embargo, a menudo podríamos usar los circuitos de las figuras 8.29*a* y *b* de manera indistinta. El equivalente exacto de la figura 8.29*a* es el dual de la figura 8.28*c*; no es posible construir el equivalente exacto de la figura 8.29*b* sólo con las funciones forzadas de escalón de corriente y de tensión.[3]

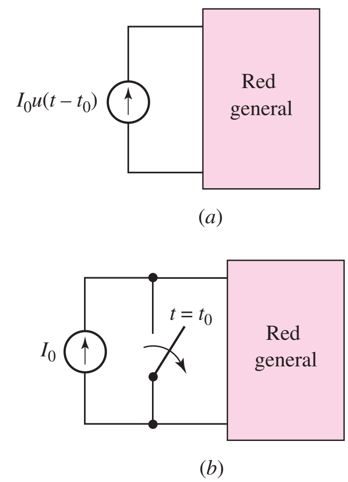


FIGURA 8.29 (*a*) Función forzada de escalón de corrientes que se aplica a una red general. (*b*) Circuito simple que, aunque no es el equivalente exacto del inciso (*a*), se podría emplear como su equivalente en muchos casos.

La función pulso rectangular

Algunas funciones forzadas muy útiles se obtienen mediante la manipulación de la función forzada de escalón unitario. Se definirá un pulso de tensión rectangular mediante las siguientes condiciones:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ V_0 & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$$

El pulso se dibuja en la figura 8.30. ¿Es factible representarlo en términos de la función forzada de escalón unitario? Analicemos la diferencia de los dos escalones unitarios, $u(t - t_0) - u(t - t_1)$. La diferencia entre las dos funciones escalón que se muestran en la figura 8.31*a* es un pulso rectangular. La fuente $V_0u(t - t_0) - V_0u(t - t_1)$ suministra la tensión deseada que se indica en la figura 8.31*b*.

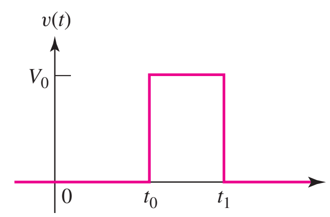


FIGURA 8.30 Función forzada que resulta útil (pulso de tensión rectangular).

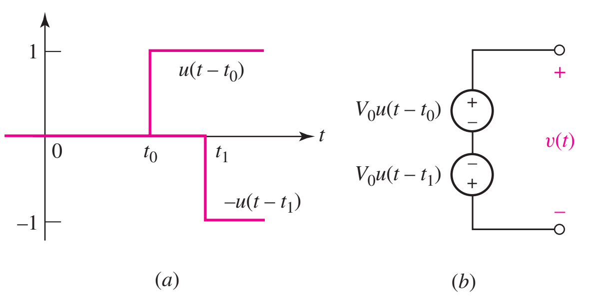


FIGURA 8.31 (*a*) Escalones unitarios $u(t - t_0)$ y $-u(t - t_1)$. (*b*) Fuente que produce el pulso de tensión rectangular de la figura 8.30.

Si tenemos una fuente de tensión senoidal $V_m \text{sen}\,\omega t$ que se conecta de manera repentina a una red en $t = t_0$, entonces una función forzada de tensión apropiada sería $v(t) = V_m u(t - t_0)$ sen ωt. Si deseamos representar un estallido de energía del transmisor de un automóvil controlado por radio que opera a 47 MHz (295 Mrad/s), podríamos desactivar la fuente senoidal de 70 ns después mediante una segunda función forzada de escalón unitario.[4] Por lo tanto, el pulso de tensión es

$$v(t) = V_m[u(t - t_0) - u(t - t_0 - 7 \times 10^{-8})] \text{ sen}(295 \times 10^6 t)$$

Esta función forzada se dibuja en la figura 8.32.

[3] El equivalente puede dibujarse si se conoce la corriente que circula por el interruptor antes de $t = t_0$.
[4] Al parecer, somos muy diestros en los controles de este automóvil. ¿Un tiempo de reacción de 70 ns?

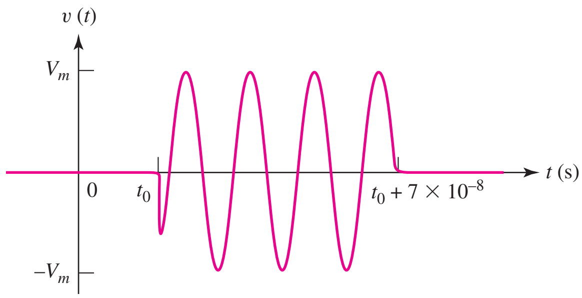


FIGURA 8.32 Pulso de radiofrecuencia de 47 MHz, descrito por $v(t) = V_m[u(t - t_0) - u(t - t_0 - 7 \times 10^{-8})]$ sen $(295 \times 10^6 t)$

PRÁCTICA

8.8 Calcule lo siguiente en $t = 0.8$: (*a*) $3u(t) - 2u(-t) + 0.8\, u(1 - t)$; (*b*) $[4u(t)]u(-t)$; (*c*) $2u(t)$ sen πt.

Respuesta: 3.8; 0; 1.176.

8.6 ACCIONAMIENTO DE CIRCUITOS *RL*

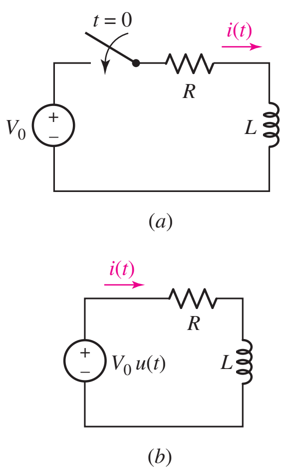


FIGURA 8.33 (*a*) El circuito dado. (*b*) Circuito equivalente que posee la misma respuesta $i(t)$ para cualquier tiempo.

Con el nivel de conocimiento adquirido hasta ahora podemos someter una red simple a la aplicación repentina de una fuente de cd. El circuito está compuesto por una batería cuya tensión es V_0 en serie con un interruptor, una resistencia R y un inductor L. El interruptor se cierra en $t = 0$, como se indica en el esquema del circuito de la figura 8.33*a*. Resulta evidente que la corriente $i(t)$ es nula antes de $t = 0$; en consecuencia, podemos sustituir la batería y el interruptor por una función forzada de escalón de tensión $V_0 u(t)$ que tampoco produce respuesta antes de $t = 0$. Después de $t = 0$, los dos circuitos son idénticos. Por consiguiente, se busca la corriente $i(t)$ en el circuito de la figura 8.33*a* o en el circuito equivalente de la figura 8.33*b*.

Determinaremos $i(t)$ en este tiempo escribiendo la ecuación de circuito apropiada y resolviéndola después por separación de variables e integración. Luego de que obtengamos la respuesta e investiguemos las dos partes de las que se compone, veremos que hay un significado físico de cada uno de ambos términos. Con un entendimiento más intuitivo de la forma en que se origina cada término, podremos obtener soluciones más rápidas y de mayor significado para cada problema que implique la aplicación repentina de cualquier fuente.

Al aplicar la ley de tensión de Kirchhoff al circuito de la figura 8.33*b*, tenemos

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 u(t)$$

Puesto que la función forzada de escalón unitario es discontinua en $t = 0$, consideraremos primero la solución para $t < 0$ y luego para $t > 0$. La aplicación de tensión cero obliga a una respuesta cero, puesto que $t = -\infty$, por lo que

$$i(t) = 0 \qquad t < 0$$

En el tiempo positivo, sin embargo, $u(t)$ es unitaria y debemos resolver la ecuación

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 \qquad t > 0$$

Las variables se separan mediante pasos algebraicos simples, que dan como resultado

$$\frac{L\,di}{V_0 - Ri} = dt$$

y cada lado puede integrarse en forma directa:

$$-\frac{L}{R}\ln(V_0 - Ri) = t + k$$

Para calcular k, debe referirse a una condición inicial. Antes de $t = 0$, $i(t)$ es cero, y por ello $i(0^-) = 0$. Puesto que no se puede cambiar la corriente en un inductor por una cantidad finita en el tiempo cero sin que se asocie con una tensión infinita, debemos tener $i(0^+) = 0$. Dejando $i = 0$ en $t = 0$, obtenemos

$$-\frac{L}{R}\ln V_0 = k$$

y, por lo tanto:

$$-\frac{L}{R}[\ln(V_0 - Ri) - \ln V_0] = t$$

Reordenando, tenemos

$$\frac{V_0 - Ri}{V_0} = e^{-Rt/L}$$

o sea

$$i = \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L} \qquad t > 0 \qquad [24]$$

Así, una expresión de la respuesta válida para cualquier t sería

$$i = \left(\frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}\right)u(t) \qquad [25]$$

Procedimiento directo

Ésta es la solución deseada, pero no se obtuvo de la forma más simple. Para establecer un procedimiento más directo, tratemos de interpretar los dos términos que aparecen en la ecuación [25]. El término exponencial tiene la forma funcional de la respuesta natural del circuito *RL*; es una exponencial negativa, tiende a cero cuando aumenta el tiempo y se caracteriza por la constante de tiempo L/R. De esta manera, la forma funcional de esta parte de la respuesta resulta idéntica a la que se obtuvo en el circuito sin fuente. Sin embargo, la amplitud del término exponencial depende de la tensión de la fuente V_0. Podríamos generalizar entonces que la respuesta será la suma de dos términos, donde uno de ellos tiene una forma funcional idéntica a la de la respuesta sin fuente, pero cuenta con una amplitud que depende de la función forzada. Pero, ¿qué pasa con el otro término?

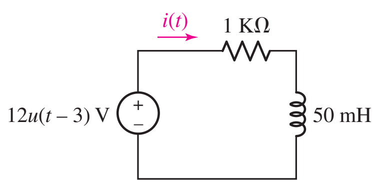
La ecuación [25] incluye también un término constante, V_0/R. ¿Por qué se presenta? La respuesta es simple: la respuesta natural tiende a cero cuando la energía se disipa de manera gradual, pero la respuesta total no tiende a cero. A la larga, el circuito se comporta como una resistencia y un inductor en serie con una batería. Puesto que el inductor funciona como un cortocircuito para la cd, la única corriente que circula en este caso es V_0/R. Dicha corriente es una parte de la respuesta que se atribuye de

manera directa a la función forzada y la conoceremos con el nombre de *respuesta forzada*. Ésta es la respuesta que se presenta durante mucho tiempo después de que se cierra el interruptor.

La respuesta completa se compone de dos partes: la *respuesta natural* y la *forzada* La primera es una característica del circuito y no de las fuentes. Su forma se podría encontrar considerando el circuito sin fuente y tiene una amplitud que depende de la amplitud inicial de la fuente y del almacenamiento de energía inicial. La respuesta forzada tiene las características de la función forzada; se determina al considerar que todos los interruptores se cerraron desde hace mucho tiempo. En razón de que por ahora interesan sólo los interruptores y las fuentes de cd, la respuesta forzada es meramente la solución de un problema de circuito de cd.

EJEMPLO 8.7

En el circuito de la figura 8.34, encuentre $i(t)$ para $t = \infty, 3^-, 3^+$, y 100 μs después de que el valor de la fuente haya cambiado.



■ **FIGURA 8.34** Circuito *RL* simple controlado por una función forzada de escalón de tensión.

Después de que ha transcurrido un tiempo considerable desde que los transitorios desaparecieron ($t \to \infty$), el circuito es un simple circuito de cd controlado por una fuente de tensión de 12 V. El inductor aparenta ser un cortocircuito, por lo que

$$i(\infty) = \frac{12}{1\,000} = 12 \text{ mA}$$

¿Qué significa $i(3^-)$? Esto es simplemente una conveniencia de notación para indicar el instante antes de que la fuente de tensión cambie de valor. Para $t < 3$, $u(t-3) = 0$. Por ende, también, $i(3^-) = 0$.

En $t = 3^+$, la función forzada $12u(t-3) = 12$ V. Sin embargo, debido a que la corriente que circula por el inductor no puede modificarse en un tiempo cero, $i(3^+) = i(3^-) = 0$.

El método más directo para el análisis del circuito en $t > 3$ s es reescribir la ecuación [25] como

$$i(t') = \left(\frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-Rt'/L}\right)u(t')$$

y observar que esta ecuación se aplique al circuito también si se corre el eje del tiempo de tal forma que

$$t' = t - 3$$

Por ende, con $V_0/R = 12$ mA y $R/L = 20\,000 \text{ s}^{-1}$,

$$i(t-3) = (12 - 12\text{e}^{-20\,000\,(t-3)})\,u(t-3) \quad \text{mA} \qquad [26]$$

que puede escribirse de una manera más simple como

$$i(t) = (12 - 12\text{e}^{-20\,000\,(t-3)})\,u(t-3) \quad \text{mA} \qquad [27]$$

puesto que la función impulso unitario obliga a un valor de cero en $t < 3$, como se necesitaba. Sustituyendo $t = 3.0001$ s en la ecuación [26] o [27], podemos observar que $i = 10.38$ mA en un tiempo igual a 100 μs después de que haya cambiado el valor de la fuente.

PRÁCTICA

8.9 La fuente de tensión $60 - 40u(t)$ V está en serie con una resistencia de 10 Ω y un inductor de 50 mH. Determine las magnitudes de la corriente y la tensión en el inductor en un tiempo t igual a: (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) ∞; (*d*) 3 ms.

Respuesta: 6 A, 0 V; 6 A, 40 V; 2 A, 0 V; 4.20 A, 22.0 V.

Desarrollo de un entendimiento intuitivo

La razón de las dos respuestas, forzada y natural, quizá se vea a partir de argumentos físicos. Sabemos que, a la larga, el circuito adoptará la respuesta forzada. Sin embargo, en el instante en que se cierren los interruptores, las corrientes de inductor iniciales (o en circuitos *RC,* las tensiones en los capacitores) tendrán valores que dependerán sólo de la energía almacenada en dichos elementos. No se puede esperar que tales corrientes o tensiones sean las mismas que las demandadas por la respuesta forzada. Por consiguiente, debe haber un periodo transitorio durante el cual las corrientes y las tensiones cambien de sus valores iniciales dados a los valores finales requeridos. La parte de la respuesta que proporciona una transición desde los valores iniciales hasta los finales es la respuesta natural (llamada a menudo respuesta *transitoria* como ya se hizo notar). Si describimos la respuesta de un circuito *RL* simple sin fuente en estos términos, entonces podremos afirmar que la respuesta forzada es nula y que la respuesta natural sirve para conectar la respuesta inicial dictada por la energía almacenada con el valor cero de la respuesta forzada.

La descripción sólo resulta apropiada en el caso de circuitos en los que, a la larga, la respuesta natural se desvanece. Lo anterior ocurre siempre en circuitos físicos donde se asocia cierta resistencia con cada elemento, aunque existen varios circuitos "patológicos" en los que la respuesta natural no desaparece cuando el tiempo se vuelve infinito. Por ejemplo, los circuitos en los cuales las corrientes atrapadas circulan por lazos inductivos, o las tensiones están atrapadas en cadenas de capacitores en serie.

8.7 RESPUESTAS NATURAL Y FORZADA

Hay una excelente razón matemática para considerar que la respuesta completa deba tener dos partes (la respuesta forzada y la respuesta natural). La razón se basa en el hecho de que la solución de cualquier ecuación diferencial lineal puede expresarse como la suma de dos partes: la *solución complementaria* (respuesta natural) y la *solución particular* (respuesta forzada). Sin entrar en detalles sobre la teoría general de las ecuaciones diferenciales, procederemos a examinar una ecuación general del tipo que se estudió en la sección anterior:

$$\frac{di}{dt} + Pi = Q$$

o

$$di + Pi\,dt = Q\,dt \quad [28]$$

Podríamos identificar Q como una función forzada y expresarla como $Q(t)$ para subrayar su dependencia general del tiempo. Simplifiquemos la explicación suponiendo que

P es una constante positiva. Después, supondremos que Q es constante, restringiendo de ese modo el uso de funciones forzadas de cd.

En cualquier texto usual de ecuaciones diferenciales, se demuestra que si ambos lados de la ecuación [28] se multiplican por un “factor de integración” apropiado, cada uno se convierte en una diferencial exacta que se integra en forma directa para obtener la solución. No estamos separando las variables, sólo las ordenamos de modo que sea posible la integración. En la ecuación anterior, el factor de integración es $e^{\int P\,dt}$ o simplemente e^{Pt}, pues P es una constante. Si multiplicamos cada lado de la ecuación por tal factor de integración obtenemos

$$e^{Pt}\,di + iPe^{Pt}\,dt = Qe^{Pt}\,dt \qquad [29]$$

La forma del lado izquierdo se simplifica al reconocer que es una diferencial exacta de ie^{Pt}:

$$d(ie^{Pt}) = e^{Pt}\,di + iPe^{Pt}\,dt$$

y, por ello, la ecuación [29] se convierte en

$$d(ie^{Pt}) = Qe^{Pt}\,dt$$

Al integrar cada lado,

$$ie^{Pt} = \int Qe^{Pt}\,dt + A$$

donde A es una constante de integración. La multiplicación por e^{-Pt} proporciona la solución para $i(t)$,

$$i = e^{-Pt}\int Qe^{Pt}\,dt + Ae^{-Pt} \qquad [30]$$

Si conocemos la función forzada $Q(t)$ obtenemos la forma funcional de $i(t)$ al evaluar la integral. Sin embargo, no evaluaremos tal integral en cada problema, pues interesa más utilizar la ecuación [30] para deducir varias conclusiones generales.

La respuesta natural

Observamos primero que en un circuito sin fuente, Q debe ser cero, y la solución consiste en la respuesta natural

$$i_n = Ae^{-Pt} \qquad [31]$$

Podemos ver que la constante P nunca es negativa en un circuito sólo con resistencias, inductores y capacitores; su valor depende nada más de los elementos pasivos del circuito[5] y de su interconexión en el circuito. Por lo tanto, *la respuesta natural se aproxima a cero cuando el tiempo aumenta sin límite.* Éste debe ser el caso del circuito *RL* simple debido a que la energía inicial se disipa de modo gradual en la resistencia, en forma de calor. También hay circuitos idealizados en los que P es cero; en tales circuitos la respuesta natural no se desvanece.

En consecuencia, veremos que uno de los dos términos que conforman la respuesta completa tiene la forma de la respuesta natural; incluye una amplitud que dependerá

[5] Si el circuito incluye una fuente dependiente o una resistencia negativa, P podría ser negativa.

(aunque a menudo *no* será igual) del valor inicial de la respuesta completa, y por ello también del valor inicial de la función forzada.

La respuesta forzada

A continuación podemos ver que el primer término de la ecuación [30] depende de la forma funcional de $Q(t)$, la función forzada. Siempre que tenemos un circuito en el que la respuesta natural se desvanece conforme t se vuelve infinita, el primer término debe describir por completo la forma de la respuesta después de que desapareció la respuesta natural. Por lo general este término recibe el nombre de respuesta forzada; también se conoce como *respuesta de estado permanente, solución particular* o *integral particular*.

Por ahora, decidimos considerar sólo los problemas que implican la aplicación repentina de fuentes de cd, así que $Q(t)$ será entonces una constante para todos los valores del tiempo. Si deseamos, podemos evaluar ahora la integral en la ecuación [30] para obtener la respuesta forzada

$$i_f = \frac{Q}{P} \qquad [32]$$

y la respuesta completa

$$i(t) = \frac{Q}{P} + Ae^{-Pt} \qquad [33]$$

En el caso del circuito RL en serie, Q/P representa la corriente constante V_0/R y $1/P$ la constante de tiempo τ. Observamos que la respuesta forzada podría haberse obtenido sin evaluar la integral, debido a que debe ser la respuesta completa en el tiempo infinito; corresponde sólo a la tensión de la fuente dividida entre la resistencia en serie. Ello quiere decir que la respuesta forzada se obtiene por inspección del circuito final.

Determinación de la respuesta completa

Utilicemos el circuito simple RL en serie para ilustrar la forma de determinar la respuesta completa mediante la adición de las respuestas natural y forzada. El circuito de la figura 8.35 ya se analizó, pero por un método más largo. La respuesta deseada es la corriente $i(t)$, así que expresamos primero esta corriente como la suma de la corriente natural y de la corriente forzada, esto es,

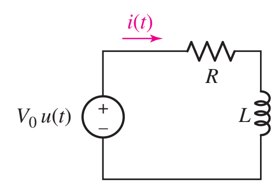


FIGURA 8.35 Circuito *RL* en serie que se emplea para ilustrar el método mediante el cual la respuesta completa se obtiene como la suma de las respuestas natural y forzada.

$$i = i_n + i_f$$

La forma funcional de la respuesta natural debe ser la misma que la que se obtuvo sin fuente alguna. Por lo tanto, sustituimos la fuente de tensión de escalón por un cortocircuito y reconocemos el lazo en serie RL anterior. De tal modo,

$$i_n = Ae^{-Rt/L}$$



donde la amplitud A aún debe determinarse; además, debido a que la condición inicial se aplica a la respuesta *completa,* no podemos suponer simplemente $A = i(0)$.

A continuación analizamos la respuesta forzada. En este problema particular la respuesta forzada debe ser constante, debido a que la fuente es una constante V_0 para todos los valores positivos de tiempo. Por lo tanto, después de que la respuesta natural se desvanece, no hay tensión en el inductor; por consiguiente, aparece una tensión V_0 en los extremos de R, de modo que la respuesta forzada es simplemente

$$i_f = \frac{V_0}{R}$$

Observe que la respuesta forzada está por completo determinada; no hay una amplitud desconocida. A continuación combinamos las dos respuestas para obtener

$$i = Ae^{-Rt/L} + \frac{V_0}{R}$$

y aplicamos la condición inicial para evaluar A. La corriente es cero antes de $t = 0$; además, no es posible que cambie de valor en forma instantánea, puesto que es la corriente que fluye por un inductor. En consecuencia, la corriente es nula inmediatamente después de $t = 0$, y

$$0 = A + \frac{V_0}{R}$$

y por lo tanto,

$$i = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \qquad [34]$$

Observe con todo cuidado que A no es el valor inicial de i, pues $A = -V_0/R$, en tanto que $i(0) = 0$. Al considerar los circuitos sin fuente, encontramos que A fue el valor inicial de la respuesta. Sin embargo, cuando se presentan funciones forzadas, debemos determinar primero el valor inicial de la respuesta y luego sustituirlo en la ecuación de la respuesta completa para determinar A.

Dicha respuesta se grafica en la figura 8.36 y observamos cómo se forma la corriente a partir de su valor inicial de cero, hasta su valor final de V_0/R. La transición se lleva a cabo de manera efectiva en un tiempo 3τ. Si nuestro circuito representa la bobina de campo de un gran motor de cd, resultaría factible tener $L = 10$ H, $R = 20\ \Omega$, lo cual da como resultado $\tau = 0.5$ s. La corriente de campo se establece de ese modo en cerca de 1.5 s. En el caso de un tiempo correspondiente a una constante de tiempo, la corriente alcanza 63.2% de su valor final.

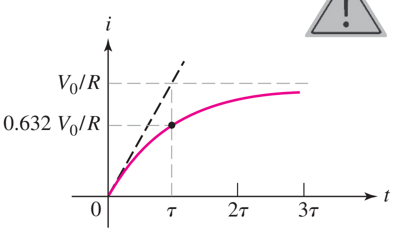


FIGURA 8.36 Gráfica de la corriente que fluye por el inductor de la figura 8.35. Extendiendo la línea tangente al origen de los ejes se alcanza la respuesta forzada en $t = \tau$.

EJEMPLO 8.8

Determine $i(t)$ para todos los valores de tiempo en el circuito de la figura 8.37.

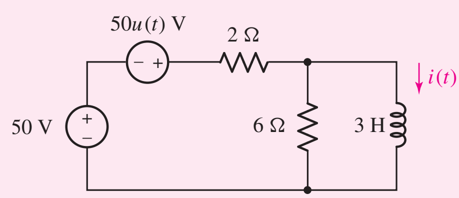


FIGURA 8.37 Circuito del ejemplo 8.8.

El circuito contiene una fuente de tensión de cd así como una fuente de tensión de escalón. Sería posible que optáramos por sustituir todo lo que está a la izquierda del inductor por el equivalente de Thévenin, pero mejor sólo vamos a reconocer la forma de tal equivalente como una resistencia en serie con alguna fuente de tensión. El circuito contiene nada más un elemento de almacenamiento de energía: el inductor. Podemos ver primero que

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{3}{1.5} = 2 \text{ s}$$

y recordar que

$$i = i_f + i_n$$

Por lo tanto, la respuesta natural es una exponencial negativa como se vio antes:

$$i_n = Ke^{-t/2} \quad \text{A} \quad t > 0$$

Debido a que la función forzada es una fuente de cd, la respuesta forzada será una corriente constante. El inductor actúa como un cortocircuito en la cd, de modo que

$$i_f = \frac{100}{2} = 50 \text{ A}$$

Por lo tanto,

$$i = 50 + Ke^{-0.5t} \quad \text{A} \quad t > 0$$

Para calcular K, debemos establecer el valor inicial de la corriente del inductor. Antes de $t = 0$, la corriente es igual a 25 A y no puede cambiar en forma instantánea; en consecuencia,

$$25 = 50 + K$$

o

$$K = -25$$

Por consiguiente,

$$i = 50 - 25e^{-0.5t} \quad \text{A} \quad t > 0$$

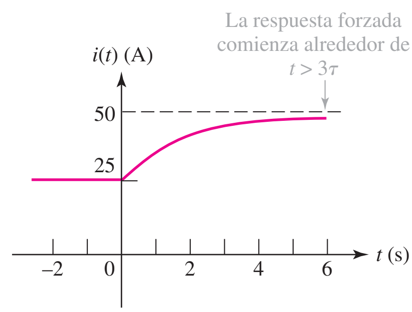
Completamos la solución al establecer también

$$i = 25 \text{ A} \quad t < 0$$

o al escribir una expresión simple válida para cualquier t,

$$i = 25 + 25(1 - e^{-0.5t})u(t) \quad \text{A}$$

La respuesta completa se dibuja en la figura 8.38. Observe cómo la respuesta natural sirve para conectar la respuesta correspondiente a $t < 0$ con la respuesta forzada constante.



■ **FIGURA 8.38** La respuesta $i(t)$ del circuito que se muestra en la figura 8.37 se dibuja para valores de tiempo menores y mayores que cero.

PRÁCTICA

8.10 Una fuente de tensión $v_s = 20u(t)$ V está en serie con una resistencia de 200 Ω y un inductor de 4 H. Determine la magnitud de la corriente del inductor en t igual a: (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) 8 ms; (*d*) 15 ms.

Respuesta: 0; 0; 33.0 mA; 52.8 mA.

Como ejemplo final de este método mediante el cual se puede escribir *casi por inspección* la respuesta completa de cualquier circuito sujeto a un transitorio examine una vez más el circuito RL en serie, pero en esta ocasión sujeto a un pulso de tensión.

EJEMPLO 8.9

Determine la respuesta de corriente en un circuito *RL* en serie simple cuando la función forzada se compone de un pulso de tensión rectangular de amplitud V_0 y duración t_0.

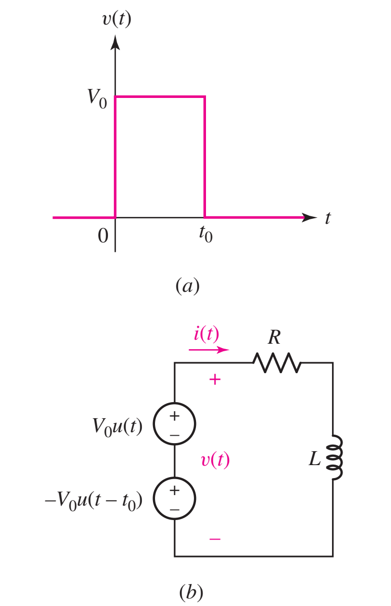


FIGURA 8.39 (*a*) Pulso de tensión rectangular que se utilizará como la función forzada en un circuito *RL* en serie simple. (*b*) Circuito *RL* en serie que muestra la representación de la función forzada mediante la combinación en serie de dos fuentes independientes de tensión de escalón. Se desea obtener la corriente *i*(*t*).

Representamos la función forzada como la suma de dos fuentes de tensión de escalón $V_0u(t)$ y $V_0u(t-t_0)$, como se indica en las figuras 8.39*a* y *b*; asimismo, planeamos obtener la respuesta mediante el principio de superposición. Considere que $i_1(t)$ designa la parte de $i(t)$ que se debe a la fuente superior $V_0u(t)$ que actúa sola, y que $i_2(t)$ designa la parte debida al desempeño individual de $-V_0u(t-t_0)$. Entonces:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

Nuestro objetivo consiste en escribir ahora cada una de las respuestas parciales i_1 e i_2 como la suma de la respuesta natural y de la forzada. La respuesta $i_1(t)$ resulta familiar, pues este problema fue resuelto en la ecuación [34]:

$$i_1(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \qquad t > 0$$

Observe que dicha solución sólo es válida para $t > 0$, como se indica; $i_1 = 0$ para $t < 0$.

Ahora dirigimos la atención hacia la otra fuente y su respuesta $i_2(t)$. Sólo difieren la polaridad de la fuente y el tiempo de su aplicación. Por lo tanto, no hay necesidad de determinar la forma de la respuesta natural y de la respuesta forzada; la solución de $i_1(t)$ es

$$i_2(t) = -\frac{V_0}{R}[1 - e^{-R(t-t_0)/L}], \qquad t > t_0$$

donde el intervalo aplicable de *t*, $t > t_0$, debe indicarse también en este caso; e $i_2 = 0$ para $t < t_0$.

Ahora sumamos las dos soluciones, pero se debe hacer con cuidado, puesto que cada una es válida para un intervalo de tiempo diferente. De tal modo:

$$i(t) = 0 \quad t < 0 \qquad [35]$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \qquad 0 < t < t_0 \qquad [36]$$

y

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) - \frac{V_0}{R}(1 - e^{-R(t-t_0)/L}) \qquad t > t_0$$

o, de manera más compacta,

$$i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}(e^{Rt_0/L} - 1) \qquad t > t_0 \qquad [37]$$

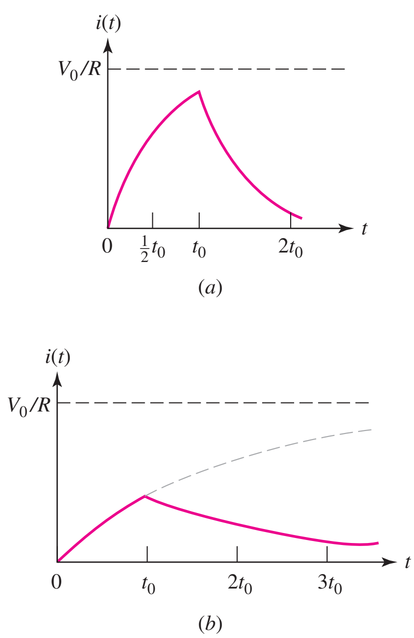


FIGURA 8.40 Dos curvas de respuestas posibles se presentan para el circuito de la figura 8.39*b*. (*a*) τ se selecciona como $t_0/2$. (*b*) τ se elige como $2t_0$.

Aunque las ecuaciones [35] a [37] describen totalmente la respuesta del circuito de la figura 8.39*b* a la forma de onda del pulso de la figura 8.39*a*, la forma de onda de corriente en sí misma es sensible tanto a la constante de tiempo τ del circuito como a la duración del pulso de tensión t_0. En la figura 8.40 se muestran dos posibles curvas.

La curva de la izquierda se grafica para el caso en el que la constante de tiempo equivale nada más a la mitad de la longitud de la pulsación aplicada; por lo tanto, la porción ascendente de la exponencial casi alcanza a V_0/R antes de que comience el decaimiento de la exponencial. La situación opuesta se muestra a la derecha; ahí, la constante de tiempo es el doble de t_0, así que la respuesta nunca tiene oportunidad de llegar a amplitudes mayores.

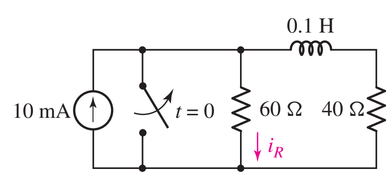
El procedimiento que utilizamos para determinar la respuesta de un circuito *RL* luego de que se activan o desactivan (dentro o fuera del circuito) fuentes de cd en algún instante de tiempo, se resume como sigue. Supongamos que el circuito se reduce hasta una resistencia equivalente R_{eq} en serie con una inductancia equivalente L_{eq} cuando todas las fuentes independientes se igualan a cero. La respuesta que se busca se representa mediante $f(t)$.

1. Con todas las fuentes independientes suprimidas, simplificar el circuito para determinar R_{eq}, L_{eq} y la constante de tiempo $\tau = L_{eq}/R_{eq}$.
2. Considerando a L_{eq} como un circuito cerrado, utilizar métodos de análisis de cd para calcular $i_L(0^-)$, la corriente en el inductor justo antes de la discontinuidad.
3. Considerando a L_{eq} una vez más como un circuito abierto, aplicar los métodos de análisis de cd para determinar la respuesta forzada. Éste es el valor aproximado de $f(t)$ cuando $t \to \infty$; lo representamos mediante $f(\infty)$.
4. Escribir la respuesta total como la suma de las respuestas forzada y natural: $f(t) = f(\infty) + Ae^{-t/\tau}$.
5. Determinar $f(0^+)$ mediante la condición de que $i_L(0^+) = i_L(0^-)$. Si se desea, L_{eq} se podría reemplazar por una fuente de corriente $i_L(0^+)$ [un circuito abierto si $i_L(0^+) = 0$] para este cálculo. Con excepción de las corrientes en el inductor (y las tensiones en el capacitor), otras tensiones y corrientes en el circuito pueden cambiar de manera abrupta.
6. $f(0^+) = f(\infty) + A$ y $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]\, e^{-t/\tau}$, o respuesta total = valor final + (valor inicial − valor final) $e^{-t/\tau}$.

PRÁCTICA

8.11 El circuito de la figura 8.41 ha estado durante largo tiempo en la forma que se muestra. El interruptor se abre en $t = 0$. Calcule i_R en t igual a: (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) ∞; (*d*) 1.5 ms.

Respuesta: 0; 10 mA; 4 mA; 5.34 mA.



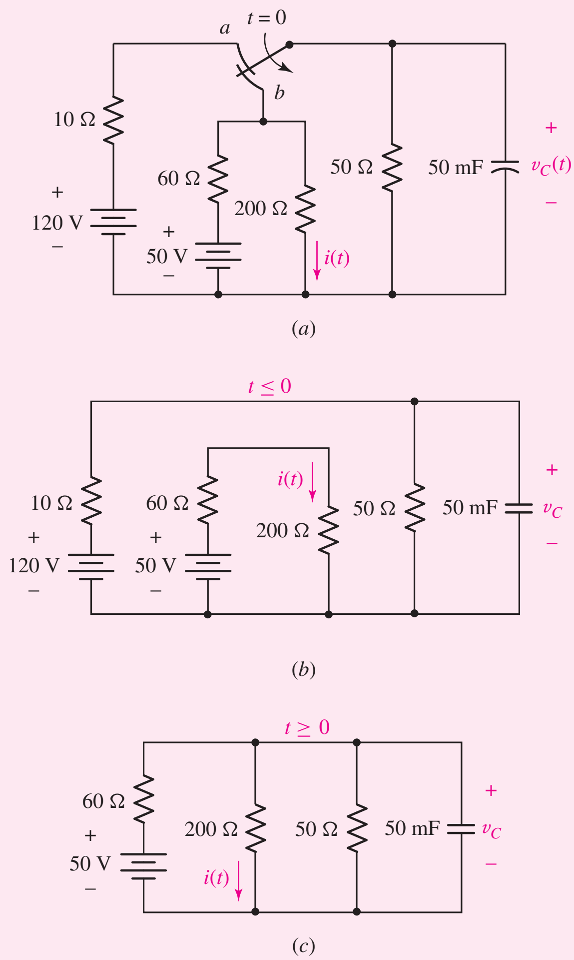
■ **FIGURA 8.41**

8.8 ACCIONAMIENTO DE CIRCUITOS *RC*

La respuesta completa de cualquier circuito *RC* también se obtiene como la suma de las respuestas natural y forzada. Debido a que el procedimiento es casi idéntico al que se estudió a detalle en el caso de los circuitos *RL*, el mejor método en esta etapa se ilustra mediante un ejemplo completo que sea relevante, donde el objetivo no sea solamente una cantidad relacionada con el capacitor, sino también la corriente asociada con una resistencia.

EJEMPLO 8.10

Determine la tensión en el capacitor $v_C(t)$ y la corriente $i(t)$ en la resistencia de 200 Ω de la figura 8.42 para cualquier tiempo.



■ **FIGURA 8.42** (*a*) Circuito *RC* en el que se obtienen las respuestas completas v_C e *i* sumando una respuesta forzada y una natural. (*b*) Circuito para $t \leq 0$. (*c*) Circuito para $t \geq 0$.

Comenzamos considerando el estado del circuito en $t < 0$, correspondiente al interruptor en la posición *a*; como se representa en la figura 8.42*b*. Como es usual, suponemos que no hay transitorios presentes, por lo que sólo es relevante para encontrar $v_C(0^-)$, una respuesta forzada debido a la fuente de 120 V. En consecuencia, la simple división de tensión produce la tensión inicial

$$v_C(0) = \frac{50}{50 + 10}(120) = 100 \text{ V}$$

Puesto que la tensión del capacitor no puede cambiar en forma instantánea, esta tensión también es válida en $t = 0^-$ y $t = 0^+$.

El interruptor se mueve ahora hacia *b*, de modo que la respuesta completa es

$$v_C = v_{Cf} + v_{Cn}$$

El circuito correspondiente se dibujó nuevamente por conveniencia en la figura 8.42*c*. La forma de la respuesta natural se obtiene mediante la sustitución de la fuente de 50 V por un cortocircuito luego de evaluar la resistencia equivalente para encontrar la constante de tiempo (en otras palabras, tratamos de determinar la resistencia equivalente de Thévenin "vista" desde las terminales del capacitor):

$$R_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{50} + \frac{1}{200} + \frac{1}{60}} = 24\ \Omega$$

De modo que:

$$v_{Cn} = Ae^{-t/R_{\text{eq}}C} = Ae^{-t/1.2}$$

Para calcular la respuesta forzada con el interruptor en *b*, se espera hasta que todas las tensiones y corrientes hayan dejado de cambiar; por lo tanto, se considera al capacitor como un circuito abierto y se aplica una vez más la división de tensión:

$$v_{C_f} = 50\left(\frac{200 \parallel 50}{60 + 200 \parallel 50}\right)$$

$$= 50\left(\frac{(50)(200)/250}{60 + (50)(200)/250}\right) = 20\text{ V}$$

Por lo tanto,

$$v_C = 20 + Ae^{-t/1.2} \quad \text{V}$$

y de la condición inicial ya obtenida,

$$100 = 20 + A$$

o

$$v_C = 20 + 80e^{-t/1.2} \quad \text{V} \quad t \geq 0$$

y

$$v_C = 100\text{ V}, \quad t < 0$$

Esta respuesta se grafica en la figura 8.43*a*; también en este caso se ve que la respuesta natural forma una transición desde la respuesta inicial hasta la final.

A continuación abordamos $i(t)$. La respuesta no necesita permanecer constante durante el periodo de conmutación. Con el contacto en *a*, resulta evidente que $i = 50/260 = 192.3$ miliamperes. Cuando el interruptor se mueve a la posición *b*, la respuesta forzada para esta corriente se convierte en

$$i_f = \frac{50}{60 + (50)(200)/(50 + 200)}\left(\frac{50}{50 + 200}\right) = 0.1 \text{ amperes}$$

La forma de la respuesta natural es la misma a la que ya determinamos para la tensión en el capacitor:

$$i_n = Ae^{-t/1.2}$$

Al combinar las respuestas natural y forzada, obtenemos

$$i = 0.1 + Ae^{-t/1.2} \quad \text{amperes}$$

(*continúa*)

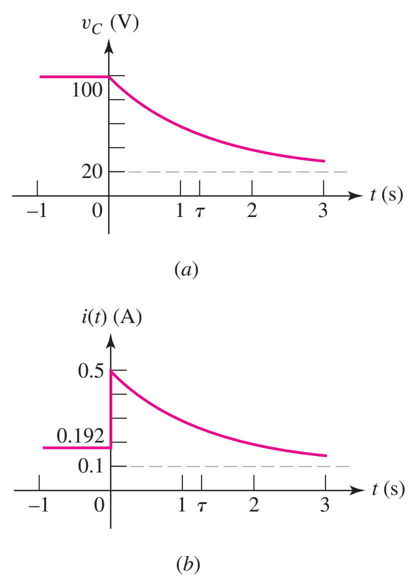


FIGURA 8.43 Las respuestas (*a*) v_C y (*b*) i se grafican como funciones del tiempo para el circuito de la figura 8.42.

Para calcular A, necesitamos conocer $i(0^+)$, la cual se determina fijando la atención en el elemento de almacenamiento de energía (el capacitor). El hecho de que v_C deba permanecer en 100 V durante el intervalo de conmutación es la condición directriz gobernante que establece las demás corrientes y tensiones en $t = 0^+$. Puesto que $v_C(0^+) = 100$ V, y como el capacitor está en paralelo con la resistencia de 200 Ω, encontramos que $i(0^+) = 0.5$ ampere, $A = 0.4$ ampere, por lo cual

$$i(t) = 0.1923 \text{ ampere} \quad t < 0$$

$$i(t) = 0.1 + 0.4e^{-t/1.2} \quad \text{ampere} \quad t > 0$$

o

$$i(t) = 0.1923 + (-0.0923 + 0.4e^{-t/1.2})u(t) \quad \text{amperes}$$

donde la última expresión es correcta para cualquier t.

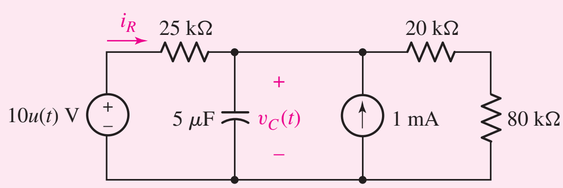
La respuesta completa para cualquier t también se escribe de manera concisa utilizando $u(-t)$, correspondiendo así a la unidad para $t < 0$ y 0 para $t > 0$. Así,

$$i(t) = 0.1923u(-t) + (0.1 + 0.4e^{-t/1.2})u(t) \quad \text{amperes}$$

Esta respuesta se presenta en la figura 8.43*b*. Observe que sólo se necesitan cuatro números para escribir la forma funcional de la respuesta de este circuito de un solo elemento de almacenamiento de energía, o para hacer la gráfica: el valor constante antes de la conmutación (0.1923 ampere), el valor instantáneo justo después de la conmutación (0.5 ampere), la respuesta forzada constante (0.1 ampere) y la constante de tiempo (1.2 s). En este caso, la función exponencial negativa apropiada resulta fácil de escribir o graficar.

PRÁCTICA

8.12 En el caso del circuito de la figura 8.44, determine $v_C(t)$ en t igual a: (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) ∞; (*d*) 0.08 s.



■ **FIGURA 8.44**

Respuesta: 20 V; 20 V; 28 V; 24.4 V.

Concluimos con la lista de los duales de los enunciados dados al final de la sección 8.7.

El procedimiento que utilizamos para encontrar la respuesta de un circuito *RC* después de que las fuentes de cd se activan o desactivan, incorporándolas o eliminándolas del circuito, en algún instante, por ejemplo $t = 0$, se resume como sigue. Suponemos que el circuito se reduce a una sola resistencia equivalente R_{eq} en paralelo con una sola capacitancia equivalente C_{eq} cuando todas las fuentes independientes se igualan a cero. La respuesta que se busca se representa por medio de $f(t)$.

1. Con todas las fuentes independientes suprimidas, simplificar el circuito para determinar R_{eq}, C_{eq} y la constante de tiempo $\tau = R_{eq}C_{eq}$.
2. Al considerar a C_{eq} como un circuito abierto, utilizar métodos de análisis de cd para calcular $v_C(0^-)$, la tensión del capacitor justo antes de la discontinuidad.
3. Al considerar a C_{eq} una vez más como un circuito abierto, aplicar los métodos de análisis de cd para determinar la respuesta forzada. Éste es el valor aproximado de $f(t)$ cuando $t \to \infty$; representamos mediante $f(\infty)$.
4. Escribir la respuesta total como la suma de las respuestas forzada y natural: $f(t) = f(\infty) + Ae^{-t/\tau}$
5. Determinar $f(0^+)$ mediante la condición de que $v_C(0^+) = v_C(0^-)$. Si se desea, C_{eq} se podría reemplazar por una fuente de tensión $v_C(0^+)$ [un cortocircuito si $v_C(0^+) = 0$] para este cálculo. Con excepción de las tensiones en el capacitor (y las corrientes en el inductor), tal vez otras tensiones y corrientes en el circuito cambien de manera abrupta.
6. $f(0^+) = f(\infty) + A$ y $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]\, e^{-t/\tau}$, o respuesta total = valor final + (valor inicial − valor final) $e^{-t/\tau}$.

Como hemos visto, los mismos pasos básicos que se aplican al análisis de los circuitos *RL* pueden también aplicarse a los circuitos *RC*. Hasta el momento, nos hemos enfocado sólo en el análisis de circuitos con funciones de cd forzadas, a pesar del hecho de que la ecuación [30] es válida para funciones más generales como $Q(t) = 9\cos(5t - 7^o)$ o $Q(t) = 2e^{-5t}$. Antes de concluir esta sección, exploramos uno de estos escenarios.

EJEMPLO 8.11

Determine la expresión de $v(t)$ en el circuito de la figura 8.45 que sea válida en $t > 0$.

Con base en la experiencia, esperamos una respuesta completa de la forma

$$v(t) = v_f + v_n$$

donde es probable que v_f haga recordar la función forzada y v_n tendrá la forma $Ae^{-t/\tau}$.

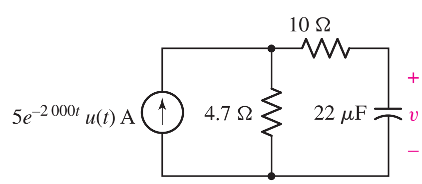
¿Qué es la constante τ del circuito? Sustituimos la fuente con un circuito abierto y encontramos la resistencia equivalente de Thévenin en paralelo con el capacitor:

$$R_{eq} = 4.7 + 10 = 14.7\ \Omega$$

Por lo tanto, la constante de tiempo es $\tau = R_{eq}C = 323.4\ \mu$s, o lo que es lo mismo, $1/\tau = 3.092 \times 10^3\ \text{s}^{-1}$.

Existen varias formas de proceder, a pesar de que quizás la más directa es llevar a cabo una transformación de fuente, lo que genera una fuente de tensión de $23.5e^{-2\,000t}u(t)$ V en serie con la resistencia de 14.7 Ω y el capacitor de 22μF. (*Observe que este fenómeno no modifica la constante de tiempo.*)

(continúa)



■ **FIGURA 8.45** Circuito *RC* simple controlado por una función forzada con decaimiento exponencial.

Si se escribe una simple ecuación LVK para $t > 0$, tenemos que

$$23.5e^{-2\,000t} = (14.7)(22 \times 10^{-6})\frac{dv}{dt} + v$$

Con un poco de simplificación obtenemos,

$$\frac{dv}{dt} + 3.092 \times 10^3 v = 72.67 \times 10^3\ e^{-2\,000t}$$

lo cual, cuando se compara con las ecuaciones [28] y [30], nos permite que se exprese la respuesta completa como

$$v(t) = e^{-Pt}\int Qe^{Pt}dt + Ae^{-Pt}$$

donde, en nuestro caso $P = 1/\tau = 3.092 \times 10^3$ y $Q(t) = 72.67 \times 10^3 e^{-2\,000t}$. Por lo tanto, podemos observar que

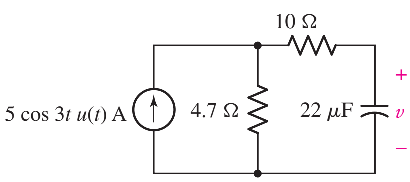
$$v(t) = e^{-3\,092t}\int 72.67 \times 10^3 e^{-2\,000t}e^{3\,092t}dt + Ae^{-3\,092t} \quad \text{V}$$

Llevando a cabo la integración que se indica,

$$v(t) = 66.55e^{-2\,000t} + Ae^{-3\,092t} \quad \text{V} \qquad [38]$$

La única fuente está controlada por una función escalón con un valor de cero para $t < 0$, por lo que se sabe que $v(0^-) = 0$. Puesto que v es una tensión de capacitor $v(0^+) = v(0^-)$, por lo tanto encontramos de manera muy sencilla la condición inicial $v(0) = 0$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación [38], encontramos que $A = -66.55$ V, por lo que

$$v(t) = 66.55(e^{-2\,000t} - e^{-3\,092t})\ \text{V}, \quad t > 0$$



■ **FIGURA 8.46** Circuito *RC* simple controlado por una función forzada senoidal.

PRÁCTICA

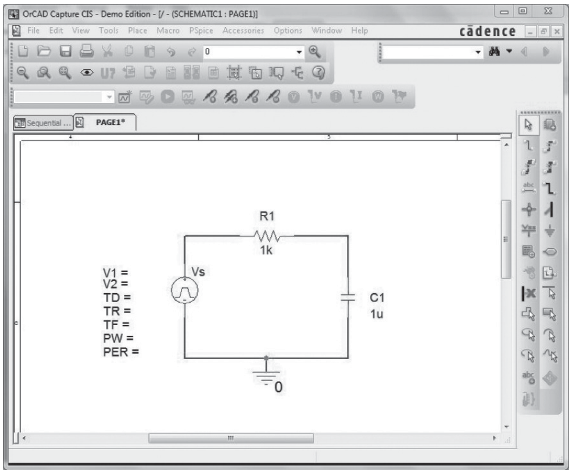
8.13 Determine la tensión v en el capacitor del circuito de la figura 8.46 para $t > 0$.

Respuesta: $23.5 \cos 3t + 22.8 \times 10^{-3} \operatorname{sen} 3t - 23.5e^{-3\,092t}$ V.

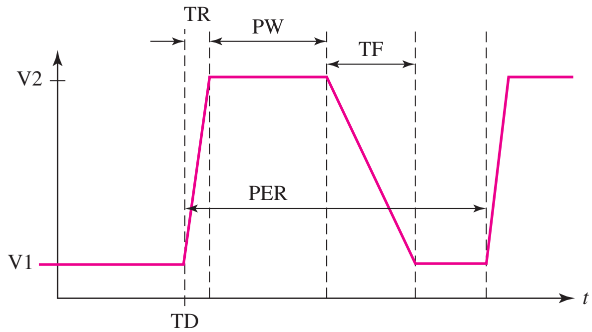
8.9 PREDICCIÓN DE LA RESPUESTA DE CIRCUITOS CONMUTADOS SECUENCIALMENTE

En el ejemplo 8.9 estudiamos de manera breve la respuesta de un circuito *RL* a una forma de onda de pulsos en la que una fuente se conmutó hacia y después se conmutó fuera del circuito. Este tipo de situación es muy común en la práctica, ya que algunos circuitos están diseñados para energizarse sólo una vez (por ejemplo, los circuitos disparadores de las bolsas con aire para protección de los pasajeros en los automóviles). En la predicción de la respuesta de los circuitos *RL* y *RC* simples que están sujetos a pulsos o a series de pulsos —a menudo conocidos como ***circuitos conmutados secuencialmente***— la clave es el tamaño de la constante de tiempo del circuito en relación con los diferentes tiempos que definen la secuencia del pulso. El principio fundamental detrás del análisis es si el elemento de almacenamiento de energía tiene tiempo para cargarse por completo antes de que termine el pulso y si cuenta con el tiempo para descargarse totalmente antes de que comience el segundo pulso.

Considere el circuito que se muestra en la figura 8.47*a*, el cual está conectado a una fuente de tensión pulsada que puede ser descrita por siete parámetros separados que se definen en la figura 8.47*b*. La forma de onda está acotada por dos valores, **V1** y **V2**. El



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 8.47** (*a*) Esquema de un circuito *RC* simple conectado a una forma de onda de tensión pulsada. (*b*) Diagrama de las definiciones de los parámetros del **VPULSE** de SPICE.

tiempo t_r que se requiere para cambiar de **V1** a **V2** se llama ***tiempo de elevación (TR)***, y el tiempo t_f que se requiere para cambiar de **V2** a **V1** se llama ***tiempo de bajada (TF)***. La duración W_p del pulso se conoce como ***ancho de pulso (PW)***, y el ***periodo*** T de la forma de onda **(PER)** es el tiempo que le toma al pulso repetir. Observe también que el SPICE permite un retraso de tiempo **(TD)** antes de que el tren de pulsos comience, lo cual puede ser de utilidad para que las respuestas de los transitorios iniciales decaigan en algunas configuraciones con circuitos.

Para los propósitos de este estudio, establecemos un retraso de tiempo cero, V1 = 0 y V2 = 9 V. La constante de tiempo del circuito es $\tau = RC = 1$ ms, por lo que establecemos los tiempos de subida y de bajada como 1 ns. A pesar de que SPICE no aceptará que una tensión cambie en un tiempo cero puesto que resuelve las ecuaciones diferenciales utilizando intervalos de tiempo discretos, comparado con nuestra constante del tiempo de 1 ns del circuito es una aproximación a “instantánea”.

Consideraremos los cuatro casos básicos que se encuentran resumidos en la tabla 8.1. En los primeros dos casos, al ancho del pulso W_p es mucho mayor que la constante de tiempo τ del circuito, por lo que esperamos que los transitorios que resulten del comienzo del pulso se desvanezcan antes de que termine el pulso. En los últimos dos casos, es válido lo contrario: el ancho del pulso es tan corto que el capacitor no tiene tiempo de cargarse totalmente antes de que termine el pulso. Un problema similar se presenta cuando consideramos la respuesta del circuito cuando el tiempo entre pulsos $(T - W_p)$ es corto (caso II) o largo (caso III) en comparación con la constante de tiempo del circuito.

TABLA 8.1 Cuatro casos distintos de ancho de pulso y de periodo en relación con la constante de tiempo del circuito de 1 ms

Caso	Ancho del pulso W_p	Periodo T
I	10 ms ($\tau \ll W_p$)	20 ms ($\tau \ll T - W_p$)
II	10 ms ($\tau \ll W_p$)	10.1 ms ($\tau \gg T - W_p$)
III	0.1 ms ($\tau \gg W_p$)	10.1 ms ($\tau \ll T - W_p$)
IV	0.1 ms ($\tau \gg W_p$)	0.2 ms ($\tau \gg T - W_p$)

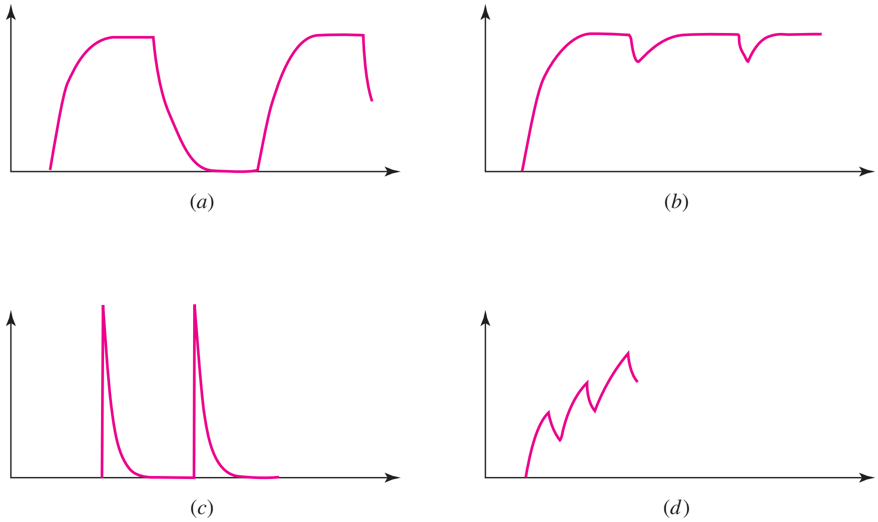


FIGURA 8.48 Tensión del capacitor del circuito *RC* con un ancho de pulso y periodo descritos en (*a*) caso I; (*b*) caso II; (*c*) caso III, y (*d*) caso IV.

En la figura 8.48 hemos bosquejado de manera cualitativa la respuesta del circuito para cada uno de los cuatro casos, seleccionando de forma arbitraria la tensión del capacitor como una cantidad de interés, ya que se espera que cualquier tensión o corriente tenga la misma dependencia con respecto al tiempo. En el caso I, el capacitor tiene tiempo para cargarse y descargarse totalmente (figura 8.48*a*), mientras que en el caso II (figura 8.48*b*), cuando se reduce el tiempo entre pulsos, se le termina el tiempo para descargarse totalmente. Por el contrario, el capacitor no tiene tiempo para cargarse totalmente tanto en el caso III (figura 8.48*c*) como en el caso IV (figura 8.48*d*).

Caso I: tiempo suficiente para cargarse y descargarse totalmente

Por supuesto, podemos obtener valores exactos para la respuesta en cada caso mediante una serie de análisis. Primero consideramos el caso I. En razón de que el capacitor cuenta con el tiempo para cargarse totalmente, la respuesta forzada corresponderá a la tensión de control de 9 V de cd. La respuesta completa al primer pulso es, por lo tanto,

$$v_C(t) = 9 + Ae^{-1\,000t} \quad \text{V}$$

Con $v_C(0) = 0$, A $= -9$ V y, por ende,

$$v_C(t) = 9(1 - \text{e}^{-1\,000t}) \quad \text{V} \qquad [39]$$

en el intervalo de $0 < t < 10$ ms. En $t = 10$ ms la tensión de la fuente decae de forma repentina hasta 0 V, y el capacitor comienza a descargarse a través de la resistencia. En este intervalo de tiempo se está tratando con un circuito *RC* simple "sin fuentes" y podemos escribir la respuesta como

$$v_C(t) = Be^{-1\,000(t-0.01)} \qquad 10 < t < 20 \text{ ms} \qquad [40]$$

donde $B = 8.99959$ V hallado al sustituir $t = 10$ ms en la ecuación [39]; con base en la práctica, podemos redondear este resultado a 9 V si observamos que el valor calculado es congruente con el supuesto de que el transitorio inicial se desvanece antes de que termine el pulso.

En $t = 20$ ms, la fuente de tensión salta de inmediato de nuevo a 9 V. La tensión en el capacitor, exactamente antes de este evento, se obtiene mediante la sustitución de $t = 20$ ms en al ecuación [40], lo que lleva a $v_C(20 \text{ ms}) = 408.6\ \mu$V, un valor prácticamente igual a cero comparado con el valor pico de 9 V.

Si conservamos la convención de redondear a cuatro dígitos significativos, la tensión en el capacitor al comienzo del segundo pulso es cero, que es la misma que en el punto de comienzo. Por ende, las ecuaciones [39] y [40] forman las bases de la respuesta de todos los pulsos subsecuentes, por lo cual podemos escribir

$$v_C(t) = \begin{cases} 9(1 - e^{-1\,000t}) \text{ V} & 0 \leq t \leq 10 \text{ ms} \\ 9e^{-1\,000(t-0.01)} \text{ V} & 10 < t \leq 20 \text{ ms} \\ 9(1 - e^{-1\,000(t-0.02)}) \text{ V} & 20 < t \leq 30 \text{ ms} \\ 9e^{-1\,000(t-0.03)} \text{ V} & 30 < t \leq 40 \text{ ms} \end{cases}$$

y así sucesivamente.

Caso II: tiempo suficiente para cargarse totalmente pero sin descargarse por completo

A continuación estudiamos lo que sucede si el capacitor no se alcanza a descargar totalmente (caso II). La ecuación [39] aún describe la situación en el intervalo $0 < t < 10$ ms, y la ecuación [40] describe la tensión del capacitor en el intervalo entre pulsos, los cuales se han reducido a $10 < t < 10.1$ ms.

Exactamente antes de la aparición del segundo pulso en $t = 10.1$ ms, v_C es ahora de 8.144 V; el capacitor sólo había tenido 0.1 ms para descargarse y, por lo tanto, aún retiene 82% de su máxima energía cuando comienza el pulso siguiente. Por lo tanto, en el intervalo siguiente,

$$v_C(t) = 9 + Ce^{-1\,000(t-10.1 \times 10^{-3})} \quad \text{V} \quad 10.1 < t < 20.1 \text{ ms}$$

donde $v_C(10.1 \text{ ms}) = 9 + C = 8.144$ V, por lo que $C = -0.856$ V y

$$v_C(t) = 9 - 0.856e^{-1\,000(t-10.1 \times 10^{-3})} \quad \text{V} \quad 10.1 < t < 20.1 \text{ ms}$$

el cual alcanza el valor pico de 9 V mucho más rápido que el pulso anterior.

Caso III: falta de tiempo para cargarse totalmente pero tiempo suficiente para descargarse por completo

¿Qué pasa si no está claro que el transitorio se disipará antes de que termine el pulso de tensión? En realidad, esta situación se presenta en el caso III. De la misma forma como escribimos en el caso I,

$$v_C(t) = 9 + Ae^{-1\,000t} \quad \text{V} \qquad [41]$$

se aplica a esta situación, pero ahora sólo en el intervalo $0 < t < 0.1$ ms. La condición inicial no ha cambiado, por lo que $A = -9$V como era antes. Sin embargo ahora, exactamente antes de que el primer pulso termine en $t = 0.1$ ms, podemos ver que $v_C =$ 0.8565 V. Esto se encuentra muy lejos del máximo posible de 9 V si se le proporciona al capacitor suficiente tiempo para cargarse totalmente y es un resultado directo si la duración del pulso es de un décimo de la constante de tiempo del circuito.

El capacitor comienza ahora a descargarse, de tal forma que

$$v_C(t) = Be^{-1\,000(t-1 \times 10^{-4})} \quad \text{V} \quad 0.1 < t < 10.1 \text{ ms} \qquad [42]$$

Hemos determinado ya que $v_C(0.1^- \text{ ms}) = 0.8565$ V, por lo que $v_C(0.1^+ \text{ ms}) =$ 0.8565 V y la sustitución en la ecuación [42] da como resultado $B = 0.8565$ V. Justo antes de que aparezca el segundo pulso en $t = 10.1$ ms, la tensión del capacitor ha disminuido a 0 V, prácticamente; ésta es la condición inicial al comienzo del segundo pulso, por lo que la ecuación [41] puede reescribirse como

$$v_C(t) = 9 - 9e^{-1\,000(t-10.1 \times 10^{-3})} \quad \text{V} \quad 10.1 < t < 10.2 \text{ ms} \qquad [43]$$

para describir la respuesta correspondiente.

Caso IV: falta de tiempo para cargarse totalmente o aun para descargarse por completo

En el último caso, consideramos la situación donde el ancho y el periodo del pulso son tan pequeños que el capacitor no puede ni cargarse ni descargarse totalmente en un solo periodo. Con base en la experiencia, podemos escribir

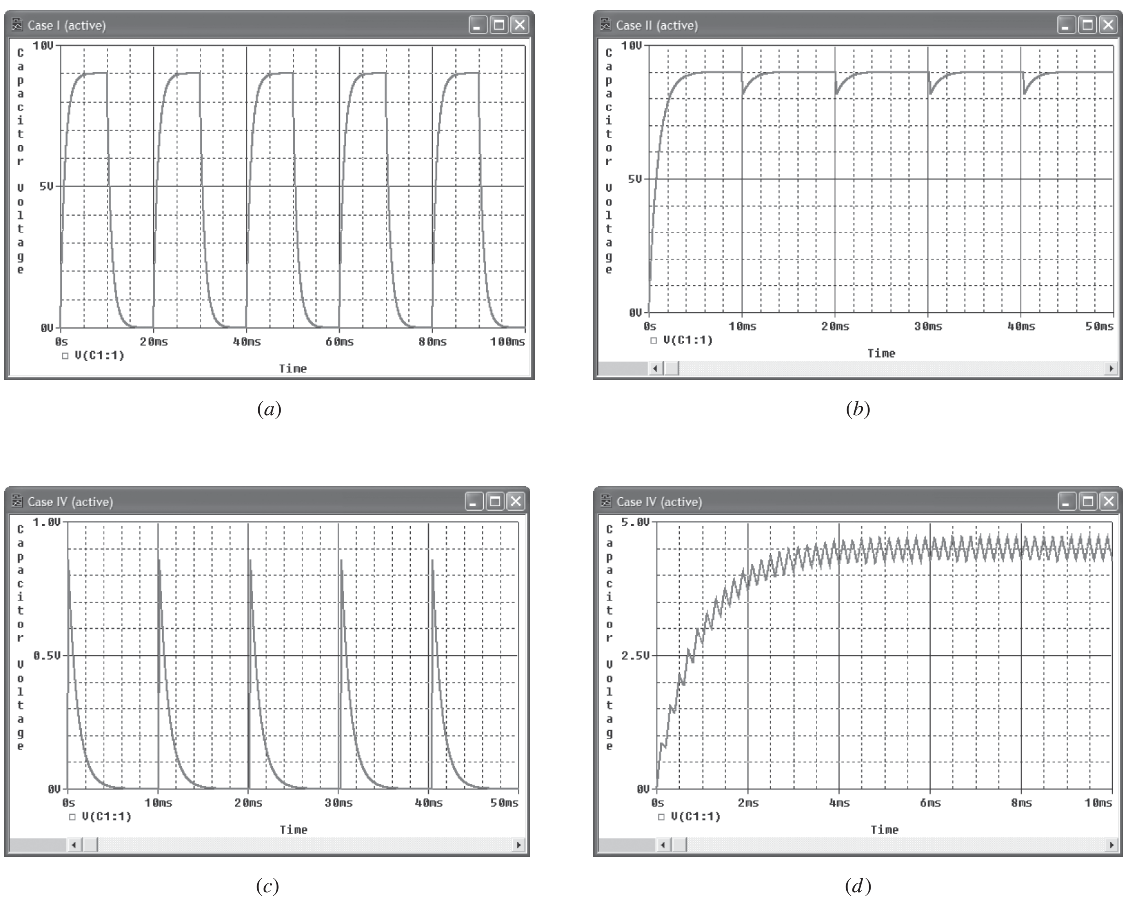
$$v_C(t) = 9 - 9e^{-1\,000t} \quad \text{V}, \qquad 0 < t < 0.1 \text{ ms} \qquad [44]$$

$$v_C(t) = 0.8565e^{-1\,000(t-1 \times 10^{-4})} \quad \text{V}, \qquad 0.1 < t < 0.2 \text{ ms} \qquad [45]$$

$$v_C(t) = 9 + Ce^{-1\,000(t-2 \times 10^{-4})} \quad \text{V}, \qquad 0.2 < t < 0.3 \text{ ms} \qquad [46]$$

$$v_C(t) = De^{-1\,000(t-3 \times 10^{-4})} \quad \text{V}, \qquad 0.3 < t < 0.4 \text{ ms} \qquad [47]$$

Exactamente antes de que se presente el segundo pulso en $t = 0.2$ ms, la tensión en el capacitor ha decaído a $v_C = 0.7750$ V; sin contar con el tiempo suficiente para descargarse totalmente, retiene una gran fracción de la poca energía que pudo almacenar inicialmente. En el segundo intervalo de $0.2 < t < 0.3$ ms, la sustitución de $v_C(0.2^+) = v_C(0.2^-) = 0.7750$ V en la ecuación [46] da como resultado $C = -8.225$ V. En seguida, calculamos la ecuación [46] en $t = 0.3$ ms y se calcula $v_C = 1.558$ V justo antes del final del segundo pulso. Así, $D = 1.558$ V y nuestro capacitor se carga



■ **FIGURA 8.49** Resultados de la simulación en PSpice correspondientes a: (*a*) caso I; (*b*) caso II; (*c*) caso III; (*d*) caso IV.

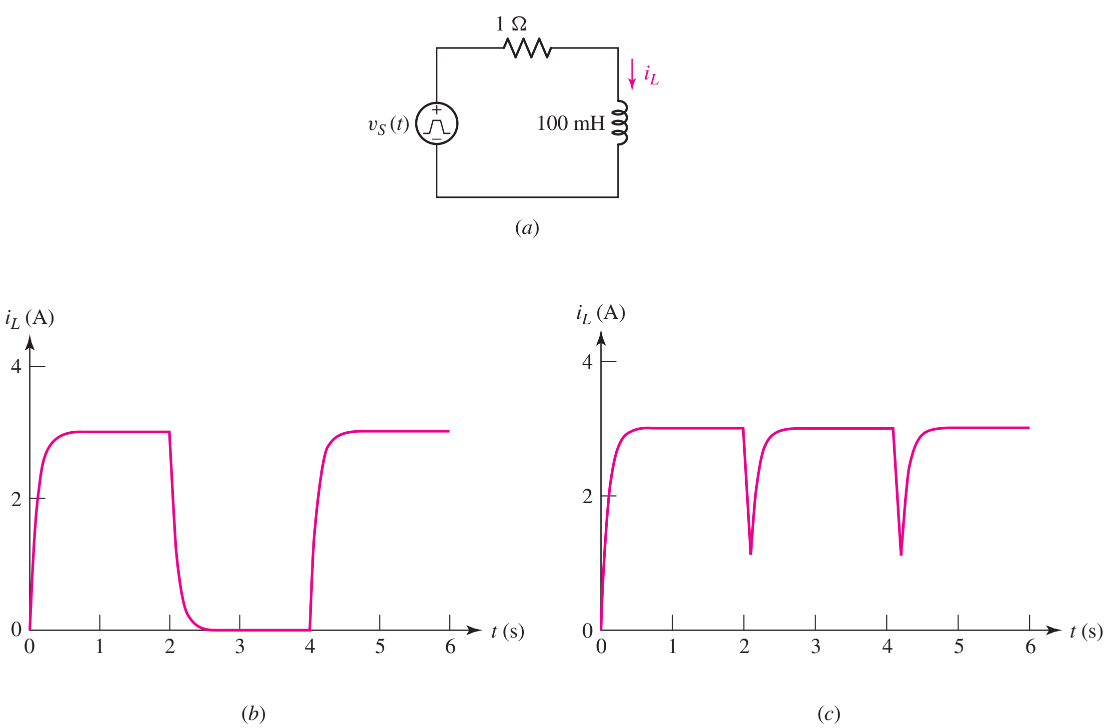
lentamente para incrementar los niveles de tensión en varios pulsos. A estas alturas, sería de utilidad si graficaramos las respuestas en detalle, por lo que ahora mostramos en la figura 8.49 los resultados de la simulación en PSpice de los casos I a IV. Observe en la figura 8.49*d*, en particular, que la pequeña respuesta transitoria de carga/descarga similar en forma a la que se muestra en las figuras 8.49*a*-*c* está sobrepuesta a una respuesta de tipo carga de la forma $(1 - e^{-t/\tau})$. ¡Por lo tanto, el capacitor debe emplear aproximadamente de 3 a 5 constantes de tiempo del circuito para cargarse a su máximo valor en situaciones donde un solo periodo no le alcanza para cargarse o descargarse completamente!

Lo que no hemos hecho todavía es predecir el comportamiento de la respuesta en $t \gg 5\tau$, a pesar de que podríamos estar interesados en hacerlo, especialmente si no fuera necesario considerar una secuencia de pulsos muy larga, uno solo a la vez. Podemos observar que la respuesta de la figura 8.49*d* tiene un valor *promedio* de 4.50 V a partir de 4 ms en adelante. Lo anterior es exactamente la mitad del valor que esperaríamos si el ancho del pulso de la fuente de tensión permitiera que el capacitor se cargara por completo. En realidad, en el largo plazo este valor promedio puede calcularse multiplicando la tensión del capacitor en cd por el cociente entre ancho del pulso y el periodo.

PRÁCTICA

8.14 Grafique $i_L(t)$ para el circuito de la figura 8.50*a* en el rango de $0 < t < 6$ s para (*a*) $v_s(t) = 3u(t) - 3u(t-2) + 3u(t-4) - 3u(t-6) + \cdots$; (*b*) $v_s(t) = 3u(t) - 3u(t-2) + 3u(t-2.1) - 3u(t-4.1) + \cdots$.

Respuesta: Vea la figura 8.50*b*; vea la figura 8.50*c*.

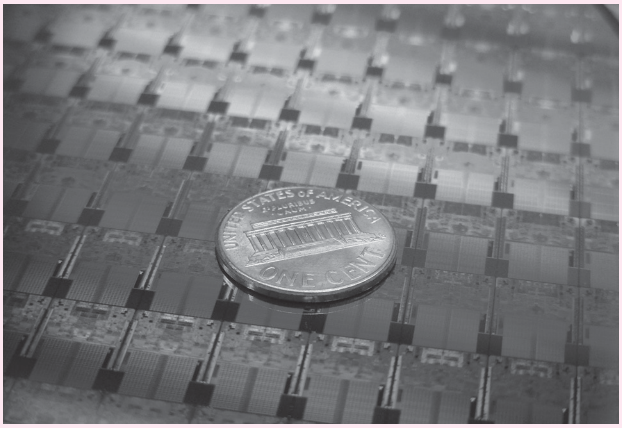


■ **FIGURA 8.50** (*a*) Circuito del problema de práctica 8.14. (*b*) Solución a la parte (*a*). (*c*) Solución a la parte (*b*).

APLICACIÓN PRÁCTICA

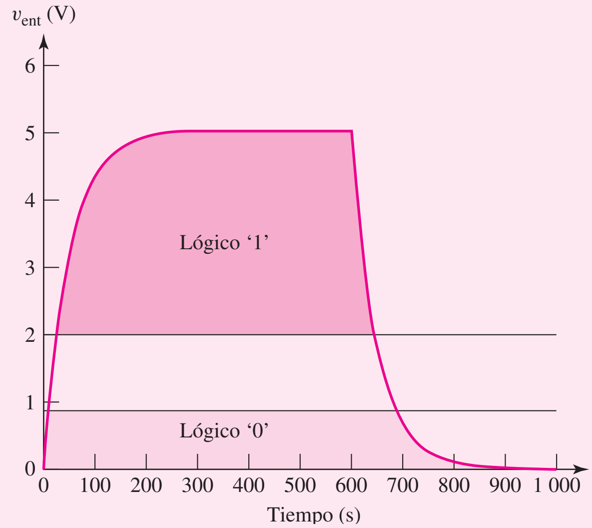
Límites de frecuencia en los circuitos integrados digitales

Los modernos circuitos integrados digitales, tales como la lógica de arreglo programable (PAL) y los microprocesadores (figura 8.51), se componen de circuitos transistorizados interconectados conocidos como *compuertas*.



■ **FIGURA 8.51** Una oblea de silicio con varios dados de circuito múltiples integrados idénticos. Cada dado es más pequeño que una moneda de un centavo estadounidense. *Reimpreso con permiso de Intel Corporation.*

Las señales digitales se representan de manera simbólica mediante combinaciones de unos y ceros que son datos o instrucciones (como "sumar" o "restar"). Eléctricamente, se representa un "1" lógico por medio de una tensión "alta", y un "0" lógico por una tensión "baja". En la práctica, hay un intervalo de tensiones que corresponden a cada uno de dichos valores; por ejemplo, en la serie 7 400 de los circuitos integrados lógicos TTL, cualquier tensión entre 2 y 5 V se interpretará como un "1" lógico, y toda tensión entre 0 y 0.8 V se entenderá como un "0" lógico. Las tensiones entre 0.8 y 2 V no corresponden a ningún estado lógico, como se muestra en la figura 8.52.



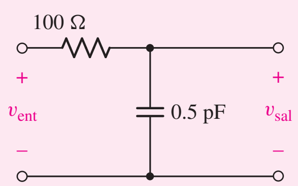
■ **FIGURA 8.52** Características de carga/descarga de una capacitancia de trayectoria que identifica los rangos de tensión TTL para el "1" lógico y para el "0" lógico.

Un parámetro clave de los circuitos digitales es la velocidad a la que es posible usarlos de manera eficaz. En este sentido, la "velocidad" se refiere a cuán rápido cambia una compuerta de un estado lógico a otro (ya sea de "0" lógico a "1" lógico o viceversa), y el retardo requerido para transmitir la salida de una compuerta a la entrada de la siguiente. A pesar de que los transistores contienen ca-

RESUMEN Y REPASO

En este capítulo hemos aprendido que los circuitos que contienen un solo elemento de almacenamiento de energía (ya sea un inductor o un capacitor) se pueden describir por una escala de tiempo característica, a saber, la *constante de tiempo del circuito* ($\tau = L/R$, o $\tau = RC$, respectivamente). Si intentamos cambiar la cantidad de energía almacenada en el elemento (ya sea cargando o descargando), *toda* tensión y *toda* corriente en el circuito incluirá un término exponencial de la forma $e^{-t/\tau}$. Después de aproximadamente *5 constantes de tiempo* desde el momento en que se intenta alterar la cantidad de energía almacenada, la respuesta *transitoria* ha prácticamente *desaparecido esencialmente* y queda simplemente una respuesta *forzada* que surge de las fuentes independientes que rigen al sistema en $t > 0$. Al determinar la respuesta forzada en un circuito puramente de cd, podemos tratar los inductores como cortocircuitos y los capacitores como circuitos abiertos.

pacitancias "incorporadas" que afectan su velocidad de conmutación, son las *trayectorias de interconexión* las que en verdad limitan la velocidad de los circuitos integrados digitales más veloces. Podemos hacer un modelo de la trayectoria de interconexión entre dos compuertas lógicas con un circuito RC simple (si bien los tamaños característicos continúan decreciendo en los diseños modernos, se requieren modelos más detallados para predecir con exactitud el desempeño del circuito). Por ejemplo, considerar una trayectoria de 2 000 μm de largo y 2 μm de ancho. Podemos hacer el modelo de esta trayectoria por medio de un circuito integrado común basado en silicio, en donde la capacitancia sea de 0.5 pF y la resistencia corresponda a 100 Ω, como se indica en la figura 8.53.



■ **FIGURA 8.53** Modelo de circuito de una trayectoria de circuito integrado.

Supongamos que la tensión v_{sal} representa la tensión de salida de una compuerta que cambia de un estado de "0" lógico a un estado de "1" lógico. La tensión v_{ent} aparece en la entrada incluso de otra compuerta; además, nos interesa el tiempo que tarda v_{ent} en alcanzar el mismo valor que v_{sal}.

Suponiendo que la capacitancia de 0.5 pF que caracteriza a la trayectoria de interconexión está descargada al principio [esto es, $v_{ent}(0) = 0$], al calcularse la constante de tiempo RC de la trayectoria como $\tau = RC = 50$ ps, y definiendo $t = 0$ como cuando cambia v_{sal}, obtenemos la expresión

$$v_{ent}(t) = Ae^{-t/\tau} + v_{sal}(0)$$

Dejando $v_{ent}(0) = 0$, observamos que $A = -v_{sal}(0)$ de modo que:

$$v_{ent}(t) = v_{sal}(0)[1 - e^{-t/\tau}]$$

Luego de examinar esta ecuación, observamos que v_{ent} alcanzará el valor $v_{sal}(0)$ después de $\sim 5\tau$ o 250 ps. Si la tensión v_{sal} cambia otra vez antes de que finalice este tiempo transitorio, la capacitancia no tendrá tiempo suficiente para cargarse. En tales situaciones, v_{ent} será menor que $v_{sal}(0)$. Suponiendo por ejemplo que $v_{sal}(0)$ es igual a la tensión mínima de "1" lógico, esto significa que v_{ent} no corresponde a un "1" lógico. Si v_{sal} cambia de modo repentino a 0 V ("0" lógico), la capacitancia empieza a descargarse de manera que v_{ent} se reduce más. Por lo tanto, al conmutar demasiado rápido los estados lógicos no se puede transferir la información de una compuerta a otra.

La mayor velocidad a la que podemos cambiar los estados lógicos es entonces $(5\tau)^{-1}$. Lo anterior se expresa en términos de la frecuencia de operación máxima como:

$$f_{máx} = \frac{1}{2(5\tau)} = 2 \text{ GHz}$$

donde el factor 2 representa un periodo de carga/descarga. Si deseamos operar el circuito integrado a una frecuencia más alta, de modo que los cálculos se efectúen más rápido, tenemos que reducir la capacitancia y/o la resistencia de interconexión.

Empezamos nuestro análisis con los llamados circuitos sin fuentes para introducir la idea de constantes de tiempo sin distracciones innecesarias: tales circuitos tienen cero respuesta forzada y una respuesta transitoria que proviene completamente de la energía almacenada en $t = 0$. Un capacitor no puede cambiar su tensión en tiempo cero (o resultaría una corriente infinita), y esto se indica introduciendo la notación $v_C(0^+) = v_C(0^-)$. De modo similar, la corriente a través de un inductor no puede cambiar en tiempo cero, o $i_L(0^+) = i_L(0^-)$. La respuesta *completa* es siempre la suma de la respuesta transitoria y la respuesta forzada. Aplicar la condición inicial a la respuesta completa nos permite determinar la constante desconocida que multiplica el término transitorio.

Hemos dedicado un poco de tiempo explicando la modelación de interruptores, analíticamente y dentro del contexto de PSpice. Una representación matemática común utiliza la función escalón unitario $u(t - t_0)$, que tiene valor cero para $t < t_0$,

valor unidad para $t > t_0$, y es indeterminada para $t = t_0$. Las funciones escalón unitario pueden "activar" un circuito (al conectar fuentes de modo que la corriente fluya) para valores de t que preceden un tiempo específico así como uno después. Las combinaciones de funciones escalón se pueden usar para crear pulsos y formas de onda más complejas. En el caso de los circuitos secuencialmente formados con interruptores, donde las fuentes se conectan y desconectan en forma repetida, encontramos que el comportamiento de los circuitos depende fuertemente de ambos periodos y pulsos anchos comparados con la constante de tiempo del circuito.

Éste es un buen momento para revisar algunos puntos clave relevantes y valiosos, junto con ejemplo(s) sobresaliente(s).

- La respuesta de un circuito con fuentes que se activan o desactivan en forma repentina de un circuito en el que hay capacitores e inductores siempre estará compuesta por dos partes: una respuesta *natural* y una respuesta *forzada*.
- La forma de la respuesta natural (denominada también como *respuesta transitoria*) depende sólo de los valores de las componentes y de la forma en que se alambran entre ellas. (Ejemplos 8.1, 8.2)
- Un circuito reducido hasta una sola capacitancia equivalente C y una sola resistencia equivalente R tendrá una respuesta natural dada por $v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$, donde $\tau = RC$ es la constante de tiempo del circuito. (Ejemplos 8.3, 8.5)
- Un circuito reducido hasta una sola inductancia equivalente L y una sola resistencia equivalente R tendrá una respuesta natural dada por $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$, donde $\tau = L/R$ representa la constante de tiempo del circuito. (Ejemplo 8.4)
- Los circuitos con fuentes dependientes se pueden representar por una resistencia usando los procedimientos de Thévenin.
- La función de escalón unitario constituye una manera útil para hacer el modelo del cierre o la apertura de un interruptor, siempre que se tenga cuidado de vigilar las condiciones iniciales. (Ejemplos 8.7, 8.9)
- La forma de la respuesta forzada refleja la de la función forzada. Por lo tanto, una función forzada de cd siempre provoca una respuesta forzada constante. (Ejemplos 8.7, 8.8)
- La respuesta *completa* de un circuito *RL* o *RC* excitado por una fuente de cd tendrá la forma $f(0^+) = f(\infty) + A$ y $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$, o respuesta total = valor final + (valor inicial − valor final) $e^{-t/\tau}$. (Ejemplos 8.9, 8.10, 8.11)
- La respuesta completa de un circuito *RL* o *RC* puede determinarse también escribiendo una sola ecuación diferencial de la cantidad de interés y resolviéndola. (Ejemplos 8.2, 8.11)
- Cuando se trata con circuitos conmutados en secuencia o circuitos conectados en forma de onda pulsantes, el problema primordial es conocer si el elemento de almacenamiento de energía cuenta con suficiente tiempo para cargarse o descargarse totalmente, como una medición relacionada con la constante de tiempo del circuito.

LECTURAS ADICIONALES

Una guía que trata sobre técnicas de solución de ecuaciones diferenciales puede encontrarse en:

W.E. Boyce y R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems,* 7a. ed., Wiley, Nueva York, 2002.

Una descripción a detalle de los transitorios en circuitos eléctricos puede encontrarse en:

E. Weber, *Linear Transient Analysis Volume 1,* Wiley, Nueva York, 1954. (Fuera de publicación, sin embargo, se puede encontrar en las bibliotecas de muchas universidades.)

EJERCICIOS

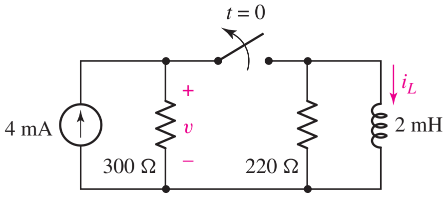
8.1 El circuito *RL* de fuente libre

1. Al establecer $R = 1$ kΩ y $L = 1$ nH para el circuito representado en la figura 8.1 y con el conocimiento de que $i(0) = -3$ mA, (*a*) escriba una expresión para $i\,(t)$ válida para todo $t \geq 0$; (*b*) calcule $i(t)$ en $t = 0$, $t = 1$ ps, 2 ps y 5 ps, y (*c*) calcule la energía almacenada en el inductor en $t = 0$, $t = 1$ ps y $t = 5$ ps.
2. Si $i(0) = 1$ A y $R = 100$ Ω para el circuito de la figura 8.1, (*a*) seleccione L de manera que $i(50 \text{ ms}) = 368$ mA; (*b*) calcule la energía almacenada en el inductor en $t = 0$, 50 ms, 100 ms y 150 ms.
3. Con referencia al circuito que se muestra en la figura 8.1, seleccione valores para ambos elementos de manera que $L/R = 1$ y (*a*) calcule $v_R(t)$ en $t = 0$, 1, 2, 3, 4 y 5 s; (*b*) calcule la potencia disipada en la resistencia en $t = 0$, 1s y 5 s. (*c*) En $t = 5$ s, ¿cuál es el porcentaje de la energía inicial que está todavía almacenada en el inductor?
4. El circuito representado en la figura 8.1 se construye con componentes cuyos valores se desconocen. Si inicialmente fluye una corriente $i(0)$ de 6 μA a través del inductor y se determina que $i(1 \text{ ms}) = 2.207$ μA, calcule la relación de R a L.
5. Determine la ecuación característica de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a)\ 5v + 14\frac{dv}{dt} = 0; \quad (b)\ -9\frac{di}{dt} - 18i = 0;$$

$$(c)\ \frac{di}{dt} + 18i + \frac{R}{B}i = 0; \quad (d)\ \frac{d^2f}{dt^2} + 8\frac{df}{dt} + 2f = 0.$$

6. Para las siguientes ecuaciones características, escriba las ecuaciones diferenciales correspondientes y encuentre todas las raíces, ya sean reales, imaginarias o complejas: (*a*) $4s + 9 = 0$; (*b*) $2s - 4 = 0$; (*c*) $s^2 + 7s + 1 = 0$; (*d*) $5s^2 + 8s + 18 = 0$.
7. Con la suposición de que el interruptor en el circuito de la figura 8.54 ha estado cerrado durante un largo tiempo, calcule $i_L(t)$ en (*a*) el instante inmediatamente anterior a la apertura del interruptor; (*b*) el instante inmediatamente posterior a la apertura del interruptor; (*c*) $t = 15.8$ μs; (*d*) $t = 31.5$ μs; (*e*) $t = 78.8$ μs.



■ **FIGURA 8.54**

8. El interruptor en la figura 8.54 ha estado cerrado desde que Catfish Hunter lanzó por última vez para los Yanquis de Nueva York. Calcule la tensión marcada v, así como la energía almacenada en el inductor en (*a*) el instante inmediatamente anterior al momento en que el interruptor se abrió; (*b*) el instante inmediatamente posterior al momento en que se abrió el interruptor; (*c*) $t = 8$ μs, (*d*) $t = 80$ μs.
9. El interruptor del circuito en la figura 8.55 ha estado cerrado durante un tiempo ridículamente largo hasta abrirse de manera repentina en $t = 0$. (*a*) Obtenga expresiones para i_L y v en el circuito de la figura 8.55 que sean válidas para todo $t \geq 0$. (*b*) Calcule $i_L(t)$ y $v(t)$ en

el instante inmediatamente anterior a la apertura del interruptor, en el instante inmediatamente posterior a la apertura del interruptor, y en el $t = 470\ \mu$s.

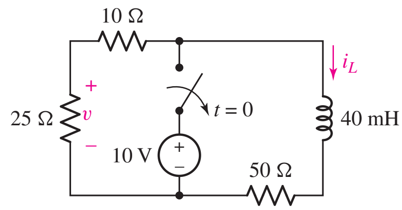


FIGURA 8.55

10. Suponiendo que el interruptor ha estado inicialmente abierto por un tiempo realmente muy largo, (*a*) obtenga una expresión para i_W en el circuito de la figura 8.56 que sea válida para todo $t \geq 0$; (*b*) calcule i_W en $t = 0$ y $t = 1.3$ ns.

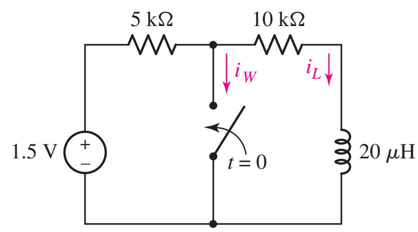


FIGURA 8.56

8.2 Propiedades de la respuesta exponencial

11. (*a*) Grafique la función $f(t) = 10\, e^{-2t}$ dentro del intervalo de $0 \leq t \leq 2.5$ s, usando escalas lineales tanto para el eje *y* como para el eje *x*. (*b*) Vuelva a graficar con una escala logarítmica para el eje *y*. [*Pista:* la función semilogy() puede ser de utilidad aquí.]. (*c*) ¿Cuáles son las unidades del 2 en el argumento de la exponencial? (*d*) ¿En qué tiempo alcanza la función un valor de 9? ¿Y de 8? ¿Y de 1?

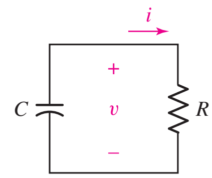
12. La corriente $i(t)$ que fluye a través de una resistencia de 1 Ω está dada por $i(t) = 5e^{-10t}$ mA, $t \geq 0$. (*a*) Determine el valor de *t* para el cual la magnitud de la tensión de la resistencia es igual a 5 V, 2.5 V, 0.5 V y 5 mV. (*b*) Grafique la función dentro del intervalo $0 \leq t \leq 1$ s, usando escalas lineales para ambos ejes. (*c*) Trace una tangente a su curva en $t = 100$ ms y determine dónde interseca la tangente el eje de tiempo.

13. El espesor de una celda solar se debe elegir cuidadosamente para asegurar que se absorban de manera adecuada los fotones; incluso los metales se pueden hacer parcialmente transparentes al laminarse en hojas muy delgadas. Si el flujo luminoso incidente (número de fotones por unidad de área por unidad de tiempo) en la superficie de la celda solar ($x = 0$) está dado por Φ_0, y la intensidad de la luz a la distancia *x* dentro de la celda solar está dada por $\Phi(x)$, el comportamiento de $\Phi(x)$ está descrito por la ecuación $d\Phi/dx + \alpha\Phi = 0$. Aquí, α, conocido como el coeficiente de absorción, es una constante específica para un material semiconductor dado. (*a*) ¿Cuál es la unidad SI para α?; (*b*) Obtenga una expresión para $\Phi(x)$ en términos de Φ_0, α y *x*. (*c*) ¿De qué espesor debe construirse la celda solar para que absorba al menos 38% de la luz incidente? Exprese su respuesta en términos de α. (*d*) ¿Qué sucede a la luz que entra a la celda solar en $x = 0$ pero no se absorbe?

14. Para el circuito de la figura 8.5, calcule la constante de tiempo si la resistencia de 10 Ω se reemplaza por (*a*) un cortocircuito; (*b*) una resistencia de 1 Ω; (*c*) una conexión en serie de dos resistencias de 5 Ω; (*d*) una resistencia de 100 Ω. (*e*) Verifique sus respuestas con una simulación adecuada de barrido de parámetros. (*Pista:* La herramienta de cursor puede ser conveniente, y la respuesta no depende de la corriente inicial que usted elija para el inductor.)

15. DP Diseñe un circuito que produzca una tensión de 1 V en algún tiempo inicial, y una tensión de 368 mV en un tiempo 5 s después. Usted puede especificar una corriente inicial del inductor sin mostrar cómo surge.

8.3 El circuito *RC* de fuente libre



■ **FIGURA 8.57**

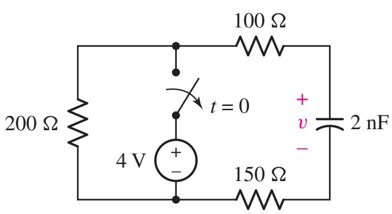
16. La resistencia en el circuito de la figura 8.57 se ha incluido para modelar la capa dieléctrica que separa las placas del capacitor de 3.1 nF y tiene un valor de 55 MΩ. El capacitor está almacenando 200 mJ de energía inmediatamente antes de $t = 0$. (*a*) Escriba una expresión para $v(t)$ válida para $t \geq 0$. (*b*) Calcule la energía que queda en el capacitor en $t = 170$ ms. (*c*) Grafique $v(t)$ en el intervalo de $0 < t < 850$ ms, e identifique el valor de $v(t)$ cuando $t = 2\tau$.

17. La resistencia en el circuito de la figura 8.57 tiene un valor de 1 Ω y está conectada a un capacitor de 22 mF. El dieléctrico del capacitor tiene resistencia infinita, y el dispositivo está almacenando 891 mJ de energía inmediatamente antes de $t = 0$. (*a*) Escriba una expresión para $v(t)$ válida para $t \geq 0$. (*b*) Calcule la energía que queda en el capacitor en $t = 11$ ms y 33 ms. (*c*) Si se determina que el dieléctrico del capacitor tiene mucho más fugas que las esperadas y tiene una resistencia tan baja como 100 kΩ, repita los incisos (*a*) y (*b*).

18. Calcule la constante de tiempo del circuito representado en la figura 8.57 si $C = 10$ mF y R es igual a (*a*) 1 Ω; (*b*) 10 Ω; (*c*) 100 Ω. (*d*) Verifique sus respuestas con una simulación adecuada de barrido de parámetros. (*Pista:* La herramienta de cursor puede resultar útil, y la constante de tiempo no depende de la tensión inicial entre las terminales del capacitor.)

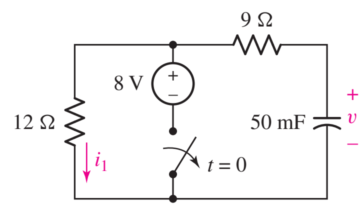
19. DP Diseñe un circuito basado en capacitores que proporcione (*a*) una tensión de 9 V en algún tiempo $t = 0$, y una tensión de 1.2 V en un tiempo 4 ms después. (*b*) Una corriente de 1 mA en algún tiempo $t = 0$, y una corriente reducida de 50 μA en un tiempo 100 ns después. (Usted puede elegir diseñar dos circuitos separados si así lo desea, y no necesita mostrar cómo se establece la tensión inicial del capacitor.)

20. Es seguro suponer que un interruptor dibujado en el circuito de la figura 8.58 ha estado cerrado durante un tiempo tan largo que cualquier transitorio que podría haber surgido desde la primera vez que se conectó la fuente de tensión ha desaparecido. (*a*) Determine la constante de tiempo del circuito. (*b*) Calcule la tensión $v(t)$ en $t = \tau$, 2τ y 5τ.



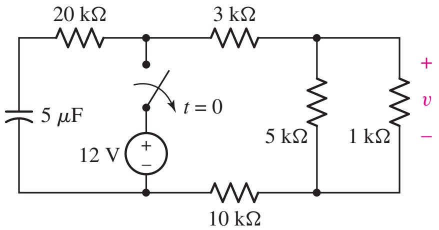
■ **FIGURA 8.58**

21. Podemos suponer con seguridad que el interruptor del circuito de la figura 8.59 estuvo cerrado durante un tiempo muy largo antes de abrirse en $t = 0$. (*a*) Determine la constante de tiempo del circuito. (*b*) Obtenga una expresión para $i_1(t)$ que sea válida para $t > 0$. (*c*) Determine la potencia disipada por la resistencia de 12 Ω en $t = 500$ ms.



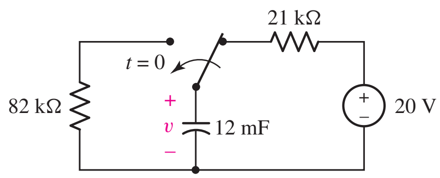
■ **FIGURA 8.59**

22. El interruptor arriba de la fuente de 12 V en el circuito de la figura 8.60 ha estado cerrado desde inmediatamente después de que se inventó la rueda. Finalmente se abre en $t = 0$. (*a*) Calcule la constante de tiempo del circuito. (*b*) Obtenga una expresión para $v(t)$ válida para $t > 0$. (*c*) Calcule la energía almacenada en el capacitor 170 ms después de haber abierto el interruptor.



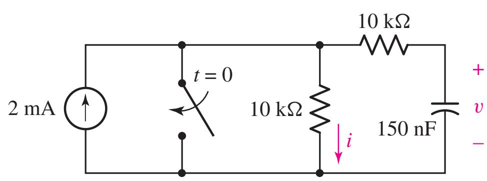
■ **FIGURA 8.60**

23. Para el circuito representado esquemáticamente en la figura 8.61, (*a*) calcule $v(t)$ en $t = 0$, $t = 984$ s y $t = 1\,236$ s; (*b*) determine la energía que todavía está almacenada en el capacitor en $t = 100$ s.



■ **FIGURA 8.61**

24. Para el circuito representado en la figura 8.62, (*a*) calcule la constante de tiempo del circuito; (*b*) determine v en el instante inmediatamente antes de cerrar el interruptor; (*c*) obtenga una expresión para $v(t)$ válida para $t > 0$; (*d*) calcule $v(3 \text{ ms})$.

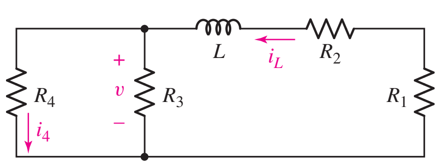


■ **FIGURA 8.62**

25. El interruptor dibujado en la figura 8.62 ha estado abierto durante un tiempo larguísimo. (*a*) Determine el valor de la corriente etiquetada i inmediatamente antes de cerrar el interruptor. (*b*) Obtenga el valor de i inmediatamente después de cerrar el interruptor. (*c*) Calcule la potencia disipada en cada resistencia dentro del intervalo $0 < t < 15$ ms. (*d*) Grafique su respuesta del inciso (*c*).

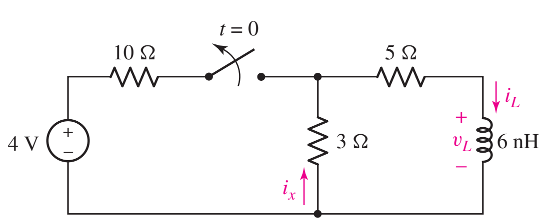
8.4 Una perspectiva más general:

26. (*a*) Obtenga una expresión para $v(t)$, la tensión que aparece entre las terminales de la resistencia R_3 en el circuito de la figura 8.63 que sea válida para $t > 0$. (*b*) Si $R_1 = 2R_2 = 3R_3 = 4R_4 = 1.2$ kΩ, $L = 1$ mH e $i_L(0^-) = 3$ mA, calcule $v(t = 500 \text{ ns})$.



■ **FIGURA 8.63**

27. Para el circuito de la figura 8.64 determine i_x, i_L y v_L en t igual a (*a*) 0^-; (*b*) 0^+.



■ **FIGURA 8.64**

28. El interruptor que se muestra en la figura 8.65 ha estado cerrado durante 6 años antes de abrirse en $t = 0$. Determine i_L, v_L y v_R en t igual a (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) 1 μs; (*d*) 10 μs.

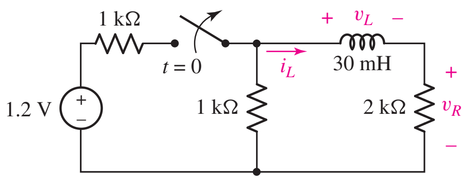


FIGURA 8.65

29. Obtenga expresiones tanto para $i_1(t)$ como para $i_L(t)$ como están marcados en la figura 8.66 y que sean válidas para $t > 0$.

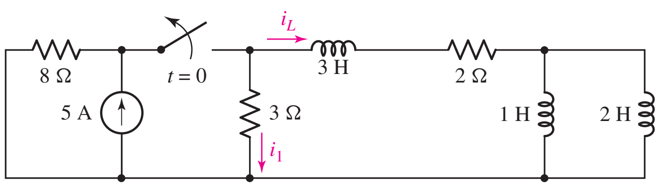


FIGURA 8.66

30. La tensión entre las terminales de la resistencia en un circuito *RL* simple libre de fuentes está dado por $5e^{-90t}$ V, $t > 0$. El valor del inductor no se conoce. (*a*) ¿En qué tiempo será la tensión del inductor exactamente la mitad de su valor máximo? (*b*) ¿En qué tiempo alcanzará la corriente del inductor 10% de su valor máximo?

31. Con referencia a la figura 8.67, calcule las corrientes i_1 e i_2 en t igual a (*a*) 1 ms; (*b*) 3 ms.

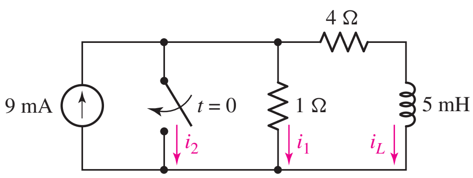


FIGURA 8.67

32. (*a*) Obtenga una expresión para v_x marcado en el circuito de la figura 8.68. (*b*) Calcule v_x en $t = 5$ ms. (*c*) Verifique su respuesta mediante una simulación PSpice adecuada. (*Pista:* Use el componente llamado **Sw_tClose**.)

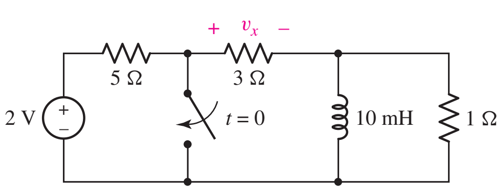
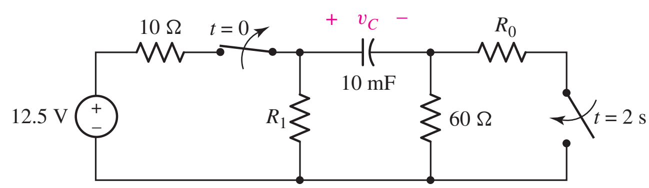


FIGURA 8.68

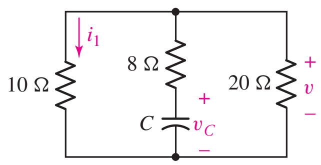
33. Diseñe un circuito completo que produzca una tensión v_{ab} entre dos terminales marcadas *a* y *b,* respectivamente, de tal manera que $v_{ab} = 5$ V en $t = 0^-$, 2 V en $t = 1$ s y menos de 60 mV en $t = 5$. Verifique la operación de su circuito usando una simulación PSpice adecuada. (*Pista:* utilice el componente llamado **Sw_tOpen** o **Sw_tClose**, según sea adecuado.)

34. Para el componente **Sw_tOpen**, PSpice emplea realmente una secuencia de simulaciones en las que el componente se reemplaza primero por una resistencia de valor 1 MΩ, y luego por una resistencia de 10 mΩ, correspondiente al momento en que se abre el interruptor. (*a*) Evalúe la confiabilidad de estos valores predeterminados mediante la simulación del circuito de la figura 8.55 y la evaluación de i_L en $t = 1$ ns. (*b*) Repita el inciso (*a*) cambiando **RCLOSED** a 1 Ω. ¿Esto cambió su respuesta? (*c*) Repita el inciso (*a*) cambiando **ROPEN** a 100 kΩ y **RCLOSED** reajustado a su valor predeterminado. ¿Esto cambió su respuesta? (*Pista*: haga doble clic en la parte para acceder a sus atributos.)

35. Seleccione valores para las resistencias R_0 y R_1 en el circuito de la figura 8.69 de manera que $v_C(0.65) = 5.22$ V y $v_C(2.21) = 1$ V.



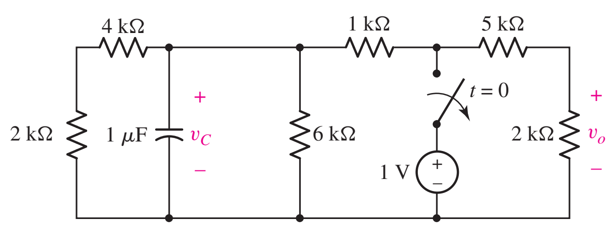
■ **FIGURA 8.69**



■ **FIGURA 8.70**

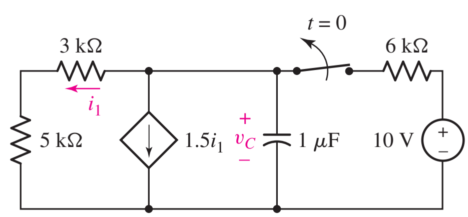
36. Una medición rápida determina que la tensión del capacitor v_C en el circuito de la figura 8.70 es 2.5 V en $t = 0^-$. (*a*) Determine $v_C(0^+)$, $i_1(0^+)$ y $v(0^+)$. (*b*) Seleccione un valor de *C* tal que la constante de tiempo del circuito sea igual a 14 s.

37. Determine $v_C(t)$ y $v_o(t)$ como está marcado en el circuito representado en la figura 8.71 para *t* igual a (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) 10 ms; (*d*) 12 ms.

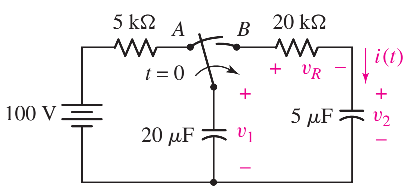


■ **FIGURA 8.71**

38. Para el circuito que se muestra en la figura 8.72, determine (*a*) $v_C(0^-)$; (*b*) $v_C(0^+)$; (*c*) la constante de tiempo del circuito; (*d*) $v_C(3 \text{ ms})$.



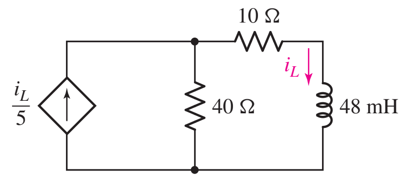
■ **FIGURA 8.72**



■ **FIGURA 8.73**

39. El interruptor de la figura 8.73 se mueve de *A* a *B* en $t = 0$ después de estar en *A* por mucho tiempo. Esto coloca a los dos capacitores en serie, lo cual permite que en los capacitores queden atrapadas tensiones de cd iguales y opuestas. (*a*) Determine $v_1(0^-)$, $v_2(0^-)$ y $v_R(0^-)$. (*b*) Calcule $v_1(0^+)$, $v_2(0^+)$, y $v_R(0^+)$. (*c*) Obtenga la constante de tiempo de $v_R(t)$. (*d*) Proporcione $v_R(t)$, $t > 0$, (*e*). Determine $i(t)$, (*f*). Encuentre $v_1(t)$ y $v_2(t)$ a partir de $i(t)$ y los valores iniciales. (*g*) Demuestre que la energía almacenada en $t = \infty$ más la energía total disipada en la resitencia de 20 kΩ es igual a la energía almacenada en los capacitores en $t = 0$.

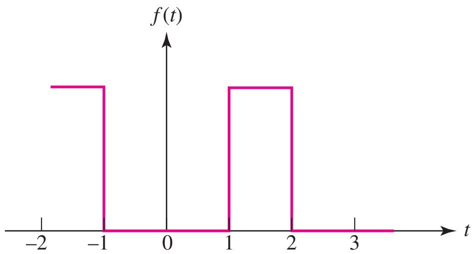
40. El inductor de la figura 8.74 está almacenando 54 nJ en $t = 0^-$. Calcule la energía que queda en t igual a (*a*) 0^+; (*b*) 1 ms; (*c*) 5 ms.



■ **FIGURA 8.74**

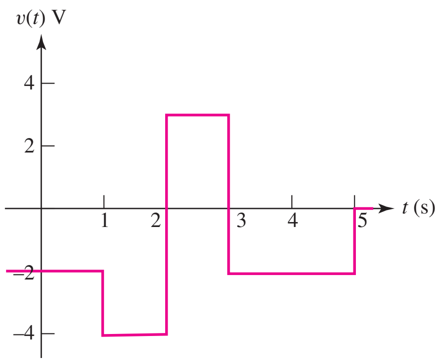
8.5 La función escalón unitario

41. Calcule las siguientes funciones en $t = -2$, 0 y +2: (*a*) $f(t) = 3u(t)$; (*b*) $g(t) = 5u(-t) + 3$; (*c*) $h(t) = 5u(t - 3)$; (*d*) $z(t) = 7u(1 - t) + 4u(t + 3)$.
42. Calcule las siguientes funciones en $t = -1$, 0 y +3: (*a*) $f(t) = tu(1 - t)$; (*b*) $g(t) = 8 + 2u(2 - t)$; (*c*) $h(t) = u(t + 1) - u(t - 1) + u(t + 2) - u(t - 4)$; (*d*) $z(t) = 1 + u(3 - t) + u(t - 2)$.
43. Dibuje las siguientes funciones dentro del intervalo $-3 \leq t \leq 3$; (*a*) $v(t) = 3 - u(2 - t) - 2u(t)$ V; (*b*) $i(t) = u(t) - u(t - 0.5) + u(t - 1) - u(t - 1.5) + u(t - 2) - u(t - 2.5)$ A; (*c*) $q(t) = 8u(-t)$ C.
44. Use funciones escalón para construir una ecuación que describa la forma de onda esquematizada en la figura 8.75.



■ **FIGURA 8.75**

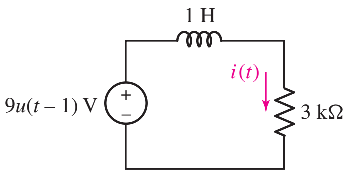
45. Usando funciones escalón según sea adecuado, describa la forma de onda de tensión graficada en la figura 8.76.



■ **FIGURA 8.76**

8.6 Accionamiento de circuitos *RL*

46. Con referencia al circuito simple representado en la figura 8.77, calcule $i(t)$ para (*a*) $t = 0^-$; (*b*) $t = 0^+$; (*c*) $t = 1^-$; (*d*) $t = 1^+$; (*e*) $t = 2$ ms.



■ **FIGURA 8.77**

47. Para el circuito de la figura 8.78, (*a*) determine $v_L(0^-)$, $v_L(0^+)$, $i_L(0^-)$ e $i_L(0^+)$; (*b*) calcule $i_L(150\text{ ns})$. (*c*) Verifique su respuesta al inciso (*b*) mediante una simulación PSpice adecuada.

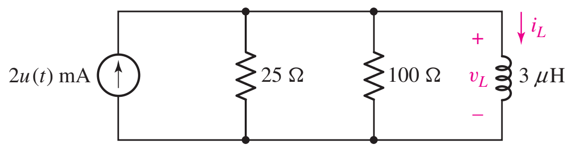


FIGURA 8.78

48. El circuito representado en la figura 8.79 contiene dos fuentes independientes, una de las cuales está activa solamente para $t > 0$. (*a*) Obtenga una expresión para $i_L(t)$ válida para todo valor de t; (*b*) calcule $i_L(t)$ en $t = 10\ \mu$s, 20 μs y 50 μs.

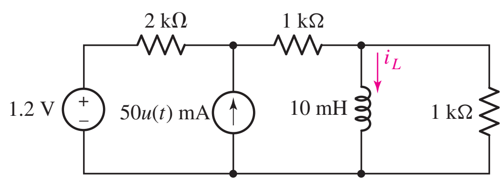


FIGURA 8.79

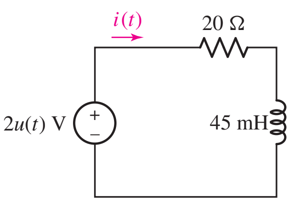


FIGURA 8.80

49. El circuito que se muestra en la figura 8.80 está energizado por una fuente que está inactiva para $t < 0$. (*a*) Obtenga una expresión para $i(t)$ válida para todos los valores de t. (*b*) Grafique su respuesta dentro del intervalo de $-1\text{ ms} \le t < 10\text{ ms}$.

50. Para el circuito que se muestra en la figura 8.81, (*a*) obtenga una expresión para $i(t)$ válida para todo tiempo; (*b*) obtenga una expresión para $v_R(t)$ válida para todo tiempo, y (*c*) grafique tanto $i(t)$ como $v_R(t)$ dentro del intervalo $-1\text{ s} < t \le 6\text{ s}$.

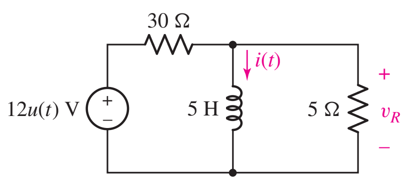


FIGURA 8.81

8.7 Respuestas natural y forzada

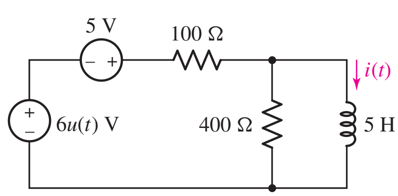


FIGURA 8.82

51. Para el circuito de dos fuentes de la figura 8.82, observe que una fuente siempre está activa. (*a*) Obtenga una expresión para $i(t)$ válida para todos los valores de t; (*b*) determine en qué tiempo la energía almacenada en el inductor alcanza 99% de su valor máximo.

52. (*a*) Obtenga una expresión para i_L marcada en la figura 8.83 que sea válida para todos los valores de t. (*b*) Grafique su resultado dentro del intervalo $-1\text{ ms} \le t \le 3\text{ ms}$.

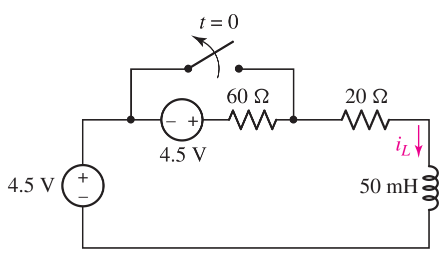
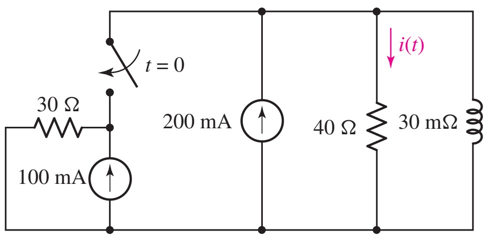


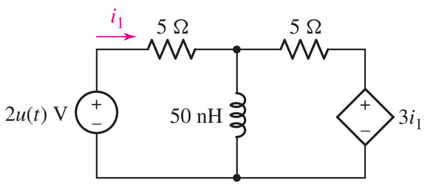
FIGURA 8.83

53. Obtenga una expresión para $i(t)$ marcado en el diagrama del circuito de la figura 8.84 y determine la potencia que se disipa en la resistencia de 40 Ω en $t = 2.5$ ms.

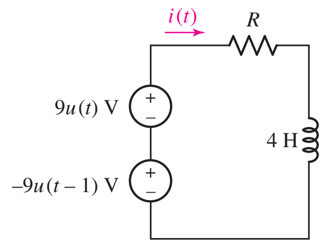


■ **FIGURA 8.84**

54. Obtenga una expresión para i_1 como se indica en la figura 8.85 que sea válida para todos los valores de t.



■ **FIGURA 8.85**

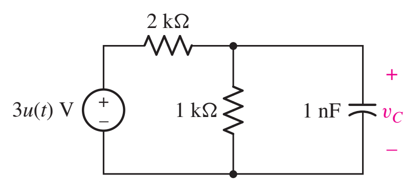


■ **FIGURA 8.86**

55. Grafique la corriente $i(t)$ en la figura 8.86 si (*a*) $R = 10$ Ω; (*b*) $R = 1$ Ω. ¿En qué caso almacena el inductor (temporalmente) la máxima energía? *Explique*.

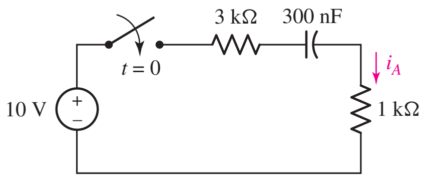
8.8 Accionamiento de circuitos *RC*

56. (*a*) Obtenga una expresión para v_C en el circuito de la figura 8.87 que sea válida para todos los valores de t. (*b*) Grafique $v_C(t)$ en el intervalo $0 \le t \le 4$ μs.



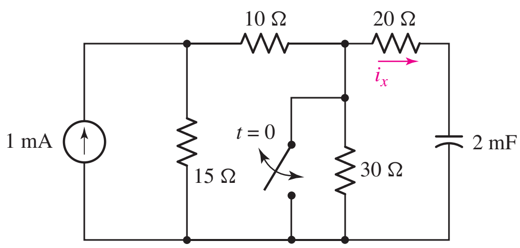
■ **FIGURA 8.87**

57. Obtenga una ecuación que describa el comportamiento de i_A marcado en la figura 8.88 en el rango $-1\text{ms} \le t \le 5$ ms.



■ **FIGURA 8.88**

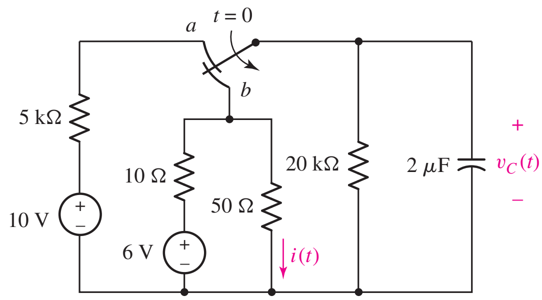
58. El interruptor en el circuito de la figura 8.89 ha estado cerrado durante un tiempo increíblemente largo antes de abrirse en $t = 0$. (*a*) Calcule la corriente etiquetada i_x en $t = 70$ ms. (*b*) Verifique su respuesta con una simulación PSpice adecuada.



■ **FIGURA 8.89**

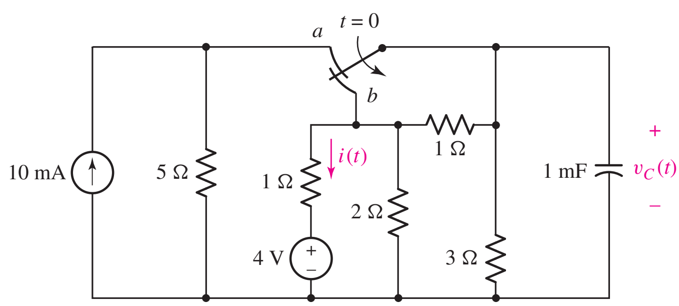
59. El interruptor en el circuito de la figura 8.89 ha estado abierto durante un tiempo realmente increíble antes de cerrarse sin mayor ceremonia en $t = 0$. (*a*) Calcule la corriente marcada como i_x en $t = 70$ ms. (*b*) Verifique su respuesta mediante una simulación PSpice adecuada.

60. El interruptor del tipo "cierre antes de corte" que se muestra en la figura 8.90 ha estado en la posición *a* desde que salió en la televisión el primer episodio de "Johnny Quest". Finalmente, se mueve a la posición *b* en el tiempo $t = 0$. (*a*) Obtenga expresiones para $i(t)$ y $v_C(t)$ que sean válidas para todos los valores de t. (*b*) Determine la energía que queda en el capacitor en $t = 33$ μs.



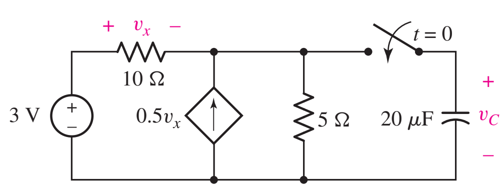
■ **FIGURA 8.90**

61. El interruptor en el circuito de la figura 8.91, que se llama con frecuencia un interruptor del tipo *cierre antes de corte* (ya que durante la conmutación hace brevemente contacto con ambas partes del circuito para asegurar una transición eléctrica suave), se mueve a la posición *b* en $t = 0$, únicamente después de haber estado en la posición *a* durante un tiempo suficientemente largo para asegurar que todos los transitorios iniciales que surgieron al activar las fuentes se han extinguido hace tiempo. (*a*) Determine la potencia disipada por la resistencia de 5 Ω en $t = 0^-$. (*b*) Determine la potencia disipada en la resistencia de 3 Ω en $t = 2$ ms.



■ **FIGURA 8.91**

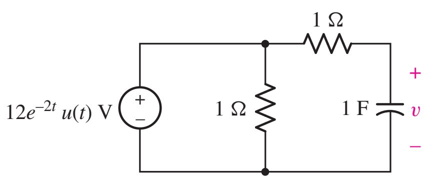
62. Con referencia al circuito representado en la figura 8.92, (*a*) obtenga una ecuación que describa v_C y que sea válida para todos los valores de t; (*b*) determine la energía que permanece en el capacitor en $t = 0^+$, $t = 25$ μs y $t = 150$ μs.



■ **FIGURA 8.92**

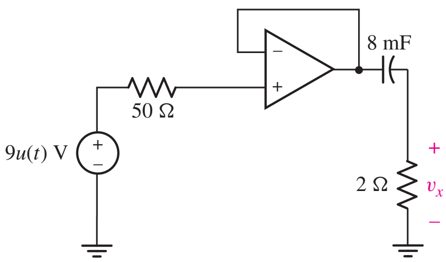
63. La fuente dependiente que se muestra en la figura 8.92 se instala por desgracia de cabeza durante la fabricación, de modo que la terminal que corresponde a la punta de la flecha está realmente conectada con la terminal de referencia negativa de la fuente de tensión. Esto no lo detecta el grupo de aseguramiento de calidad, de modo que la unidad se embarca con el alambrado incorrecto. El capacitor está inicialmente descargado. Si la resistencia de 5 Ω está clasificada solamente para 2 W, ¿después de cuánto tiempo t es probable que falle el circuito?

64. Para el circuito representado en la figura 8.93, (*a*) obtenga una expresión para v que sea válida para todos los valores de t; (*b*) grafique su resultado para $0 \leq t \leq 3$ s.



■ **FIGURA 8.93**

65. Obtenga una expresión para la tensión v_x marcada en el circuito amp op de la figura 8.94.



■ **FIGURA 8.94**

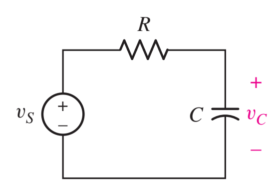
8.9 Predicción de la respuesta de circuitos conmutados secuencialmente

66. Grafique la corriente i_L del circuito de la figura 8.50*a* si el inductor de 100 mH se reemplaza por un inductor de 1 nH y se sujeta a la forma de onda $v_s(t)$ igual a
(*a*) $5u(t) - 5u(t - 10^{-9}) + 5u(t - 2 \times 10^{-9})$ V, $0 \leq t \leq 4$ ns;
(*b*) $9u(t) - 5u(t - 10^{-8}) + 5u(t - 2 \times 10^{-8})$ V, $0 \leq t \leq 40$ ns;

67. El inductor de 100 mH en el circuito de la figura 8.50*a* se reemplaza por un inductor de 1 H. Grafique la corriente del inductor i_L si la fuente $v_s(t)$ es igual a
(*a*) $5u(t) - 5u(t - 0.01) + 5u(t - 0.02)$ V, $0 \leq t \leq 40$ ns;
(*b*) $5u(t) - 5u(t - 10) + 5u(t - 10.1)$ V, $0 \leq t \leq 11$ ns;

68. Grafique la tensión v_C entre las terminales del capacitor de la figura 8.95 durante por lo menos 3 periodos si $R = 1$ Ω, $C = 1$ F y $v_s(t)$ es una forma de onda de pulsos que tiene (*a*) un mínimo de 0 V, un máximo de 2 V, tiempos de elevación y caída de 1 ms, ancho de pulso de 10 s y periodo de 10 s; (*b*) un mínimo de 0 V, un máximo de 2 V, tiempos de elevación y caída de 1 ms, ancho de pulso de 10 ms y periodo de 10 ms. (*c*) Verifique sus respuestas mediante simulaciones PSpice adecuadas.

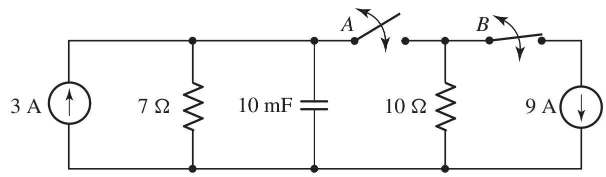
69. Dibuje la tensión v_C entre las terminales del capacitor de la figura 8.95 durante por lo menos 3 periodos si $R = 1$ Ω, $C = 1$ F y $v_s(t)$ es una forma de onda de pulsos que tiene (*a*) un mínimo de 0 V, un máximo de 2 V, tiempos de elevación y caída de 1 ms, ancho de pulso de 10 s y periodo de 10 ms; (*b*) un mínimo de 0 V, un máximo de 2 V, tiempos de elevación y caída de 1 ms, ancho de pulso de 10 ms y periodo de 10 s. (*c*) Verifique sus respuestas con simulaciones PSpice adecuadas.



■ **FIGURA 8.95**

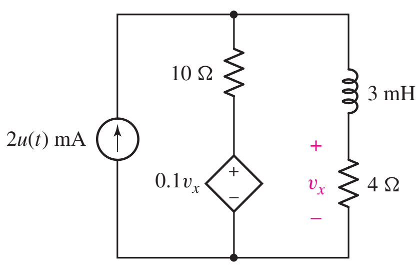
Ejercicios de integración de capítulo

70. El circuito de la figura 8.96 contiene dos interruptores que siempre se mueven en perfecta sincronía. Sin embargo, cuando el interruptor *A* se abre, el interruptor *B* se cierra, y viceversa. El interruptor *A* está inicialmente abierto, mientras que el interruptor *B* está inicialmente cerrado; cambian posiciones cada 40 ms. Usando el nodo inferior como nodo de referencia, determine la tensión entre las terminales del capacitor en *t* igual a (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) 40^- ms; (*d*) 40^+ ms; (*e*) 50 ms.



■ **FIGURA 8.96**

71. En el circuito de la figura 8.96, cuando el interruptor *A* se abre, el interruptor *B* se cierra, y viceversa. El interruptor *A* está inicialmente abierto, mientras que el interruptor *B* está inicialmente cerrado; cambian posiciones cada 400 ms. Determine la energía en el capacitor en *t* igual a (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) 200 ms; (*d*) 400^- ms; (*e*) 400^+ ms; (*f*) 700 ms.

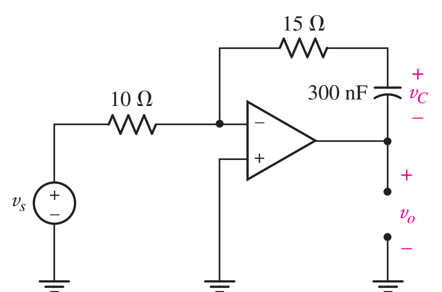


■ **FIGURA 8.97**

72. Con referencia al circuito de la figura 8.97, que contiene una fuente dependiente de tensión controlada por tensión, además de dos resistencias, (*a*) calcule la constante de tiempo del circuito. (*b*) Obtenga una expresión para v_x válida para todos los valores de *t*. (*c*) Grafique la potencia disipada en la resistencia dentro del intervalo de 6 constantes de tiempo. (*d*) Repita los incisos (*a*) a (*c*) si la fuente dependiente se instala en el circuito de cabeza. (*e*) ¿Ambas configuraciones del circuito son "estables"? *Explique.*

73. En el circuito de la figura 8.97, se instala accidentalmente un capacitor de 3 mF en vez del inductor. Por desgracia, ése no es el final del problema, ya que más tarde se determinó que el capacitor real no está realmente bien modelado por un capacitor ideal, y el dieléctrico tiene una resistencia de 10 kΩ (que se debería visualizar como conectada en paralelo con el capacitor ideal). (*a*) Calcule la constante de tiempo del circuito considerando y sin considerar la resistencia del dieléctrico. ¿En cuánto cambia el dieléctrico su respuesta? (*b*) Calcule v_x en $t = 200$ ms. ¿La resistencia del dieléctrico afecta significativamente su respuesta? *Explique*.

74. Para el circuito de la figura 8.98, suponiendo un amp op ideal, deduzca una expresión para $v_o(t)$ si v_s es igual a (*a*) $4u(t)$ V; (*b*) $4e^{-130\,000\,t}u(t)$ V.



■ **FIGURA 8.98**



CAPÍTULO 9

Circuito *RLC*



CONCEPTOS CLAVE

- Frecuencia de resonancia y factor de amortiguamiento de circuitos *RLC* en serie y en paralelo
- Respuesta sobreamortiguada
- Respuesta críticamente amortiguada
- Respuesta subamortiguada
- Uso de las dos condiciones iniciales
- Respuesta completa (natural + forzada) de circuitos *RLC*
- Representación de ecuaciones diferenciales mediante circuitos con amp ops

INTRODUCCIÓN

En el capítulo 8 estudiamos los circuitos que contenían solamente **un** elemento de almacenamiento de energía, combinado con una red pasiva, que determinaba parcialmente cuánto tiempo necesitaba para cargarse/descargarse ya sea el capacitor o el inductor. Las ecuaciones diferenciales que se generaron como resultado del análisis eran siempre de primer orden. En este capítulo consideraremos circuitos más complejos que contienen **tanto** un inductor **como** un capacitor. El resultado es una ecuación diferencial de **segundo orden** para cualquier tensión o corriente que sea de interés conocer. Lo que se aprendió en el capítulo 8 se extiende fácilmente al estudio de los llamados circuitos *RLC*, aunque ahora necesitamos **dos** condiciones iniciales para resolver cada ecuación diferencial. Tales circuitos se encuentran rutinariamente en una amplia variedad de aplicaciones, incluyendo osciladores y filtros de frecuencia. También son muy útiles en la modelación de diversas situaciones prácticas, tales como sistemas de suspensión de automóviles, controladores de temperatura e incluso la respuesta de un avión a cambios en las posiciones de los elevadores y los alerones.

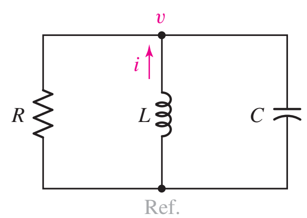
9.1 CIRCUITO EN PARALELO SIN FUENTE

Hay dos tipos básicos de circuitos *RLC*: los *conectados en paralelo* y los *conectados en serie*. Podríamos comenzar con cualquiera de ellos, pero de manera algo arbitraria decidimos iniciar considerando los circuitos *RLC* en paralelo. Esta combinación específica de elementos ideales es un modelo razonable para porciones de muchas redes de comunicación. Representa, por ejemplo, una parte importante de ciertos amplificadores electrónicos que se encuentran en los radios, y permite que los amplificadores produzcan una gran amplificación de tensión dentro de una banda angosta de frecuencias de la señal (con casi cero amplificación fuera de esta banda).



Igual que se hizo con los circuitos *RL* y *RC*, consideramos primero la respuesta natural de un circuito *RLC* en paralelo, donde uno de los elementos de almacenamiento de energía, o ambos, tienen alguna energía inicial diferente de cero (cuyo origen por el momento es irrelevante). Esto se representa por la corriente en el inductor y la tensión del capacitor, ambos especificados en $t = 0^+$. Una vez que nos sentimos familiarizados con esta parte del análisis de circuitos *RLC*, podemos incluir fácilmente en el circuito fuentes de cd, interruptores o fuentes de señal tipo escalón. Luego encontramos la respuesta total, que será la suma de la respuesta natural y la respuesta forzada.

La selectividad de frecuencia de este tipo nos permite escuchar la transmisión de una estación, al mismo tiempo que rechazamos la transmisión de cualquier otra. Otras aplicaciones incluyen el uso de circuitos *RLC* en paralelo en el multiplexaje y en los filtros de supresión de armónicas. Sin embargo, incluso un análisis simple de estos principios requiere una comprensión de términos como *resonancia*, *respuesta en frecuencia* e *impedancia*, que aún no se han explicado. Sin embargo, nos basta decir que la comprensión del comportamiento natural de los circuitos *RLC* en paralelo resulta demasiado importante para estudios futuros de redes de comunicaciones y para diseño de filtros, así como para muchas otras aplicaciones.



■ **FIGURA 9.1** Circuito *RLC* en paralelo sin fuente.

Cuando un capacitor *físico* se conecta en paralelo con un inductor y el capacitor tiene asociada una resistencia finita, se demuestra que la red resultante tiene un modelo de circuito equivalente como el de la figura 9.1. La presencia de esta resistencia se usa para simular las pérdidas de energía en el capacitor; además, todos los capacitores reales se descargarán a la larga, incluso si se desconectan de un circuito. Las pérdidas de energía en el inductor físico también se toman en cuenta mediante la adición de una resistencia ideal (en serie con el inductor ideal). Sin embargo, por simplicidad restringimos el análisis al caso de un inductor ideal en paralelo con un capacitor "con fugas".

Deducción de la ecuación diferencial de un circuito *RLC* en paralelo

En el siguiente análisis supondremos que, inicialmente, se podría almacenar la energía en el inductor y en el capacitor; en otras palabras, se presentarían valores iniciales distintos de cero tanto de la corriente del inductor como de la tensión del capacitor. Con base en la figura 9.1 como referencia, podríamos escribir la ecuación nodal simple

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' - i(t_0) + C\frac{dv}{dt} = 0 \qquad [1]$$

Observe que el signo menos es consecuencia de la dirección supuesta de i. Debemos resolver la ecuación [1] sujeta a las condiciones iniciales

$$i(0^+) = I_0 \qquad [2]$$

y

$$v(0^+) = V_0 \qquad [3]$$

Cuando ambos lados de la ecuación [1] se diferencian una vez con respecto al tiempo, el resultado consiste en una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = 0 \qquad [4]$$

cuya solución $v(t)$ es la respuesta natural deseada.

Solución de la ecuación diferencial

Hay varias formas interesantes de resolver la ecuación [4]. La mayoría de tales métodos se dejarán para un curso de ecuaciones diferenciales, así que elegimos sólo el método más rápido y simple para aplicarlo ahora. Supondremos una solución, confiando en

la intuición y modesta experiencia para solucionar una de las varias formas posibles que resultan adecuadas. Nuestra experiencia con las ecuaciones de primer orden quizá sugiera que al menos debamos probar una vez más la forma exponencial. Así, *supondremos* que

$$v = Ae^{st} \tag{5}$$

que es la forma más general posible y que permite que A y s sean números complejos, en caso de ser necesario. Al sustituir la ecuación [5] en la ecuación [4] obtenemos

$$CAs^2e^{st} + \frac{1}{R}Ase^{st} + \frac{1}{L}Ae^{st} = 0$$

o

$$Ae^{st}\left(Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L}\right) = 0$$

Para satisfacer esta ecuación todo el tiempo, al menos uno de los tres factores debe ser cero. Si cualquiera de los primeros dos factores se iguala a cero, entonces $v(t) = 0$. Ésta es una solución trivial de la ecuación diferencial que no puede satisfacer las condiciones iniciales dadas. Por lo tanto, igualamos a cero el factor restante:

$$Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} = 0 \tag{6}$$

Los matemáticos suelen denominar a esta expresión *ecuación auxiliar* o ***ecuación característica***, tema que se explica en la sección 8.1. Si es posible satisfacerla, entonces es correcta la solución supuesta. Puesto que la ecuación [6] es cuadrática, hay dos soluciones identificadas como s_1 y s_2:

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{7}$$

y

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{8}$$

Si *cualquiera* de estos dos valores se usa para s en la solución supuesta, entonces la solución satisface la ecuación diferencial dada; de tal modo ésta se convierte en una solución válida de la ecuación diferencial.

Supongamos que sustituimos s por s_1 en la ecuación [5], con lo cual obtenemos

$$v_1 = A_1e^{s_1t}$$

y, de manera similar,

$$v_2 = A_2e^{s_2t}$$

La primera satisface la ecuación diferencial

$$C\frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L}v_1 = 0$$

y la última satisface

$$C\frac{d^2v_2}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{L}v_2 = 0$$

Si se suman estas dos ecuaciones diferenciales y se combinan términos semejantes, obtenemos

$$C\frac{d^2(v_1 + v_2)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d(v_1 + v_2)}{dt} + \frac{1}{L}(v_1 + v_2) = 0$$

Prevalece la linealidad y se observa que la *suma* de ambas soluciones también es una solución. De este modo, la forma general de la respuesta natural es

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \qquad [9]$$

donde s_1 y s_2 están dadas por las ecuaciones [7] y [8]; A_1 y A_2 son dos constantes arbitrarias que se deben seleccionar para satisfacer las dos condiciones iniciales especificadas.

Definición de términos de frecuencia

La forma de la respuesta natural, como se da en la ecuación [9], ofrece poca información acerca de la naturaleza de la curva que podríamos obtener si $v(t)$ se graficara como una función del tiempo. Las amplitudes relativas de A_1 y A_2, por ejemplo, serán en verdad importantes para determinar la forma de la curva de respuesta. Además, las constantes s_1 y s_2 son números reales o números complejos conjugados, lo cual depende de los valores de R, L y C en la red dada. Estos dos casos producirán formas de respuesta fundamentalmente diferentes. Por lo tanto, será útil efectuar algunas sustituciones simplificatorias en la ecuación [9].

En razón de que los exponentes $s_1 t$ y $s_2 t$ deben ser adimensionales, resulta necesario que s_1 y s_2 tengan las unidades de alguna cantidad adimensional "por segundo". Así, en las ecuaciones [7] y [8] observamos que las unidades de $1/2RC$ y $1/\sqrt{LC}$ deben también ser s^{-1} (es decir, segundos $^{-1}$). Las unidades de este tipo se llaman ***frecuencias***.

Definamos un nuevo término, ω_0 (omega subíndice cero o sólo omega cero):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad [10]$$

y reservamos para éste el término ***frecuencia resonante***. Por otro lado, llamaremos $1/2RC$ a la ***frecuencia de Neper*** o el ***coeficiente de amortiguamiento exponencial***, y representaremos mediante el símbolo α (alfa):

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad [11]$$

Esta última expresión descriptiva se usa debido a que α es una medida de lo rápido que decae o se amortigua la respuesta natural hasta su valor final permanente (a menudo cero). Por último, s, s_1 y s_2, que son cantidades que formarán las bases de nuestro trabajo posterior, se denominan ***frecuencias complejas***.

Debemos advertir que s_1, s_2, α y ω_0 sólo son símbolos utilizados para simplificar el análisis de los circuitos *RLC*; no son nuevas propiedades misteriosas de ningún tipo. Es más fácil, por ejemplo, decir "*alfa*" que "*el recíproco de 2RC*".

Debemos poner juntos estos resultados, en cuyo caso la respuesta natural del circuito *RLC* en paralelo es

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \qquad [9]$$

donde

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad [12]$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad [13]$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad [11]$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad [10]$$

y A_1 y A_2 deben determinarse aplicando las condiciones iniciales dadas.

Observamos dos escenarios básicos posibles en las ecuaciones [12] y [13] en función de los tamaños relativos de α y ω_0 ((los cuales están determinados por los valores de R, L y C). Si $\alpha > \omega_0$, s_1 y s_2 serán números reales, lo que conduce a lo que se conoce como ***respuesta sobreamortiguada***. En el caso contrario, donde $\alpha < \omega_0$, tanto s_1 como s_2 tendrán componentes imaginarios diferentes de cero, lo que conduce a lo que se conoce como ***respuesta subamortiguada***. Ambas situaciones se consideran por separado en las secciones siguientes, junto con el caso especial en el que $\alpha = \omega_0$, que lleva a lo que se conoce como ***respuesta críticamente amortiguada***. Debemos observar también que la respuesta general comprendida en las ecuaciones [9] a [13] describe no solamente la tensión, sino también las tres corrientes en las ramas del circuito *RLC* en paralelo; desde luego, las constantes A_1 y A_2 serán diferentes entre sí.

Los ingenieros de sistemas de control conocen la proporción entre α y ω_0 como *razón de amortiguamiento*, y la designan mediante el símbolo ζ (zeta).

Sobreamortiguada:	$\alpha > \omega_0$
Críticamente amortiguada:	$\alpha = \omega_0$
Subamortiguada:	$\alpha < \omega_0$

EJEMPLO 9.1

Considere un circuito *RLC* en paralelo que tiene una inductancia de 10 mH y una capacitancia de 100 μF. Determine los valores de resistencia que llevarían a que el circuito tuviera una respuesta sobreamortiguada y subamortiguada.

Primero calculamos la frecuencia de resonancia del circuito:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(10 \times 10^{-3})(100 \times 10^{-6})}} = 10^3 \text{ rad/s}$$

Se tendrá una respuesta *sobreamortiguada* si $\alpha > \omega_0$; una *subamortiguada* si $\alpha < \omega_0$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2RC} > 10^3$$

por lo que

$$R < \frac{1}{(2\,000)(100 \times 10^{-6})}$$

o

$$R < 5\ \Omega$$

conduce a una respuesta sobreamortiguada; $R > 5\ \Omega$ conduce a una respuesta subamortiguada.

PRÁCTICA

9.1 Un circuito *RLC* en paralelo contiene una resistencia de 100 Ω con valores de parámetros $\alpha = 1\,000\ \text{s}^{-1}$ y $\omega_0 = 800$ rad/s. Determine: (*a*) C; (*b*) L; (*c*) s_1; (*d*) s_2.

Respuestas: 5 μF; 312.5 mH; $-400\ \text{s}^{-1}$, $-1\,600\ \text{s}^{-1}$.

9.2 CIRCUITO *RLC* EN PARALELO SOBREAMORTIGUADO

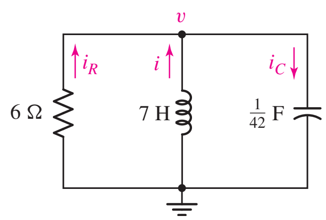
Una comparación de las ecuaciones [10] y [11] muestra que α será mayor que ω_0 si $LC > 4\,R^2C^2$. En este caso, el radical utilizado en el cálculo de s_1 y s_2 será real, así que s_1 y s_2 también lo serán. Además, las siguientes desigualdades

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha$$

$$\left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right) < \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right) < 0$$

se aplicarían a las ecuaciones [12] y [13] para mostrar que tanto s_1 como s_2 son números reales *negativos*. De tal manera, la respuesta $v(t)$ se expresa como la suma algebraica de dos términos exponenciales decrecientes que tienden a cero cuando aumenta el tiempo. En realidad, puesto que el valor absoluto de s_2 es mayor que el de s_1, el término que contiene a s_2 tiene una tasa de reducción más rápida, y para valores de tiempo grandes, escribiríamos la expresión límite como

$$v(t) \to A_1 e^{s_1 t} \to 0 \qquad \text{como } t \to \infty$$



■ **FIGURA 9.2** Circuito *RLC* en paralelo utilizado como ejemplo numérico. El circuito está sobreamortiguado.

El siguiente paso consiste en determinar las constantes arbitrarias A_1 y A_2 según las condiciones iniciales. Elegimos un circuito *RLC* en paralelo con $R = 6\ \Omega$, $L = 7$ H y, para simplificar el cálculo, $C = \frac{1}{42}$ F. El almacenamiento de energía inicial se especifica mediante una tensión inicial en el circuito $v(0) = 0$ y una corriente de inductor inicial $i(0) = 10$ A, donde v e i se definen en la figura 9.2.

Tal vez se determinen con facilidad los valores de varios parámetros

$$\begin{matrix} \alpha = 3.5 & \omega_0 = \sqrt{6} \\ s_1 = -1 & s_2 = -6 \end{matrix} \qquad (\text{todo } s^{-1})$$

y de inmediato escribiríamos la forma general de la respuesta natural:

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t} \qquad [14]$$

Cálculo de los valores de A_1 y A_2

Sólo resta la evaluación de las dos constantes A_1 y A_2. Si conocieramos la respuesta $v(t)$ en dos valores diferentes del tiempo, tales valores podrían sustituirse en la ecuación [14], de modo que A_1 y A_2 se determinarían sin ningún problema. Sin embargo, conocemos sólo un valor instantáneo de $v(t)$,

$$v(0) = 0$$

y por lo tanto,

$$0 = A_1 + A_2 \qquad [15]$$

Podemos obtener una segunda ecuación que relaciona A_1 y A_2 si se toma la derivada de $v(t)$ con respecto al tiempo en la ecuación [14], determinamos el valor inicial de la derivada mediante el uso de la condición inicial restante $i(0) = 10$ y se igualan los resultados. De esta forma, al derivar ambos lados de la ecuación [14] tenemos:

$$\frac{dv}{dt} = -A_1 e^{-t} - 6A_2 e^{-6t}$$

y al evaluar la derivada en $t = 0$,

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = -A_1 - 6A_2$$

obtenemos una segunda ecuación. Si bien esta forma parece ser útil, no tenemos un valor numérico del valor inicial de la derivada, por lo que no disponemos todavía de dos ecuaciones con dos incógnitas. . . ¿O sí? La expresión dv/dt sugiere una corriente de capacitor, puesto que

$$i_C = C\frac{dv}{dt}$$

La ley de corrientes de Kirchhoff debe cumplirse en cualquier instante de tiempo, ya que se fundamenta en la conservación de electrones. De tal modo, podríamos escribir

$$-i_C(0) + i(0) + i_R(0) = 0$$

Al sustituir nuestra expresión para la corriente del capacitor y al dividir entre C, tenemos

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i(0) + i_R(0)}{C} = \frac{i(0)}{C} = 420 \text{ V/s}$$

puesto que la tensión inicial cero en la resistencia requiere de una corriente inicial cero a través de ella. En consecuencia, tenemos la segunda ecuación,

$$420 = -A_1 - 6A_2 \qquad [16]$$

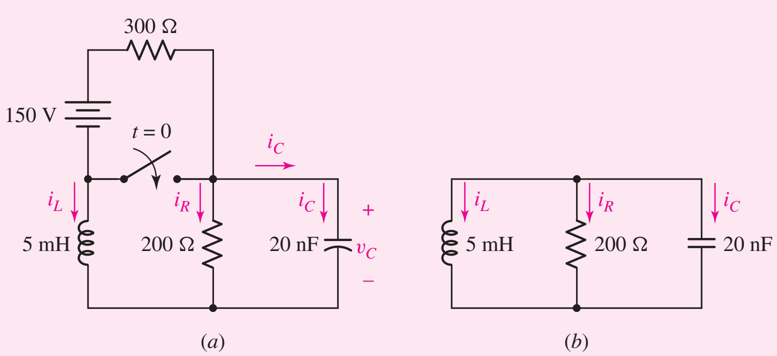
y la solución simultánea de las ecuaciones [15] y [16] proporciona dos amplitudes $A_1 = 84$ y $A_2 = -84$. Por lo tanto, la solución numérica final de la respuesta natural de este circuito es

$$v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t}) \qquad \text{V} \qquad [17]$$

En las demás explicaciones relativas a los circuitos *RLC* siempre requeriremos dos condiciones iniciales para especificar totalmente la respuesta. Una de ellas casi siempre será muy fácil de aplicar, ya sea una tensión o una corriente en $t = 0$. La segunda condición suele provocar un poco de problemas. Aunque a menudo tendremos a disposición una corriente inicial, necesitamos aplicar una de ellas de manera indirecta a través de la derivada de la solución supuesta.

EJEMPLO 9.2

Encuentre una expresión válida de $v_C(t)$ para $t > 0$ en el circuito de la figura 9.3*a*.



■ **FIGURA 9.3** (*a*) Circuito *RLC* que se convierte en uno sin fuente en $t = 0$. (*b*) El circuito en $t > 0$, en el que la fuente de 150 V y la resistencia de 300 Ω se han cortocircuitado por medio del interruptor, por lo que no son relevantes para v_C.

▶ ***Identificar el objetivo del problema.***

Se nos solicita encontrar la tensión en el capacitor después de que se dispara el interruptor. Esta acción trae como consecuencia que ninguna fuente permanezca conectada al inductor o al capacitor.

(*continúa*)

Recopilar la información conocida.

Después de que se dispara el interruptor, el capacitor se deja en paralelo con una resistencia de 200 Ω y un inductor de 5 mH (figura 9.3*b*). Por ende, $\alpha = 1/2\,RC =$

$125\,000\ \text{s}^{-1}$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 100\,000$ rad/s, $s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} =$ $-50\,000\ \text{s}^{-1}$ y $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -200\,000\ \text{s}^{-1}$.

Elegir la técnica disponible que se ajusta más al problema.

Puesto que $\alpha > \omega_0$, el circuito está sobreamortiguado, por lo que se espera una tensión en el capacitor de la forma,

$$v_C(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Conocemos el valor de s_1 y s_2; necesitamos obtener y solicitar dos condiciones iniciales a fin de determinar A_1 y A_2. Para llevar a cabo esta tarea analizaremos el circuito en $t = 0^-$ (figura 9.4*a*) para encontrar $i_L(0^-)$ y $v_C(0^-)$. Analizaremos entonces el circuito en $t = 0^+$ suponiendo que ninguno de los valores se modifica.

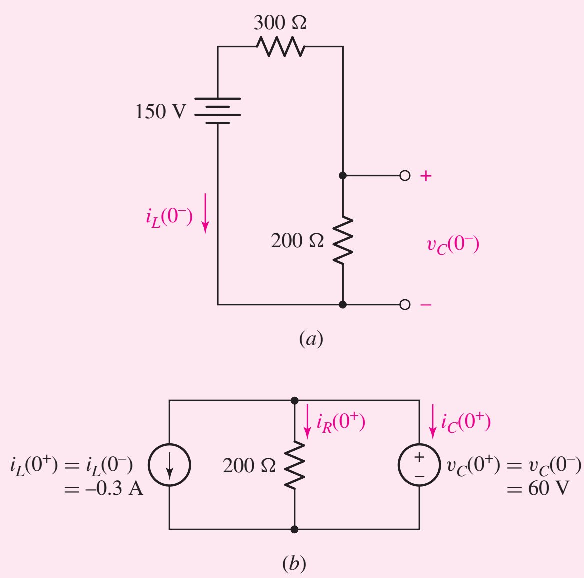
Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.

A partir de la figura 9.4*a*, en la que se sustituyó el inductor con un cortocircuito y el capacitor con un circuito abierto, observamos que:

$$i_L(0^-) = -\frac{150}{200 + 300} = -300 \text{ mA}$$

y

$$v_C(0^-) = 150\frac{200}{200 + 300} = 60 \text{ V}$$



■ **FIGURA 9.4** (*a*) Circuito equivalente en $t = 0^-$; (*b*) circuito equivalente en $t = 0^+$, que se dibujó utilizando fuentes ideales para representar la corriente inicial en el inductor y la tensión inicial en el capacitor.

En la figura 9.4*b* dibujamos el circuito en $t = 0^+$, que, por simplicidad, representa la corriente en el inductor y la tensión en el capacitor con fuentes ideales. Puesto que ninguno puede cambiar en un tiempo cero, sabemos que $v_C(0^+) = 60$ V.

▶ ***Determinar si se requiere información adicional.***
Tenemos la ecuación de la tensión del capacitor: $v_C(t) = A_1 e^{-50\,000t} + A_2 e^{-200\,000t}$. Sabemos que $v_C(0) = 60$ V, pero aún se requiere una tercera ecuación. Al derivar nuestra ecuación que expresa la tensión en el capacitor, encontramos

$$\frac{dv_C}{dt} = -50\,000 A_1 e^{-50\,000t} - 200\,000 A_2 e^{-200\,000t}$$

que puede relacionarse con la corriente en el capacitor como $i_C = C(dv_C/dt)$. Regresando a la figura 9.4*b*, mediante LCK sabemos que

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0^+) = 0.3 - [v_C(0^+)/200] = 0$$

▶ ***Intentar resolver.***
Mediante la aplicación de nuestra primera condición inicial, obtenemos

$$v_C(0) = A_1 + A_2 = 60$$

y por medio de la aplicación de la segunda condición inicial obtenemos,

$$i_C(0) = -20 \times 10^{-9}(50\,000 A_1 + 200\,000 A_2) = 0$$

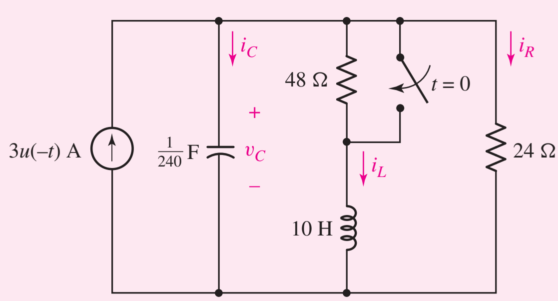
Despejando, $A_1 = 80$ V y $A_2 = -20$ V, por lo que

$$v_C(t) = 80e^{-50\,000t} - 20e^{-200\,000t} \text{ V}, \qquad t > 0$$

▶ ***Verificar la solución. ¿Es razonable o la esperada?***
Al menos, nos es posible checar la solución en $t = 0$, verificando que $v_C(0) = 60$ V. Derivando y multiplicando por 20×10^{-9}, también podemos constatar que $i_C(0) = 0$. Asimismo, como tenemos un circuito sin fuente para $t > 0$, es de esperar que $v_C(t)$ debe finalmente disminuir a cero cuando t se aproxime a ∞, lo cual corresponde con nuestra solución.

PRÁCTICA

9.2 Después de estar abierto durante mucho tiempo, el interruptor de la figura 9.5 se cierra en $t = 0$. Determine (*a*) $i_L(0^-)$; (*b*) $v_C(0^-)$; (*c*) $i_R(0^+)$; (*d*) $i_C(0^+)$; (*e*) $v_C(0.2)$.



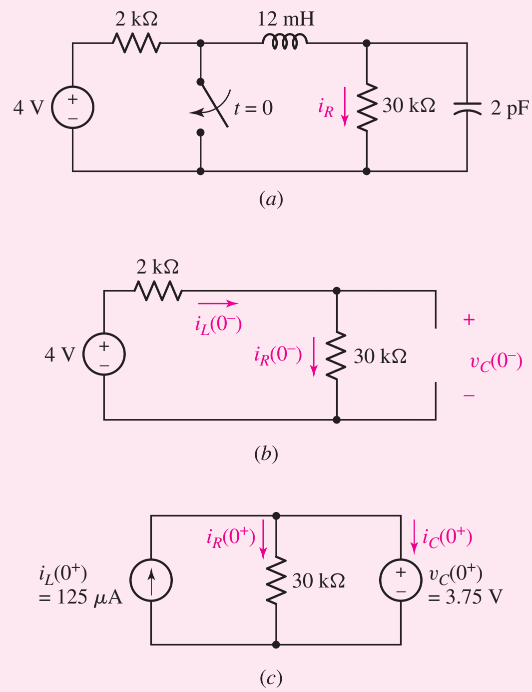
■ **FIGURA 9.5**

Respuestas: 1 A; 48 V; 2 A; −3 A; −17.54 V.

Como observamos antes, la forma de la respuesta sobreamortiguada se aplica a cualquier cantidad de tensión o corriente, como estudiaremos en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9.3

El circuito de la figura 9.6*a* se puede simplificar a un circuito *RLC* en paralelo después de $t = 0$. Determine la expresión de la corriente i_R de la resistencia que sea válida para cualquier tiempo.



■ **FIGURA 9.6** (*a*) Circuito para el que se requiere de i_R. (*b*) Circuito equivalente de $t = 0^-$. (*c*) Circuito equivalente de $t = 0^+$.

Para $t > 0$, tenemos un circuito *RLC* en paralelo con $R = 30$ kΩ, $L = 12$ mH y $C = 2$ pF. Así, $\alpha = 8.333 \times 10^6\ \text{s}^{-1}$ y $\omega_0 = 6.455 \times 10^6$ rad/s. Por lo tanto, esperamos una respuesta sobreamortiguada con $s_1 = -3.063 \times 10^6\ \text{s}^{-1}$ y $s_2 = -13.60 \times 10^6\ \text{s}^{-1}$, por lo que

$$i_R(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \qquad t > 0 \qquad [18]$$

Para determinar los valores numéricos de A_1 y A_2, primero analizamos el circuito en $t = 0^-$, como podemos ver en la figura 9.6*b*. Observamos que $i_L(0^-) = i_R(0^-) = 4/32 \times 10^3 = 125\ \mu$A, y $v_C(0^-) = 4 \times 30/32 = 3.75$ V.

Al dibujar el circuito en $t = 0^+$ (figura 9.6*c*), sólo sabemos que $i_L(0^+) = 125\ \mu$A y $v_C(0^+) = 3.75$ V. Sin embargo, por medio de la ley de Ohm podemos calcular $i_R(0^+) = 3.75/30 \times 10^3 = 125\mu$A, nuestra primera condición inicial. Así,

$$i_R(0) = A_1 + A_2 = 125 \times 10^{-6} \qquad [19]$$

¿Cómo obtenemos una *segunda* condición inicial? Si multiplicamos la ecuación [18] por 30 × 10^3, obtenemos una expresión para $v_C(t)$. Si calculamos la derivada y multiplicamos por 2 pF, obtenemos la expresión de $i_C(t)$:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = (2 \times 10^{-12})(30 \times 10^3)(A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t})$$

Por medio de LCK,

$$i_C(0^+) = i_L(0^+) - i_R(0^+) = 0$$

Por lo tanto,

$$-(2 \times 10^{-12})(30 \times 10^3)(3.063 \times 10^6 A_1 + 13.60 \times 10^6 A_2) = 0 \qquad [20]$$

Resolviendo las ecuaciones [19] y [20], tenemos que $A_1 = 161.3\ \mu$A y $A_2 = -36.34\ \mu$A. Por ende,

$$i_R = \begin{cases} 125\ \mu\text{A} & t < 0 \\ 161.3e^{-3.063\times 10^6 t} - 36.34e^{-13.6\times 10^6 t}\ \mu\text{A} & t > 0 \end{cases}$$

PRÁCTICA

9.3 Determine la corriente i_R que circula por la resistencia de la figura 9.7 para $t > 0$ si $i_L(0^-) = 6$ A y $v_C(0^+) = 0$ V. No se sabe cuál era la configuración del circuito antes de $t = 0$.

Respuesta: $6.838(e^{-7.823 \times 10^{10}t} - e^{-0.511 \times 10^{10}t})$ A.

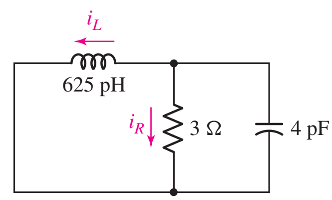


FIGURA 9.7 Circuito del problema de práctica 9.3.

Representación gráfica de la respuesta sobreamortiguada

Regresamos ahora a la ecuación [17] y observamos la información adicional que podemos determinar respecto de este circuito. Podemos interpretar el primer término exponencial como si tuviera una constante de tiempo de 1 s, y la otra exponencial, como si la tuviera $\frac{1}{6}$ de s. Cada uno empieza con amplitud unitaria, aunque el último decae con mayor rapidez; $v(t)$ nunca es negativa. Cuando el tiempo se vuelve infinito, cada término tiende a cero, y la respuesta misma se desvanece, como debe ser. Por lo tanto, tenemos una curva de respuesta que es cero en $t = 0$, cero en $t = \infty$, y nunca es negativa; puesto que no es cero en todos lados, debe poseer al menos un máximo, el cual no es un punto difícil de determinar con exactitud. Derivamos la respuesta:

$$\frac{dv}{dt} = 84(-e^{-t} + 6e^{-6t})$$

se iguala la derivada a cero para determinar el tiempo t_m con el cual la tensión se vuelve máxima:

$$0 = -e^{-t_m} + 6e^{-6t_m}$$

simplificando,

$$e^{5t_m} = 6$$

y obtenemos

$$t_m = 0.358 \text{ s}$$

y

$$v(t_m) = 48.9 \text{ V}$$

Es posible elaborar un dibujo razonable de la respuesta graficando los dos términos exponenciales $84e^{-t}$ y $84e^{-6t}$ para después tomar su diferencia. La utilidad de esta técnica se indica mediante las curvas de la figura 9.8; las dos exponenciales corresponden a trazas delgadas, y su diferencia, la respuesta total $v(t)$, se dibuja como una traza a color. Las curvas verifican también que nuestra predicción previa del comportamiento funcional de $v(t)$ para t es muy grande, de $84e^{-t}$, el término exponencial contiene la magnitud más pequeña de s_1 y s_2.

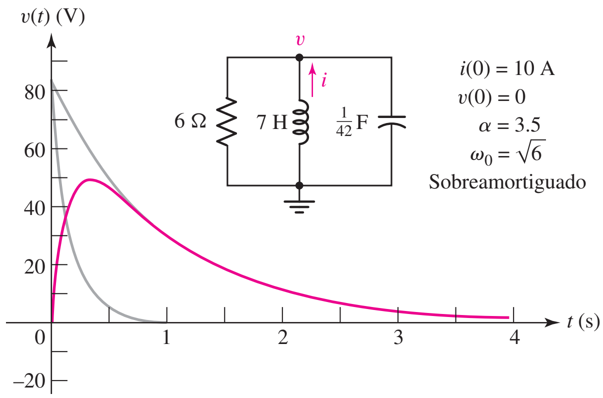


FIGURA 9.8 Respuesta $v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t})$ de la red que se muestra en la figura 9.2.

Una pregunta que se plantea con frecuencia se refiere al tiempo que transcurre en realidad para que desaparezca (o se "*amortigüe*") la parte transitoria de la respuesta. En la práctica, muchas veces resulta deseable conseguir que esta respuesta transitoria tienda a cero tan rápido como sea posible; esto es, se debe minimizar el ***establecimiento del tiempo*** t_s. En teoría, desde luego, t_s es infinito debido a que $v(t)$ nunca se establece como cero en un tiempo finito. Sin embargo, una respuesta despreciable se presenta luego de que se estableció la magnitud de $v(t)$ en valores que permanecen menores que 1% de su valor absoluto máximo $|v_m|$. Se define el tiempo que se requiere para que esto ocurra como el tiempo de establecimiento. Puesto que $|v_m| = v_m = 48.9$ V en el ejemplo, el tiempo de establecimiento es el necesario para que la respuesta disminuya hasta 0.489 V. Al sustituir este valor de $v(t)$ en la ecuación [17] e ignorar el segundo término exponencial, que se sabe que es posible omitir en este caso, encontramos que el tiempo de establecimiento corresponde a 5.15 s.

EJEMPLO 9.4

En $t > 0$, la corriente que circula por un capacitor de un cierto circuito *RLC* en paralelo sin fuente está dada por $i_C(t) = 2e^{-2t} - 4e^{-t}$ A. Grafique la corriente en el rango $0 < t < 5$ s y determine el tiempo de establecimiento.

Primero graficamos los dos términos, como se muestra en la figura 9.9, y luego se restan para encontrar $i_C(t)$. Es claro que el valor máximo es $|-2| = 2$ A. Por lo tanto, necesitamos encontrar el tiempo en el que $|i_C|$ ha disminuido a 20 mA, o

$$2e^{-2t_s} - 4e^{-t_s} = -0.02 \qquad [21]$$

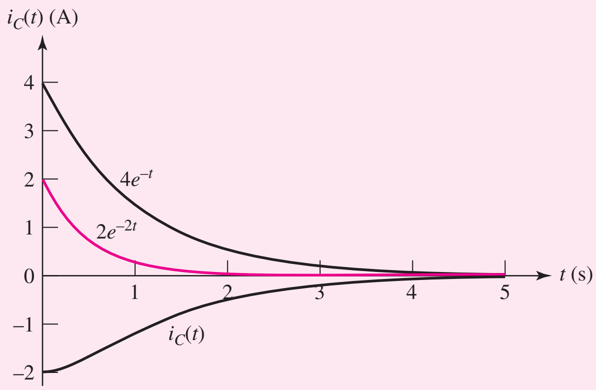


FIGURA 9.9 La respuesta de corriente $i_C(t) = 2e^{-2t} - 4e^{-t}$ A, dibujada junto con sus dos componentes.

Esta ecuación puede resolverse por medio de una rutina iterativa de solución en una calculadora científica, que proporciona la solución $t_s = 5.296$ s. Sin embargo, si dicha opción no se encuentra disponible, podemos aproximar la ecuación [21] para $t \geq t_s$ como

$$-4e^{-t_s} = -0.02 \qquad [22]$$

Resolviendo,

$$t_s = -\ln\left(\frac{0.02}{4}\right) = 5.298 \text{ s} \qquad [23]$$

lo cual representa un resultado razonablemente cercano (mejor que 0.1% en exactitud) a la solución exacta.

PRÁCTICA

9.4 (*a*) Grafique la tensión $v_R(t) = 2e^{-t} - 4e^{-3t}$ V en el intervalo de $0 < t < 5$ s. (*b*) Estime el tiempo de establecimiento. (*c*) Calcule el valor máximo positivo y el tiempo en el que éste se presenta.

Respuesta: Vea la figura 9.10; 5.9 s; 544 mV, 896 ms.

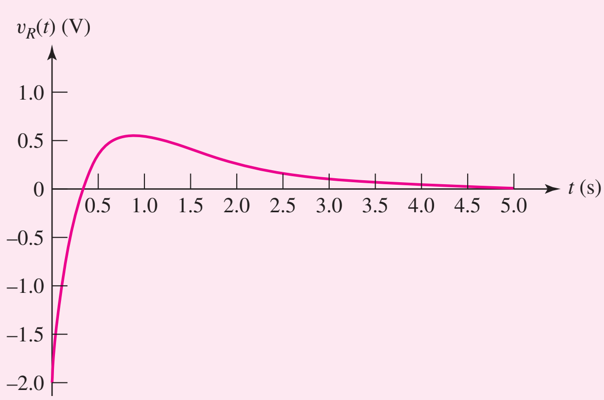


FIGURA 9.10 Gráfica de la respuesta del problema de práctica 9.4*a*.

9.3 AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO

El caso sobreamortiguado se caracteriza por

$$\alpha > \omega_0$$

o

$$LC > 4R^2C^2$$

"Imposible" es un término bastante fuerte. Afirmamos lo anterior debido a que en la práctica resulta inusual obtener componentes que estén más cerca de 1% de sus valores especificados. De tal manera, obtener *L precisamente* igual a $4R^2C$ resulta en teoría posible, aunque no muy probable, incluso si estamos dispuestos a medir una gaveta llena de componentes hasta que encontremos los correctos.

y da lugar a valores reales negativos para s_1 y s_2, además de una respuesta expresada como la suma algebraica de dos exponenciales negativas.

Ajustamos ahora los valores de los elementos hasta que α y ω_0 sean iguales. Es un caso muy especial que recibe el nombre de ***amortiguamiento crítico***. Si se tratara de construir un circuito *RLC* en paralelo que estuviera críticamente amortiguado, intentaríamos una tarea en esencia imposible, pues nunca podríamos lograr que α fuera exactamente igual a ω_0. Sin embargo, para completar el tema explicaremos el circuito críticamente amortiguado, ya que muestra una transición interesante entre el sobreamortiguamiento y el subamortiguamiento.

El amortiguamiento crítico se obtiene cuando

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \omega_0 \\ LC &= 4R^2C^2 \\ L &= 4R^2C \end{aligned}\right\} \text{amortiguamiento crítico}$$

o

Logramos un amortiguamiento crítico al cambiar el valor de cualquiera de los tres elementos del ejemplo numérico que se expuso al principio de la sección 9.1. Elegiremos R y aumentaremos su valor hasta obtener el amortiguamiento crítico, y luego, dejaremos a ω_0 inalterada. El valor necesario de R es $7\sqrt{6}/2\ \Omega$; L sigue siendo 7 H y C se mantiene en $\frac{1}{42}$ F. Así, tenemos que

$$\alpha = \omega_0 = \sqrt{6}\ \text{s}^{-1}$$

$$s_1 = s_2 = -\sqrt{6}\ \text{s}^{-1}$$

y recordemos las condiciones iniciales que se especificaron, $v(0) = 0$ e $i(0) = 10$ A.

Forma de una respuesta críticamente amortiguada

Procedemos a tratar de construir una respuesta como la suma de dos exponenciales,

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_1 e^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

la cual se podría escribir como

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_3 e^{-\sqrt{6}t}$$

En este punto, alguno de nosotros podría sentirse perdido. Tenemos una respuesta que contiene sólo una constante arbitraria, pero hay dos condiciones iniciales $v(0) = 0$ e $i(0) = 10$ amperes, y *ambas* deben ser satisfechas por esta constante. Si elegimos $A_3 = 0$, entonces $v(t) = 0$, lo cual resulta congruente con la tensión inicial del capacitor. Sin embargo, aunque no hay energía almacenada en el capacitor en $t = 0^+$, tenemos 350 J de energía almacenada inicialmente en el inductor, la cual originará una corriente transitoria que fluirá hacia fuera del inductor y propiciará una tensión distinta de cero en los tres elementos. Lo anterior parece estar en conflicto directo con la solución propuesta.

Si no ha sido un error lo que provocó nuestras dificultades, debimos empezar con un supuesto incorrecto y únicamente se formuló uno. Inferimos al principio que la ecuación diferencial podría resolverse suponiendo una solución exponencial, lo cual resultó incorrecto para este caso especial simple de amortiguamiento crítico. Cuando $\alpha = \omega_0$, la ecuación diferencial, ecuación [4], se convierte en:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha\frac{dv}{dt} + \alpha^2 v = 0$$

La solución de esta ecuación no es un proceso muy complejo, pero no lo desarrollaremos aquí, ya que es de tipo normal y se encuentra en los textos comunes de ecuaciones diferenciales. La solución es:

$$v = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2) \qquad [24]$$

Debemos observar que la solución sigue expresándose como la suma de dos términos, donde uno es la familiar exponencial negativa y el otro es t veces una exponencial negativa. Podemos observar que la solución contiene las *dos* constantes arbitrarias esperadas.

Cálculo de los valores de A_1 y A_2

Completaremos el ejemplo numérico. Luego de sustituir el valor conocido de α en la ecuación [24], obtenemos

$$v = A_1 t e^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

y establecemos los valores de A_1 y A_2 al imponer primero las condiciones iniciales sobre la propia $v(t)$, $v(0) = 0$; de tal modo, $A_2 = 0$. Este simple resultado aparece debido a que elegimos como nulo el valor inicial de la respuesta $v(t)$; el caso más general requerirá la solución simultánea de dos ecuaciones. La segunda condición inicial debe aplicarse a la derivada dv/dt exactamente como en el caso sobreamortiguado. Por lo tanto, derivamos recordando que $A_2 = 0$:

$$\frac{dv}{dt} = A_1 t(-\sqrt{6})e^{-\sqrt{6}t} + A_1 e^{-\sqrt{6}t}$$

evaluamos en $t = 0$:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = A_1$$

y expresamos la derivada en términos de la corriente inicial en el capacitor:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i_R(0)}{C} + \frac{i(0)}{C}$$

donde las direcciones de referencia de i_C, i_R e i son las definidas en la figura 9.2. En consecuencia,

$$A_1 = 420 \text{ V}$$

La respuesta es, por lo tanto:

$$v(t) = 420te^{-2.45t} \qquad \text{V} \qquad [25]$$

Representación gráfica de la respuesta críticamente amortiguada

Antes de graficar en detalle esta respuesta, tratemos de anticipar otra vez su forma mediante un razonamiento cualitativo. El valor inicial especificado es cero, que coincide con la ecuación [25]. No se manifiesta de inmediato que la respuesta tienda también a cero cuando t se vuelve infinitamente grande, debido a que $te^{-2.45t}$ es una forma indeterminada. Sin embargo, este obstáculo se supera con facilidad mediante el empleo de la regla de L'Hôpital, la cual establece que:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 420 \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{2.45t}} = 420 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2.45e^{2.45t}} = 0$$

y una vez más tenemos una respuesta que empieza y termina en cero y que tiene valores positivos en todos los demás tiempos. Un valor máximo v_m ocurre otra vez en el tiempo t_m; en nuestro ejemplo:

$$t_m = 0.408 \text{ s} \qquad \text{y} \qquad v_m = 63.1 \text{ V}$$

Este máximo es mayor que el que se obtuvo en el caso sobreamortiguado, y además es una consecuencia de las pérdidas más pequeñas que ocurren en una resistencia más grande; el tiempo de la respuesta máxima es un poco mayor que el correspondiente al sobreamortiguamiento. El tiempo de establecimiento también se determinaría resolviendo

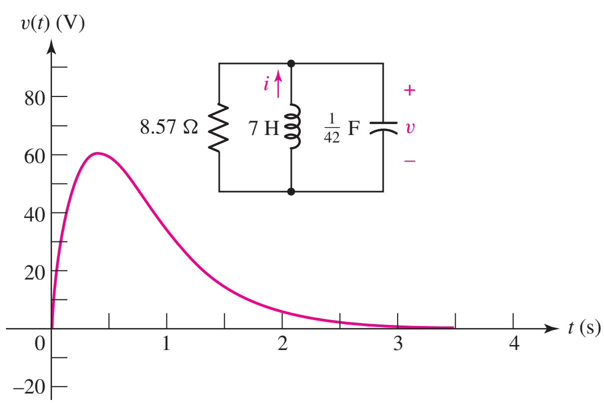
$$\frac{v_m}{100} = 420t_s e^{-2.45t_s}$$

para t_s (mediante métodos de ensayo y error, o con una rutina SOLVE de calculadora):

$$t_s = 3.12 \text{ s}$$



que es un valor mucho más pequeño que el que resulta en el caso sobreamortiguado (5.15 s). En realidad, se demuestra que, para valores dados de L y C, la selección del valor de R que proporcione amortiguamiento crítico siempre dará un tiempo de establecimiento más breve que cualquier elección de R que produzca una respuesta sobreamortiguada. Sin embargo, se obtendría una ligera mejora (reducción) del tiempo de establecimiento mediante un pequeño aumento en la resistencia; una respuesta ligeramente sobreamortiguada tal que no alcanzaría al eje cero antes de desvanecerse provocará que el tiempo de establecimiento sea más breve.

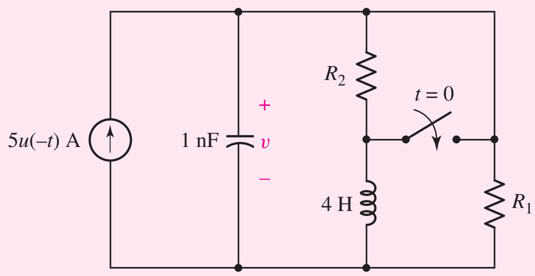


■ **FIGURA 9.11** Respuesta $v(t) = 420te^{-2.45t}$ de la red que se presenta en la figura 9.2, con R modificada para proporcionar amortiguamiento crítico.

La curva de respuesta del amortiguamiento crítico que se dibuja en la figura 9.11; puede compararse con el caso sobreamortiguado (y subamortiguado) de la figura 9.16.

EJEMPLO 9.5

Seleccione el valor de R_1 tal que el circuito de la figura 9.12 esté caracterizado por una respuesta críticamente amortiguada en $t > 0$, y un valor de R_2 tal que $v(0) = 2$ V.



■ **FIGURA 9.12** Circuito que se simplifica a un circuito *RLC* en paralelo después de que se activa el interruptor.

Observamos que en $t = 0^-$ la fuente de corriente está encendida y el inductor puede tratarse como un cortocircuito. Por ende, la tensión en R_2 es $v(0^-)$ y está dada por,

$$v(0^-) = 5\,R_2$$

y debemos seleccionar R_2 con un valor de 400 mΩ para obtener $v(0) = 2$ V.

Después de que se acciona el interruptor, se apaga por sí sola la fuente de corriente y R_2 se pone en cortocircuito. Lo que nos queda es un circuito *RLC* compuesto por R_1, un inductor de 4 H y un capacitor de 1 nF.

Podemos ahora calcular (para $t > 0$)

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 10^{-9} R_1}$$

y

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times 10^{-9}}} = 15\,810 \text{ rad/s}$$

Por lo tanto, para establecer una respuesta críticamente amortiguada en el circuito para $t > 0$, necesitamos fijar $R_1 = 31.63$ kΩ. (*Nota: debido a que se ha redondeado a cuatro dígitos significativos, una persona exigente puede argumentar con todo el derecho que aún no es* ***exactamente*** *una respuesta amortiguada críticamente, la cual es una situación muy difícil de crear.)*

PRÁCTICA

9.5 (*a*) Elija R_1 en el circuito de la figura 9.13, de manera que la respuesta después de $t = 0$ sea críticamente amortiguada. (*b*) Luego escoja R_2 para obtener $v(0) = 100$ V. (*c*) Determine $v(t)$ en $t = 1$ ms.

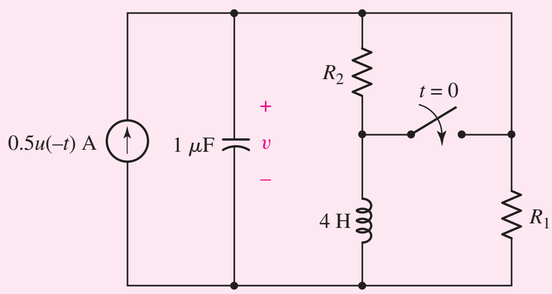


FIGURA 9.13

Respuestas: 1 kΩ; 250 Ω; −212 V.

9.4 CIRCUITO *RLC* EN PARALELO SUBAMORTIGUADO

Continuemos con el proceso que se inició en la última sección incrementando R una vez más para obtener lo que denominaremos una respuesta ***subamortiguada***. De esta forma, el coeficiente de amortiguamiento α disminuye mientras ω_0 permanece constante, α^2 se hace más pequeña que ω_0^2 y el radicando que aparece en la expresión de s_1 y s_2 se vuelve negativo. Lo anterior provoca que la respuesta tome un carácter muy diferente, aunque por fortuna no es necesario regresar de nuevo a la ecuación diferencial básica. Mediante el uso de números complejos, la respuesta exponencial se convierte en una *respuesta senoidal amortiguada* que está compuesta en su totalidad por cantidades reales, de modo que las cantidades complejas sólo son necesarias para la deducción.[1]

Forma de la respuesta subamortiguada

Comenzamos con la forma exponencial

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

donde:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

y en ese caso, sea

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

donde $j \equiv \sqrt{-1}$.

Los ingenieros en electricidad utilizan "j" en lugar de "i" para representar el símbolo $\sqrt{-1}$ y evitar confusiones con las corrientes.

Consideramos ahora el nuevo radical, que es real para el caso subamortiguado, pero lo denominaremos ω_d, la ***frecuencia resonante natural***:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

La respuesta se escribiría ahora como

$$v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t}) \qquad [26]$$

[1] En el apéndice 5 se encuentra un repaso de los números complejos.

o, en forma más extensa pero equivalente,

$$v(t) = e^{-\alpha t}\left\{(A_1 + A_2)\left[\frac{e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}}{2}\right] + j(A_1 - A_2)\left[\frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{j2}\right]\right\}$$

Al aplicar las identidades que se describen en el apéndice 5, el primer corchete de la ecuación anterior es exactamente igual a cos $\omega_d t$, y el segundo, a sen $\omega_d t$. Por consiguiente:

$$v(t) = e^{-\alpha t}\left[(A_1 + A_2)\cos\omega_d t + j\,(A_1 - A_2)\ \mathrm{sen}\ \omega_d t\right]$$

de esta forma se asignarían nuevos símbolos a los factores multiplicadores:

$$v(t) = e^{-\alpha t}\,(B_1\cos\omega_d t + B_2\,\mathrm{sen}\,\omega_d t) \qquad [27]$$

donde las ecuaciones [26] y [27] son idénticas.

Tal vez parezca extraño que la expresión haya aparecido originalmente con un componente complejo, y ahora es sólo real. Sin embargo, debemos recordar que se permitió al principio que A_1 y A_2 fueran complejos, lo mismo que s_1 y s_2. En cualquier situación, si estamos tratando con el caso subamortiguado, dejamos ahora a un lado a los números complejos. Lo anterior debe ser cierto, pues α, ω_d y t son cantidades reales, por lo que la propia $v(t)$ debe ser una cantidad real (que podría presentarse mediante un osciloscopio, un voltímetro o una hoja de papel gráfico). La ecuación [27] es la forma funcional deseada de la respuesta subamortiguada y su validez se verifica mediante la sustitución directa en la ecuación diferencial original; este ejercicio se deja a los incrédulos. Las dos constantes reales B_1 y B_2 se eligen de nuevo para que se ajusten a las condiciones iniciales dadas.

Ahora regresamos al circuito *RLC* simple en paralelo de la figura 9.2 con $R = 6\ \Omega$, $C = 1/42$ F y $L = 7$ H, pero se incrementa la resistencia a un valor de 10.5 Ω. Por lo tanto,

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 2\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{6}\ \mathrm{s}^{-1}$$

y

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{2}\ \mathrm{rad/s}$$

Salvo por la evaluación de las constantes arbitrarias, en este caso se conoce la respuesta:

$$v(t) = e^{-2t}(B_1\cos\sqrt{2}t + B_2\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t)$$

Cálculo de los valores de B_1 y B_2

Para el cálculo de las dos constantes se procede como antes. Si continuamos suponiendo que $v(0) = 0$ e $i(0) = 10$, entonces B_1 debe ser cero. De ahí que

$$v(t) = B_2 e^{-2t}\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t$$

La derivada es:

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{2}B_2 e^{-2t}\cos\sqrt{2}t - 2B_2 e^{-2t}\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t$$

y en $t = 0$ se convierte en

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \sqrt{2}B_2 = \frac{i_C(0)}{C} = 420$$

donde i_C se define en la figura 9.2. Por lo tanto,

$$v(t) = 210\sqrt{2}e^{-2t}\,\text{sen}\,\sqrt{2}t$$

Representación gráfica de la respuesta subamortiguada

Observe que, como antes, esta función de respuesta tiene un valor inicial de cero, debido a la condición de tensión inicial que impusimos, y un valor final de cero en virtud de que el término exponencial se anula para valores grandes de t. Cuando t aumenta a partir de cero en pequeños valores positivos, $v(t)$ aumenta como $210\sqrt{2}\,\text{sen}\,\sqrt{2}t$, pues el término exponencial permanece en esencia igual a la unidad. Pero en cierto tiempo t_m, la función exponencial empieza a disminuir más rápido a medida que la función sen $\sqrt{2}\,t$ crece. De tal modo, $v(t)$ alcanza un máximo v_m y empieza a disminuir. Observemos que t_m no es el valor de t para el cual sen $\sqrt{2}\,t$ es un máximo, sino que debe ocurrir un poco antes de que sen $\sqrt{2}\,t$ alcance su máximo.

Cuando $t = \pi/\sqrt{2}$, $v(t)$ es cero. En consecuencia, en el intervalo $\pi/\sqrt{2} < t < \sqrt{2}\pi$, la respuesta es negativa, y se vuelve cero de nuevo en $t = \sqrt{2}\pi$. Por consiguiente, $v(t)$ es una función *oscilatoria* del tiempo y cruza el eje de tiempo un número infinito de veces en $t = n\pi/\sqrt{2}$, donde n es cualquier entero positivo. Sin embargo, en nuestro ejemplo la respuesta sólo es un poco subamortiguada, y el término exponencial provoca que la función se desvanezca tan rápido que la mayor parte de los cruces por cero no serán evidentes en el dibujo.

La naturaleza oscilatoria de la respuesta se nota más cuando α disminuye. Si α es cero, lo cual corresponde a una resistencia infinitamente grande, entonces $v(t)$ es una senoide subamortiguada que oscila con amplitud constante. Nunca hay un tiempo para el que $v(t)$ se reduzca y permanezca por debajo de 1% de su valor máximo; en consecuencia, el tiempo de establecimiento es infinito, aunque no es el movimiento perpetuo. Supusimos tan sólo una energía inicial en el circuito y no proporcionamos ningún medio para disiparla, por lo que se transfiere desde su ubicación inicial en el inductor hasta el capacitor, para luego regresar al inductor, etc., por siempre.

Función de la resistencia finita

Una R finita en el circuito *RLC* en paralelo actúa como un tipo de intermediario de transferencia eléctrica. Cada vez que la energía se transfiere de L a C o de C a L, el intermediario exige una comisión. En poco tiempo habrá tomado toda la energía, disipando de manera desenfrenada hasta el último joule. La L y C se quedan sin un joule propio, sin tensión y sin corriente. Los circuitos *RLC* en paralelo reales pueden construirse a fin de que tengan valores eficaces de R tan grandes que se conserve durante años una respuesta senoidal subamortiguada natural, sin suministrar ninguna energía adicional.

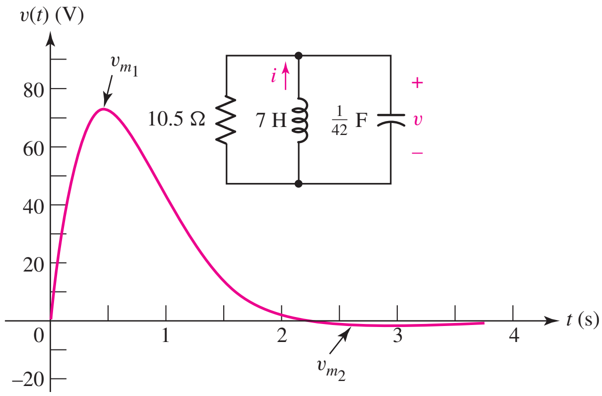
Regresando al problema numérico específico, la diferenciación localiza el primer máximo de $v(t)$:

$$v_{m_1} = 71.8 \text{ V} \qquad \text{en} \qquad t_{m_1} = 0.435 \text{ s}$$

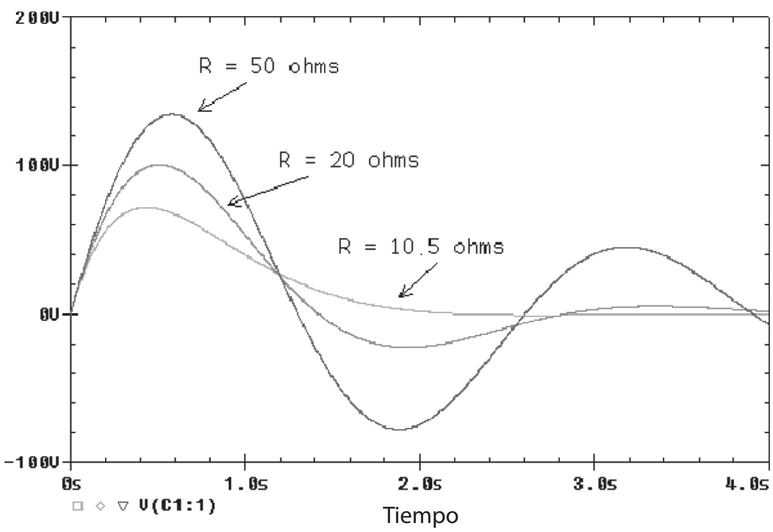
el mínimo siguiente,

$$v_{m_2} = -0.845 \text{ V} \qquad \text{en} \qquad t_{m_2} = 2.66 \text{ s}$$

y así en forma sucesiva. La curva de respuesta se muestra en la figura 9.14, y las curvas de respuesta adicionales de circuitos cada vez más subamortiguados, en la figura 9.15.



■ **FIGURA 9.14** La respuesta $v(t) = 210\sqrt{2}e^{-2t}$ sen $\sqrt{2}t$ de la red que se muestra en la figura 9.2 con *R* incrementada para producir una respuesta subamortiguada.



■ **FIGURA 9.15** Respuesta a una tensión subamortiguada simulada de una red de tres valores diferentes de resistencia, que muestran un incremento del comportamiento oscilatorio a medida que *R* aumenta.

Es posible obtener el tiempo de establecimiento mediante una solución de ensayo y error, y para $R = 10.5\ \Omega$, resulta ser de 2.92 s, algo más pequeño que en el amortiguamiento crítico. Observe que t_s es *mayor* que t_{m_2} debido a que la magnitud de v_{m_2} es mayor que 1% de la magnitud de v_{m_1}. Ello sugiere que una ligera reducción de R disminuiría la magnitud de la distancia al eje y permitiría que t_s fuera menor que t_{m_2}.

Las respuestas sobreamortiguada, críticamente amortiguada y subamortiguada de esta red, según las simula PSpice, se presentan en la misma gráfica de la figura 9.16. Una comparación de las tres curvas hace posibles las siguientes conclusiones generales:

- Cuando el amortiguamiento cambia al incrementar el tamaño de la resistencia en paralelo, la magnitud máxima de la respuesta resulta mayor y la cantidad de amortiguamiento menor.

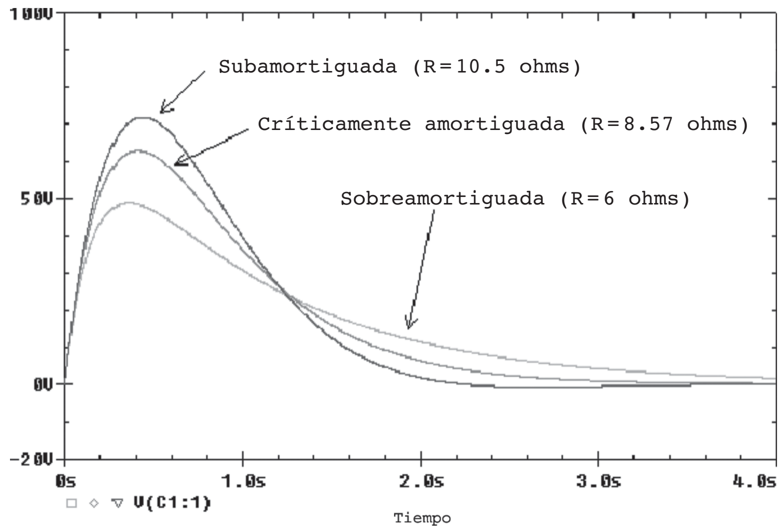


FIGURA 9.16 Respuestas de tensión sobreamortiguada, críticamente amortiguada y subamortiguada simuladas para la red del ejemplo, que se obtienen cuando se modifica el valor de la resistencia *R* en paralelo.

- La respuesta se vuelve oscilatoria cuando se presenta el subamortiguamiento, por lo que el tiempo de establecimiento mínimo se obtiene para un subamortiguamiento ligero.

EJEMPLO 9.6

Determine $i_L(t)$ en el circuito de la figura 9.17*a* y grafique la forma de onda.

En $t = 0$ se quitan tanto la fuente de 3 A como la resistencia de 48 Ω, con lo cual queda el circuito que se muestra en la figura 9.17*b*. Por ende, $\alpha = 1.2\ \text{s}^{-1}$ y $\omega_0 = 4.899$ rad/s. Puesto que $\alpha < \omega_0$, el circuito es *subamortiguado* y, por lo tanto, esperamos una respuesta de la forma

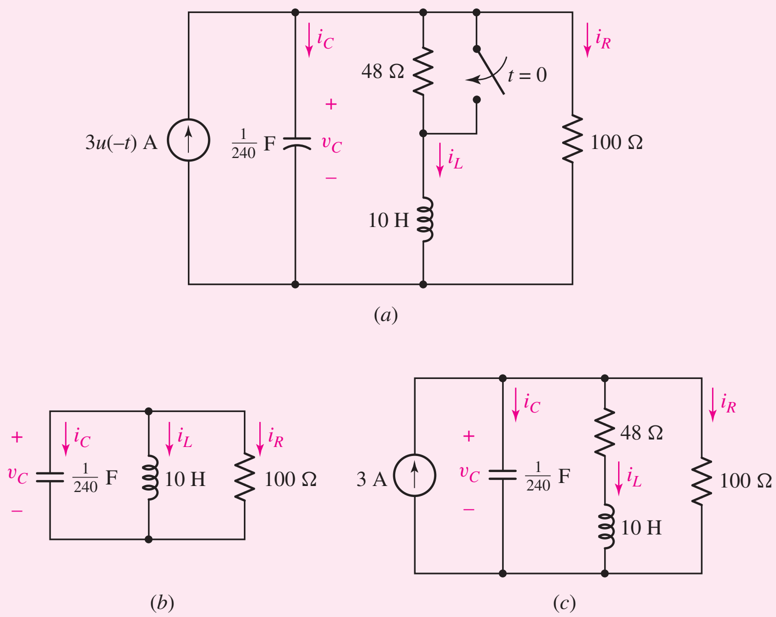
$$i_L(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \operatorname{sen} \omega_d t) \qquad [28]$$

donde $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 4.750$ rad/s. El único paso que queda es encontrar B_1 y B_2.

La figura 9.17*c* muestra el circuito como está en el tiempo $t = 0^-$. Podemos sustituir el inductor con un cortocircuito y el capacitor con un circuito abierto; el resultado es $v_C(0^-) = 97.30$ V e $i_L(0^-) = 2.027$ A. Puesto que ninguna cantidad puede modificarse en el tiempo cero, entonces se tiene $v_C(0^+) = 97.30$ V e $i_L(0^+) = 2.027$ A.

Sustituyendo $i_L(0) = 2.027$ en la ecuación [28] obtenemos $B_1 = 2.027$ A. Para determinar la otra constante, primero derivamos la ecuación [28]:

$$\frac{di_L}{dt} = e^{-\alpha t}(-B_1\omega_d \operatorname{sen} \omega_d t + B_2\omega_d \cos \omega_d t) - \alpha e^{-at}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \operatorname{sen} \omega_d t) \qquad [29]$$



■ **FIGURA 9.17** (*a*) Circuito *RLC* en paralelo para el que se desea la corriente $i_L(t)$. (*b*) El circuito en $t \geq 0$. (*c*) Circuito para determinar las condiciones iniciales.

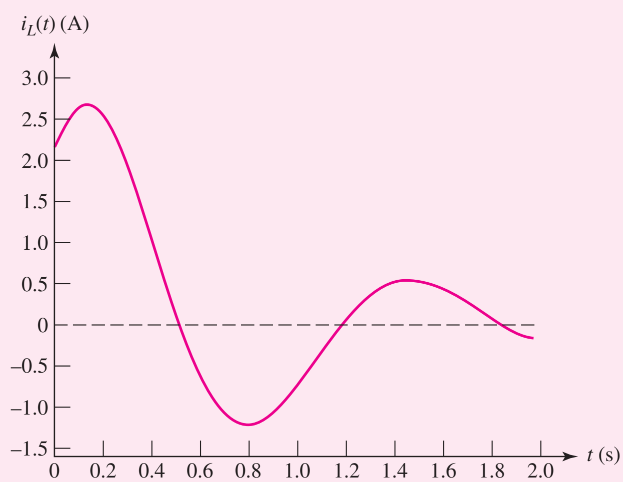
y observamos que $v_L(t) = L(di_L/dt)$. Con referencia al circuito de la figura 9.17*b*, vemos que $v_L(0^+) = v_C(0^+) = 97.3$ V. Por lo tanto, multiplicando la ecuación [29] por $L = 10$ H y fijando $t = 0$, encontramos que

$$v_L(0) = 10(B_2\omega_d) - 10\alpha B_1 = 97.3$$

Resolviendo, $B_2 = 2.561$ A, de tal forma que

$$i_L = e^{-1.2t}(2.027 \cos 4.75t + 2.561 \operatorname{sen} 4.75t) \qquad \text{A}$$

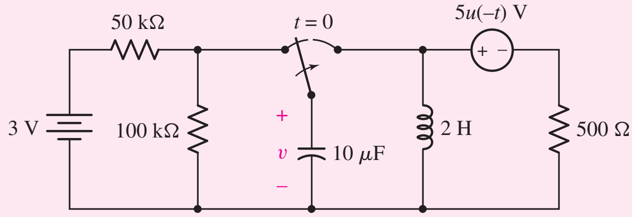
la cual está graficada en la figura 9.18.



■ **FIGURA 9.18** Gráfica de $i_L(t)$, que muestra signos evidentes de ser una respuesta subamortiguada.

PRÁCTICA

9.6 El interruptor del circuito de la figura 9.19 se ha mantenido en la posición izquierda durante largo tiempo. Se mueve a la derecha en $t = 0$. Determine (*a*) dv/dt en $t = 0^+$; (*b*) v en $t = 1$ ms; (*c*) t_0, el primer valor de t mayor que cero, para el cual $v = 0$.



■ **FIGURA 9.19**

Respuestas: −1 400 V/s; 0.695 V; 1.609 ms.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

Una característica útil de Probe es su capacidad para efectuar operaciones matemáticas sobre las tensiones y corrientes que resultan de una simulación. En este ejemplo emplearemos esa capacidad para mostrar la transferencia de energía en un circuito *RLC* en paralelo, de un capacitor que almacena inicialmente una cantidad específica de energía (1.25 μJ) a un inductor que al principio no contiene energía.

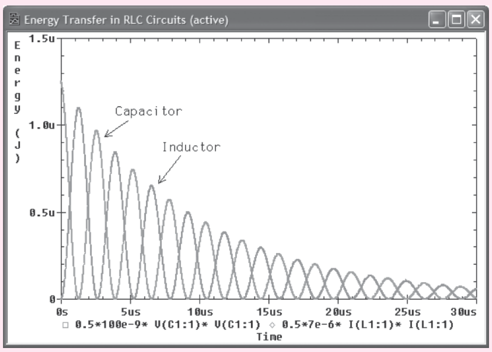
Seleccionamos un capacitor de 100 nF y un inductor de 7 μH, lo cual nos permite de inmediato calcular $\omega_0 = 1.195 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$. Para analizar los casos sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado, necesitamos elegir la resistencia en paralelo, de manera que obtengamos $\alpha > \omega_0$ (*sobreamortiguado*), $\alpha = \omega_0$ (*críticamente amortiguado*) y $\alpha < \omega_0$ (*subamortiguado*).

De las explicaciones anteriores sabemos que para un circuito *RLC* en paralelo $\alpha = (2RC)^{-1}$. Seleccionamos $R = 4.1833\ \Omega$ como una aproximación cercana al caso críticamente amortiguado; calcular α exactamente igual a ω_0 es en realidad imposible. Si aumentamos la resistencia, la energía que se almacena en los otros dos elementos se disipa con mayor lentitud, lo que causa una respuesta subamortiguada. Seleccionamos $R = 100\ \Omega$ de manera que estemos bien dentro de este régimen, y utilizamos $R = 1\ \Omega$ (una resistencia muy pequeña) para obtener una respuesta sobreamortiguada.

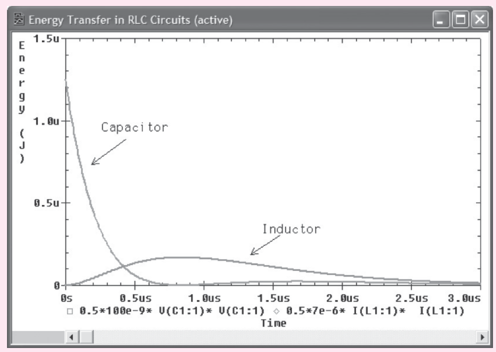
En consecuencia, planeamos ejecutar tres simulaciones independientes, variando sólo la resistencia R entre ellas. La energía de 1.25 μJ, almacenada en un principio en el capacitor, corresponde a una tensión inicial de 5 V, y así establecemos la condición inicial del capacitor.

Luego de que se pone en ejecución Probe, seleccionamos **Add** bajo el menú **Trace**. Deseamos graficar la energía almacenada tanto en el inductor como en el capacitor en función del tiempo. Para el capacitor, $\omega = \frac{1}{2}Cv^2$, por lo que hacemos clic en la ventana **Trace Expression**, tecleamos "0.5*100E-9*" (sin las comillas), hacemos clic en V(C1:1), regresamos a la ventana **Trace Expression**, e indicamos "*", hacemos clic de nuevo en V(C1:1) y seleccionamos después **Ok**. Repetimos la secuencia para obtener la energía que se almacena en el inductor, utilizando 7E-6 en lugar de 100E-9, y hacemos clic en I(L1:1) en lugar de V(C1:1).

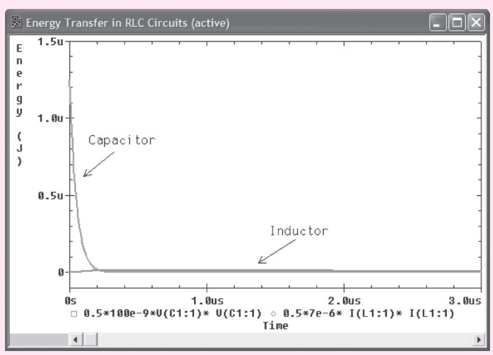
En la figura 9.20 se proporcionan las gráficas de salida Probe de tres simulaciones independientes. En la figura 9.20*a* observamos que la energía que queda en el circuito se transfiere de manera continua, de ida y vuelta entre el capacitor y el inductor, hasta que (a la larga) se disipe por completo en la resistencia. La disminución de la resistencia hasta 4.1833 Ω produce un circuito críticamente amortiguado, lo que origina la gráfica de energía de la figura 9.20*b*. La transferencia de energía oscilatoria entre al capacitor y el inductor se ha reducido en forma dramática. En su lugar observamos que la energía transferida al inductor tiene un máximo en aproximadamente 0.8 μs, y que luego disminuye hasta cero. La respuesta sobreamortiguada se grafica en la figura 9.20*c*. Observamos que la energía se disipa con mucha mayor rapidez en el caso de la respuesta sobreamortiguada, y que muy poca energía se transfiere al inductor, pues la mayor parte se disipa ahora en la resistencia.



(*a*)



(*b*)

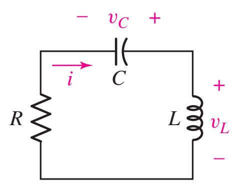


(*c*)

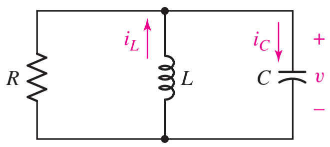
FIGURA 9.20 Transferencia de energía de un circuito *RLC* en paralelo con: (*a*) $R = 100\ \Omega$ (subamortiguado); (*b*) $R = 4.1833\ \Omega$ (críticamente amortiguado); (*c*) $R = 1\ \Omega$ (sobreamortiguado).

9.5 CIRCUITO *RLC* EN SERIE SIN FUENTE

Deseamos ahora determinar la respuesta natural de un modelo de circuito compuesto por una resistencia ideal, un inductor ideal y un capacitor ideal conectados en *serie*. La resistencia ideal tal vez represente una resistencia física conectada en un circuito *LC* o *RLC* en serie; quizá también represente las pérdidas óhmicas y las pérdidas en el núcleo ferromagnético del inductor, o tal vez se use para representar todos los casos anteriores y otros dispositivos que absorben energía.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 9.21** (*a*) Circuito *RLC* en serie que es el dual de (*b*) un circuito *RLC* en paralelo. Los valores de los elementos no son, desde luego, idénticos en ambos circuitos.

El circuito *RLC* en serie es el *dual* del circuito *RLC* en paralelo, así que este simple hecho resulta suficiente para hacer que su análisis sea un asunto trivial. La figura 9.21*a* presenta al circuito en serie. La ecuación integrodiferencial fundamental es

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt' - v_C(t_0) = 0$$

y debe compararse con la ecuación análoga del circuito *RLC* en paralelo, redibujado en la figura 9.21*b*,

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R}v + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' - i_L(t_0) = 0$$

Las respectivas ecuaciones de segundo orden que se obtienen diferenciando estas dos ecuaciones con respecto al tiempo también son duales:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \qquad [30]$$

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = 0 \qquad [31]$$

El análisis completo del circuito *RLC* en paralelo se aplica de manera directa al circuito *RLC* en serie; las condiciones iniciales sobre la tensión en el capacitor y la corriente en el inductor son equivalentes a las condiciones iniciales en la corriente en el inductor y la tensión en el capacitor; la respuesta de *tensión* consiste en una respuesta de *corriente*. Así, se pueden volver a leer las cuatro secciones anteriores utilizando el lenguaje dual, a fin de obtener una descripción completa del circuito *RLC* en serie. Sin embargo, este proceso resulta adecuado para inducir una neurosis ligera, luego de la lectura de los primeros párrafos, y en realidad no parece que sea necesario.

Breve resumen de la respuesta del circuito en serie

En términos del circuito que se presenta en la figura 9.21*a*, la *respuesta sobreamortiguada* es

$$i(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$$

donde:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

y por ello

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La forma de la *respuesta críticamente amortiguada* es

$$i(t) = e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$$

y la *respuesta subamortiguada* se escribiría como

$$i(t) = e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_dt + B_2\,\text{sen}\,\omega_dt)$$

TABLA **9.1** Resumen de las ecuaciones relevantes de los circuitos *RLC* sin fuente.

Tipo	Condición	Criterio	α	ω_0	Respuesta
Paralelo	Sobreamortiguado	$\alpha > \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$, donde $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$
Serie			$\frac{R}{2L}$		
Paralelo	Críticamente amortiguado	$\alpha = \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$
Serie			$\frac{R}{2L}$		
Paralelo	Subamortiguado	$\alpha < \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \operatorname{sen} \omega_d t)$, donde $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$
Serie			$\frac{R}{2L}$		

donde

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Es evidente que si trabajamos en términos de los parámetros α, ω_0 y ω_d, las formas matemáticas de las respuestas para las situaciones duales son idénticas. Un aumento en α en el circuito en serie o en paralelo, siempre y cuando ω_0 se mantenga constante, tiende hacia una respuesta sobreamortiguada. La única precaución que debemos tomar radica en el cálculo de α que corresponde a $1/2\,RC$ en el caso del circuito en paralelo, y a $R/2L$ en el caso del circuito en serie; por lo tanto, α se incrementa al aumentar la resistencia en serie, o al disminuir la resistencia en paralelo. Por conveniencia, las ecuaciones clave de los circuitos *RLC* en serie y paralelo se resumen en la tabla 9.1.

EJEMPLO 9.7

Dado el circuito *RLC* en serie de la figura 9.22, en el que $L = 1$ H, $R = 2$ kΩ, $C = 1/401$ μF, $i(0) = 2$ mA, y $v_C(0) = 2$ V, encuentre y dibuje $i(t)$, $t > 0$.

Obtenemos $\alpha = R/2L = 1\,000\ \text{s}^{-1}$ y $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 20\,025$ rad/s, lo cual indica una respuesta *subamortiguada*. Por lo tanto, calculamos el valor de ω_d y tenemos 20 000 rad/s. Excepto por la evaluación de las dos constantes arbitrarias, sabemos ahora que la respuesta es

$$i(t) = e^{-1\,000t}(B_1 \cos 20\,000t + B_2 \operatorname{sen} 20\,000t)$$

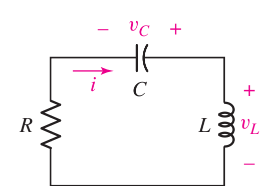
Puesto que sabemos que $i(0) = 2$ mA, sustituiremos este valor en la ecuación de $i(t)$ obteniendo así

$$B_1 = 0.002 \text{ A}$$

por lo cual

$$i(t) = e^{-1\,000t}(0.002 \cos 20\,000t + B_2 \operatorname{sen} 20\,000t) \qquad \text{A}$$

(*continúa*)



■ **FIGURA 9.22** Circuito *RLC* simple sin fuente con energía almacenada en el inductor y en el capacitor en $t = 0$.

La condición inicial restante debe aplicarse a la derivada; en consecuencia,

$$\frac{di}{dt} = e^{-1\,000t}(-40 \operatorname{sen} 20\,000t + 20\,000 B_2 \cos 20\,000t$$
$$- 2 \cos 20\,000t - 1\,000 B_2 \operatorname{sen} 20\,000t)$$

y

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = 20\,000 B_2 - 2 = \frac{v_L(0)}{L}$$
$$= \frac{v_C(0) - Ri(0)}{L}$$
$$= \frac{2 - 2\,000(0.002)}{1} = -2 \text{ A/s}$$

por lo que

$$B_2 = 0$$

La respuesta deseada es, entonces,

$$i(t) = 2e^{-1\,000t} \cos 20\,000t \quad \text{mA}$$

Se lograría un buen dibujo al graficar primero las dos partes de la *envolvente* exponencial, $2e^{-1\,000t}$ y $-2e^{-1\,000t}$ mA, como se muestra mediante las líneas punteadas en la figura 9.23. La ubicación de los puntos de un cuarto de ciclo de la onda senoidal en 20 000$t = 0$, $\pi/2$, π, etc., o $t = 0.07854k$ ms, $k = 0, 1, 2, ...,$ mediante líneas delgadas sobre el eje del tiempo, permite que la curva oscilatoria se dibuje con rapidez.

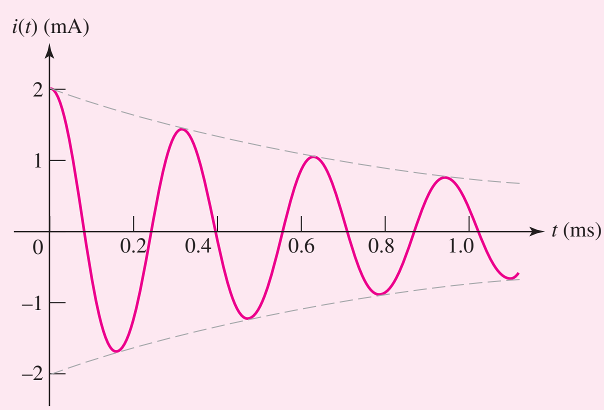


FIGURA 9.23 Respuesta en corriente de un circuito *RLC* en serie subamortiguado, para la cual $\alpha = 1\,000$ s^{-1}, $\omega_0 = 20\,000$ s^{-1}, $i(0) = 2$ mA y $v_C(0) = 2$ V. La construcción gráfica se simplifica dibujando en la envolvente, la cual se muestra como el par de líneas punteadas.

En este caso, el tiempo de establecimiento se determina con facilidad por medio de la parte superior de la envolvente. Esto es, igualamos $2e^{-1000t_s}$ mA a 1% de su valor máximo, 2 mA. Por lo tanto, $e^{-1000t_s} = 0.01$, y $t_s = 4.61$ ms es el valor aproximado que casi siempre se usa.

PRÁCTICA

9.7 De acuerdo con el circuito de la figura 9.24, determine (*a*) α; (*b*) ω_0; (*c*) $i(0)^+$; (*d*) $di/dt|_{t=0^+}$; (*e*) $i(12\text{ ms})$.

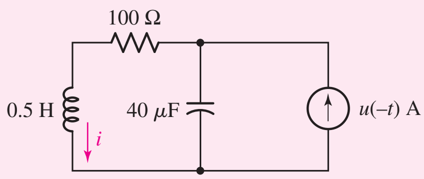


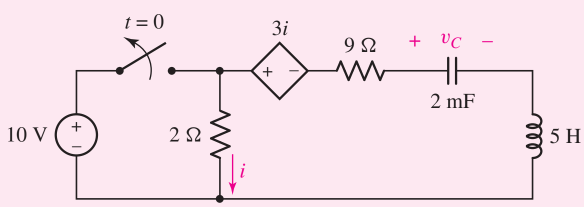
FIGURA 9.24

Respuestas: 100 s^{-1}; 224 rad/s; 1A; 0; −0.1204 A.

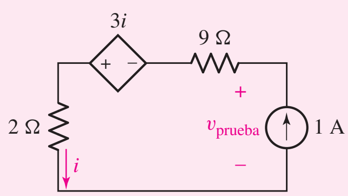
Como ejemplo final, haremos una pausa para considerar algunas situaciones donde el circuito incluya una fuente dependiente. Si no es de interés ninguna corriente o tensión de control asociada con la fuente, podemos simplemente encontrar el equivalente de Thévenin conectado al inductor y al capacitor. De otra forma, es muy probable que tengamos que enfrentar la situación de tener que escribir una ecuación integrodiferencial apropiada, calcular las derivadas indicadas y resolver la ecuación diferencial resultante lo mejor que podamos.

EJEMPLO 9.8

Encuentre la expresión de $v_C(t)$ en el circuito de la figura 9.25*a*, que sea válida en $t > 0$.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 9.25 (*a*) Circuito *RLC* que contiene una fuente dependiente. (*b*) Circuito para encontrar R_{eq}.

Como el interés es solamente en $v_C(t)$, es totalmente aceptable comenzar encontrando la resistencia de Thévenin equivalente conectada en serie con el inductor y

(*continúa*)

el capacitor en $t = 0^+$. Llevamos a cabo lo anterior conectando una fuente de 1A como se muestra en la figura 9.25*b*, a partir de lo cual podemos deducir que

$$v_{\text{prueba}} = 11i - 3i = 8i = 8(1) = 8 \text{ V}$$

Por lo tanto, $R_{eq} = 8\ \Omega$, por lo que $\alpha = R/2L = 0.8\ \text{s}^{-1}$ y $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 10$ rad/s, lo que significa que esperamos una respuesta subamortiguada con $\omega_d = 9.968$ rad/s y la forma:

$$v_C(t) = e^{-0.8t}(B_1 \cos 9.968t + B_2 \operatorname{sen} 9.968t) \qquad [32]$$

Al considerar el circuito en $t = 0^-$, observamos que $i_L(0^-) = 0$ debido a la presencia del capacitor. Por medio de la ley de Ohm, $i(0^-) = 5$ A, por lo que

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 10 - 3i = 10 - 15 = -5 \text{ V}$$

Si esta última condición se sustituye en la ecuación [32] obtenemos $B_1 = -5$ V. Si calculamos la derivada de la ecuación [32] y evaluamos en $t = 0$, obtenemos

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0} = -0.8B_1 + 9.968B_2 = 4 + 9.968B_2 \qquad [33]$$

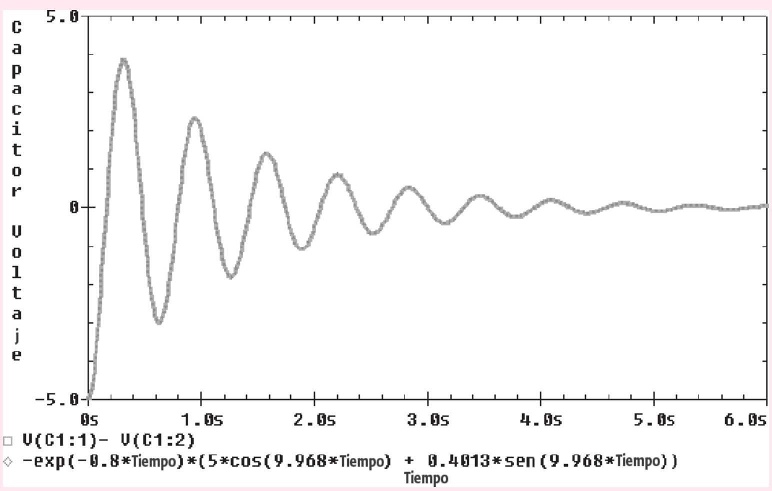
Podemos observar a partir de la figura 9.25*a* que

$$i = -C\frac{dv_C}{dt}$$

Por lo tanto, con base en el hecho de que $i(0^+) = i_L(0^-) = 0$ en la ecuación [33], obtenemos $B_2 = -0.4013$ V, y podemos escribir

$$v_C(t) = -e^{-0.8t}(5 \cos 9.968t + 0.4013 \operatorname{sen} 9.968t) \qquad \text{V}, \quad t > 0$$

La figura 9.26 muestra la simulación en PSpice de este circuito que confirma el análisis.



■ **FIGURA 9.26** Simulación en PSpice del circuito que se muestra en la figura 9.25*a*. El resultado analítico se grafica mediante una línea punteada.

PRÁCTICA

9.8 Encuentre la expresión de $i_L(t)$ en el circuito de la figura 9.27, que sea válida para $t > 0$, si $v_C(0^-) = 10$ V e $i_L(0^-) = 0$. *Observe que a pesar de que no es de utilidad aplicar las técnicas de Thévenin en este caso, la acción de los enlaces v_C e i_L de la fuente dependiente es tal que se obtiene como resultado una ecuación diferencial lineal de primer orden.*

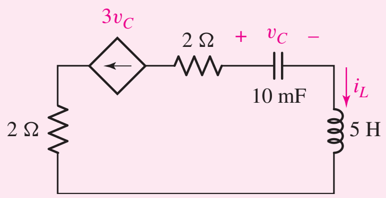


FIGURA 9.27 Circuito del problema de práctica 9.8.

Respuesta: $i_L(t) = -30e^{-300t}$ A, $t > 0$.

9.6 RESPUESTA COMPLETA DEL CIRCUITO *RLC*

Consideramos ahora los circuitos *RLC* en los que las fuentes de cd se conmutan en la red y producen respuestas forzadas que no necesariamente se anulan cuando el tiempo se vuelve infinito.

La solución general se obtiene por el mismo procedimiento que seguimos para circuitos *RL* y *RC*. Los pasos básicos son (no necesariamente en este orden) los siguientes:

1. Determinar las condiciones iniciales.
2. Obtener el valor numérico para la respuesta forzada.
3. Escribir la forma adecuada de la respuesta natural con el número necesario de constantes arbitrarias.
4. Sumar la respuesta forzada y la natural para formar la respuesta completa.
5. Evaluar la respuesta y su derivada en $t = 0$ y usar las condiciones iniciales para despejar los valores de las constantes desconocidas.

Observamos que *por lo general este último paso es el que presenta la mayor dificultad para los estudiantes*, ya que el circuito se debe evaluar cuidadosamente en $t = 0$ para utilizar en su totalidad las condiciones iniciales. En consecuencia, aunque la determinación de las condiciones iniciales no difiere en lo básico en el caso de un circuito que contiene fuentes de cd, de la correspondiente a los circuitos sin fuente que ya estudiamos con cierto detalle, este tema recibirá un tratamiento destacado en los ejemplos que siguen.

La mayor parte de la confusión al determinar y aplicar las condiciones iniciales surge por la simple razón de que no contamos con un conjunto de reglas rigurosas dispuestas, con las que nos sea viable seguir. En cierto punto de cada análisis suele surgir una situación en la que se ve involucrada alguna idea que resulta más o menos única para ese problema particular, lo cual es casi siempre la fuente de la dificultad.

La parte fácil

La respuesta *completa* (supuesta de manera arbitraria como la respuesta de tensión) de un sistema de segundo orden consiste en una respuesta *forzada*:

$$v_f(t) = V_f$$

que es una constante de la excitación de cd, y una respuesta *natural*:

$$v_n(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

En consecuencia:

$$v(t) = V_f + Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

Suponemos que s_1, s_2 y V_f ya se determinaron en el circuito y en las funciones forzadas que se indican; queda por conocer A y B. La última ecuación muestra la interdependencia funcional de A, B, v y t, de modo que la sustitución del valor conocido de v en $t = 0^+$ nos da entonces una sola ecuación que relaciona A y B, $v(0^+) = V_f + A + B$. *Ésta es la parte fácil*.

La otra parte

Desafortunadamente, se requiere otra relación entre A y B la cual se obtiene casi siempre al tomar la derivada de la respuesta:

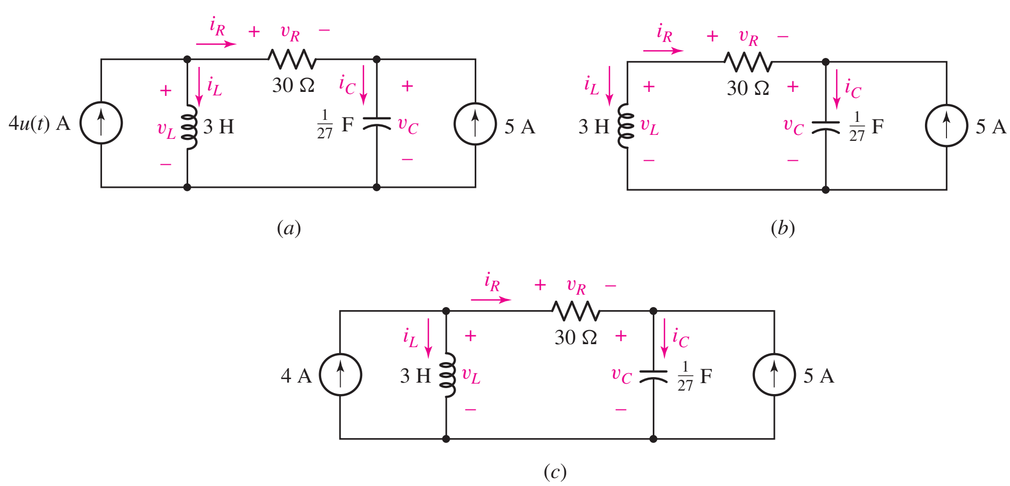
$$\frac{dv}{dt} = 0 + s_1 Ae^{s_1 t} + s_2 Be^{s_2 t}$$

y al sustituir el valor conocido de dv/dt en $t = 0^+$. Así, tenemos dos ecuaciones que relacionan a A y B y que se resolverían de manera simultánea para evaluar las dos constantes.

El único problema que resta es determinar los valores de v y dv/dt en $t = 0^+$. Supongamos que v es una tensión en el capacitor, v_C. Puesto que $i_C = C\,dv_C/dt$ debemos reconocer la relación entre el valor inicial de dv/dt y el valor inicial de alguna corriente en el capacitor. Si pudieramos establecer un valor de dicha corriente inicial en el capacitor, entonces estableceríamos de manera automática el valor de dv/dt. Casi siempre los estudiantes pueden obtener con facilidad $v(0^+)$, pero suelen titubear un poco al determinar el valor inicial de dv/dt. Si hubiéramos elegido una corriente en el inductor i_L como nuestra respuesta, entonces el valor inicial de di_L/dt estaría íntimamente relacionado con el valor inicial de cierta tensión en el inductor. Otras variables, aparte de las tensiones en el capacitor y de las corrientes en el inductor, se determinan al expresar sus valores iniciales y los valores iniciales de sus derivadas en términos de los valores correspondientes de v_C e i_L.



Ilustramos el procedimiento y calculamos todos estos valores mediante el análisis cuidadoso del circuito de la figura 9.28. Para simplificar el análisis, usamos de nuevo una gran capacitancia que es irreal.



■ **FIGURA 9.28** (*a*) Circuito *RLC* que se emplea para ilustrar varios procedimientos mediante los que se pueden obtener las condiciones iniciales. La respuesta deseada se toma nominalmente como $v_C(t)$, (*b*) $t = 0^-$, (*c*) $t > 0$.

EJEMPLO 9.9

Hay tres elementos pasivos en el circuito de la figura 9.28*a*; además, la tensión y la corriente se definen en cada uno de ellos. Determine los valores de estas seis cantidades tanto en $t = 0^-$ como en $t = 0^+$.

Nuestro objetivo consiste en determinar el valor de cada corriente y de cada tensión tanto en $t = 0^-$ como en $t = 0^+$. Luego de conocer estas cantidades, obtendríamos con facilidad los valores iniciales de las derivadas.

1. $\mathbf{t = 0^-}$ En $t = 0^-$, sólo la fuente de corriente de la derecha está activa, como se señala en la figura 9.28*b*. Se supone que el circuito ha estado siempre en tal estado y que todas las corrientes y tensiones son constantes. De tal manera, una corriente cd que atraviesa el inductor requiere una tensión cero a través de él:

$$v_L(0^-) = 0$$

y una tensión cd en el capacitor ($-v_R$) requiere que circule por él una corriente cero:

$$i_C(0^-) = 0$$

A continuación aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo derecho para obtener

$$i_R(0^-) = -5 \text{ A}$$

la cual también origina

$$v_R(0^-) = -150 \text{ V}$$

Podríamos recurrir ahora a la ley de tensiones de Kirchhoff alrededor de la malla izquierda con el objeto de encontrar

$$v_C(0^-) = 150 \text{ V}$$

mientras que la LCK permite determinar la corriente en el inductor,

$$i_L(0^-) = 5 \text{ A}$$

2. $\mathbf{t = 0^+}$ Durante el intervalo de $t = 0^-$ a $t = 0^+$, la fuente de corriente del lado izquierdo se activa y muchos de los valores de tensión y corriente en $t = 0^-$ cambiarán de modo abrupto. El circuito correspondiente se presenta en la figura 9.28*c*. Sin embargo, debemos *empezar concentrando nuestra atención en las cantidades que no pueden cambiar, a saber, la corriente en el inductor y la tensión en el capacitor*. Ambas deben permanecer constantes durante el intervalo de conmutación. De tal modo,

$$i_L(0^+) = 5 \text{ A} \qquad \text{y} \qquad v_C(0^+) = 150 \text{ V}$$

Puesto que se conocen dos corrientes en el nodo izquierdo, a continuación obtenemos

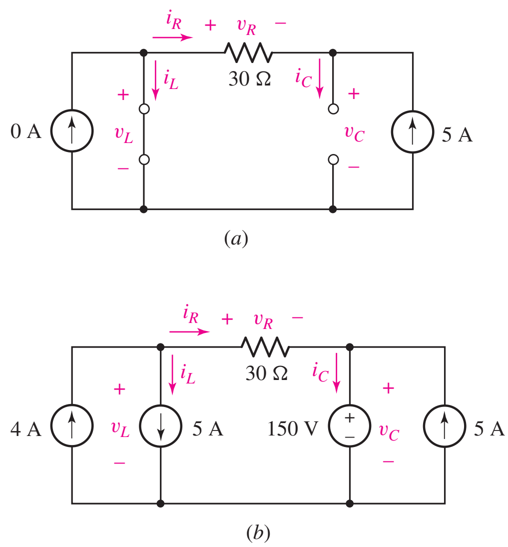
$$i_R(0^+) = -1 \text{ A} \qquad \text{y} \qquad v_R(0^+) = -30 \text{ V}$$

por lo que

$$i_C(0^+) = 4 \text{ A} \qquad \text{y} \qquad v_L(0^+) = 120 \text{ V}$$

y tenemos los seis valores iniciales en $t = 0^-$ y seis más en $t = 0^+$. Entre los últimos seis valores, sólo la tensión en el capacitor y la corriente en el inductor se mantienen sin cambio desde los valores $t = 0^-$.

Pudimos haber recurrido a un método un poco diferente para evaluar estas corrientes y tensiones en $t = 0^-$ y $t = 0^+$. Antes de la operación de conmutación, en el circuito sólo existen corrientes y tensiones, ambas directas. Por lo tanto, podríamos reemplazar el inductor por un cortocircuito, su equivalente de cd, en tanto que el capacitor se sustituye por un circuito abierto. Al volverse a dibujar de esta manera, el circuito de la figura 9.28*a* aparece como en la figura 9.29*a*. Sólo la fuente de corriente de la derecha se encuentra activa y sus 5 A fluyen a través de la resistencia y el inductor. En consecuencia, tenemos $i_R(0^-) = -5$ A y $v_R(0^-) = -150$ V, $i_L(0^-) = 5$ A y $v_L(0^-) = 0$, e $i_C(0^-) = 0$ y $v_C(0^-) = 150$ V, como antes.



■ **FIGURA 9.29** (*a*) Circuito simple equivalente correspondiente al circuito de la figura 9.28*a* para $t = 0^-$. (*b*) Circuito equivalente con las tensiones y corrientes indicadas, válidas en el instante definido por $t = 0^+$.

Enfocaremos nuestra atención ahora en el problema de dibujar un circuito equivalente que ayudará a determinar varias tensiones y corrientes en $t = 0^+$. *Cada tensión en el capacitor y cada corriente en el inductor deben permanecer constantes durante el intervalo de conmutación*. Estas condiciones se aseguran sustituyendo el inductor por una fuente de corriente y el capacitor por una fuente de tensión; asimismo, cada fuente sirve para mantener una respuesta constante durante la discontinuidad. Se produce el circuito equivalente de la figura 9.29*b* de modo que resulta necesario advertir que dicho circuito es válido *sólo para el intervalo entre* 0^- *y* 0^+.

Las tensiones y las corrientes en $t = 0^+$ se obtienen al analizar este circuito de cd. La solución no es difícil, aunque el número más o menos grande de fuentes presentes en la red originen una vista un tanto extraña. Sin embargo, los problemas de este tipo se resolvieron en el capítulo 3, por lo que no hay nada nuevo implicado. Para resolver primero las corrientes, empezamos en el nodo izquierdo superior y vemos que $i_R(0^+) = 4 - 5 = -1$ A. Al moverse hacia el nodo derecho superior, encontramos que $i_C(0^+) = -1 + 5 = 4$ A y, desde luego, $i_L(0^+) = 5$ A.

A continuación analizamos las tensiones. Al utilizar la ley de Ohm podemos observar que $v_R(0^+) = 30(-1) = -30$ V. En el caso del inductor, la LVK da $v_L(0^+) = -30 + 150 = 120$ V. Por último, al incluir $v_C(0^+) = 150$ V, tenemos todos los valores en $t = 0^+$.

PRÁCTICA

9.9 Sea $i_s = 10\mu(-t) - 20\mu(t)$ A en la figura 9.30. Determine (*a*) $i_L(0^-)$; (*b*) $v_C(0^+)$; (*c*) $v_R(0^+)$; (*d*) $i_L(\infty)$; (*e*) $i_L(0.1 \text{ ms})$.

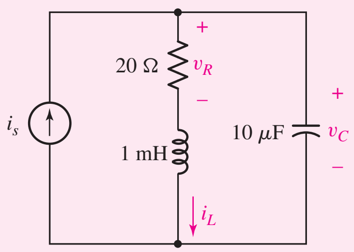


FIGURA 9.30

Respuestas: 10 A; 200 V; 200 V; −20 A; 2.07 A.

EJEMPLO 9.10

Complete la determinación de las condiciones iniciales del circuito de la figura 9.28, que se repite en la figura 9.31. Para ello, encuentre los valores en $t = 0^+$ correspondientes a las primeras derivadas de las tres variables de tensión y las tres de corriente definidas en el esquema del circuito.

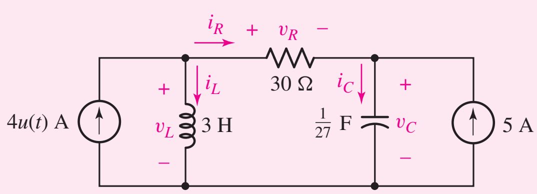


FIGURA 9.31 Circuito de la figura 9.28, repetido para el ejemplo 9.10.

Empezamos con los dos elementos de almacenamiento de energía. Para el inductor

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

y, de manera específica,

$$v_L(0^+) = L\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+}$$

En consecuencia:

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{120}{3} = 40 \text{ A/s}$$

En forma similar:

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{4}{1/27} = 108 \text{ V/s}$$

(*continúa*)

Las otras cuatro derivadas se determinan al observar que a las LCK y LVK las satisfacen también las derivadas. Por ejemplo, en el nodo de la izquierda de la figura 9.31,

$$4 - i_L - i_R = 0, \qquad t > 0$$

y por ello,

$$0 - \frac{di_L}{dt} - \frac{di_R}{dt} = 0, \qquad t > 0$$

por lo tanto,

$$\left.\frac{di_R}{dt}\right|_{t=0^+} = -40 \text{ A/s}$$

Se determina que los tres valores iniciales restantes de las derivadas corresponden a

$$\left.\frac{dv_R}{dt}\right|_{t=0^+} = -1\,200 \text{ V/s}$$

$$\left.\frac{dv_L}{dt}\right|_{t=0^+} = -1\,092 \text{ V/s}$$

y

$$\left.\frac{di_C}{dt}\right|_{t=0^+} = -40 \text{ A/s}$$

Antes de dejar este problema del cálculo de los valores iniciales necesarios, debemos señalar que al menos se ha omitido otro método poderoso para determinarlos: pudimos haber escrito las ecuaciones generales de nodo, o de lazo, del circuito original. Luego, la sustitución de los valores cero conocidos de la tensión en el inductor y de la corriente en el capacitor, en $t = 0^-$, descubriría varios valores de respuesta extra en $t = 0^-$ y permitiría que el resto se calculara sin ninguna dificultad. En ese caso debe efectuarse un análisis similar en $t = 0^+$, lo cual constituye un método importante que se hace necesario en circuitos más complicados, que no pueden analizarse por medio de los más simples procedimientos paso a paso.

A continuación terminemos en forma breve la determinación de la respuesta $v_C(t)$ en el caso del circuito original de la figura 9.31. Con ambas fuentes desconectadas, el circuito se presenta como uno de *RLC* en serie y descubrimos con facilidad que s_1 y s_2 son, respectivamente, -1 y -9. La respuesta forzada se calcula por inspección o, si es necesario, dibujando el equivalente de cd, que es similar a la figura 9.29*a*, con la adición de una fuente de corriente de 4 A. La respuesta forzada equivale a 150 V. Por lo tanto,

$$v_C(t) = 150 + Ae^{-t} + Be^{-9t}$$

y

$$v_C(0^+) = 150 = 150 + A + B$$

o

$$A + B = 0$$

Entonces,

$$\frac{dv_C}{dt} = -Ae^{-t} - 9Be^{-9t}$$

y

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} = 108 = -A - 9B$$

Por último,

$$A = 13.5 \qquad B = -13.5$$

y

$$v_C(t) = 150 + 13.5(e^{-t} - e^{-9t}) \qquad \text{V}$$

Resumen rápido del proceso de solución

En síntesis, cada vez que deseemos determinar el comportamiento transitorio de un circuito *RLC* simple de tres elementos, debemos decidir primero si estamos resolviendo un circuito en serie o en paralelo, a fin de que utilicemos la relación correcta para α. Las dos ecuaciones son:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad (RLC \text{ en paralelo})$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad (RLC \text{ en serie})$$

La segunda decisión se toma después de comparar α con ω_0, la cual se indica a partir de cualquier circuito por medio de

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Si $\alpha > \omega_0$, el circuito está *sobreamortiguado* y la respuesta natural tiene la forma:

$$f_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

donde

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Si $\alpha = \omega_0$, entonces está *críticamente amortiguado* y:

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}\,(A_1 t + A_2)$$

Por último, si $\alpha < \omega_0$, entonces enfrentamos a la respuesta *subamortiguada*:

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \text{ sen } \omega_d t)$$

donde

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

La última decisión depende de las fuentes independientes. Si no hay alguna que actúe en el circuito después de que se termina la conmutación o la discontinuidad, entonces el circuito no tiene fuente y la respuesta natural equivale a la respuesta completa. Si aún están presentes fuentes independientes, entonces el circuito está activado y debe determinarse una respuesta forzada. La respuesta completa es, en ese caso, la suma

$$f(t) = f_f(t) + f_n(t)$$

Esto es aplicable a cualquier corriente o tensión en el circuito. El último paso es resolver las constantes desconocidas dadas las condiciones iniciales.

APLICACIÓN PRÁCTICA

Elaboración del modelo para sistemas de suspensión de automóviles

En el párrafo introductorio aludimos al hecho de que los conceptos investigados en este capítulo en realidad se extienden más allá del análisis de los circuitos eléctricos. En realidad, la forma general de las ecuaciones diferenciales con las que hemos trabajado aparecen en muchos campos; sólo necesitamos aprender a "traducir" la nueva tecnología de parámetros. Por ejemplo, considere una suspensión de automóvil simple, como se dibuja (de manera un poco burda) en la figura 9.32. El émbolo no está unido al cilindro, pero *sí* al resorte y a la rueda. Por lo tanto, las partes móviles son el resorte, el émbolo y la rueda.

Haremos el modelo de este sistema físico determinando primero las fuerzas en juego. Al definir una función de la posición $p(t)$ que describe el lugar donde se encuentra el émbolo dentro del cilindro, podríamos escribir F_S, la fuerza sobre el resorte, como

$$F_S = Kp(t)$$

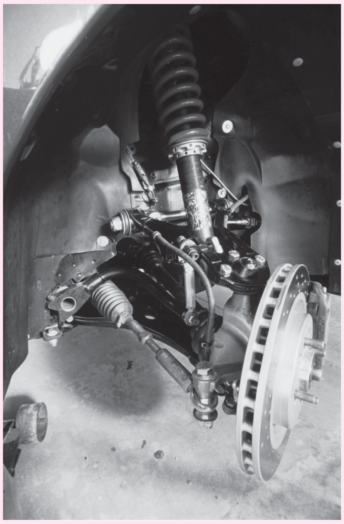
donde K se conoce como la constante del resorte y tiene unidades lb/pie. La fuerza sobre la rueda F_W es igual a la masa de la rueda multiplicada por su aceleración, o

$$F_W = m\frac{d^2p(t)}{dt^2}$$

donde m se mide en lb $\cdot$ s^2/pie. La última, pero no menos importante, fuerza es la de fricción F_f que actúa sobre el émbolo

$$F_f = \mu_f\frac{dp(t)}{dt}$$

donde μ_f es el coeficiente de fricción, con unidades de 1b $\cdot$ s/pie.



■ **FIGURA 9.32** Sistema de suspensión de automóvil típico. © *Transtock Inc./Alamy*.

De acuerdo con los cursos básicos de física sabemos que todas las fuerzas que actúan en un sistema deben sumar cero, por lo que

$$m\frac{d^2p(t)}{dt^2} + \mu_f\frac{dp(t)}{dt} + Kp(t) = 0 \qquad [34]$$

Es muy probable que la ecuación haya tenido el potencial de causar pesadillas en algún punto en nuestra carrera académica, pero ya no. Si comparamos la ecuación [32] con la [30] y la [31], veremos de inmediato una semejanza distinta, al menos en la forma general. Al elegir la ecuación [30], la ecuación diferencial que describe la respuesta de un circuito *RLC* conectado en serie, observamos las siguientes correspondencias:

Masa	m	$\rightarrow$	inductancia	L
Coeficiente de fricción	μ_f	$\rightarrow$	resistencia	R
Constante de resorte	K	$\rightarrow$	inverso de la capacitancia	C^{-1}
Variable de la posición	$p(t)$	$\rightarrow$	variable de la corriente	$i(t)$

Por lo tanto, si estamos dispuestos a hablar de pies en lugar de amperes, de 1b $\cdot$ s^2/pie en vez de H, pie/lb en lugar de F, y de 1b $\cdot$ s/pie en lugar de Ω, podemos aplicar las habilidades que acabamos de descubrir al elaborar el modelo de los circuitos *RLC* para la tarea de evaluar los amortiguadores de automotores.

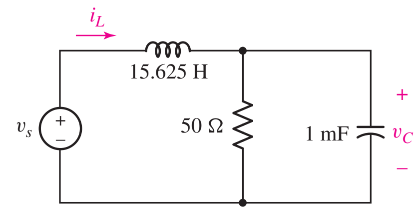
Considere una rueda de automóvil común de 70 lb. La masa se determina dividiendo el peso entre la aceleración gravitacional terrestre (32.17 pies/s^2), lo que origina $m = 2.176$ 1b $\cdot$ s^2/pie. El peso muerto del automóvil es de 1 985 lb, y el desplazamiento estático del resorte corresponde a 4 pulgadas (sin pasajeros). La constante de resorte se obtiene a través de la división del peso de cada amortiguador entre el desplazamiento estático, de modo que resulta $K = (\frac{1}{4})$ (1 985)(3 pies^{-1}) = 1 489 lb/pie. Se nos indicó también que el coeficiente de fricción del arreglo émbolo/cilindro corresponde a 65 1b $\cdot$ s/pie. Por lo tanto, podemos simular el amortiguador como un modelo de un circuito *RLC* en serie que tiene $R = 65\ \Omega$, $L = 2.176$ H y $C = K^{-1} = 671.6\ \mu$F.

La frecuencia resonante de nuestro amortiguador es $\omega_0 = (LC)^{-1/2} = 26.16$ rad/s, y el coeficiente de amortiguamiento es $\alpha = R/2L = 14.94$ s^{-1}. Puesto que $\alpha < \omega_0$, el amortiguador representa un sistema subamortiguado; lo anterior quiere decir que esperamos un rebote o dos después de que se pasa sobre un bache. Un impacto más fuerte (un mayor coeficiente de fricción, o una resistencia más alta del modelo de circuito) por lo común resulta deseable cuando se toman las curvas a velocidades altas: en algún punto esto corresponde a una respuesta sobreamortiguada. Sin embargo, si la mayor parte del recorrido es sobre caminos no pavimentados, se prefiere una respuesta un poco subamortiguada.

PRÁCTICA

9.10 Sean $v_s = 10 + 20u(t)$ V en el circuito de la figura 9.33. Determine (*a*) $i_L(0)$; (*b*) $v_C(0)$; (*c*) $i_{L,f}$; (*d*) $i_L(0.1\text{s})$.

Respuestas: 0.2 A; 10 V; 0.6 A; 0.319 A.

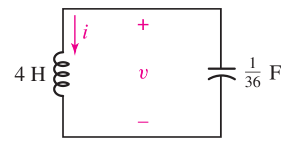


■ **FIGURA 9.33**

9.7 CIRCUITO *LC* SIN PÉRDIDAS

Cuando consideramos el circuito sin fuente *RLC*, se hizo evidente que la resistencia servía para disipar cualquier energía inicial almacenada en el circuito. En algún momento se nos podría ocurrir preguntar qué sucedería si pudiéramos quitar la resistencia. Si el valor de la resistencia de un circuito *RLC* en paralelo se vuelve infinito, o cero en el caso de un circuito *RLC* en serie, tenemos un lazo *LC* simple en el que se puede mantener para siempre una respuesta oscilatoria. Consideramos brevemente un ejemplo de un circuito de este tipo y luego explicamos otros medios para obtener una respuesta idéntica, sin necesidad de suministrar ninguna inductancia.

Piense en el circuito sin fuente de la figura 9.34, para el que se usan los valores grandes $L = 4$ H y $C = \frac{1}{36}$ F de manera que los cálculos serán simples. Sea $i(0) = -\frac{1}{6}$ A y $v(0) = 0$. Encontramos que $\alpha = 0$ y $\omega_0^2 = 9\text{s}^{-2}$, por lo que $\omega_d = 3$ rad/s. Si no hay amortiguamiento exponencial, la tensión v resulta sólo



■ **FIGURA 9.34** Este circuito no presenta pérdidas y proporciona la respuesta subamortiguada $v = 2$ sen $3t$ V, si $v(0) = 0$ e $i(0) = -\frac{1}{6}$ A.

$$v = A\cos 3t + B \text{ sen } 3t$$

Puesto que $v(0) = 0$, vemos que $A = 0$. A continuación:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = 3B = -\frac{i(0)}{1/36}$$

Pero $i(0) = -\frac{1}{6}$ amperes y, por lo tanto, $dv/dt = 6$ V/s en $t = 0$. Debemos tener $B = 2$ V así que

$$v = 2 \text{ sen } 3t \qquad \text{V}$$

que es una respuesta senoidal amortiguada; en otras palabras, nuestra respuesta en tensión no disminuye.

Veamos ahora cómo obtendríamos esta tensión, sin recurrir a un circuito *LC*. Nuestras intenciones son escribir la ecuación diferencial que satisfaga v y luego establecer una configuración de amp ops que proporcione la solución de la ecuación. Aunque trabajamos con un ejemplo específico, ésta es la técnica general que usamos para resolver cualquier ecuación diferencial homogénea lineal.

En el caso del circuito *LC* de la figura 9.34, elegimos v como nuestra variable e igualamos a cero la suma de las corrientes en el inductor y en el capacitor:

$$\frac{1}{4}\int_{t_0}^{t} v\,dt' - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\frac{dv}{dt} = 0$$

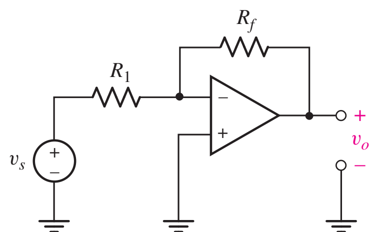
Derivando una vez, tenemos

$$\frac{1}{4}v + \frac{1}{36}\frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

o

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -9v$$

Para resolver esta ecuación planeamos utilizar el amplificador operacional como un integrador. Supondremos que la derivada de orden superior que aparece aquí en la ecuación diferencial, d^2v/dt^2, está disponible en la configuración de amp op en un punto arbitrario A. Recurrimos luego al integrador, con $RC = 1$, como se explicó en la sección 7.5. La entrada es d^2v/dt^2 y la salida debe ser $-dv/dt$, donde el cambio de signo proviene del uso de una configuración de amp op inversor como un integrador. El valor inicial de dv/dt es 6 V/s como mostramos cuando analizamos primero el circuito, así que debe fijarse un valor inicial de -6 V en el integrador. El negativo de la primera derivada forma ahora la entrada para un segundo integrador, de manera que su salida es $v(t)$; sin embargo, el valor inicial corresponde a $v(0) = 0$. En estas condiciones sólo resta multiplicar v por -9 para obtener la segunda derivada que supusimos en el punto A. Ésta es una amplificación por 9 con un cambio de signo, y se consigue con facilidad utilizando el amp op como un amplificador inversor.



■ **FIGURA 9.35** El amplificador operacional inversor proporciona una ganancia $v_o/v_s = -R_f/R_1$, si se supone un amp op ideal.

La figura 9.35 muestra el circuito de un amplificador inversor. Para un amp op ideal, tanto la corriente de entrada como la tensión de entrada son cero. Por consiguiente, la corriente que se va hacia el "este", pasando a través de R_1 es v_s/R_1, en tanto que la que circula hacia el oeste a través de R_f equivale a v_o/R_f Puesto que su suma es cero, tenemos:

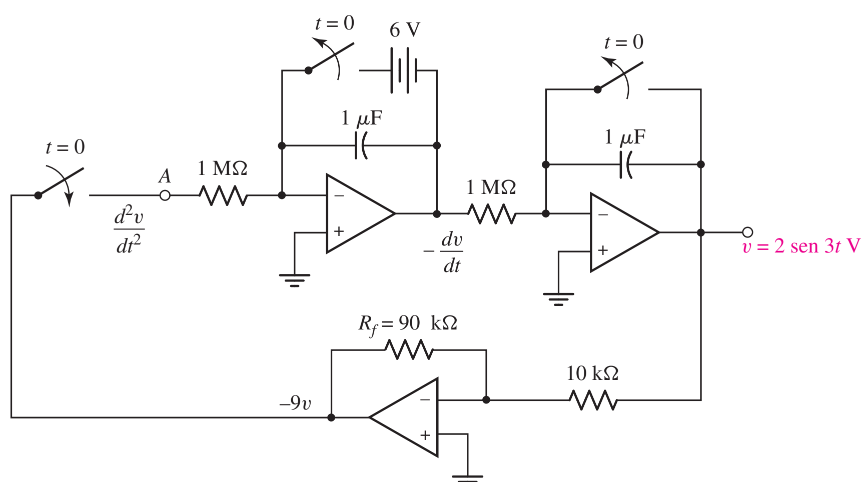
$$\frac{v_o}{v_s} = -\frac{R_f}{R_1}$$

En consecuencia, podemos diseñar para una ganancia de -9 dejando $R_f = 90$ kΩ y $R_1 = 10$ kΩ, por ejemplo.

Si R es 1 MΩ y C corresponde a 1μF en cada uno de los integradores, entonces

$$v_o = -\int_0^t v_s\, dt' + v_o(0)$$

en cada caso. La salida del amplificador inversor forma ahora la entrada supuesta en el punto A, lo cual origina la configuración de los amp op de la figura 9.36. Si dejamos que el interruptor se cierre en $t = 0$ mientras se abren al mismo tiempo los dos interruptores de la condición inicial, la salida del segundo integrador será la onda senoidal subamortiguada $v = 2$ sen $3t$ V.



■ **FIGURA 9.36** Dos integradores y un amplificador inversor se conectan para proporcionar la solución de la ecuación diferencial $d^2v/dt^2 = -9\,v$.



Observe que el circuito *LC* de la figura 9.34 y el circuito de amp op de la figura 9.36 tienen la misma salida, aunque el circuito de amp op no contiene un solo inductor. *Actúa* simplemente como si incluyera uno, suministrando la tensión senoidal apropiada entre su terminal de salida y la conexión a tierra. Lo anterior resulta una considerable ventaja práctica o económica en el diseño de circuitos, pues los inductores casi siempre son voluminosos, más costosos que los capacitores y presentan más pérdidas asociadas (y, por lo tanto, el modelo "ideal" no los representa bien).

PRÁCTICA

9.11 Asigne nuevos valores a R_f a las dos tensiones iniciales del circuito de la figura 9.36, si la salida representa la tensión $v(t)$ en el circuito de la figura 9.37.

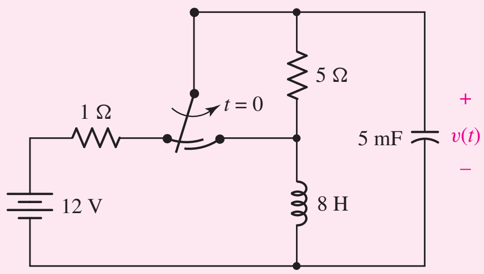


FIGURA 9.37

Respuestas: 250 kΩ; 400 V; 10V.

RESUMEN Y REPASO

Los circuitos simples *RL* y *RC* que examinamos en el capítulo 8 esencialmente hacían una de dos cosas al activar el interruptor: *cargar* o *descargar*. El hecho de que sucediera una u otra cosa estaba determinado por el estado inicial de carga del elemento de almacenamiento de energía. En este capítulo consideramos circuitos que tenían dos elementos de almacenamiento de energía (un capacitor y un inductor), y encontramos que el asunto se podía poner bastante interesante. Hay dos configuraciones básicas de tales circuitos *RLC*: conexión en *paralelo* y conexión en *serie*. El análisis de un circuito así da una ecuación diferencial parcial de *segundo orden*, consistente con el número de elementos de almacenamiento de energía distintos (si construimos un circuito usando únicamente resistencias y capacitores de tal manera que los capacitores no se puedan combinar usando técnicas en serie/paralelo, también obtenemos, finalmente, una ecuación diferencial parcial de segundo orden).

Dependiendo del valor de la resistencia conectada a nuestros elementos de almacenamiento de energía, encontramos que la respuesta transitoria de un circuito *RLC* podría ser *sobreamortiguada* (con declinación exponencial) o *subamortiguada* (declinante pero oscilatoria), con un "caso especial" de respuesta *críticamente amortiguada* que es difícil de obtener en la práctica. Las oscilaciones pueden ser útiles (por ejemplo, al transmitir información en una red inalámbrica) y no tan útiles (por ejemplo, en si-

tuaciones de retroalimentación accidental entre un amplificador y un micrófono en un concierto). Aunque las oscilaciones no se mantienen en los circuitos que se examinaron, hemos visto por lo menos una manera de crearlas intencionalmente y de diseñar para una frecuencia específica de operación si lo deseamos. Finalmente, no dedicamos mucho tiempo con el circuito *RLC* conectado en serie porque, con la excepción de α, las ecuaciones son las mismas; únicamente se necesita un ajuste menor en la manera en que se emplean las condiciones iniciales para encontrar las dos constantes desconocidas que caracterizan la respuesta transitoria. De este modo, encontramos dos "trucos", si así queremos llamarlos. El primero consiste en que, para emplear la segunda condición inicial, necesitamos tomar la derivada de la ecuación de respuesta. El segundo truco consiste en que, ya sea que usemos la LCK o la LVK para emplear dicha condición inicial, esto lo hacemos en el instante en que $t = 0$; darnos cuenta de este hecho puede simplificar drásticamente las ecuaciones al hacer $t = 0$ cuanto antes.

Resumimos el capítulo considerando la *respuesta completa*, y nuestro tratamiento a ésta no es muy diferente de lo que hicimos en el capítulo 8. Concluimos con una breve sección sobre una pregunta que se nos podría haber ocurrido en algún momento: ¿qué sucede cuando quitamos por completo las pérdidas resistivas (ajustando a ∞ la resistencia en paralelo o a 0 la resistencia en serie)? Nuestro resultado fue un circuito *LC*, y vimos que es posible aproximarnos a este engendro con un circuito amp op.

A estas alturas, usted probablemente esté listo para terminar repasando los conceptos clave del capítulo, de modo que aquí hacemos un alto y enlistamos dichos conceptos, con los correspondientes ejemplos en el texto.

- ❑ Los circuitos con dos dispositivos de almacenamiento de energía que no pueden combinarse mediante técnicas de combinación serie/paralelo se describen mediante una ecuación diferencial de segundo orden.
- ❑ Los circuitos *RLC* en serie y en paralelo se clasifican en una de tres categorías, dependiendo de los valores relativos de *R*, *L* y *C*:

Sobreamortiguado	$\alpha > \omega_0$
Críticamente amortiguado	$\alpha = \omega_0$
Subamortiguado	$\alpha < \omega_0$

  (Ejemplo 9.1)
- ❑ En los circuitos *RLC* en serie, $\alpha = R/2L$ y $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. (Ejemplo 9.7)
- ❑ En los circuitos *RLC* en paralelo, $\alpha = 1/2RC$ y $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. (Ejemplo 9.1)
- ❑ La forma usual de una respuesta sobreamortiguada es la suma de dos términos exponenciales, uno de los cuales decae más rápido que el otro; por ejemplo, $A_1e^{-t} + A_1e^{-6t}$. (Ejemplos 9.2, 9.3, 9.4)
- ❑ La forma típica de una respuesta críticamente amortiguada es $e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$. (Ejemplo 9.5)
- ❑ La forma característica de una respuesta subamortiguada es una senoidal amortiguada exponencialmente: $e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \operatorname{sen} \omega_d t)$. (Ejemplos 9.6, 9.7, 9.8)
- ❑ Durante la respuesta transitoria de un circuito *RLC*, la energía se transfiere entre los elementos de almacenamiento de la misma hasta el grado permitido por el componente resistivo del circuito, que actúa para disipar la energía almacenada al inicio. (Vea la sección Análisis asistido por computadora.)
- ❑ La respuesta completa es la suma de las respuestas natural y forzada. En este caso la respuesta total debe determinarse antes de encontrar el valor de las constantes. (Ejemplos 9.9, 9.10)

LECTURAS ADICIONALES

Un excelente análisis del empleo de PSpice en el modelado de sistemas de suspensión de automóviles se puede encontrar en

R. W. Goody, *MicroSim PSpice for Windows*, vol. I, 2a. ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1998.

Un gran número de descripciones detalladas de redes analógicas puede encontrarse en el capítulo 3 de

E. Weber, *Linear Transient Analysis Volume I*, Wiley, Nueva York, 1954. (Este libro se encuentra agotado, pero puede encontrarse en las bibliotecas de muchas universidades.)

EJERCICIOS

9.1 Circuito en paralelo sin fuente

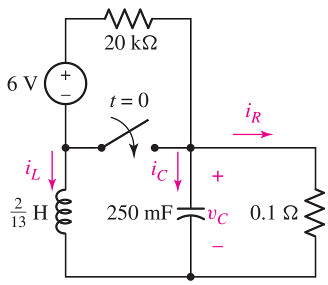
1. Para cierto circuito *RLC* en paralelo sin fuente, $R = 1$ kΩ, $C = 3$ μF y L es tal que la respuesta del circuito está sobreamortiguada. (*a*) Determine el valor de L. (*b*) Escriba la ecuación para la tensión v entre las terminales de la resistencia si se sabe que $v(0^-) = 9$ V y $dv/dt|_{t=0^+} = 2$ V/s.
2. En la construcción de un circuito simple *RLC* en paralelo sin fuente se usan los valores de elementos de 10 mF y 2nH. (*a*) Seleccione R de modo que el circuito esté apenas ligeramente sobreamortiguado. (*b*) Escriba la ecuación para la corriente de la resistencia si su valor inicial es $i_R(0^+) = 13$ pA y $di_E/dt|_{t=0^+} = 1$ nA/s.
3. Si se construye un circuito *RLC* en paralelo con valores de componentes $C = 16$ mF y $L = 1$ mH, elija R de tal manera que el circuito esté (*a*) apenas ligeramente sobreamortiguado; (*b*) apenas ligeramente subamortiguado; (*c*) críticamente amortiguado. (*d*) ¿Su respuesta cambia para el inciso (*a*) si la tolerancia de la resistencia es de 1%? ¿Y si es de 10%? (*e*) Aumente el coeficiente de amortiguación exponencial para el inciso (*c*) en 20%. ¿El circuito está ahora subamortiguado, sobreamortiguado o todavía críticamente amortiguado? *Explique*.
4. Calcule α, ω_0, s_1 y s_2 para un circuito *RLC* en paralelo sin fuente si (*a*) $R = 4$ Ω, $L = 2.22$ H y $C = 12.5$ mF; (*b*) $L = 1$ nH, $C = 1$ pF y R es 1% del valor necesario para hacer el circuito subamortiguado. (*c*) Calcule la relación de amortiguamiento para los circuitos de los incisos (*a*) y (*b*).
5. Usted comienza a construir el circuito del ejercicio 1, solamente para encontrar que no hay resistencias de 1 kΩ. De hecho, todo lo que usted puede encontrar, además del capacitor y el inductor, es un trozo de alambre de cobre macizo calibre AWG 24 de 1 metro de longitud. Conectándolo en paralelo con los dos componentes que sí consiguió, calcule los valores de α, ω_0, s_1 y s_2, y verifique que el circuito está todavía sobreamortiguado.
6. Considere un circuito *RLC* en paralelo sin fuente que tiene $\alpha = 10^8$ s^{-1}, $\omega_0 = 10^3$ rad/s y $\omega_0 L = 5$ Ω. (*a*). Demuestre que las unidades indicadas de ω_0L sean las correctas. (*b*) Calcule s_1 y s_2. (*c*) Escriba la forma general de la respuesta natural para la tensión del capacitor. (*d*) Por sustitución adecuada, verifique que su respuesta al inciso (*c*) sea verdaderamente la solución de la ecuación [1] si el inductor y el capacitor almacenan inicialmente 1 mJ de energía, respectivamente.
7. Se construye un circuito *RLC* en paralelo con $R = 500$ Ω, $C = 10$ μF y L tal que el circuito está críticamente amortiguado. (*a*) Determine L. ¿Este valor es grande o pequeño para un componente montado en tarjeta de circuito impreso? (*b*) Agregue una resistencia en paralelo a los componentes actuales de manera que la relación de amortiguación sea igual a 10. (*c*) ¿Aumentar más la relación de amortiguamiento da por resultado un circuito sobreamortiguado, críticamente amortiguado o subamortiguado? *Explique.*

9.2 Circuito *RLC* en paralelo sobreamortiguado

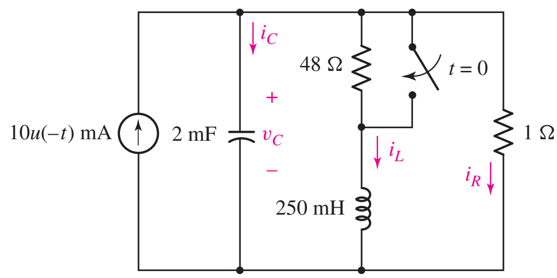
8. El circuito de la figura 9.2 se modifica sustancialmente al reemplazar la resistencia por una de 1 kΩ, cambiar el inductor por un valor más pequeño de 7 mH, reemplazar el capacitor por una alternativa de 1 nF, y ahora el inductor está inicialmente descargado mientras que el capacitor almacena 7.2 mJ. (*a*) Calcule α, ω_0, s_1 y s_2, y verifique que el circuito esté todavía sobreamortiguado. (*b*) Obtenga una expresión para la corriente que fluye a través

de la resistencia, que sea válida para $t > 0$. (*c*) Calcule la magnitud de la corriente de la resistencia en $t = 10\ \mu$s.

9. Se encuentra que la tensión entre las terminales de un capacitor está dada por $v_C(t) = 10e^{-10t} - 5e^{-4t}$ V. (*a*) Bosqueje cada uno de los dos componentes dentro del intervalo $0 \le t \le 1.5$ s. (*b*) Grafique la tensión del capacitor dentro del mismo intervalo de tiempo.
10. Se encuentra que la corriente que fluye a través de cierto inductor está dada por $i_L(t) = 0.20e^{-2t} - 0.6e^{-3t}$ V. (*a*) Bosqueje cada uno de los dos componentes dentro del intervalo $0 \le t \le 1.5$ s. (*b*) Grafique la corriente del inductor dentro del mismo intervalo de tiempo. (*c*) Grafique la energía que queda en el inductor dentro del intervalo $0 \le t \le 1.5$ s.
11. Se determina que la corriente que fluye a través de una resistencia de 5 Ω en un circuito *RLC* en paralelo sin fuente es $i_R(t) = 2e^{-t} - 3e^{-8t}$ V, $t > 0$. Determine (*a*) la corriente máxima y el tiempo en el que ocurre; (*b*) el tiempo de asentamiento; (*c*) el tiempo t correspondiente al momento en que la resistencia absorbe 2.5 W de potencia.
12. Para el circuito de la figura 9.38, obtenga una expresión para $v_C(t)$ válida para todos los valores de $t > 0$.
13. Considere el circuito representado en la figura 9.38. (*a*) Obtenga una expresión para $i_L(t)$ válida para todo $t > 0$. (*b*) Obtenga una expresión para $i_R(t)$ válida para todo $t > 0$. (*c*) Determine el tiempo de asentamiento tanto para i_L como para i_R.
14. Con referencia al circuito representado en la figura 9.39, determine (*a*) $i_C(0^-)$; (*b*) $i_L(0^-)$; (*c*) $i_R(0^-)$; (*d*) $v_C(0^-)$; (*e*) $i_C(0^+)$; (*f*) $i_L(0^+)$; (*g*) $i_R(0^+)$; (*h*) $v_C(0^+)$.

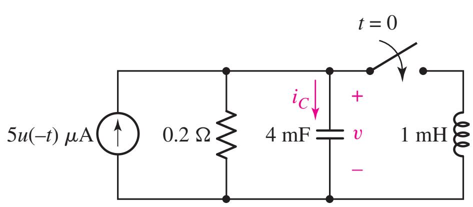


■ **FIGURA 9.38**



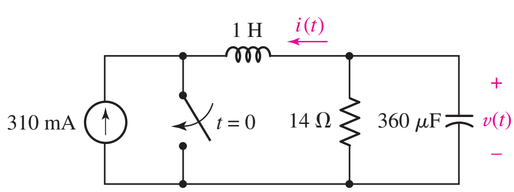
■ **FIGURA 9.39**

15. (*a*) Observando la convención de signo pasivo, obtenga una expresión para la tensión entre las terminales de una resistencia de 1 Ω en el circuito de la figura 9.39 que sea válida para todo $t > 0$. (*b*) Determine el tiempo de asentamiento para la tensión de la resistencia.
16. Respecto al circuito que se presenta en la figura 9.40, (*a*) obtenga una expresión para $v(t)$ que sea válida para todo $t > 0$, (*b*) calcule la corriente máxima del inductor e identifique el tiempo en el que ocurre; (*c*) determine el tiempo de asentamiento.



■ **FIGURA 9.40**

17. Obtenga las expresiones para la corriente $i(t)$ y la tensión $v(t)$ indicados en el circuito de la figura 9.41 que sean válidas para todo $t > 0$.



■ **FIGURA 9.41**

18. Reemplace la resistencia de 14 Ω en el circuito de la figura 9.41 por uno de 1 Ω. (*a*) Obtenga una expresión para la energía almacenada en el capacitor como una función del tiempo, válida para $t > 0$. (*b*) Determine el tiempo en el que la energía en el capacitador se ha reducido a la mitad de su valor máximo. (*c*) Verifique su respuesta mediante una simulación adecuada en PSpice.

19. Diseñe un circuito *RLC* en paralelo, completo, sin fuente, que tenga una respuesta sobreamortiguada, tenga un tiempo de asentamiento de 1 s y tenga una relación de amortiguamiento de 15.

20. Para el circuito representado en la figura 9.42, los dos valores de las resistencias son $R_1 = 0.752$ Ω y $R_2 = 1.268$ Ω, respectivamente. (*a*) Obtenga una expresión para la energía almacenada en el capacitor, válida para todo $t > 0$; (*b*) determine el tiempo de amortiguamiento para la corriente marcada como i_A.

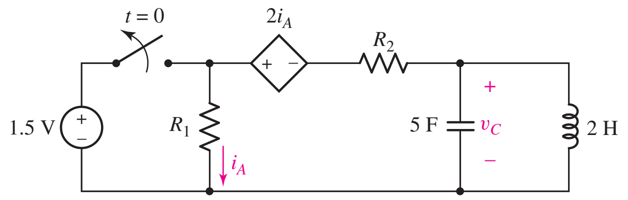


FIGURA 9.42

9.3 Amortiguamiento crítico

21. Una bobina de motor que tiene una inductancia de 8 H está en paralelo con un capacitor de 2 μF y una resistencia de valor desconocido. Se ha determinado que la respuesta de la combinación en paralelo está críticamente amortiguada. (*a*) Determine el valor de la resistencia. (*b*) Calcule α. (*c*) Escriba la ecuación para la corriente que fluye hacia la resistencia si el nodo superior es v, el nodo inferior está conectado a tierra y $v = Ri_r$. (*d*) Verifique que su ecuación es una solución a la ecuación diferencial del circuito,

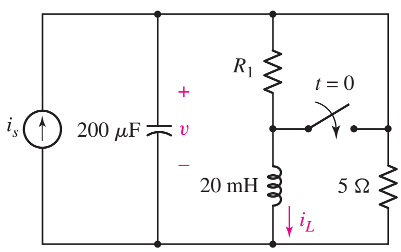
$$\frac{di_r}{dt} + 2\alpha\frac{di_r}{dt} + \alpha^2 i_r = 0$$

22. La condición para amortiguación crítica en un circuito de *RLC* es que la frecuencia de resonancia ω_0 y el factor exponencial de amortiguamiento α sean iguales. Esto lleva a la relación $L = 4R^2C$, lo cual implica que 1 H = 1$\Omega^2 \cdot$ F. Verifique esta equivalencia desglosando cada una de las tres unidades a unidades fundamentales SI (vea el capítulo 2).

23. Un circuito *RCL* en paralelo críticamente amortiguado se construye con los valores de componentes 40 Ω, 8 nF y 51.2 μH, respectivamente. (*a*) Verifique que el circuito es en realidad críticamente amortiguado. (*b*) Explique por qué, en la práctica, el circuito, una vez que se fabrica, es poco probable que sea en verdad críticamente amortiguado. (*c*) El inductor al inicio almacena 1mJ de energía, mientras que el capacitor inicialmente está descargado. Determine la magnitud de la tensión del capacitor en $t = 500$ ns, la tensión máxima absoluta del capacitor y el tiempo de asentamiento.

24. Diseñe un circuito *RCL* en paralelo completo (es decir, con todos los interruptores necesarios o con fuentes de función escalón) que tenga una respuesta críticamente amortiguada, de modo que la tensión del capacitor en $t = 1$ s sea igual a 9 V y el circuito sea sin fuente para todo $t > 0$.

25. Un circuito *RCL* críticamente amortiguado se construye con valores de componentes de 40 Ω y 2 pF. (*a*) Determine el valor de *L*, teniendo cuidado de no sobrerredondear. (*b*) Explique por qué, en la práctica, una vez fabricado el circuito es poco probable que esté en verdad críticamente amortiguado. (*c*) El inductor inicialmente no almacena energía, mientras que el capacitor inicialmente almacena 10 pJ. Determine la potencia absorbida por la resistencia en $t = 2$ ns, la corriente absoluta máxima del inductor $|i_L|$ y el tiempo de asentamiento.



■ **FIGURA 9.43**

26. Para el circuito de la figura 9.43, $i_s(t) = 30\mu(-t)$ mA. (*a*) Seleccione R_1 de modo que $v(0^+) = 6$ V. (*b*) Calcule $v(2\text{ ms})$. (*c*) Determine el tiempo de asentamiento de la tensión del capacitor. (*d*) ¿El tiempo de asentamiento de la corriente del inductor es el mismo que su respuesta al inciso (*c*)?

27. La fuente de corriente de la figura 9.43 es $i_s(t) = 10\mu(1 - t)$ μA. (*a*) Seleccione R_1 de tal manera que $i_L(0^+) = 2\mu$A. Calcule i_L en $t = 500$ ms y $t = 1.002$ ms.

28. El inductor en el circuito de la figura 9.41 se cambia de tal manera que la respuesta del circuito esté ahora críticamente amortiguada. (*a*) Determine el nuevo valor del inductor. (*b*) Calcule la energía almacenada tanto en el inductor como en el capacitor en $t = 10$ ms.

29. El circuito de la figura 9.42 se reconstruye de tal manera que la cantidad de control de la fuente dependiente sea ahora de $100i_A$, se cambie el capacitor por uno de 2 μF y $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$. (*a*) Calcule el valor del inductor necesario para obtener una respuesta críticamente amortiguada. (*b*) Determine la potencia que absorbe R_2 en $t = 300$ μs.

9.4 Circuito *RLC* en paralelo subamortiguado

30. (*a*) Respecto al circuito *RLC* en paralelo, deduzca una expresión para *R* en términos de *C* y *L* para asegurar que la respuesta sea subamortiguada. (*b*) Si $C = 1$ nF y $L = 10$ mH, seleccione *R* de manera que (apenas) se obtenga una respuesta subamortiguada. (*c*) Si la relación de amortiguamiento se aumenta, ¿el circuito se vuelve más o menos subamortiguado? *Explique*. (*d*) Calcule α y ω_d para el valor de *R* que usted seleccionó en el inciso (*b*).

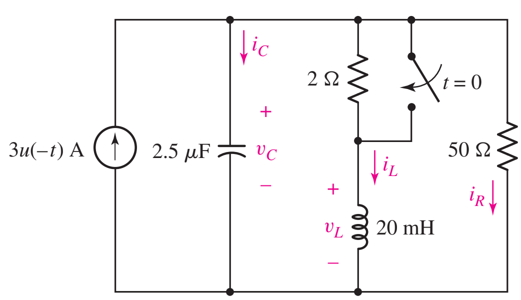
31. El circuito de la figura 9.1 se construye usando valores de componentes 10 kΩ, 72 μH y 18 pF. (*a*) Calcule α, ω_d y ω_0. ¿El circuito está sobreamortiguado, críticamente amortiguado o subamortiguado? (*b*) Escriba la forma de la respuesta natural de la tensión en el capacitor $v(t)$. (*c*) Si el capacitor almacena inicialmente 1 nJ de energía, calcule v en $t = 300$ ns.

32. El circuito sin fuente representado en la figura 9.1 se construye usando un inductor de 10 mH, un capacitor de 1 mF y una resistencia de 1.5 kΩ. (*a*) Calcule α, ω_d y ω_0. (*b*) Escriba la ecuación que describa la corriente *i* para $t > 0$. (*c*) Determine el valor máximo de *i* y el tiempo en el que ocurre, si el inductor no almacena inicialmente energía y $v(0^-) = 9$ V.

33. (*a*) Grafique la corriente *i* para el circuito descrito en el ejercicio 32 para valores de la resistencia 1.5 kΩ, 15 kΩ y 150 kΩ. Haga tres gráficas separadas y asegúrese de extender el eje de tiempo correspondiente a $6\pi/\omega_d$ en cada caso. (*b*) Determine los tiempos de asentamiento correspondientes.

34. Analice el circuito descrito en el ejercicio 32 para encontrar $v(t)$ para $t > 0$, si *R* es igual a (*a*) 2 kΩ; (*b*) 2 Ω. (*c*) Grafique ambas respuestas en el intervalo $0 \le t \le 60$ ms. (*d*) Verifique sus respuestas mediante las simulaciones adecuadas en PSpice.

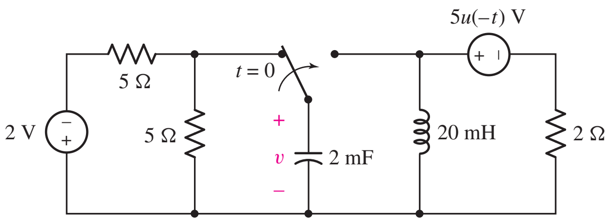
35. Para el circuito de la figura 9.44, determine (*a*) $i_C(0^-)$; (*b*) $i_L(0^-)$; (*c*) $i_R(0^-)$; (*d*) $v_C(0^-)$; (*e*) $i_C(0^+)$; (*f*) $i_L(0^+)$; (*g*) $i_R(0^+)$; (*h*) $v_C(0^+)$.



■ **FIGURA 9.44**

36. Obtenga una expresión para $v_L(t)$ para $t > 0$, para el circuito que se muestra en la figura 9.44. Grafique la forma de onda para por lo menos dos periodos de oscilación.

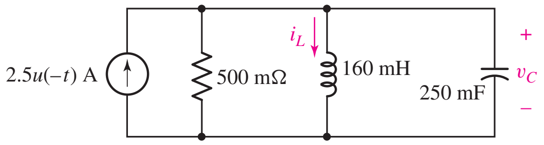
37. Para el circuito de la figura 9.45, determine (*a*) el primer tiempo $t > 0$ en que $v(t) = 0$; (*b*) el tiempo de asentamiento.



■ **FIGURA 9.45**

38. (*a*) Diseñe un circuito *RLC* en paralelo que suministre una tensión de capacitor que oscile a la frecuencia de 100 rad/s, con un valor máximo de 10 V que ocurra en $t = 0$, y los segundo y tercero máximos sean ambos superiores a 6 V. (*b*) Verifique su diseño con una simulación adecuada en PSpice.

39. El circuito representado en la figura 9.46 es apenas subamortiguado. (*a*) Calcule α y ω_d. (*b*) Obtenga una expresión para $i_L(t)$ válida para $t > 0$. (*c*) Determine cuánta energía se almacena en el capacitor y en el inductor, en $t = 200$ ms.



■ **FIGURA 9.46**

40. Al construir el circuito de la figura 9.46, inadvertidamente instaló usted una resistencia de 500 MΩ, por error. (*a*) Calcule α y ω_d. (*b*) Obtenga una expresión para $i_L(t)$ válida para $t > 0$. (*c*) Determine cuánto tarda la energía almacenada en el inductor para llegar a 10% de su valor máximo.

9.5 Circuito *RLC* en serie sin fuente

41. El circuito de la figura 9.21*a* se construye con un capacitor de 160 mF y un inductor de 250 mH. Determine el valor de *R* que se necesita para obtener (*a*) una respuesta críticamente amortiguada; (*b*) una respuesta “apenas” subamortiguada. (*c*) Compare sus respuestas con los incisos (*a* y (*b*) si el circuito fuera un circuito *RLC* en paralelo.

42. Se usan valores de componentes $R = 2\ \Omega$, $C = 1$ mF y $L = 2$ mH para construir el circuito representado en la figura 9.21*a*. Si $v_C(0^-) = 1$ V y no fluye una corriente inicial a través del inductor, calcule $i(t)$ en $t = 1$ ms, 2 ms y 3 ms.

43. El circuito de *RLC* en serie que se describe en el ejercicio 42 se modifica ligeramente agregando una resistencia de 2 Ω en paralelo con la resistencia existente. La tensión inicial del capacitor sigue siendo de 1 V, y todavía no fluye corriente en el inductor antes de $t = 0$. (*a*) Calcule $v_C(t)$ en 4 ms. (*b*) Bosqueje $v_C(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 10$ s.

44. El circuito simple de tres elementos *RLC* en serie del ejercicio 42 se construye con los mismos valores de componentes, pero la tensión inicial del capacitor es $v_C(0^-) = 2$ V, y la corriente inicial del conductor $i(0^-) = 1$ mA. (*a*) Obtenga una expresión para $i(t)$ válida para todo $t > 0$. (*b*) Verifique su solución con una simulación adecuada.

45. El circuito *RLC* en serie de la figura 9.22 se construye usando $R = 1$ kΩ, $C = 2$ mF y $L = 1$ mH. La tensión inicial del capacitor v_C es de -4 V en $t = 0^-$. Inicialmente no fluye corriente a través del inductor. (*a*) Obtenga una expresión para $v_C(t)$ válida para $t > 0$. (*b*) Haga un bosquejo en el intervalo $0 \leq t \leq 6\ \mu$s.

46. Con referencia al circuito representado en la figura 9.47, calcule (*a*) α; (*b*) ω_0; (*c*) $i(0^+)$; (*d*) $di/dt|_{0^+}$; (*e*) $i(t)$ en $t = 6$ s.

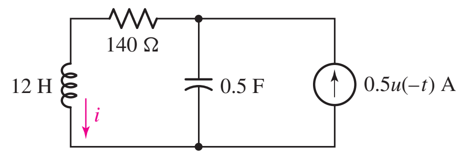


FIGURA 9.47

47. Obtenga una ecuación para v_C indicada en el circuito de la figura 9.48 que sea válida para todo valor de $t > 0$.

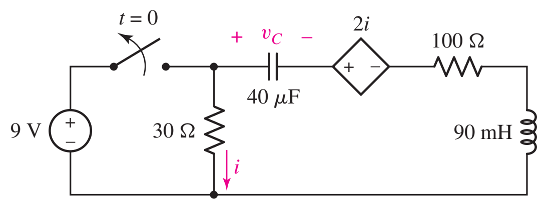


FIGURA 9.48

48. Con referencia al circuito de *RLC* en serie de la figura 9.48, (*a*) obtenga una expresión para *i*, válida para $t > 0$; (*b*) calcule $i(0.8 \text{ ms})$ e $i(4 \text{ ms})$; (*c*) verifique sus respuestas para el inciso (*b*) mediante una simulación adecuada en PSpice.

49. Obtenga una expresión para i_1 marcada en la figura 9.49 que sea válida para todo $t > 0$.

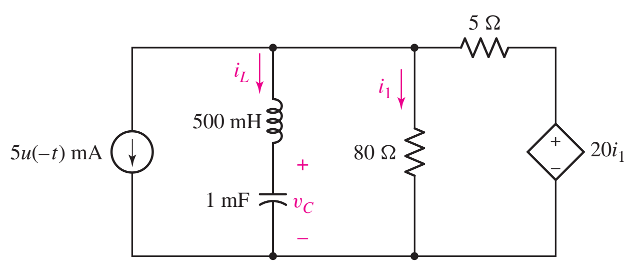


FIGURA 9.49

9.6 Respuesta completa del circuito *RLC*

50. En el circuito en serie de la figura 9.50, haga $R = 1\ \Omega$. (*a*) Calcule α y ω_0. (*b*) Si $i_s = 3u(-t) + 2u(t)$ mA, determine $v_R(0^-)$, $i_L(0^-)$, $v_C(0^-)$, $v_R(0^+)$, $i_L(0^-)$, $v_C(0^+)$, $i_L(\infty)$ y $v_C(\infty)$.

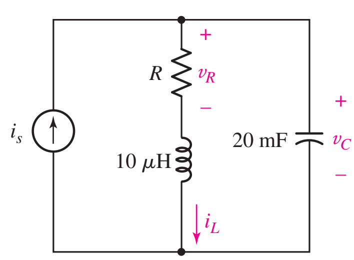


FIGURA 9.50

51. Calcule la derivada de cada variable de corriente y tensión marcadas en la figura 9.51 en $t = 0^+$.

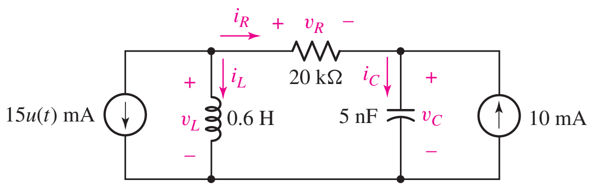


FIGURA 9.51

52. Considere el circuito descrito en la figura 9.52. Si $v_s(t) = -8 + 2u(t)$ V determine (*a*) $v_C(0^+)$; (*b*) $i_L(0^+)$; (*c*) $v_C(\infty)$; (*d*) $v_C(t = 150$ ms).

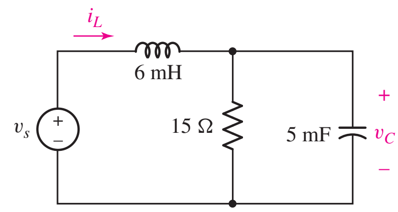


FIGURA 9.52

53. La resistencia de 15 Ω en el circuito de la figura 9.52 se reemplaza por una alternativa de 500 mΩ. Si la tensión de la fuente está dada por $v_s = 1 - 2u(t)$ V, determine (*a*) $i_L(0^+)$; (*b*) $v_C(0^+)$; (*c*) $i_L(\infty)$: (*d*) $v_C(4$ ms).

54. En el circuito que se muestra en la figura 9.53, obtenga una expresión para i_L válida para todo $t > 0$ si $i_1 = 8 - 10u(t)$ mA.

55. La resistencia de 10 Ω en el circuito de *RLC* en serie de la figura 9.53 se reemplaza por una de 1 kΩ. La fuente $i_1 = 5u(t) - 4$mA. Obtenga una expresión para i_L válida para todo $t > 0$.

56. Para el circuito representado en la figura 9.54, (*a*) obtenga una expresión para $v_C(t)$ válida para todo $t > 0$. (*b*) Determine v_C en $t = 10$ ms y $t = 600$ ms. (*c*) Verifique sus respuestas del inciso (*b*) mediante una simulación adecuada en PSpice.

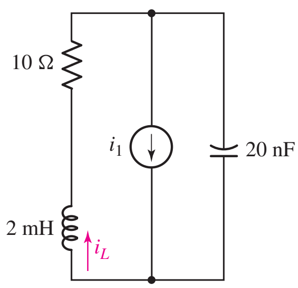


FIGURA 9.53

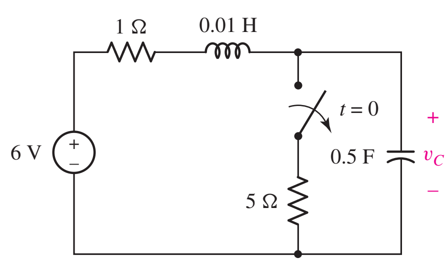


FIGURA 9.54

57. Reemplace la resistencia de 1 Ω en la figura 9.54 por una resistencia de 100 mΩ, y la resistencia de 5 Ω por otra de 200 mΩ. Considerando la convención del signo pasivo, obtenga una expresión para la corriente del capacitor que sea válida para $t > 0$.

58. Con referencia al circuito de la figura 9.55, obtenga una expresión para v_C válida para $t \geq 0$ si $i_s(t) = 3u(-t) + 5u(t)$ mA.

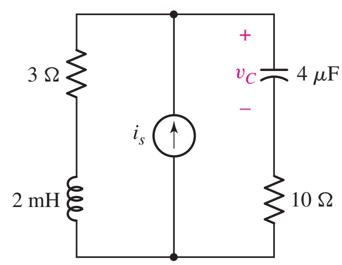


FIGURA 9.55

59. (*a*) Ajuste el valor de la resistencia de 3 Ω en el circuito de la figura 9.55 para obtener una respuesta "apenas" sobreamortiguada. (*b*) Determine el primer instante ($t > 0$) en el que se almacena una cantidad de energía igual (y diferente a cero) en el capacitor y en el inductor si $i_s(t) = 2u(t)$ A. (*c*) Calcule la energía correspondiente. (*d*) ¿En qué tiempo subsecuente la energía almacenada en el inductor será el *doble* de la energía almacenada en el capacitor en el mismo instante?

9.7 Circuito *LC* sin pérdidas

60. Diseñe un circuito de amp op para hacer el modelo para la respuesta en tensión del circuito *LC* que se muestra en la figura 9.56. Verifique el diseño simulando el circuito de la figura 9.56 y su circuito empleando un amp op LF 411, suponiendo $v(0) = 0$ e $i(0) = 1$ mA.

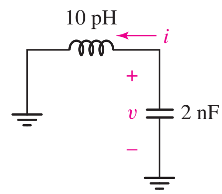
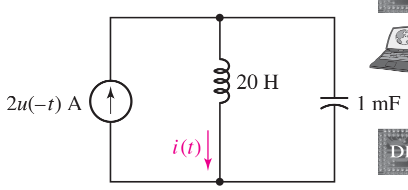


FIGURA 9.56

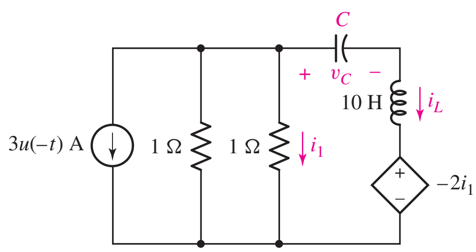


■ FIGURA 9.57

61. Observe la figura 9.57 y diseñe un circuito de amp op cuya salida sea $i(t)$ para $t > 0$.
62. Sustituya el capacitor del circuito de la figura 9.56 por un inductor de 20 H en paralelo con un capacitor de 5 μF. Diseñe un circuito de amp op cuya salida sea $i(t)$ para $t > 0$.Verifique el diseño simulando el circuito de capacitor-inductor y su circuito de amp op. Utilice un amp op LM111 en la simulación con PSpice.
63. Un circuito *RC* sin fuente se construye con una resistencia de 1 kΩ y un capacitor de 3.3 mF. La tensión inicial en el capacitor es de 1.2 V. (*a*) Escriba la ecuación diferencial de v (la tensión en el capacitor) para $t > 0$. Diseñe un circuito de amp op que proporcione $v(t)$ como salida.
64. Un circuito *RL* sin fuente contiene una resistencia de 20 Ω y un inductor de 5 H. Si el valor inicial de la corriente del inductor es de 2 A: (*a*) escriba la ecuación diferencial relativa a i para $t > 0$, (*b*) diseñe un integrador de amp op para proporcionar $i(t)$ como salida, utilizando $R_1 = 1$ MΩ y $C_f = 1$ μF.

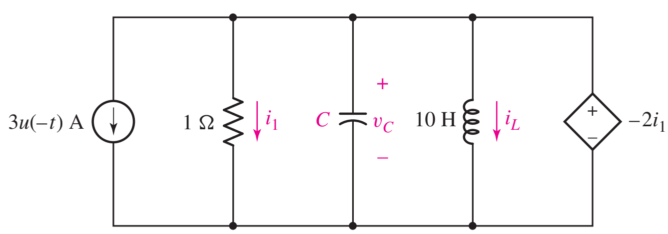
Ejercicios de integración de capítulo

65. Al capacitor del circuito de la figura 9.58 se le da un valor de 1 F. Determine $v_C(t)$ en (*a*) $t = -1$ s; (*b*) $t = 0^+$; (*c*) $t = 20$ s.



■ FIGURA 9.58

66. (*a*) ¿Qué valor de C para el circuito de la figura 9.59 dará como resultado una respuesta sobreamortiguada? (*b*) Haga $C = 1$ F y obtenga una expresión para $i_L(t)$ válida para $t > 0$.



■ FIGURA 9.59

67. Obtenga una expresión para la corriente marcada como i_1 en el circuito de la figura 9.58 que sea válida para $t > 0$, si la fuente de corriente se reemplaza por una fuente $5u(t + 1)$ A.
68. Diseñe un circuito de *RLC* en paralelo que produzca un pulso senoidal exponencialmente amortiguado con una tensión pico de 1.5 V y por lo menos dos picos adicionales con magnitud de tensión mayor que 0.8 V. Verifique su diseño mediante una simulación adecuada en PSpice.
69. Diseñe un circuito de *RLC* en serie que produzca un pulso senoidal exponencialmente amortiguado con una tensión pico de 1.5 V y por lo menos dos picos adicionales con magnitud de tensión mayor que 0.8 V. Verifique su diseño mediante una simulación adecuada en PSpice.



Análisis de estado senoidal permanente

CONCEPTOS CLAVE

- Características de las funciones senoidales
- Representación fasorial de senoidales
- Conversión entre los dominios del tiempo y la frecuencia
- Impedancia y admitancia
- Reactancia y susceptancia
- Combinaciones en serie y en paralelo en el dominio de la frecuencia
- Determinación de la respuesta forzada utilizando fasores
- Aplicación de las técnicas del análisis de circuitos en el dominio de la frecuencia

INTRODUCCIÓN

La respuesta completa de un circuito eléctrico lineal se compone de dos partes: la respuesta *natural* y la respuesta *forzada*. La primera es la respuesta transitoria de corta vida de un circuito ante un cambio repentino en su condición, y la segunda es la respuesta de estado permanente a largo plazo de un circuito a cualquier fuente independiente presente. Hasta este punto, la única respuesta forzada que hemos considerado es la que se debe a las fuentes de cd. Otra función forzada muy común es la forma de onda senoidal, que describe la tensión disponible en las tomas de corriente eléctrica doméstica, así como la tensión de las líneas de potencia que se conectan a las áreas residenciales e industriales.

En este capítulo suponemos que la respuesta transitoria es de poco interés, así que se necesita la respuesta de estado permanente de un circuito (aparato de televisión, tostador o red de distribución de potencia) a una tensión o corriente senoidal. Analizaremos este tipo de circuito con una técnica poderosa que transforma las ecuaciones integrodiferenciales en ecuaciones algebraicas. Antes de ver cómo funciona, es útil repasar rápidamente unos cuantos atributos importantes de las senoidales en general, que describirán prácticamente la totalidad de las corrientes y las tensiones en todo el capítulo.

10.1 CARACTERÍSTICAS DE LAS SENOIDALES

Considere la siguiente tensión variable senoidalmente:

$$v(t) = V_m \operatorname{sen} \omega t$$

cuya gráfica se muestra en la figura 10.1*a* y *b*. La *amplitud* de la onda senoidal es V_m y el *argumento* es ωt. La *frecuencia radián*, o *frecuencia angular*, corresponde a ω. En la figura 10.1*a* V_m sen ωt se grafica como una función del argumento ωt, de donde resulta evidente la naturaleza periódica de la onda senoidal. La función se repite cada 2π radianes y su ***periodo*** es en consecuencia 2π radianes.



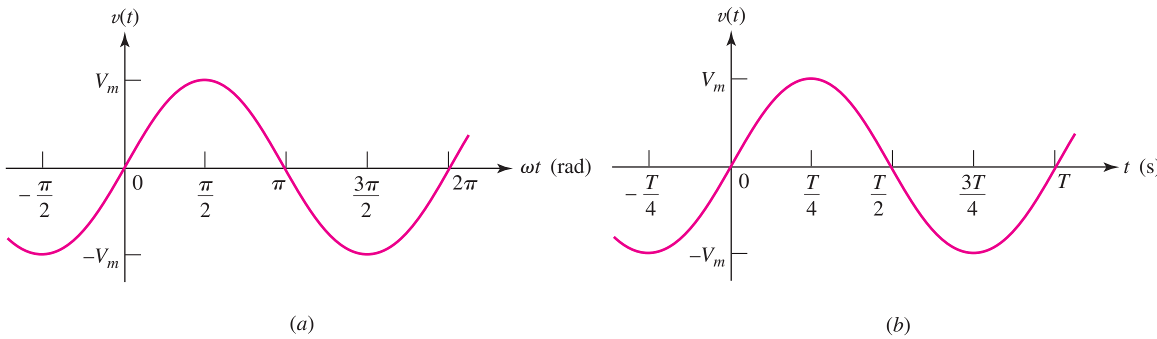


FIGURA 10.1 Función senoidal $v(t) = V_m$ sen ωt graficada (*a*) en función de ωt y (*b*) en función de t.

En la figura 10.1*b*, V_m sen ωt se grafica como una función de t y el *periodo* es ahora T. Una onda senoidal que tiene un periodo T debe completar $1/T$ periodos cada segundo; su ***frecuencia*** f es $1/T$ hertz, abreviado Hz. De tal modo,

$$f = \frac{1}{T}$$

y en vista de que

$$\omega T = 2\pi$$

obtenemos la relación común entre la frecuencia y la frecuencia radián,

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

Retraso y adelanto

Una forma más general de la senoide:

$$v(t) = V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \qquad [1]$$

incluye un *ángulo de fase* θ en su argumento. La ecuación [1] se grafica en la figura 10.2 como una función de ωt, y el ángulo de fase aparece como el número de radianes mediante los cuales la onda senoidal original (que se indica en el dibujo mediante una línea discontinua) se corre hacia la izquierda o al tiempo anterior. En razón de que los puntos correspondientes sobre la senoide V_m sen $(\omega t + \theta)$ ocurren θ rad, o bien, θ/ω segundos antes, decimos que V_m sen (ωt) *adelanta a* V_m sen ωt en θ rad. Por lo tanto, es correcto describir a sen ωt como ***retrasada*** respecto de sen $(\omega t + \theta)$ en θ rad, ***adelantada*** de sen $(\omega t + \theta)$ por $-\theta$ rad, o adelantada de sen $(\omega t - \theta)$ por θ rad.

Recuerde que para convertir radianes en grados simplemente se multiplica el ángulo por $180/\pi$.

En cualquier caso, adelantada o retrasada, decimos que las senoides están *fuera de fase*. Si los ángulos de fase son iguales, se señala que las senoides están *en fase*.

En ingeniería eléctrica se acostumbra indicar el ángulo de fase en grados, en vez de hacerlo en radianes; para evitar confusiones deberíamos asegurarnos de usar siempre

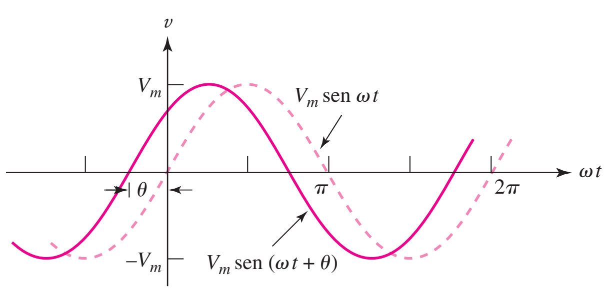


FIGURA 10.2 La onda senoidal V_m sen$(\omega t + \theta)$ adelanta a V_m sen ωt por θ radianes.

el símbolo de grados. Por lo tanto, en lugar de escribir

$$v = 100\,\text{sen}\left(2\pi\,1\,000t - \frac{\pi}{6}\right)$$

solemos utilizar

$$v = 100\,\text{sen}\,(2\pi\,1\,000t - 30°)$$

Al evaluar esta expresión en un instante de tiempo específico, por ejemplo $t = 10^{-4}$ s, $2\pi\ 1\,000t$ se convierte en 0.2π *radianes,* lo cual debe expresarse como 36° antes de que se le resten 30°. No confunda sus manzanas con sus naranjas.

Dos ondas senoidales cuyas fases se van a comparar deben:

1. Escribirse como ondas seno o como ondas coseno.
2. Expresarse con amplitudes positivas.
3. Tener cada una la misma frecuencia angular o radián.

Conversión de senos en cosenos

En esencia, el seno y el coseno son la misma función, pero con una diferencia de fase de 90°. Por lo tanto, sen $\omega t = \cos(\omega t - 90°)$. Los múltiplos de 360° se suman o se restan del argumento de cualquier función senoidal sin que cambie el valor de esta última. En consecuencia, podríamos afirmar que

Observe que:
$-\text{sen}\ \omega t = \text{sen}(\omega t \pm 180°)$
$-\cos\ \omega t = \cos(\omega t \pm 180°)$
$\mp\text{sen}\ \omega t = \cos(\omega t \pm 90°)$
$\pm\cos\ \omega t = \text{sen}(\omega t \pm 90°)$

$$\begin{aligned} v_1 &= V_{m_1}\cos(5t + 10°) \\ &= V_{m_1}\,\text{sen}\,(5t + 90° + 10°) \\ &= V_{m_1}\,\text{sen}\,(5t + 100°) \end{aligned}$$

conduce a

$$v_2 = V_{m_2}\,\text{sen}(5t - 30°)$$

en 130°. También es correcto señalar que v_1 *retrasa a* v_2 en 230°, puesto que v_1 puede escribirse como

$$v_1 = V_{m_1}\,\text{sen}(5t - 260°)$$

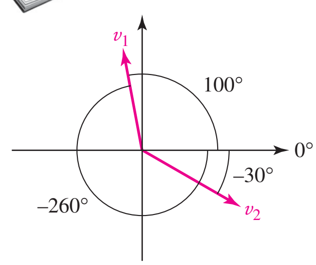


FIGURA 10.3 Representación gráfica de dos senoides v_1 y v_2. La magnitud de cada función seno se representa mediante la longitud de la flecha correspondiente y el ángulo de fase por la orientación con respecto al eje *x* positivo. En este diagrama, v_1 adelanta a v_2 100° + 30° = 130°, aunque podría argumentarse que v_2 adelanta a v_1 en 230°. Sin embargo, suele expresarse la diferencia de fase por un ángulo menor o igual a 180° en magnitud.

Suponemos que V_{m_1} y V_{m_2} son cantidades positivas. En la figura 10.3 se ofrece una representación gráfica; observe que la frecuencia de ambas senoides (5 rad/s en este caso) debe ser la misma, o la comparación no tiene sentido. A menudo, la diferencia de fase entre dos senoides se expresa mediante el ángulo que sea menor o igual a 180° en magnitud.

Usaremos el concepto de una relación de adelanto o retraso entre dos senoides en forma extensa, así que la relación debe ser reconocible tanto matemática como gráficamente.

PRÁCTICA

10.1 Determine el ángulo mediante el cual i_1 está retrasada respecto a v_1, si $v_1 = 120\cos(120\pi t - 40°)$ V e i_1 es igual a: (*a*) $2.5\cos(120\pi t + 20°)$ A; (*b*) $1.4\,\text{sen}(120\pi t - 70°)$ A; (*c*) $-0.8\cos(120\pi t - 110°)$ A.

10.2 Calcule A, B, C y ϕ si $40\cos(100t - 40°) - 20\,\text{sen}(100t + 170°) = A\cos 100t + B\,\text{sen}\,100t = C\cos(100t + \phi)$.

Respuestas: 10.1: − 60°; 120°; −110°. 10.2: 27.2; 45.4; 52.9; −59.1°.

10.2 RESPUESTA FORZADA A FUNCIONES SENOIDALES

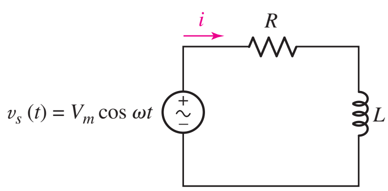
Una vez familiarizados con las características matemáticas de las senoides, estamos listos para aplicar una función forzada senoidal a un circuito simple y obtener la respuesta forzada. Escribiremos primero la ecuación diferencial que se aplica al circuito dado. La solución completa de esta ecuación está compuesta por dos partes: la solución complementaria (que denominamos *respuesta natural*) y la integral particular (o *respuesta forzada*). Los métodos que planeamos desarrollar en este capítulo suponen que no nos interesa el transitorio de corta vida o la respuesta natural del circuito, sino sólo la respuesta de largo plazo o de "estado permanente".

Respuesta de estado permanente

El término *respuesta de estado permanente* se usa como sinónimo de *respuesta forzada*, por lo que, en general, diremos que los circuitos que analizaremos estarán en "estado permanente senoidal". Desafortunadamente, la expresión *estado permanente* lleva la connotación de "no cambiar con el tiempo" en las mentes de muchos estudiantes. Lo anterior es válido para las funciones forzadas, pero la respuesta senoidal de estado permanente en definitiva cambia con el tiempo. El estado permanente se refiere sólo a la condición que se alcanza después de que se anula la respuesta transitoria o natural.



La respuesta forzada tiene la forma matemática de la función forzada, más todas sus derivadas y su primera integral. Con este conocimiento, uno de los métodos mediante el que se calcula la respuesta forzada consiste en suponer una solución compuesta por una suma de tales funciones, donde cada una tiene que determinar una amplitud desconocida mediante la sustitución directa en la ecuación diferencial. Como podremos observar dentro de poco, éste puede ser un proceso muy lento, por lo que siempre estaremos bastante motivados para buscar una alternativa más simple.



■ **FIGURA 10.4** Circuito *RL* en serie para el cual se desea la respuesta forzada.

Considere el circuito *RL* en serie de la figura 10.4. La tensión de fuente senoidal $v_s = V_m \cos \omega t$ se conmutó en el circuito en algún momento anterior y la respuesta natural se amortiguó por completo. Buscamos la respuesta forzada (o "estado permanente"), que debe cumplir con la ecuación diferencial

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t$$

obtenida al aplicar la LVK alrededor del lazo simple. En cualquier instante en el que la derivada es igual a cero, observamos que la corriente debe tener la forma $i \propto \cos \omega t$. De manera similar, en el instante en el que la corriente es igual a cero, la *derivada* debe ser proporcional a $\cos \omega t$, lo que implica una corriente de la forma $\operatorname{sen} \omega t$. Por lo tanto, podríamos esperar que la respuesta forzada tenga la forma general

$$i(t) = I_1 \cos \omega t + I_2 \operatorname{sen} \omega t$$

donde I_1 e I_2 son constantes reales cuyos valores dependen de V_m, R, L y ω. No puede estar presente una función constante o una exponencial. Al sustituir la forma supuesta de la solución en la ecuación diferencial, obtenemos

$$L(-I_1\omega \operatorname{sen} \omega t + I_2\omega \cos \omega t) + R(I_1 \cos \omega t + I_2 \operatorname{sen} \omega t) = V_m \cos \omega t$$

Si agrupamos los términos coseno y seno, resulta

$$(-L\,I_1\omega + RI_2) \operatorname{sen} \omega t + (L\,I_2\omega + RI_1 - V_m) \cos \omega t = 0$$

Esta ecuación debe ser cierta para todos los valores de t, lo cual se logra sólo si los factores que multiplican a cos ωt y a sen ωt son cada uno cero. En consecuencia,

$$-\omega L\, I_1 + RI_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \omega L\, I_2 + RI_1 - V_m = 0$$

y la solución simultánea de I_1 e I_2 conduce a

$$I_1 = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \qquad I_2 = \frac{\omega L V_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

De tal modo, la respuesta forzada se obtiene mediante:

$$i(t) = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega L V_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \operatorname{sen} \omega t \qquad [2]$$

Empleo de una forma más compacta y sencilla (más amigable)

Esta expresión, sin embargo, es un poco complicada; además, obtenemos una imagen más clara de la respuesta si la expresamos como una sinusoide o una cosenoide simple con un ángulo de fase. Elegimos expresar la respuesta como una función coseno:

$$i(t) = A \cos(\omega t - \theta) \qquad [3]$$

Al menos se sugieren por sí solos dos métodos para obtener los valores de A y θ. Podríamos sustituir la ecuación [3] en forma directa en la ecuación diferencial original o simplemente igualar ambas soluciones: ecuaciones [2] y [3]. Al elegir el último método y desarrollar la función cos $(\omega t - \theta)$:

$$A \cos\theta \cos\omega t + A \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega t = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega L V_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \operatorname{sen} \omega t$$

Todo lo que queda por hacer es reunir los términos y hacer un poco de álgebra, un ejercicio que se le deja a usted. El resultado es

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

y

$$A = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Por lo tanto, la *forma alternativa* de la respuesta forzada se convierte en

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) \qquad [4]$$

Con esta forma, es fácil ver que la amplitud de la *respuesta* es proporcional a la amplitud de la *función forzada*; de otra manera, el concepto de linealidad tendría que descartarse. Se observa que la corriente está retrasada respecto de la tensión aplicada por $\tan^{-1}$ $(\omega L/R)$, un ángulo entre 0 y 90°. Cuando $\omega = 0$ o $L = 0$ la corriente debe estar en fase con la tensión; debido a que la primera situación corresponde a una corriente directa y la última da lugar a un circuito resistivo, los resultados concuerdan con la experiencia previa. Si $R = 0$ la corriente está retrasada de la tensión de 90°. En un inductor, entonces, si se satisface la convención de signos pasiva, la corriente está

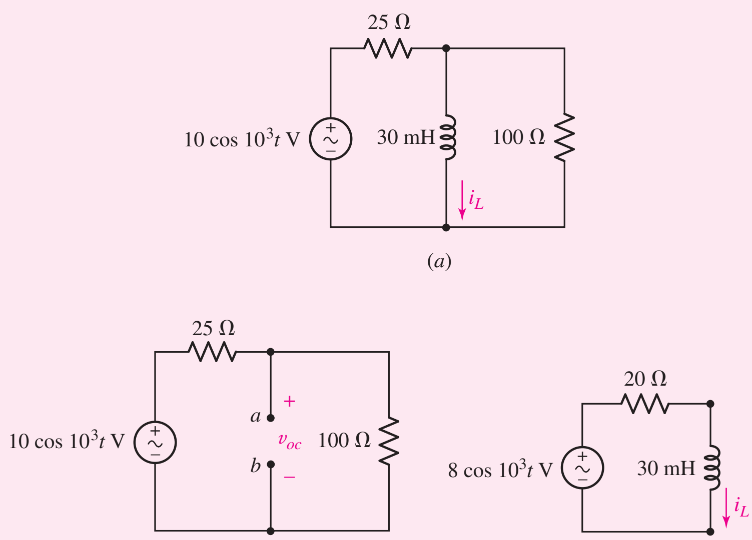
Una vez, hace mucho tiempo, se usaba el símbolo E (de fuerza electromotriz) para designar tensiones. Entonces, todos los estudiantes (en inglés) aprendían la frase "ELI the ICE man" como recordatorio de que la *tensión* (E) adelanta a la *corriente* en un circuito *inductivo*, mientras que la *corriente* (I) adelanta a la *tensión* en un circuito *capacitivo*. Ahora que usamos V en vez de E, ya no es lo mismo.

retrasada de la tensión por 90°. De una manera similar podemos demostrar que la corriente que circula a través de un capacitor adelanta a la tensión por 90°.

La diferencia de fase entre la corriente y la tensión depende de la proporción entre las cantidades ωL y R. Denominamos a ωL como la *reactancia inductiva* del inductor, que se mide en ohms y es una medida de la oposición que ofrece el inductor al paso de una corriente senoidal.

EJEMPLO 10.1

Determine la corriente i_L del circuito de la figura 10.5*a*, si los transitorios ya se han extinguido.



■ **FIGURA 10.5** (*a*) Circuito del ejemplo 10.1, en el que se desea obtener la corriente i_L. (*b*) Se quiere calcular el equivalente de Thévenin en las terminales *a* y *b*. (*c*) Circuito simplificado.

Aunque el circuito tiene una fuente senoidal y un único inductor, contiene dos resistencias y no es un lazo simple. Para aplicar los resultados del análisis precedente, necesitamos encontrar el equivalente de Thévenin visto desde las terminales *a* y *b* de la figura 10.5*b*.

La tensión en circuito abierto v_{oc} es

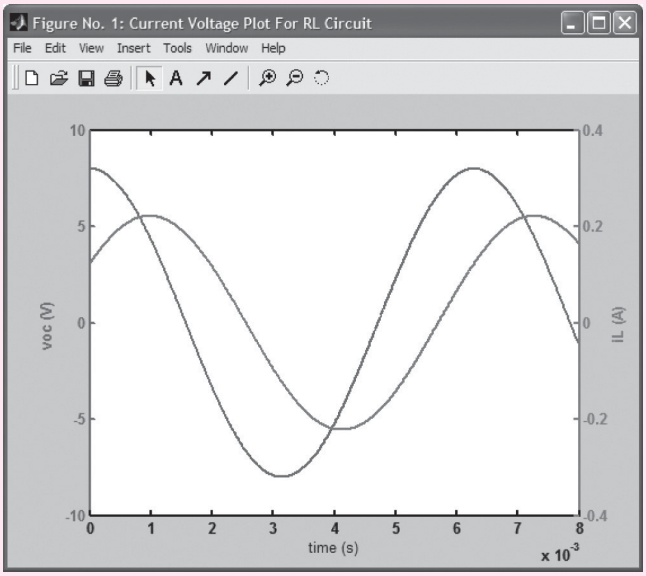
$$v_{oc} = (10 \cos 10^3 t)\frac{100}{100 + 25} = 8 \cos 10^3 t \qquad \text{V}$$

Puesto que no hay fuentes dependientes a la vista, calculamos R_{th} mediante la supresión de la fuente independiente para luego obtener la resistencia de la red pasiva, por lo que $R_{th} = (25 \times 100)/(25 + 100) = 20\ \Omega$.

Ahora tenemos un circuito *RL* en serie, con $L = 30$ mH, $R_{th} = 20\ \Omega$ y una tensión de fuente de $8 \cos 10^3 t$ V, como se ilustra en la figura 10.5*c*. Así, al aplicar la ecuación [4], que se obtuvo de un circuito en serie *RL* general, tenemos que

$$i_L = \frac{8}{\sqrt{20^2 + (10^3 \times 30 \times 10^{-3})^2}} \cos\left(10^3 t - \tan^{-1}\frac{30}{20}\right)$$
$$= 222\cos(10^3 t - 56.3°) \qquad \text{mA}$$

Las formas de onda de tensión y corriente se grafican en la figura 10.6.



■ **FIGURA 10.6** Formas de onda de tensión y corriente en una gráfica de eje dual que se generó mediante el uso de MATLAB:

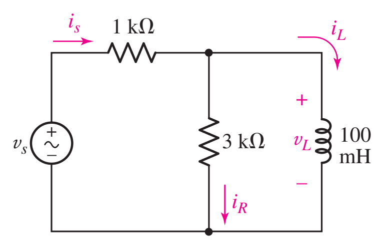
```
EDU» t = linspace(0,8e-3,1000);
EDU» v = 8*cos(1000*t);
EDU» i = 0.222*cos(1000*t-6.3*pi/180);
EDU» plotty(t,v,t,i);
EDU» xlabel('time (s)');
```

Observe que no existe ninguna diferencia de fase de 90° entre las formas de onda de corriente y tensión de la gráfica. Lo anterior se debe a que no estamos graficando la tensión en el inductor, la cual se deja como ejercicio para el lector.

PRÁCTICA

10.3 Sea $v_s = 40 \cos 8\,000t$ V en el circuito de la figura 10.7. Aplique el teorema de Thévenin en los casos en que éste sea más adecuado, y determine el valor en $t = 0$ para: (*a*) i_L; (*b*) v_L; (*c*) i_R; (*d*) i_s.

Respuestas: 18.71 mA; 15.97 V; 5.32 mA; 24.0 mA.



■ **FIGURA 10.7**

10.3 FUNCIÓN FORZADA COMPLEJA

El método que acabamos de emplear funciona: la respuesta correcta se obtiene de una manera sencilla. Sin embargo, el método no es particularmente elegante, y después de aplicarlo a algunos circuitos, sigue siendo tan poco ágil y tan torpe como la primera

vez que lo usamos. El problema real no es la fuente variable con el tiempo, sino el inductor (o el capacitor), ya que un circuito puramente resistivo no es más difícil de analizar con fuentes senoidales que con fuentes de cd, ya que sólo resultan ecuaciones algebraicas. Sucede que si no tenemos ningún interés en la respuesta *transitoria* hay un procedimiento alterno para obtener la respuesta senoidal en estado estable de cualquier circuito lineal. La clara ventaja de esta alternativa es que nos permite relacionar la corriente y la tensión correspondientes a cualquier elemento usando una simple expresión algebraica.

El apéndice 5 define los números complejos y los términos relacionados, hace un repaso de la aritmética compleja y desarrolla la identidad de Euler, así como la relación entre las formas exponencial y polar.

La idea básica es que las senoidales y las exponenciales se relacionan mediante números complejos. La identidad de Euler, por ejemplo, establece que

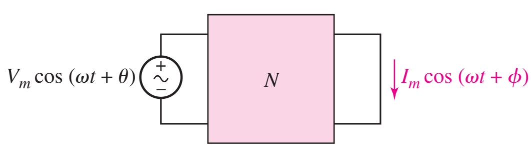
$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta$$

Mientras la derivada de una función de coseno da una función seno (negativa), la derivada de una función exponencial es simplemente una versión escalada de la misma exponencial. Si en este momento usted está pensando: "¡Todo esto es formidable, pero no hay números imaginarios en ningún circuito que jamás pienso construir!", esto puede ser verdad. Lo que estamos a punto de ver, sin embargo, es que agregando fuentes imaginarias a nuestros circuitos da por resultado fuentes complejas que (sorprendentemente) simplifican el proceso de análisis. Podría parecer al principio una idea extraña, pero una reflexión de un momento nos debe recordar que la superposición exige que cualquier fuente *imaginaria* que podamos agregar causará sólo respuestas *imaginarias*, y las fuentes reales sólo pueden producir respuestas reales. Por lo tanto, en cualquier punto, debemos ser capaces de separar las dos simplemente tomando la parte real de cualquier tensión o corriente.

En la figura 10.8, una fuente senoidal descrita por

$$V_m\cos(\omega t + \theta) \qquad [5]$$

se conecta a una red general, la cual supondremos que contiene sólo elementos pasivos (es decir, sin fuentes independientes) para no tener que apelar al principio de superposición. Se debe determinar una respuesta de corriente en alguna otra rama de la red, por lo que los parámetros que aparecen en la ecuación [5] son cantidades reales, sin excepción.



■ **FIGURA 10.8** La función forzada senoidal $V_m\cos(\omega t + \theta)$ produce la respuesta senoidal de estado permanente $I_m\cos(\omega t + \phi)$.

Mostramos que podríamos representar la respuesta mediante la función coseno general:

$$I_m\cos(\omega t + \phi) \qquad [6]$$

Una función forzada senoidal siempre da lugar a una respuesta forzada senoidal de la misma frecuencia en un circuito lineal.

Cambiemos ahora la referencia de tiempo corriendo la fase de la función forzada de 90°, o cambiando el instante que denominamos $t = 0$. De tal forma, cuando se aplica la función forzada

$$V_m\cos(\omega t + \theta - 90°) = V_m\,\text{sen}(\omega t + \theta) \qquad [7]$$

a la misma red, causará una respuesta correspondiente, esto es,

$$I_m \cos(\omega t + \phi - 90^\circ) = I_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{8}$$

A continuación partimos de la realidad física al aplicar una función forzada imaginaria, una que no se puede aplicar en el laboratorio, pero sí de manera matemática.

Fuentes imaginarias conducen a. . . respuestas imaginarias

Construimos una fuente imaginaria de modo muy simple; sólo es necesario multiplicar la ecuación [7] por j, el operador imaginario. Aplicamos entonces

$$j V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \tag{9}$$

Los ingenieros eléctricos utilizan "j" en vez de "i" para representar $\sqrt{-1}$ y evitar confundirlo con las corrientes.

¿Cuál es la respuesta? Si hubiéramos duplicado la fuente, el principio de linealidad requeriría que se duplicara la respuesta; la multiplicación de la función forzada por una constante k produciría la multiplicación de la respuesta por la misma constante k. El hecho de que la constante sea $\sqrt{-1}$ no cambia esta relación. La respuesta a la fuente imaginaria de la ecuación [9] es, entonces,

$$j I_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{10}$$

La fuente imaginaria y la respuesta se indican en la figura 10.9.

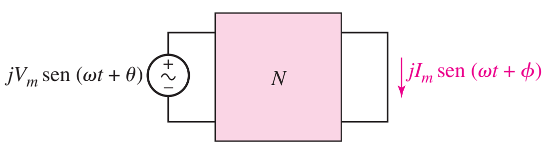


FIGURA 10.9 La función forzada senoidal imaginaria $jV_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ produce la respuesta senoidal imaginaria $jI_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ en la red de la figura 10.8.

Aplicación de una función forzada compleja

Hemos aplicado una *fuente real* y obtenido una respuesta *real*; también hemos aplicado una fuente *imaginaria* y logramos una respuesta *imaginaria*. En razón de que trabajamos con un circuito *lineal*, podríamos recurrir al teorema de la superposición para encontrar la respuesta a una función forzada compleja, que es la suma de las funciones forzadas real e imaginaria. De tal modo, la suma de las funciones forzadas de las ecuaciones [5] y [9] es

$$V_m \cos(\omega t + \theta) + j V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \tag{11}$$

por lo cual debe producir una respuesta que es la suma de las ecuaciones [6] y [10]:

$$I_m \cos(\omega t + \phi) + j I_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{12}$$

La fuente y la respuesta complejas tal vez se representan de manera más simple aplicando la identidad de Euler, la cual establece que $\cos(\omega t + \theta) + j \operatorname{sen}(\omega t + \theta) = e^{j(\omega t + \theta)}$.

Por lo tanto, la fuente de la ecuación [11] se convierte entonces en

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} \qquad [13]$$

y la respuesta de la ecuación [12] es

$$I_m e^{j(\omega t+\phi)} \qquad [14]$$

La fuente y la respuesta complejas se ilustran en la figura 10.10.

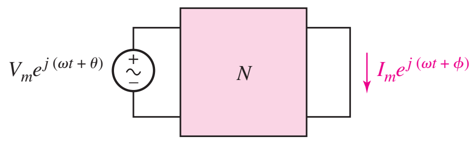


FIGURA 10.10 La función forzada compleja $V_m\, e^{j(\omega t+\theta)}$ produce la respuesta compleja $I_m\, e^{j(\omega t+\theta)}$ en la red de la figura 10.8.

Nuevamente, la linealidad nos asegura que la parte *real* de la respuesta compleja la produce la parte *real* de la función forzada compleja, mientras que la parte *imaginaria* de la respuesta la causa la parte *imaginaria* de la función forzada compleja. Nuestro plan es que en lugar de aplicar una función forzada *real* para obtener la respuesta real deseada, sustituimos una función forzada *compleja* cuya parte real es la función forzada real dada; esperamos obtener una respuesta compleja cuya parte real sea la respuesta real deseada. La ventaja de este procedimiento es que las ecuaciones integrodiferenciales que describen la respuesta de estado permanente de un circuito se conviertan ahora en simples ecuaciones algebraicas.

Alternativa algebraica a las ecuaciones diferenciales

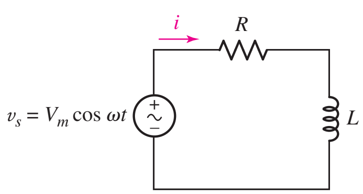


FIGURA 10.11 Se analizará un circuito simple en estado senoidal permanente mediante la aplicación de una función forzada compleja.

Ensayemos esta idea en el circuito *RL* simple de la figura 10.11. Aplicamos la fuente real $V_m \cos \omega t$ y deseamos la respuesta real $i(t)$. Puesto que

$$V_m \cos \omega t = \text{Re}\{V_m \cos \omega t + jV_m \operatorname{sen} \omega t\} = \text{Re}\{V_m e^{j\omega t}\}$$

la fuente compleja necesaria es

$$V_m e^{j\omega t}$$

Expresamos la respuesta compleja que se produce en términos de una amplitud desconocida I_m y un ángulo de fase desconocido ϕ:

$$I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

Al escribir la ecuación diferencial de este circuito particular,

$$Ri + L\frac{di}{dt} = v_s$$

insertamos las expresiones complejas de v_s e i:

$$RI_m e^{j(\omega t+\phi)} + L\frac{d}{dt}(I_m e^{j(\omega t+\phi)}) = V_m e^{j\omega t}$$

tomamos la derivada indicada:

$$RI_m e^{j(\omega t+\phi)} + j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)} = V_m e^{j\omega t}$$

y obtenemos una ecuación *algebraica*. Para determinar el valor de I_m y ϕ, dividimos todo entre el factor común $e^{j\omega t}$:

$$RI_m e^{j\phi} + j\omega L I_m e^{j\phi} = V_m$$

factorizando el lado izquierdo:

$$I_m e^{j\phi}(R + j\omega L) = V_m$$

y reordenando:

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{R + j\omega L}$$

identificamos I_m y ϕ expresando el lado derecho de la ecuación en forma exponencial o polar:

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j[-\tan^{-1}(\omega L/R)]} \qquad [15]$$

Por lo tanto,

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

y

$$\phi = -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

En notación polar, esta expresión se escribiría como

$$I_m \underline{/\phi}$$

o

$$V_m/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\ \underline{/-\tan^{-1}(\omega L/R)}$$

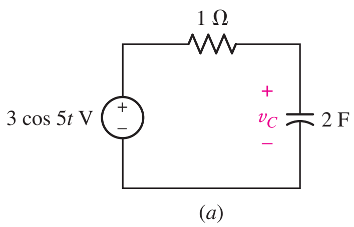
La respuesta compleja está dada por la ecuación [15]. En razón de que I_m y ϕ se identifican con facilidad, escribimos de inmediato la expresión de $i(t)$. Sin embargo, si necesitamos recurrir a un método más riguroso, obtendríamos la respuesta real $i(t)$ reinsertando el factor $e^{j\omega t}$ en ambos lados de la ecuación [15] y tomando la parte real. De cualquier manera, encontramos que

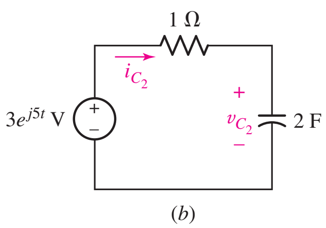
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)$$

lo cual concuerda con la respuesta obtenida en la ecuación [4] para el mismo circuito.

EJEMPLO 10.2

Para el circuito simple de *RC* de la figura 10.12*a*, sustituya la fuente por una fuente compleja adecuada y úsela para despejar la tensión de estado estable del capacitor.





■ **FIGURA 10.12** (*a*) Un circuito RC para el que se requiere la tensión senoidal del capacitor en estado estable. (*b*) Circuito modificado en el que se ha sustituido la fuente real por una fuente compleja.

Como la fuente real es 3 cos 5*t*, "reemplazamos" por una fuente compleja $3e^{j5t}$ V. Llamamos a la nueva tensión del capacitor v_{C_2} y definimos una corriente del capacitor i_{C_2} coherente con la convención de signo pasivo (figura 10.12*b*).

La ecuación diferencial se puede obtener ahora por simple aplicación de la LVK,

$$-3e^{j5t} + 1i_{C_2} + v_{C_2} = 0$$

o

$$-3e^{j5t} + 2\frac{dv_{C_2}}{dt} + v_{C_2} = 0$$

Esperamos una respuesta de estado estable de la misma forma que la fuente; en otras palabras,

$$v_{C_2} = V_m e^{j5t}$$

Al sustituir esto en la ecuación diferencial y reacomodar los términos, obtenemos

$$j10V_m e^{j5t} + V_m e^{j5t} = 3e^{j5t}$$

Al cancelar el término exponencial encontramos

$$V_m = \frac{3}{1 + j10} = \frac{3}{\sqrt{1 + 10^2}} \underline{/-\tan^{-1}(10/1)} \text{ V}$$

y la tensión de estado estable del capacitor está dada por

$$\text{Re}\{v_{C_2}\} = \text{Re}\{29.85e^{-j84.3^\circ} e^{j5t} \text{ mV}\} = 298.5\cos(5t - 84.3^\circ) \text{ mV}$$

PRÁCTICA

(Si se tienen problemas al trabajar con este problema de práctica, consulte el apéndice 5)

10.4 Calcule y exprese los resultados en forma rectangular:

(*a*) $[(2\underline{/30^\circ})(5\underline{/-110^\circ})](1 + j2)$; (*b*) $(5\underline{/-200^\circ}) + 4\underline{/20^\circ}$. Evaluar y expresar el resultado en forma polar: (*c*) $(2 - j7)/(3 - j)$; (*d*) $8 - j4 + [(5\underline{/80^\circ})/(2\underline{/20^\circ})]$.

10.5 Si se especifica el uso de la convención de signos pasiva, determine: (*a*) la tensión compleja que se produce cuando se aplica la corriente compleja $4e^{j800t}$ A a la combinación en serie de un capacitor de 1 mF y una resistencia de 2 Ω; (*b*) la corriente compleja que se obtiene cuando se aplica la tensión compleja $100e^{j2\,000t}$ V en una combinación en paralelo de un inductor de 10 mH y una resistencia de 50 Ω.

Respuestas: 10.4: $21.4 - j6.38$; $-0.940 + j3.08$; $2.30 \underline{/-55.6^\circ}$; 9.43; $\underline{/-11.22^\circ}$.
10.5: $9.43e^{j(800t - 32.0^\circ)}$ V; $5.39e^{j(2\,000t - 68.2^\circ)}$ A.

10.4 EL FASOR

En la última sección, vimos que la adición de una fuente senoidal imaginaria llevaba a ecuaciones algebraicas que describen la respuesta senoidal de estado estable de un circuito. Un paso intermedio del análisis fue la "cancelación" del término exponencial complejo: una vez que se obtuvo su derivada, aparentemente ya no tenía utilidad hasta que se deseara la forma real de la respuesta. Aun entonces era posible leer la magnitud y el ángulo de fase directamente a partir del análisis, y así saltarse el paso en el que explícitamente tomamos la parte real. Otra forma de verlo es que cada tensión y cada corriente del circuito contiene el mismo factor $e^{j\omega t}$ y la frecuencia, aunque importa en el análisis, *no cambia* al desplazarnos por el circuito. Arrastrarla por todos lados, por lo tanto, es un poco de desperdicio de tiempo.

Volviendo al ejemplo 10.2, entonces, podríamos representar la fuente como

$$3e^{j0°}\text{ V} \qquad \text{(o incluso sólo 3 V)}$$

$e^{j0} = \cos 0 + j \text{ sen } 0 = 1.$

y la tensión del capacitor como $V_m e^{j\phi}$, que finalmente determinamos como 0.02985 $e^{-j84.3°}$ V. Aquí está implícito el conocimiento de la frecuencia de la fuente; sin éste, no podríamos reconstruir ninguna tensión ni ninguna corriente.

Estas cantidades complejas suelen escribirse en forma polar, en vez de exponencial, para conseguir un pequeño ahorro de tiempo y esfuerzo adicionales. Por ejemplo, la tensión de fuente

Se debe recordar que ninguno de los circuitos que se consideran responderá a una frecuencia que no sea la de la fuente de excitación, lo que siempre se conoce por el valor de ω.

$$v(t) = V_m \cos \omega t = V_m \cos (\omega t + 0°)$$

la representa ahora en forma compleja como

$$V_m\underline{/0°}$$

y la respuesta de corriente

$$i(t) = I_m \cos (\omega t + \phi)$$

se convierte en

$$I_m\underline{/\phi}$$

Esta representación compleja abreviada recibe el nombre de ***fasor***.[1]

Revisemos los pasos mediante los cuales una tensión o corriente senoidal se transforma en un fasor, y luego podremos definir un fasor con mayor sentido y asignar un símbolo para representarlo.

Una corriente senoidal real

$$i(t) = I_m \cos (\omega t + \phi)$$

se expresa como la parte real de una cantidad compleja al recurrir a la identidad de Euler

$$i(t) = \text{Re}\left\{I_m e^{j(\omega t + \phi)}\right\}$$

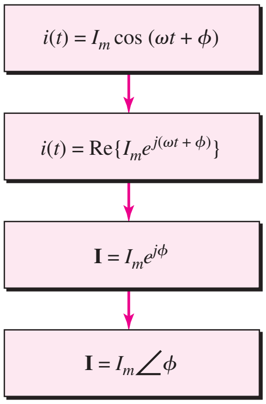
Cuando representamos la corriente como una cantidad compleja mediante la eliminación de la instrucción Re{ }, con lo cual sumamos una componente imaginaria a la corriente sin afectar la componente real; además, logramos una simplificación adicional si suprimimos el factor $e^{j\omega t}$:

$$\mathbf{I} = I_m e^{j\phi}$$

y escribimos el resultado en forma polar:

$$\mathbf{I} = I_m\underline{/\phi}$$

[1] El lector no debe confundirse con el *phaser*, un interesante dispositivo que se presenta en una popular serie de televisión...



El proceso mediante el cual se cambia $i(t)$ a $\mathbf{I}$ recibe el nombre de *transformación fasorial* del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

¡Esta representación compleja abreviada es la *representación fasorial*!; los fasores son cantidades complejas y por ello se escriben con negritas. Las letras mayúsculas se usan para la representación fasorial de una cantidad eléctrica debido a que el fasor no es una función instantánea del tiempo: sólo contiene información de la amplitud y la fase. Reconocemos esta diferencia del punto de vista si consideramos a $i(t)$ como una *representación en el dominio del tiempo* y llamando al fasor $\mathbf{I}$ una *representación en el dominio de la frecuencia*. Debemos observar que la expresión en el dominio de la frecuencia de una corriente o de una tensión no incluye de manera explícita la frecuencia. El proceso de regresar del dominio de la frecuencia al dominio de tiempo es exactamente el inverso de la secuencia anterior. Así, dada la tensión fasorial

$$\mathbf{V} = 115 \underline{/-45^\circ} \text{ volts}$$

y el conocimiento de que $\omega = 500$ rad/s, podemos escribir directamente el equivalente en dominio de tiempo:

$$v(t) = 115 \cos(500t - 45^\circ) \qquad \text{volts}$$

Si la deseamos como onda senoidal, $v(t)$ se podría también escribir

$$v(t) = 115 \operatorname{sen}(500t + 45^\circ) \qquad \text{volts}$$

PRÁCTICA

10.6 Sea $\omega = 2\,000$ rad/s y $t = 1$ ms. Encuentre el valor instantáneo de cada una de las corrientes dadas aquí en forma fasorial: (*a*) $j10$ A; (*b*) $20 + j10$ A; (*c*) $20 + j(10\underline{/20^\circ})$ A.

Respuestas: −9.09 A; −17.42 A; −15.44 A.

EJEMPLO 10.3

Transforme la tensión en el dominio del tiempo $v(t) = 100 \cos(400t - 30^\circ)$ volts al dominio de la frecuencia.

La expresión en el dominio del tiempo ya está en la forma de una onda coseno con un ángulo de fase. Por lo tanto, al suprimir $\omega = 400$ rad/s, tenemos

$$\mathbf{V} = 100\underline{/-30^\circ} \text{ volts}$$

Observe que hemos omitido varios pasos al escribir de manera directa dicha representación. En ocasiones, este procedimiento confunde a los estudiantes, pues olvidan que la representación fasorial *no* es igual a la tensión en el dominio del tiempo $v(t)$. En vez de eso, constituye una forma simplificada de una función compleja formada al sumar una componente imaginaria a la función real $v(t)$.

PRÁCTICA

10.7 Transforme cada una de las siguientes funciones del tiempo a la forma fasorial: (*a*) $-5 \operatorname{sen}(580t - 110^\circ)$; (*b*) $3 \cos 600t - 5 \operatorname{sen}(600t + 110^\circ)$; (*c*) $8 \cos(4t - 30^\circ) + 4 \operatorname{sen}(4t - 100^\circ)$. *Sugerencia:* Convierta primero cada una en una función coseno simple con magnitud positiva.

Respuestas: $5 \underline{/-20^\circ}$; $2.41 \underline{/-134.8^\circ}$; $4.46 \underline{/-47.9^\circ}$.

El poder real de la técnica de análisis basada en fasores radica en el hecho de que se pueden definir relaciones *algebraicas* entre la tensión y la corriente en inductores y capacitores, del mismo modo que siempre hemos podido hacer en el caso de las resistencias. Ahora que tenemos la posibilidad de transformar dentro y fuera del dominio de la frecuencia, procedemos a la simplificación del análisis del estado senoidal permanente estableciendo la relación entre la tensión fasorial y la corriente fasorial de cada uno de los tres elementos pasivos.

La resistencia

La resistencia es el caso más simple. En el dominio del tiempo, como se indica mediante la figura 10.13*a*, la ecuación de definición es

$$v(t) = Ri(t)$$

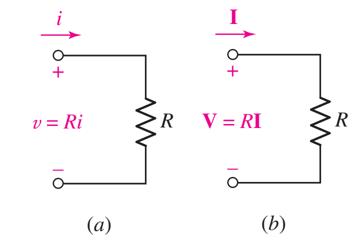


FIGURA 10.13 Una resistencia y su tensión y corriente asociadas en: (*a*) el dominio del tiempo, $v = Ri$; y (*b*) el dominio de la frecuencia, $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$.

Aplicaremos ahora la tensión compleja

$$v(t) = V_m e^{j(\omega t+\theta)} = V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \qquad [16]$$

y se supone la respuesta de corriente compleja

$$i(t) = I_m e^{j(\omega t+\phi)} = I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \qquad [17]$$

por lo que

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = Ri(t) = RI_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

Dividiendo entre $e^{j\omega t}$ encontramos que

$$V_m e^{j\theta} = RI_m e^{j\phi}$$

o, en forma polar,

$$V_m \underline{/\theta} = RI_m \underline{/\phi}$$

Pero $V_m \underline{/\theta}$ e $I_m \underline{/\phi}$ representan sólo los fasores generales de tensión y de corriente **V** e **I**. Por lo tanto,

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \qquad [18]$$

La ley de Ohm se cumple tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. En otras palabras, la tensión en la resistencia está dada siempre por la resistencia multiplicada por la corriente que fluye a través del elemento.

La relación tensión-corriente en forma fasorial de una resistencia tiene la misma forma que la relación entre la tensión y la corriente en el dominio del tiempo. La ecuación de definición en forma fasorial se ilustra en la figura 10.13*b*. Los ángulos θ y ϕ son iguales, por lo que la corriente y la tensión siempre están en fase.

Como un ejemplo del uso de las relaciones tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia, supongamos que existe una tensión de $8 \cos(100t - 50°)$ **V** en una resistencia de 4 Ω. Al trabajar en el dominio del tiempo, descubrimos que la corriente debe ser

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = 2 \cos(100t - 50°) \qquad \text{A}$$

La forma fasorial de la misma tensión es $8\underline{/-50°}$ V, por lo que

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R} = 2\underline{/-50°} \qquad \text{A}$$

Si transformamos esta respuesta de nuevo en el dominio del tiempo, resulta evidente que se obtiene la misma expresión de la corriente. Concluimos que no hay ahorro de tiempo o esfuerzo cuando un circuito *resistivo* se analiza en el dominio de la frecuencia.

El inductor

Consideremos ahora el inductor. La red en el dominio del tiempo se muestra en la figura 10.14*a*, y la ecuación de definición, una expresión en el dominio del tiempo, es

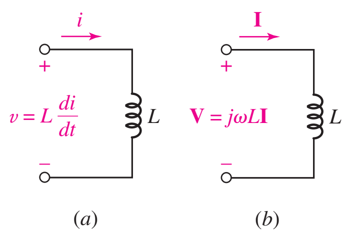


FIGURA 10.14 Un inductor y su tensión y corriente asociadas en (*a*) el dominio del tiempo, $v = L\,di/dt$; y (*b*) en el dominio de la frecuencia, $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$.

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad [19]$$

Después de sustituir la ecuación [16] de la tensión compleja y la ecuación [17] de la corriente compleja en la ecuación [19], tenemos que

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = L\frac{d}{dt}I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

Tomando la derivada indicada:

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

y dividiendo entre $e^{j\omega t}$:

$$V_m e^{j\theta} = j\omega L I_m e^{j\phi}$$

obtenemos la relación fasorial que se desea:

$$\boxed{\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}} \qquad [20]$$

La ecuación diferencial [19] en el dominio del tiempo se ha convertido en la ecuación algebraica [20] en el dominio de la frecuencia. La relación fasorial se indica en la figura 10.14*b*. Observe que el ángulo del factor $j\omega L$ es exactamente $+90°$ y que **I** debe, por lo tanto, estar retrasada de **V** por 90° en un inductor.

EJEMPLO 10.4

Aplique la tensión $8\underline{/-50°}$ V a una frecuencia $\omega = 100$ rad/s en un inductor de 4 H y determine la corriente fasorial y la corriente en el dominio del tiempo.

Utilizamos la expresión del inductor que se acaba de obtener:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L} = \frac{8\underline{/-50°}}{j100(4)} = -j0.02\underline{/-50°} = (1\underline{/-90°})(0.02\underline{/-50°})$$

o

$$\mathbf{I} = 0.02\underline{/-140°}\text{ A}$$

Si expresamos esta corriente en el dominio del tiempo, tenemos

$$i(t) = 0.02\cos(100t - 140°)\text{ A} = 20\cos(100t - 140°)\text{ mA}$$

El capacitor

El elemento final por considerar es el capacitor. La relación corriente-tensión en el dominio del tiempo es

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

La expresión equivalente en el dominio de la frecuencia se obtiene una vez más dejando que $v(t)$ e $i(t)$ sean las cantidades complejas de las ecuaciones [16] y [17]; si tomamos la derivada indicada, se suprime $e^{j\omega t}$ y se reconocen los fasores **V** e **I**, para obtener

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} \qquad [21]$$

De tal manera, **I** adelanta a **V** en 90° en un capacitor, lo cual, desde luego, no significa que ¡esté presente una respuesta de corriente un cuarto de periodo antes que la tensión que la provoca! Estamos estudiando la respuesta de estado permanente, y encontramos que la corriente máxima se debe a la tensión creciente que ocurre 90° antes que la tensión máxima.

Las representaciones en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia se comparan en la figura 10.15*a* y *b*. Hemos obtenido ahora las relaciones **V**-**I** de los tres elementos pasivos. Los resultados se resumen en la tabla 10.1, donde las expresiones v-i en el dominio del tiempo y las relaciones **V**-**I** en el dominio de la frecuencia de los tres elementos del circuito se muestran en columnas adyacentes. Todas las ecuaciones fasoriales son algebraicas, cada una es también lineal, y las ecuaciones que relacionan a la inductancia y la capacitancia guardan una gran similitud con la ley de Ohm. En realidad, se *usarán*, como se empleó la ley de Ohm.

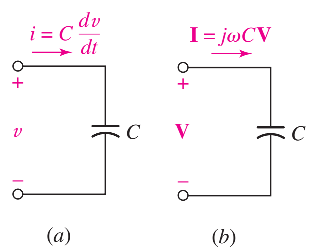


FIGURA 10.15 Relaciones (*a*) en el dominio del tiempo y (*b*) en el dominio de la frecuencia, entre la corriente del capacitor y la tensión.

TABLA **10.1** Comparación de las expresiones de tensión-corriente en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia

Dominio del tiempo		Dominio de la frecuencia	
i →, R, + v −	$v = Ri$	$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$	**I** →, R, + **V** −
i →, L, + v −	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$	**I** →, $j\omega L$, + **V** −
i →, C, + v −	$v = \dfrac{1}{C}\int i\,dt$	$\mathbf{V} = \dfrac{1}{j\omega C}\mathbf{I}$	**I** →, $1/j\omega C$, + **V** −

Leyes de Kirchhoff con fasores

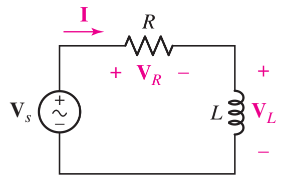
La ley de tensiones de Kirchhoff en el dominio del tiempo establece que

$$v_1(t) + v_2(t) + \cdots + v_N(t) = 0$$

Utilizamos ahora la identidad de Euler para sustituir cada tensión real v_i por una tensión compleja que tenga la misma parte real, suprimimos $e^{j\omega t}$ en todos lados y obtenemos

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_N = 0$$

Por lo tanto, vemos que la ley de tensiones de Kirchhoff se aplica a las tensiones fasoriales de la misma manera como ocurrió en el dominio del tiempo. Se prueba que la ley de corrientes de Kirchhoff se cumple para las corrientes fasoriales mediante un argumento similar.



■ **FIGURA 10.16** Circuito *RL* en serie con una tensión fasorial aplicada.

Consideremos ahora brevemente el circuito *RL* en serie que se ha estudiado varias veces; se muestra en la figura 10.16 y se indican una corriente fasorial y varias tensiones fasoriales. Obtendremos la respuesta deseada, una corriente en el dominio del tiempo, mediante la determinación, en primer lugar, de la corriente fasorial. A partir de la ley de tensiones de Kirchhoff, tenemos que

$$\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = \mathbf{V}_s$$

y utilizando las relaciones **V-I** de los elementos que acabamos de obtener

$$R\mathbf{I} + j\omega L\mathbf{I} = \mathbf{V}_s$$

La corriente fasorial se encuentra entonces en términos de la tensión de la fuente $\mathbf{V}_s$:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{R + j\omega L}$$

Elijamos una amplitud de la tensión de la fuente de V_m y un ángulo de fase de 0°. De tal modo,

$$\mathbf{I} = \frac{V_m\underline{/0^\circ}}{R + j\omega L}$$

La corriente se transformaría al dominio de tiempo si se le escribe primero en la forma polar, esto es,

$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\underline{/[-\tan^{-1}(\omega L/R)]}$$

y después, siguiendo la familiar secuencia de pasos para obtener de una manera muy sencilla el mismo resultado que obtuvimos anteriormente en este capítulo mediante el "camino difícil".

EJEMPLO 10.5

Para el circuito *RLC* de la figura 10.17, determine $\mathbf{I}_s$ e $i_s(t)$ si ambas fuentes operan a $\omega = 2$ rad/s y si $\mathbf{I}_C = 2\underline{/28^\circ}$ A.

El hecho de que se dé $\mathbf{I}_C$ y se pida $\mathbf{I}_s$ es todo el estímulo que se necesita para pensar en aplicar la LCK. Si identificamos la tensión del capacitor $\mathbf{V}_C$, congruente con la convención del signo pasivo, entonces

$$\mathbf{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}_C = \frac{-j}{2}\mathbf{I}_C = \frac{-j}{2}(2\underline{/28^\circ}) = (0.5\underline{/-90^\circ})(2\underline{/28^\circ}) = 1\underline{/-62^\circ}\text{ V}$$

Esta tensión también aparece entre las terminales de la resistencia de 2 Ω, de modo que la corriente $\mathbf{I}_{R_2}$ que fluye hacia abajo por esa rama es

$$\mathbf{I}_{R_2} = \frac{1}{2}\mathbf{V}_C = \frac{1}{2}\underline{/-62^\circ}\text{ A}$$

Entonces la LCK da $\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_{R_2} + \mathbf{I}_C = 1\underline{/-62^\circ} + \frac{1}{2}\underline{/-62^\circ} = (3/2)\underline{/-62^\circ}$ A.

(Debemos observar que la adición de estas cantidades polares fue trivial, ya que las corrientes de la resistencia y el capacitor tienen el mismo ángulo, es decir, están en fase.)

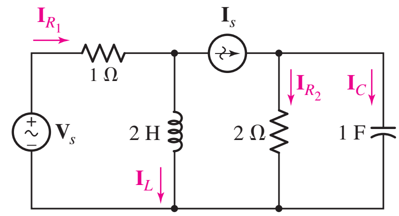
Así $\mathbf{I}_s$ y el conocimiento de ω nos permiten escribir directamente $i_s(t)$:

$$i_s(t) = 1.5\cos(2t - 62^\circ)\text{ A}$$

PRÁCTICA

10.8 En el circuito de la figura 10.17, ambas fuentes operan a $\omega = 1$ rad/s. Si $\mathbf{I}_C = 2\angle 28^\circ$ A e $\mathbf{I}_L = 3\angle 53^\circ$ A, calcule (*a*) $\mathbf{I}_s$; (*b*) $\mathbf{V}_s$; (*c*) $i_{R_1}(t)$.

Respuestas: (*a*)$2.24\angle 1.4^\circ$ A; (*b*) $6.11\angle 97.1^\circ$ V; (*c*) $4.73 \cos(t + 31.2^\circ)$ A.



■ **FIGURA 10.17** Un circuito de tres mallas. Cada fuente opera a la misma frecuencia ω.

10.5 IMPEDANCIA Y ADMITANCIA

Las relaciones de corriente-tensión de los tres elementos pasivos en el dominio de la frecuencia son (suponiendo que se satisface la convención de signos pasiva)

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

Si las ecuaciones se escriben como proporciones de tensión fasorial/corriente fasorial

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = j\omega L \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C}$$

comprobamos que las mismas son cantidades simples que dependen de los valores de los elementos (y de la frecuencia también, en el caso de la inductancia y la capacitancia). Tratamos estas proporciones de la misma manera que a las resistencias, con la excepción de que son cantidades complejas.

Definamos la proporción entre la tensión fasorial y la corriente fasorial como la ***impedancia***, simbolizada por la letra **Z**. Es una cantidad compleja que tiene las dimensiones en ohms; no es un fasor y no puede transformarse al dominio del tiempo multiplicándola por $e^{j\omega t}$ y tomando la parte real. En vez de eso, pensamos en un inductor que se represente en el dominio del tiempo mediante su inductancia L y en el dominio de la frecuencia por su impedancia $j\omega L$. Un capacitor en el dominio del tiempo tiene una capacitancia C; en el de la frecuencia, cuenta con una impedancia $1/j\omega C$. La impedancia es una parte del dominio de la frecuencia y no un concepto que sea parte del dominio del tiempo.

$\mathbf{Z}_R = R$
$\mathbf{Z}_L = j\omega L$
$\mathbf{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega C}$

Combinaciones de impedancia en serie

La validez de las dos leyes de Kirchhoff en el dominio de la frecuencia conduce al hecho de que las impedancias pueden combinarse en serie y en paralelo mediante las mismas reglas ya establecidas para las resistencias. Por ejemplo, en $\omega = 10 \times 10^3$ rad/s, un inductor de 5 mH en serie con un capacitor de 100 μF se puede sustituir por la suma de las impedancias individuales. La impedancia del inductor es

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j50\ \Omega$$

y la impedancia del capacitor está dada por

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = -j1\ \Omega$$

Observe que $\frac{1}{j} = -j$.

Por lo tanto, la impedancia de la combinación en serie corresponde a

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = \mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C = j50 - j1 = j49\ \Omega$$

La impedancia de inductores y de capacitores es una función de la frecuencia, y esta impedancia equivalente corresponde a una sola pulsación a la cual se calculó, $\omega =$ 10 000 rad/s. Si cambiamos la frecuencia a $\omega = 5\,000$ rad/s, por ejemplo, $\mathbf{Z}_{\text{eq}} = j23\ \Omega$.

Combinaciones de impedancias en paralelo

La combinación en *paralelo* del inductor de 5 mH y el capacitor de 100 μF en $\omega = 10\,000$ rad/s se calcula exactamente del mismo modo que se calcularon las resistencias en paralelo:

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{(j50)(-j1)}{j50 - j1} = \frac{50}{j49} = -j1.020\ \Omega$$

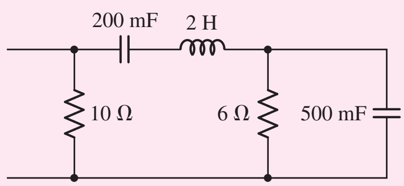
Con $\omega = 5\,000$ rad/s, el equivalente paralelo es $-j2.17\ \Omega$.

Reactancia

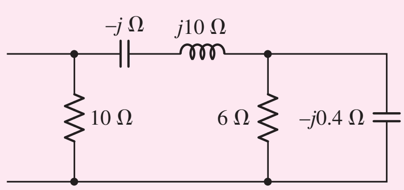
Por supuesto, podemos elegir expresar la impedancia ya sea en forma *rectangular* ($\mathbf{Z} = R + jX$) o *polar* ($\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}|\underline{/\theta}$). En la forma rectangular podemos ver claramente la parte real que proviene sólo de las resistencias reales, y una componente imaginaria, llamada ***reactancia***, que surge de los elementos de almacenamiento de energía. Tanto la resistencia como la reactancia tienen unidades de ohms, pero la reactancia siempre dependerá de la frecuencia. Una resistencia ideal tiene cero reactancia; un inductor o un capacitor ideal es puramente reactivo (es decir, caracterizado por cero resistencia). ¿Una combinación en serie o en paralelo puede incluir *tanto* un capacitor *como* un inductor y aun así tener *cero reactancia*? ¡Seguro! Considere la conexión en serie de una resistencia de 1 Ω, un capacitor de 1 F y un inductor de 1 H operados a $\omega = 1$ rad/s. $\mathbf{Z}_{eq} = 1 - j(1)(1) + j(1)(1) = 1\ \Omega$. A esa frecuencia específica, el equivalente es una simple resistencia de 1 Ω. Sin embargo, hasta pequeñas desviaciones de $\omega = 1$ rad/s dan por resultado reactancia diferente a cero.

EJEMPLO 10.6

Determine la impedancia equivalente de la red de la figura 10.18*a*, la cual produce una pulsación de operación de 5 rad/s.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 10.18** (*a*) Red que se va a sustituir por una sola impedancia equivalente. (*b*) Los elementos se sustituyen por sus impedancias en $\omega = 5$ rad/s.

En primer lugar debemos convertir las resistencias, capacitores y el inductor en las impedancias correspondientes, como se muestra en la figura 10.18*b*.

Luego de examinar la red resultante, observamos que la impedancia de 6 Ω está en paralelo con $-j0.4$ Ω. Esta combinación equivale a

$$\frac{(6)(-j0.4)}{6-j0.4} = 0.02655 - j0.3982\ \Omega$$

que está en serie con las impedancias $-j\Omega$ y $j10\ \Omega$, de modo que tenemos

$$0.0265 - j0.3982 - j + j10 = 0.02655 + j8.602\ \Omega$$

Esta nueva impedancia está en paralelo con 10 Ω, por lo que la impedancia equivalente de la red resulta ser

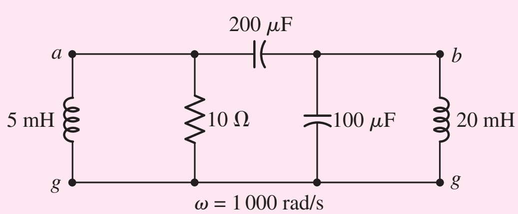
$$10 \parallel (0.02655 + j8.602) = \frac{10(0.02655 + j8.602)}{10 + 0.02655 + j8.602}$$

$$= 4.255 + j4.929\ \Omega$$

Alternativamente, podemos expresar la impedancia en forma polar como $6.511\underline{/49.2^\circ}$ Ω.

PRÁCTICA

10.9 De acuerdo con la red de la figura 10.19, determine la impedancia de entrada $\mathbf{Z}_{ent}$ que se mediría entre las terminales: (*a*) *a* y *g*; (*b*) *b* y *g*; (*c*) *a* y *b*.



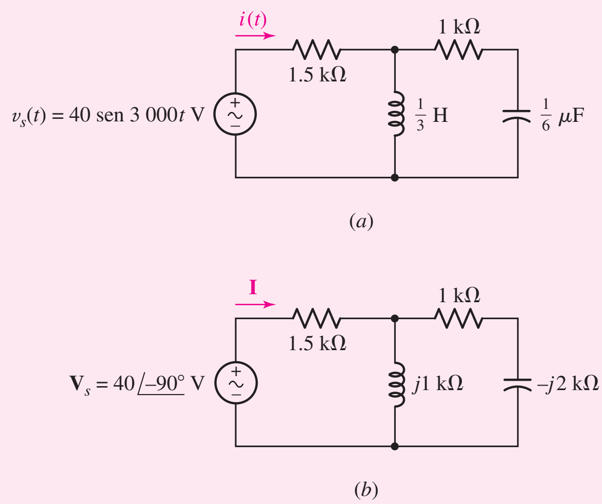
■ **FIGURA 10.19**

Respuestas: $2.81 + j4.49$ Ω; $1.798 - j1.124$ Ω; $0.1124 - j3.82$ Ω.

Es importante notar que la componente resistiva de la impedancia no necesariamente es igual a la resistencia que está presente en la red. Por ejemplo, una resistencia de 10 Ω y un inductor de 5 H en serie con $\omega = 4$ rad/s tiene una impedancia equivalente $\mathbf{Z} = 10 + j20$ Ω, o en forma polar, $22.4\underline{/63.4^\circ}$ Ω. En este caso, la componente resistiva de la impedancia resulta igual a la resistencia en serie debido a que se trata de una red simple en serie. Sin embargo, si los dos elementos se ponen en paralelo, la impedancia equivalente es $10(j20)/(10 + j20)$ Ω, u $8 + j4$ Ω. El componente resistivo de la impedancia es ahora 8 Ω.

EJEMPLO 10.7

Determine la corriente $i(t)$ en el circuito que se muestra en la figura 10.20*a*.



■ **FIGURA 10.20** (*a*) Circuito *RLC* para el que se desea la respuesta forzada senoidal $i(t)$. (*b*) Equivalente en el dominio de la frecuencia del circuito dado en $\omega = 3\,000$ rad/s.

▶ ***Identificar el objetivo del problema.***

Debemos determinar la corriente senoidal de estado permanente que fluye por la resistencia de 1.5 kΩ debido a la fuente de tensión de 3 000 rad/s de pulsación.

▶ ***Intentar obtener la solución.***

En primer lugar debemos dibujar un circuito en el dominio de la frecuencia. La fuente se transforma en la representación del dominio de la frecuencia $40\underline{/-90^\circ}$ V, la respuesta en el dominio de la frecuencia se representa como **I**, y las impedancias del inductor y el capacitor, determinadas a $\omega = 3\,000$ rad/s, son j kΩ y $-j2$ kΩ, respectivamente. En la figura 10.20*b* se ilustra el circuito correspondiente en el dominio de la frecuencia.

▶ ***Decidir la técnica que mejor se justa al problema.***

Analizaremos el circuito de la figura 10.20*b* para obtener **I**; mediante la combinación de las impedancias y con base en el uso de la ley de Ohm es un método factible. Después utilizaremos el hecho de que se conoce $\omega = 3\,000$ rad/s para convertir **I** en una expresión en el dominio del tiempo.

▶ ***Construir un conjunto apropiado de ecuaciones.***

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = 1.5 + \frac{(j)(1-2j)}{j+1-2j} = 1.5 + \frac{2+j}{1-j}$$

$$= 1.5 + \frac{2+j}{1-j}\,\frac{1+j}{1+j} = 1.5 + \frac{1+j3}{2}$$

$$= 2 + j1.5 = 2.5\underline{/36.87^\circ}\ \text{k}\Omega$$

En consecuencia, la corriente fasorial es simplemente:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_{eq}}$$

▶ ***Determinar si se requiere información adicional.***
Si sustituimos los valores conocidos en la relación, tendremos

$$\mathbf{I} = \frac{40\angle -90^\circ}{2.5\angle 36.87^\circ} \text{ mA}$$

lo cual, junto con el conocimiento de que $\omega = 3\,000$ rad/s, resulta suficiente para resolver respecto de $i(t)$.

▶ ***Buscar la solución.***
Esta expresión compleja se simplifica con facilidad a un número complejo en forma polar:

$$\mathbf{I} = \frac{40}{2.5}\angle -90^\circ - 36.87^\circ \text{ mA} = 16.00\angle -126.9^\circ \text{ mA}$$

Luego de transformar la corriente en el dominio del tiempo, obtenemos la respuesta deseada:

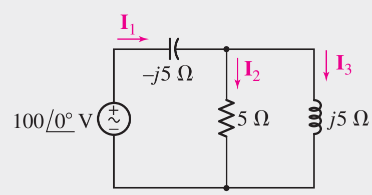
$$i(t) = 16\cos(3\,000t - 126.9^\circ) \qquad \text{mA}$$

▶ ***Verificar la solución. ¿Es razonable o la esperada?***
La impedancia efectiva conectada a la fuente tiene un ángulo de $+36.87^\circ$, lo que indica que presenta un carácter inductivo neto, o que la corriente estará retrasada respecto de la tensión. Puesto que la fuente de tensión tiene un ángulo de fase de -90° (luego de convertirse en una fuente de cosenos), observamos que la respuesta es congruente.

PRÁCTICA

10.10 En el circuito de la figura 10.21, determine en el dominio de la frecuencia: (*a*) $\mathbf{I}_1$; (*b*) $\mathbf{I}_2$; (*c*) $\mathbf{I}_3$.

Respuestas: $28.3\angle 45^\circ$ A; $20\angle 90^\circ$ A; $20\angle 0^\circ$ A.



■ **FIGURA 10.21**

Antes de que empecemos a escribir muchas ecuaciones en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia, es muy importante que evitemos la elaboración de ecuaciones que están parcialmente en el dominio del tiempo, parcialmente en el dominio de la frecuencia y son por completo incorrectas. Una pista que indica que se ha cometido un error es la aparición de un número complejo y de una t en la misma ecuación, salvo en el factor $e^{j\omega t}$. Y, puesto que $e^{j\omega t}$ desempeña un papel mucho mayor en las derivaciones que en las aplicaciones, conviene señalar que los estudiantes que descubran que crearon una ecuación con j y t, o con $\angle__$ y t, han formulado tal monstruo que el mundo estaría mejor sin él.

Por ejemplo, unas cuantas ecuaciones antes vimos que:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{40\angle -90^\circ}{2.5\angle 36.9^\circ} = 16\angle -126.9^\circ \text{ mA}$$

Por favor no intente nada como lo siguiente:

$$i(t) \neq \frac{40 \text{ sen } 3\,000t}{2.5\underline{/36.9^\circ}}$$

o

$$i(t) \neq \frac{40 \text{ sen } 3\,000t}{2 + j1.5}$$

Admitancia

$$\mathbf{Y}_R = \frac{1}{R}$$
$$\mathbf{Y}_L = \frac{1}{j\omega L}$$
$$\mathbf{Y}_C = j\omega C$$

Hay un término general (sin unidades) tanto para la impedancia como para la admitancia –*imitancia*– que se usa algunas veces, pero no muy frecuentemente.

Aunque el concepto de impedancia es muy útil y en cierta forma familiar, con base en nuestra experiencia en resistencias, su valor recíproco es con frecuencia igual de valioso. Definimos esta cantidad como ***admitancia*** **Y** de un elemento o de una red pasiva de un circuito, y es simplemente la relación de corriente a tensión:

La parte real de la admitancia es la ***conductancia*** G, y la parte imaginaria es la ***susceptancia*** B. Las tres cantidades (**Y**, G y B) se miden en siemens.

La parte real de la admitancia es la ***conductancia*** G, y la parte imaginaria de la admitancia es la ***susceptancia*** B. De tal manera,

$$\mathbf{Y} = G + jB = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R + jX} \qquad [22]$$

La ecuación [22] debe revisarse con cuidado; ¡*no* establece que la parte real de la admitancia sea igual al recíproco de la parte real de la impedancia, o que la parte imaginaria de la admitancia resulta igual al recíproco de la parte imaginaria de la admitancia!

PRÁCTICA

10.11 Determine la admitancia (en forma rectangular) de: (*a*) una impedancia $\mathbf{Z} = 1\,000 + j400\ \Omega$; (*b*) una red compuesta por la combinación en paralelo de una resistencia de 800 Ω, un inductor de 1 mH y un capacitor de 2 nF si $\omega = 1$ Mrad/s; (*c*) una red constituida por la combinación en serie de una resistencia de 800 Ω, un inductor de 1 mH y un capacitor de 2 nF, si $\omega = 1$ Mrad/s.

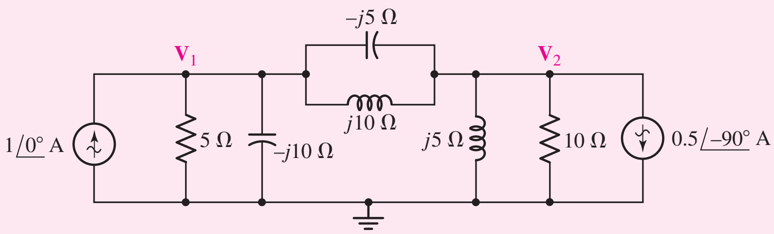
Respuestas: $0.862 - j0.345$ mS; $1.25 + j1$ mS; $0.899 - j0.562$ mS.

10.6 ANÁLISIS NODAL Y DE MALLA

Anteriormente hicimos un gran trabajo con las técnicas de análisis nodal y de malla, por lo que resulta razonable preguntar si podría ser válido un procedimiento similar en términos de fasores e impedancias para el estado senoidal permanente. Ya sabemos que ambas leyes de Kirchhoff resultan válidas en el caso de los fasores; además, tenemos una ley similar a la de Ohm para los elementos pasivos $\mathbf{V} = \mathbf{ZI}$. En otras palabras, las leyes sobre las que se sustenta el análisis nodal son verdaderas para los fasores y, por lo tanto, deberíamos proceder a analizar circuitos mediante técnicas nodales en el estado senoidal permanente. Con argumentos similares, establecemos que los métodos del análisis de malla también resultan válidos (y a menudo útiles).

EJEMPLO 10.8

Determine las tensiones de nodo $v_1(t)$ y $v_2(t)$ en el dominio del tiempo del circuito de la figura 10.22.



■ **FIGURA 10.22** Circuito en el dominio de la frecuencia en el que se identifican las tensiones de nodo $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$.

Se indican como fasores dos fuentes de corriente; así como las tensiones de nodo fasoriales $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$. En el nodo izquierdo se aplica la LCK, de lo que resulta que:

$$\frac{\mathbf{V}_1}{5} + \frac{\mathbf{V}_1}{-j10} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{-j5} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{j10} = 1\underline{/0^\circ} = 1 = j0$$

En el nodo derecho:

$$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{-j5} + \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{j10} + \frac{\mathbf{V}_2}{j5} + \frac{\mathbf{V}_2}{10} = -(0.5\underline{/-90^\circ}) = j0.5$$

Combinando términos, tenemos

$$(0.2 + j0.2)\mathbf{V}_1 - j0.1\mathbf{V}_2 = 1$$

y

$$-j0.1\mathbf{V}_1 + (0.1 - j0.1)\mathbf{V}_2 = j0.5$$

Estas ecuaciones se resuelven con faciliad en la mayoría de las calculadoras científicas, y el resultado será $\mathbf{V}_1 = 1 - j2$ V y $\mathbf{V}_2 = -2 + j4$ V.

La soluciones en el dominio del tiempo se obtienen expresando $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ en la forma polar:

$$\mathbf{V}_1 = 2.24\underline{/-63.4^\circ}$$

$$\mathbf{V}_2 = 4.47\underline{/116.6^\circ}$$

y pasado al dominio del tiempo:

$$v_1(t) = 2.24\cos(\omega t - 63.4^\circ) \qquad \text{V}$$

$$v_2(t) = 4.47\cos(\omega t + 116.6^\circ) \qquad \text{V}$$

Observe que el valor de ω tendría que conocerse para calcular los valores de impedancia dados en los diagramas de circuitos. También, *ambas fuentes deben operar a la misma frecuencia*.

(*continúa*)

PRÁCTICA

10.12 Aplique el análisis nodal en el circuito de la figura 10.23 para determinar $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$.

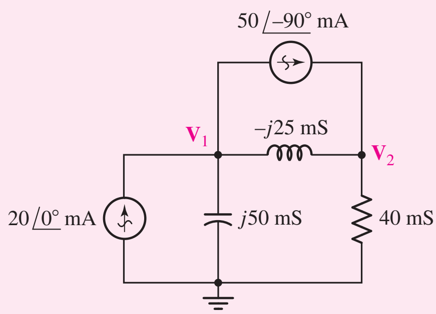


FIGURA 10.23

Respuestas: $1.062\underline{/23.3°}$ V; $1.593\underline{/-50°}$ V.

Consideremos ahora un ejemplo del análisis de malla, teniendo presente de nuevo que todas las fuentes deben operar a la misma frecuencia. De otra forma, es imposible definir un valor numérico para cualquier reactancia en el circuito. Como estudiaremos en la sección siguiente, la única manera de salvar un dilema de este tipo es mediante la superposición.

EJEMPLO 10.9

Obtenga expresiones de las corrientes en el dominio del tiempo i_1 e i_2 en el circuito de la figura 10.24*a*.

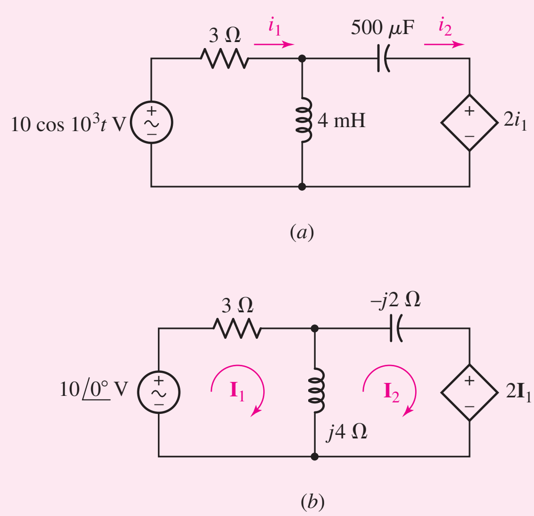


FIGURA 10.24 (*a*) Circuito en el dominio del tiempo que contiene una fuente dependiente. (*b*) Circuito correspondiente en el dominio de la frecuencia.

Al observar en la fuente izquierda del circuito de la figura 10.24*b* que $\omega = 10^3$ rad/s, dibujamos el circuito en el dominio de la frecuencia y asignamos las corrientes de malla $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. Alrededor de la malla 1, tenemos que

$$3\mathbf{I}_1 + j4(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 10\underline{/0^\circ}$$

o

$$(3 + j4)\mathbf{I}_1 - j4\mathbf{I}_2 = 10$$

mientras la malla 2 tiene como resultado

$$j4(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) - j2\mathbf{I}_2 + 2\mathbf{I}_1 = 0$$

o

$$(2 - j4)\mathbf{I}_1 + j2\mathbf{I}_2 = 0$$

Despejando

$$\mathbf{I}_1 = \frac{14 + j8}{13} = 1.24\underline{/29.7^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{20 + j30}{13} = 2.77\underline{/56.3^\circ} \text{ A}$$

Por consiguiente,

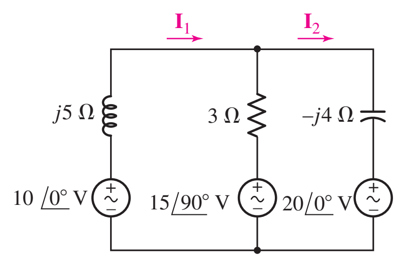
$$i_1(t) = 1.24\cos(10^3 t + 29.7^\circ) \qquad \text{A}$$

$$i_2(t) = 2.77\cos(10^3 t + 56.3^\circ) \qquad \text{A}$$

PRÁCTICA

10.13 Aplique el análisis de malla en el circuito de la figura 10.25 a fin de determinar $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$.

Respuestas: $4.87\underline{/-164.6^\circ}$ A; $7.17\underline{/-144.9^\circ}$ A.



■ **FIGURA 10.25**

10.7 SUPERPOSICIÓN, TRANSFORMACIONES DE FUENTE Y TEOREMA DE THÉVENIN

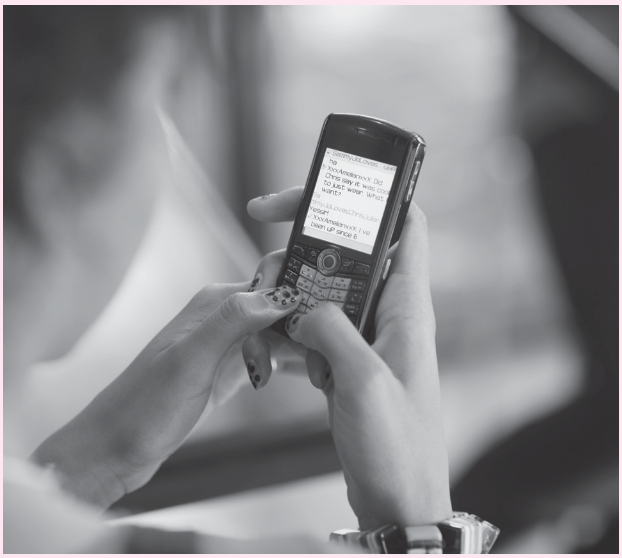
Después de que se presentaron los inductores y los capacitores en el capítulo 7, podemos ver que los circuitos que contienen tales elementos mantenían su linealidad y que los beneficios de ésta estaban otra vez disponibles. Entre dichos beneficios se encuentran el principio de superposición, los teoremas de Thévenin y de Norton y las transformaciones de fuente. Así, sabemos que se podrían utilizar estos métodos en los circuitos que se consideran ahora; el hecho de que por casualidad apliquemos fuentes senoidales y que busquemos sólo la respuesta forzada no tiene importancia. Igualmente ocurre con el hecho de que analicemos los circuitos en términos de fasores, pues son circuitos que mantienen su linealidad. También podríamos recordar que se recurrió a ésta y a la superposición cuando combinamos fuentes reales e imaginarias para obtener una fuente compleja.

Vale la pena un comentario final. Hasta este punto, hemos restringido el estudio a circuitos de una sola fuente o de fuentes múltiples en los que *cada una de ellas opera exactamente en la misma frecuencia*. Esto resulta necesario a fin de definir valores de

APLICACIÓN PRÁCTICA

Frecuencia de corte de un amplificador basado en transistores

Los circuitos del amplificador basados en transistores constituyen una parte integral de muchos instrumentos electrónicos modernos. Una aplicación común se encuentra en los teléfonos celulares (figura 10.26), donde las señales de audio se superponen sobre ondas portadoras de alta frecuencia. Desafortunadamente, los transistores incluyen capacitancias integradas que implican limitaciones en las frecuencias a las cuales pueden usarse, así que este hecho debe considerarse cuando se elige un transistor para una aplicación específica.

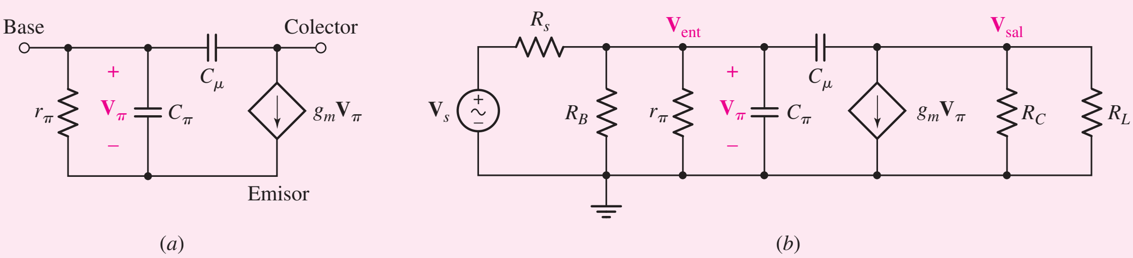


■ **FIGURA 10.26** Los amplificadores transistorizados se utilizan en muchos dispositivos, entre ellos los teléfonos celulares. A menudo, los modelos de circuitos lineales se utilizan para analizar su desempeño en función de la frecuencia. © *PNC/Getty Images/RF.*

La figura 10.27*a* muestra lo que se conoce comúnmente como un *modelo híbrido* π *de alta frecuencia* para un transistor de unión bipolar. En la práctica, aunque los transistores son dispositivos *no lineales*, encontramos que este circuito *lineal* simple efectúa un trabajo razonablemente preciso al hacer el modelo del comportamiento del dispositivo real. Los dos capacitores C_π y C_μ se utilizan para representar capacitancias internas que caracterizan al transitor particular uilizado; además, se agregan capacitores adicionales, así como resistencias, para aumentar la exactitud del modelo, según sea necesario. La figura 10.27*b* muestra el modelo de transistor insertado en un circuito de amplificador conocido como amplificador de emisor común.

Suponiendo una señal de estado senoidal permanente representada por su equivalente de Thévenin $\mathbf{V}_s$ y R_s, nos interesa la razón entre la tensión de salida $\mathbf{V}_{\text{sal}}$ con respecto a la tensión de entrada $\mathbf{V}_{\text{ent}}$. La presencia de las capacitancias de transistor internas provoca una reducción en la amplificación a medida que aumenta la frecuencia de $\mathbf{V}_s$; a la larga, este fenómeno limita las frecuencias a las cuales el circuito operará de manera apropiada. Al escribir una ecuación nodal a la salida se obtiene

$$-g_m\mathbf{V}_\pi = \frac{\mathbf{V}_{\text{sal}} - \mathbf{V}_{\text{ent}}}{1/j\omega C_\mu} + \frac{\mathbf{V}_{\text{sal}}}{R_C \parallel R_L}$$



■ **FIGURA 10.27** (*a*) Modelo de transistor híbrido π de alta frecuencia. (*b*) Circuito amplificador de emisor común que utiliza el modelo de transistor híbrido π.

impedancia específicos de elementos inductivos y capacitivos. Sin embargo, el concepto del análisis fasorial se extiende con facilidad a circuitos con fuentes múltiples que operan a diferentes frecuencias. En tales casos, sólo empleamos la superposición para determinar las tensiones y las corrientes debidas a cada fuente, y después suma-

Al resolver para $\mathbf{V}_{sal}$ en términos de $\mathbf{V}_{ent}$, y observar que $\mathbf{V}_{\pi} = \mathbf{V}_{ent}$, obtenemos una expresión para la ganancia del amplificador:

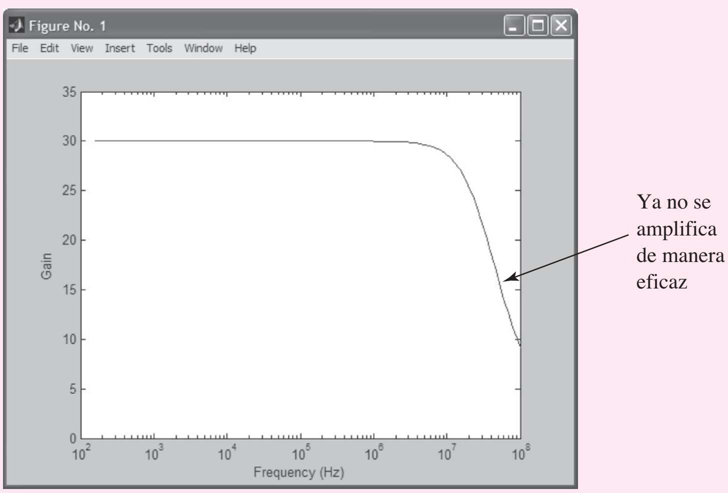
$$\frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_{ent}} = \frac{-g_m(R_C \| R_L)(1/j\omega C_\mu) + (R_C \| R_L)}{(R_C \| R_L / + (1/j\omega C_\mu)}$$

$$= \frac{-g_m(R_C \| R_L) + j\omega(R_C \| R_L)C_\mu}{1 + j\omega(R_C \| R_L)C_\mu}$$

Dados los valores típicos $g_m = 30$ mS, $R_C = R_L = 2$ kΩ y $C_\mu = 5$ pF, graficamos la magnitud de la ganancia como una función de la frecuencia (hay que recordar que $\omega = 2\pi f$). La gráfica semilogarítmica se muestra en la figura 10.28*a*, y la serie de instrucciones de MATLAB utilizadas para generar la figura se indica en la figura 10.28*b*. Resulta interesante, aunque quizá no totalmente sorprendente, ver que una característica como la ganancia del amplificador depende de la frecuencia. En realidad, podríamos tener la intención de utilizar un circuito de este tipo como un medio para descartar las frecuencias que no nos interesan. Sin embargo, al menos en el caso de frecuencias relativamente bajas, vemos que la ganancia es en esencia independiente de la frecuencia de nuestra fuente de entrada.

Cuando se caracterizan los amplificadores, suele hacerse referencia a la frecuencia a la cual se reduce la ganancia hasta $1/\sqrt{2}$ veces su valor máximo. De acuerdo con la figura 10.28*a*, observamos que la magnitud de ganancia máxima es 30 y que se reduce hasta $30/\sqrt{2} = 21$ en el caso de una frecuencia de casi 30 MHz. A menudo, esta frecuencia recibe el nombre de frecuencia de *corte* (ruptura) o *esquina* del amplificador. Si se requiere una operación a frecuencia más alta, deben reducirse las capacitancias internas (es decir, debe usarse un transistor diferente) o rediseñarse el circuito de alguna manera.

En este punto observamos que definir la ganancia relativa a $\mathbf{V}_{ent}$ no presenta una imagen completa del comportamiento dependiente de la frecuencia del amplificador. Esto quizá sea patente si consideramos en forma breve la capacitancia C_π como $\omega \to \infty$, $Z_{C\pi} \to 0$, por lo que $\mathbf{V}_{ent} \to 0$. Este efecto no se manifiesta por sí solo en la ecuación que obtuvimos. Un método más completo consiste en desarrollar una ecuación de $\mathbf{V}_{sal}$ en términos de $\mathbf{V}_s$, en cuyo caso ambas capacitancias aparecerán en la expresión; lo anterior requiere un poco más de álgebra.



(*a*)

```
EDU» frequency = logspace(3,9,100);
EDU» numerator = -30e-3*1 000 +
i*frequency*1 000*5e-12;
EDU» denominator = 1 + i*frequency*1 000*5e-12;
EDU» for k = 1:100
gain(k) = abs(numerator(k)/denominator(k));
end
EDU» semilogx(frequency/2/pi,gain);
EDU» xlabel('Frequency (Hz)');
EDU» ylabel('Gain');
EDU» axis([100 1e8 0 35]);
```

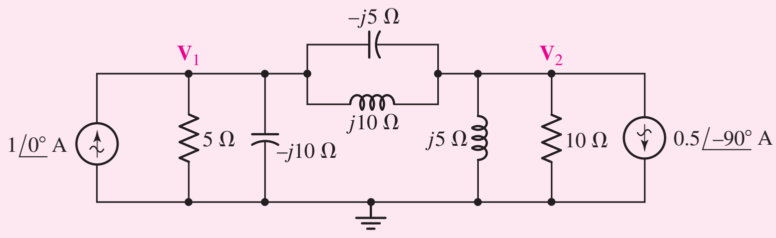
(*b*)

FIGURA 10.28 (*a*) Ganancia del amplificador como una función de la frecuencia. (*b*) MATLAB utilizada para crear la gráfica.

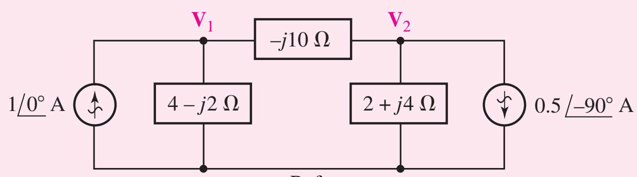
mos los resultados en el *dominio del tiempo*. Si varias fuentes operan a la misma frecuencia, la superposición también permitirá considerar aquellas fuentes en el mismo tiempo, y agregar la respuesta resultante a la(s) respuesta(s) de otra(s) fuente(s) que operan a una frecuencia diferente.

EJEMPLO 10.10

Aplique la superposición para determinar $\mathbf{V}_1$ en el circuito de la figura 10.22 que, por conveniencia, aparece repetido en la figura 10.29*a*.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 10.29** (*a*) Circuito de la figura 10.22 para el que se desea $\mathbf{V}_1$. (*b*) $\mathbf{V}_1$ puede encontrarse mediante la superposición de las respuestas fasoriales separadas.

Primero volvemos a dibujar el circuito como en la figura 10.29*b* donde cada par de impedancias en paralelo se sustituye por una sola impedancia equivalente. Esto es, $5 \| -j10\ \Omega$ es $4 - j2\ \Omega$; $j10 \| -j5\ \Omega$ es $-j10\ \Omega$; y $10 \| j5$ es igual a $2 + j4\ \Omega$. Para determinar $\mathbf{V}_1$, activamos primero sólo la fuente izquierda y obtenemos la respuesta parcial $\mathbf{V}_{1L}$. La fuente $1\underline{/0^\circ}$ está en paralelo con una impedancia de

$$(4 - j2) \,\|\, (-j10 + 2 + j4)$$

por lo que

$$\mathbf{V}_{1L} = 1\underline{/0^\circ}\,\frac{(4 - j2)(-j10 + 2 + j4)}{4 - j2 - j10 + 2 + j4}$$

$$= \frac{-4 - j28}{6 - j8} = 2 - j2 \text{ V}$$

Con sólo la fuente de la derecha activa, la división de corriente y la ley de Ohm permiten escribir la siguiente relación

$$\mathbf{V}_{1R} = (-0.5\underline{/-90^\circ})\left(\frac{2 + j4}{4 - j2 - j10 + 2 + j4}\right)(4 - j2) = -1 \text{ V}$$

Al sumar

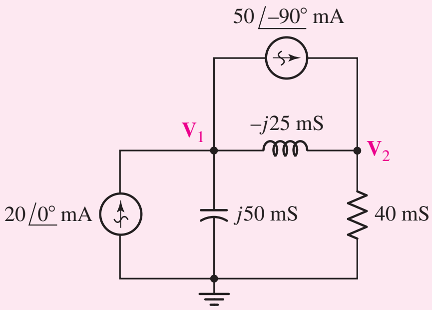
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1L} + \mathbf{V}_{1R} = 2 - j2 - 1 = 1 - j2 \qquad \text{V}$$

lo cual concuerda con el resultado anterior del ejemplo 10.8.

Como veremos, la superposición es también extremadamente útil cuando se trabaja con un circuito en el que no todas las fuentes operan a la misma frecuencia.

PRÁCTICA

10.14 Si la superposición se aplica en el circuito de la figura 10.30, determine $\mathbf{V}_1$ con: (*a*) sólo la fuente de $20\underline{/0°}$ mA en operación; (*b*) en operación sólo la fuente de $50\underline{/-90°}$ mA.

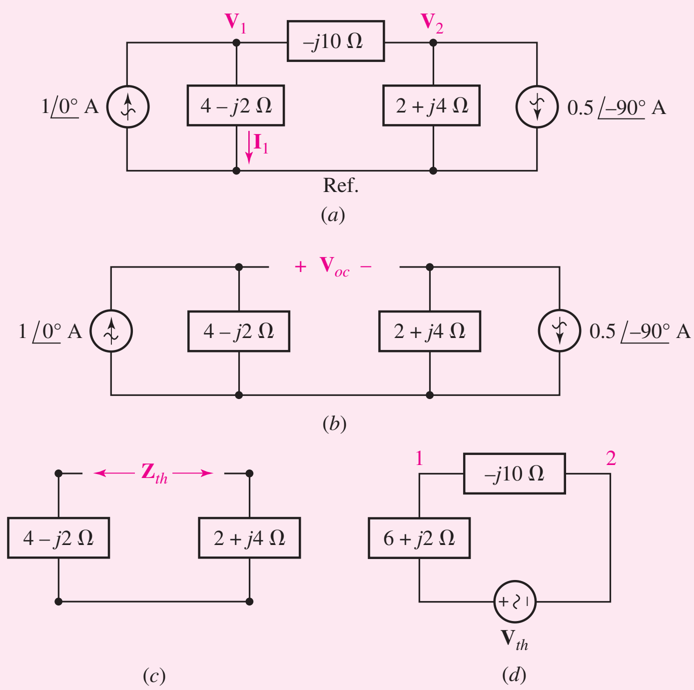


■ **FIGURA 10.30**

Respuestas: $0.1951 - j0.556$ V; $0.780 + j0.976$ V.

EJEMPLO 10.11

Determine el equivalente de Thévenin visto por la impedancia $-j10\ \Omega$ de la figura 10.31*a*, y utilícelo para calcular $\mathbf{V}_1$.



■ **FIGURA 10.31** (*a*) Circuito de la figura 10.29*b*. Se desea el equivalente de Thévenin visto por la impedancia $-j10\ \Omega$. (*b*) Se define $\mathbf{V}_{oc}$; (*c*) Se define $\mathbf{Z}_{th}$; (*d*) El circuito se vuelve a dibujar utilizando el equivalente de Thévenin.

(*continúa*)

La tensión en circuito abierto que se define en la figura 10.31*b* es

$$\mathbf{V}_{oc} = (1\underline{/0^\circ})(4 - j2) - (-0.5\underline{/-90^\circ})(2 + j4)$$
$$= 4 - j2 + 2 - j1 = 6 - j3 \qquad \text{V}$$

La impedancia del circuito inactivo de la figura 10.31*c como se observa desde las terminales de la carga* es simplemente la suma de las dos impedancias restantes. En consecuencia,

$$\mathbf{Z}_{th} = 6 + j2\ \Omega$$

De este modo, cuando reconectamos el circuito como en la figura 10.31*d*, la corriente dirigida desde el nodo 1 hasta el nodo 2, a través de la carga $-j10\ \Omega$ resulta

$$\mathbf{I}_{12} = \frac{6 - j3}{6 + j2 - j10} = 0.6 + j0.3\ \text{A}$$

Sabemos ahora la corriente que fluye por la impedancia de $-j10\ \Omega$ de la figura 10.31*a*. *Observe que no se puede calcular* $\mathbf{V}_1$ *mediante el circuito de la figura 10.31*d *pues el nodo de referencia ya no existe*. Volviendo al circuito original, pues, y restando la corriente $0.6 + j0.3$ A de la fuente de corriente izquierda, se determina la corriente hacia abajo que pasa por la rama $(4 - j2)\ \Omega$:

$$\mathbf{I}_1 = 1 - 0.6 - j0.3 = 0.4 - j0.3 \qquad \text{A}$$

y, por ello,

$$\mathbf{V}_1 = (0.4 - j0.3)(4 - j2) = 1 - j2 \qquad \text{V}$$

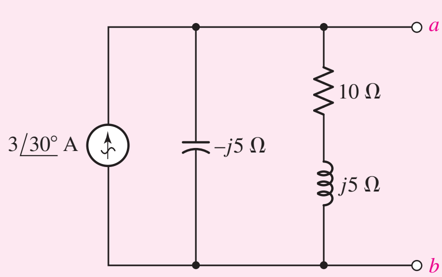
como antes.

Pudimos haber sido más astutos y utilizar el teorema de Norton en los tres elementos de la derecha de la figura 10.31*a*, suponiendo que el principal interés está en $\mathbf{V}_1$. También se utilizan en forma repetida las transformaciones de fuente para simplificar el circuito. Por lo tanto, todos los atajos y trucos que surgieron en los capítulos 4 y 5 están disponibles para analizar circuitos en el dominio de la frecuencia. La ligera complejidad adicional, evidente ahora, surge por la necesidad de emplear números complejos, y no por alguna otra consideración teórica implicada.

PRÁCTICA

10.15 En el circuito de la figura 10.32, determine: (*a*) la tensión en circuito abierto $\mathbf{V}_{ab}$; (*b*) la corriente hacia abajo en un cortocircuito entre *a* y *b*; (*c*) la impedancia equivalente de Thévenin $\mathbf{Z}_{ab}$ en paralelo con la fuente de corriente.

Respuestas: $16.77\underline{/-33.4^\circ}$ V; $2.60 + j1.500$ A; $2.5 - j5\ \Omega$.



■ **FIGURA 10.32**

EJEMPLO 10.12

Determine la potencia disipada por la resistencia de 10 Ω en el circuito de la figura 10.33*a*.

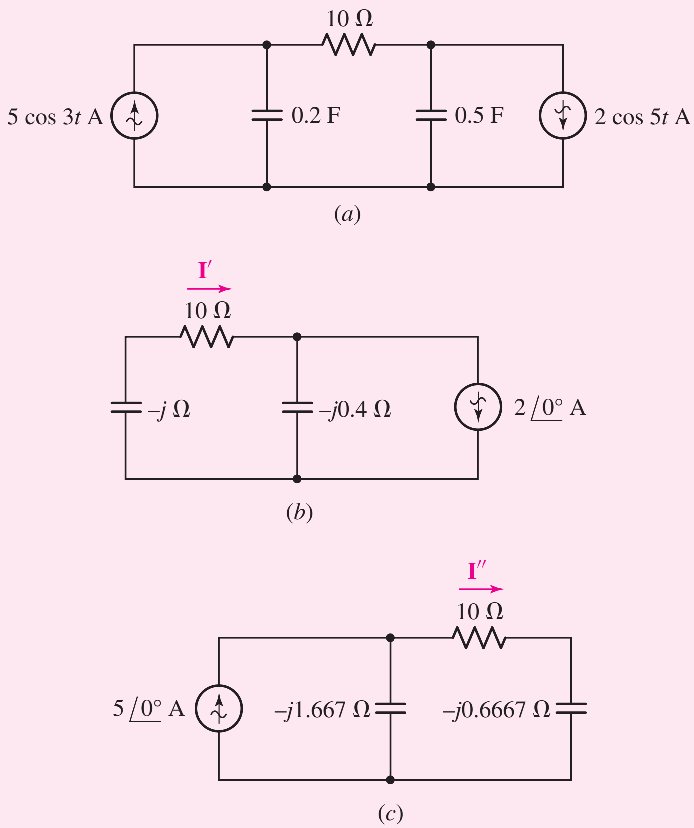


FIGURA 10.33 (*a*) Circuito simple que tiene fuentes que operan a diferentes frecuencias. (*b*) Circuito con la fuente izquierda suprimida. (*c*) Circuito con la fuente derecha suprimida.

Después de observar el circuito, podríamos estar tentados a escribir de inmediato dos ecuaciones nodales, o quizás a efectuar dos conjuntos de transformaciones de fuente y lanzarnos de inmediato a determinar la tensión en la resistencia de 10 Ω.

Desafortunadamente, esos procedimientos son imposibles de implementar, pues se tienen *dos* fuentes que operan a frecuencias *diferentes*. En una situación de este tipo, no hay manera de calcular la impedancia de ningún capacitor o inductor en el circuito. En este caso, ¿cuál ω usaríamos?

La única forma de salir de este dilema es mediante la superposición, agrupando todas las fuentes con la misma frecuencia en el mismo subcircuito, como se indica en la figura 10.33*b* y *c*.

En el subcircuito de la figura 10.33*b*, calculamos sin dificultad la corriente $\mathbf{I}'$ mediante la división de corriente:

$$\mathbf{I}' = 2\underline{/0^\circ}\left[\frac{-j0.4}{10 - j - j0.4}\right]$$
$$= 79.23\underline{/-82.03^\circ}\ \text{mA}$$

(*continúa*)

En estudios futuros sobre el procesamiento de señales, presentaremos también el método Jean-Baptiste Joseph Fourier, matemático francés que desarrolló una técnica para representar casi cualquier función arbitraria mediante una combinación de senoides. Cuando se trabaja con circuitos lineales, una vez que sabemos la respuesta de un circuito particular a una función forzada senoidal de tipo general, podemos predecir con facilidad la respuesta del circuito a una forma de onda arbitraria representada por una función de la serie de Fourier, simplemente mediante la superposición.

por lo que

$$i' = 79.23\cos(5t - 82.03°) \qquad \text{mA}$$

De igual modo, observamos que

$$\mathbf{I}'' = 5\underline{/0°}\left[\frac{-j1.667}{10 - j0.6667 - j1.667}\right]$$
$$= 811.7\underline{/-76.86°} \text{ mA}$$

por lo cual

$$i'' = 811.7\cos(3t - 76.86°) \qquad \text{mA}$$

Debemos observar en este punto que, sin importar qué tan tentados pudiéramos estar para sumar las dos corrientes fasoriales $\mathbf{I}'$ e $\mathbf{I}''$, en la figura 10.33*b* y *c*, esto *sería incorrecto*. El siguiente paso consiste en sumar las dos corrientes en el dominio del tiempo, elevar al cuadrado el resultado y multiplicar por 10 para obtener la potencia que absorbe la resistencia de10 Ω en la figura 10.33*a*:

$$p_{10} = (i' + i'')^2 \times 10$$
$$= 10[79.23\cos(5t - 82.03°) + 811.7\cos(3t - 76.86°)]^2 \qquad \mu\text{W}$$

PRÁCTICA

10.16 Determine la corriente *i* que pasa por la resistencia de 4 Ω de la figura 10.34.

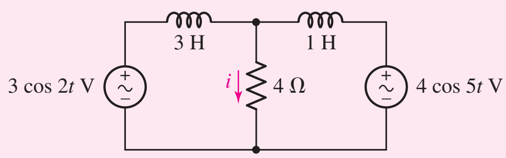


FIGURA 10.34

Respuestas: $i = 175.6\cos(2t - 20.55°) + 547.1\cos(5t - 43.16°)$ mA.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

Tenemos varias opciones en PSpice para analizar circuitos en el estado senoidal permanente. Tal vez el método más directo consista en utilizar las dos fuentes diseñadas de modo especial: VAC e IAC. La magnitud y fase de cualquier fuente se elige haciendo doble clic sobre la componente.

Simulemos el circuito de la figura 10.20*a* que se ha dibujado nuevamente en la figura 10.35.

La frecuencia de cualquier fuente no se elige en la ventana de diálogo Property Editor, sino a través de la ventana de diálogo análisis de barrido de ca. Lo anterior se lleva a cabo eligiendo **AC Sweep/Noise** para **Analysis**, cuando se presenta con la ventana Simulation Settings. Seleccionamos un barrido **Linear** y se fija **Total Points** a un valor 1. Puesto que sólo estamos interesado en la frecuencia de 3 000 rad/s (477.5 Hz), fijamos ambos parámetros **Start Frequency** y **End Frequency** en 477.5 como se muestra en la figura 10.36.

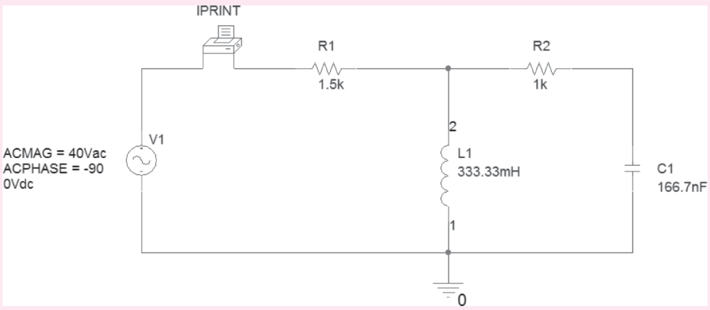


FIGURA 10.35 El circuito de la figura 10.20*a* que opera a $\omega = 3\,000$ rad/s para el que se desea la corriente a través de la resistencia de 1.5 kΩ.

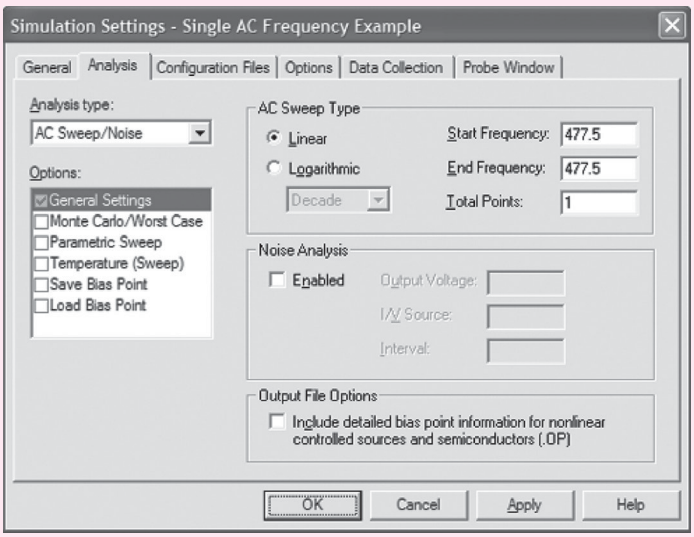


FIGURA 10.36 Ventana de diálogo para configurar la frecuencia de la fuente.

Observe que en el diagrama aparece un "componente" adicional, el cual se denomina IPRINT y permite imprimir una variedad de parámetros de corriente. En esta simulación estamos interesados en los atributos **AC**, **MAG** y **PHASE**. Para que PSpice imprima estas cantidades haga doble clic sobre el símbolo IPRINT en el esquema e ingrese *yes* en cada uno de los campos apropiados.

Los resultados de la simulación se obtienen escogiendo la opción **View Output File** bajo **PSpice** en la ventana Capture CIS.

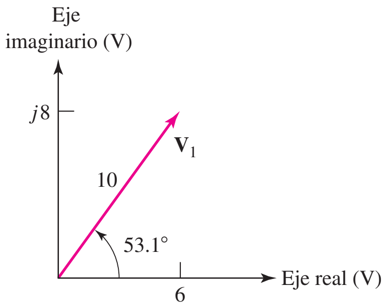
```
FREQ          IM(V_PRINT1)   IP(V_PRINT1)

4.775E+02     1.600E-02      -1.269E+02
```

De tal modo, la magnitud de la corriente es de 16 mA, y el ángulo de fase corresponde a –126.9°, por lo que la corriente a través de la resistencia de 1.5 kΩ resulta igual a

$$i = 16\cos(3\,000t - 126.9^\circ) \qquad \text{mA}$$

$$= 16\,\text{sen}(3\,000t - 36.9^\circ) \qquad \text{mA}$$



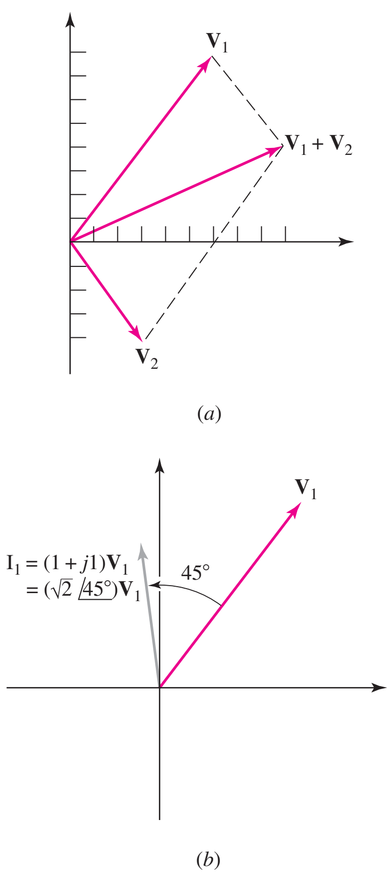
■ **FIGURA 10.37** Diagrama fasorial simple que muestra al fasor de tensión de $\mathbf{V}_1 = 6 + j8 = 10\underline{/53.1^\circ}$ V.

10.8 DIAGRAMAS FASORIALES

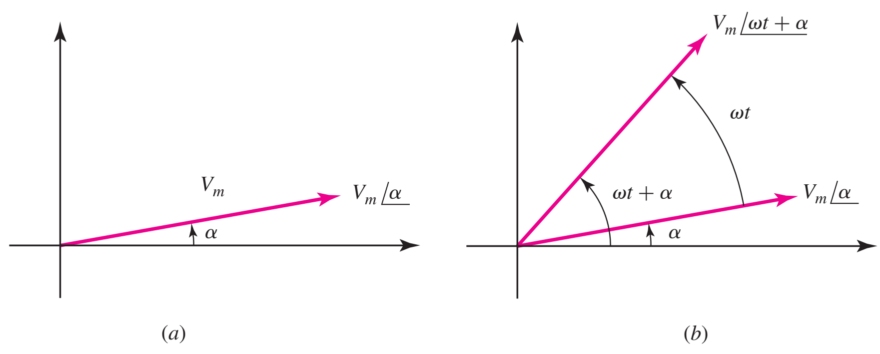
El *diagrama fasorial* es un nombre que se asigna a un dibujo en el plano complejo que muestra las relaciones entre las tensiones fasoriales y las corrientes fasoriales de un circuito específico. Ya estamos familiarizados con el uso del plano complejo para identificar gráficamente números complejos y su suma y sustracción. En razón de que las tensiones y corrientes fasoriales son números complejos, también se deben identificar como puntos en un plano complejo. Por ejemplo, la tensión fasorial $\mathbf{V}_1 = 6 + j8 = 10\underline{/53.1^\circ}$ V se identifica sobre el plano de tensión complejo que se muestra en la figura 10.37. El eje x es el eje de tensión real, y el de y corresponde al eje de tensión imaginario; la tensión $\mathbf{V}_1$ se localiza por medio de una flecha dibujada desde el origen. En vista de que la suma y la sustracción resultan muy sencillas de llevar a cabo y de exhibir sobre un plano complejo, los fasores se suman y se restan con facilidad en un diagrama fasorial. La multiplicación y la división originan la suma y la sustracción de ángulos y un cambio de amplitud. La figura 10.38*a* presenta la suma de $\mathbf{V}_1$ y una segunda tensión fasorial $\mathbf{V}_2 = 3 - j4 = 5\underline{/-53.1^\circ}$ V; por otra parte, la figura 10.38*b* ilustra la corriente $\mathbf{I}_1$, que es el producto de $\mathbf{V}_1$ y de la admitancia $\mathbf{Y} = 1 + j1$ S.

Este último diagrama fasorial presenta los fasores de corriente y de tensión sobre el mismo plano complejo; se entiende que cada uno tendrá su propia escala de amplitud, pero una escala de ángulos común. Por ejemplo, una tensión fasorial de 1 cm de largo podría representar 100 V, mientras que una corriente fasorial de la misma longitud quizás indicaría 3 mA. Graficar ambos fasores sobre el mismo diagrama nos permite determinar sin ninguna dificultad la forma de onda que está adelantada y la que está retrasada.

El diagrama fasorial ofrece también una interpretación interesante de la transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, pues el diagrama se podría interpretar desde el punto de vista del dominio del tiempo o del correspondiente al dominio de la frecuencia. Hasta ahora, hemos empleado este último, ya que se mostraron de manera directa los fasores sobre el diagrama fasorial. Sin embargo, procederemos desde el punto de vista del dominio del tiempo indicando primero la tensión fasorial $\mathbf{V} = V_m \underline{/\alpha}$ como se dibuja en la figura 10.39*a*. Para transformar $\mathbf{V}$ al dominio del tiempo, el siguiente paso necesario es la multiplicación del fasor por $e^{j\omega t}$; así, tenemos ahora la tensión compleja, $V_m e^{j\alpha} e^{j\omega t} = V_m \underline{/\omega t + \alpha}$. Esta tensión también se interpreta como un fasor: uno con un ángulo de fase que aumenta de manera lineal con el tiempo. Por lo tanto, sobre un diagrama fasorial, éste representa un segmento de recta rotatorio, ubicándose en la posición instantánea ωt radianes adelante (en dirección contraria a la de las manecillas del reloj) de $V_m \underline{/\alpha}$. En la figura 10.39*b* se muestran tanto $V_m \underline{/\alpha}$ como $V_m \underline{/\omega t + \alpha}$. El paso hacia el dominio del tiempo se completa ahora tomando la parte real de $V_m \underline{/\omega t + \alpha}$. La parte real de esta cantidad compleja es la proyección de $V_m \underline{/\omega t + \alpha}$ sobre el eje real: $V_m \cos(\omega t + \alpha)$.



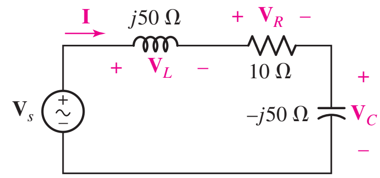
■ **FIGURA 10.38** (*a*) Diagrama fasorial que muestra la suma de $\mathbf{V}_1 = 6 + j8$ V y $\mathbf{V}_2 = 3 - j4$ V, $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = 9 + j4$ V $= 9.85\underline{/24.0^\circ}$ V. (*b*) El diagrama fasorial muestra $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_1$ donde $\mathbf{I}_1 = \mathbf{Y}\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{Y} = (1 + j1)\text{S} = \sqrt{2}\underline{/45^\circ}$ S. Las escalas de amplitud de la corriente y de la tensión son diferentes.



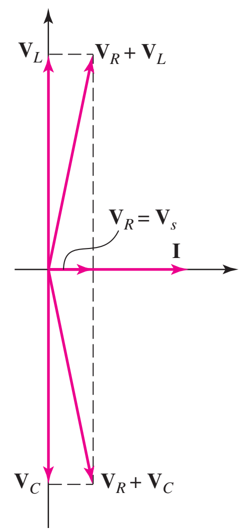
■ **FIGURA 10.39** (*a*) Tensión fasorial $V_m\underline{/\alpha}$. (*b*) Tensión compleja $V_m\underline{/\omega t + \alpha}$ que se muestra como un fasor en un instante de tiempo particular y que adelanta a $V_m\underline{/\alpha}$ por ωt radianes.

En resumen, el fasor en el dominio de la frecuencia aparece sobre el diagrama fasorial, y la transformación hacia el dominio del tiempo se consigue permitiendo que el fasor gire en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, a una velocidad angular de ω rad/s y visualizando luego la proyección sobre el eje real. Resulta útil considerar a la flecha que representa al fasor **V** en el diagrama fasorial como la fotografía, tomada en $\omega t = 0$, de la flecha rotatoria cuya proyección sobre el eje real es la tensión instantánea $v(t)$.

Ahora construyamos los diagramas fasoriales de varios circuitos simples. El circuito *RLC* en serie de la figura 10.40*a* tiene diferentes tensiones asociadas, aunque sólo una corriente. El diagrama fasorial se construye con mayor facilidad considerando la corriente simple como el fasor de referencia. De manera arbitraria elegimos $\mathbf{I} = I_m\underline{/0^\circ}$ y lo colocamos a lo largo del eje real del diagrama fasorial, como observamos en la figura 10.40*b*. De esta forma, las tensiones respectivas de la resistencia, el capacitor y el inductor se deben calcular y ubicarse sobre el diagrama, donde se mantienen con toda claridad las relaciones de fase de 90°. La suma vectorial de las tres tensiones respectivas es la tensión de la fuente; así que para este circuito, que es lo que definiremos en el capítulo subsecuente como "condición resonante", puesto que $\mathbf{Z}_C = -\mathbf{Z}_L$, la tensión de la fuente y la tensión de la resistencia son iguales. La tensión total de la resistencia y del inductor, o en la resistencia y en el capacitor, se obtiene del diagrama sumando los fasores apropiados, como se ilustra.



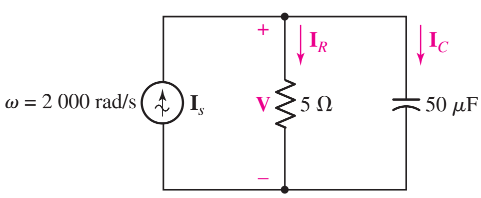
(*a*)



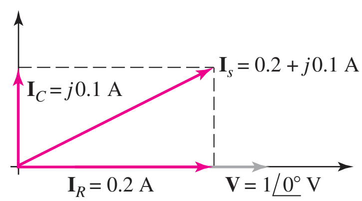
(*b*)

■ **FIGURA 10.40** (*a*) Circuito *RLC* en serie. (*b*) Diagrama fasorial de este circuito; la corriente **I** se usa como un fasor de referencia conveniente.

La figura 10.41*a* es un circuito en paralelo simple en el que resulta lógico utilizar la tensión simple entre los dos nodos como un fasor de referencia. Suponga que $\mathbf{V} = 1\underline{/0^\circ}$ V. La corriente de la resistencia $\mathbf{I}_R = 0.2\underline{/0^\circ}$ A, está en fase con esta tensión; además, la corriente en el capacitor, $\mathbf{I}_C = j0.1$ A, adelanta a la tensión de referencia por 90°. Después de que estas dos corrientes se agregan al diagrama fasorial, que se muestra en la figura 10.41*b*, se podrían sumar a fin de obtener la corriente de la fuente. El resultado es $\mathbf{I}_s = 0.2 + j0.1$ A.



(*a*)



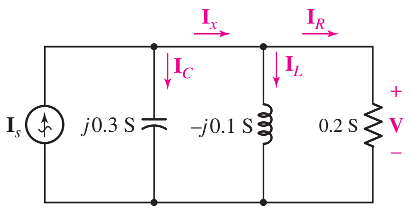
(*b*)

■ **FIGURA 10.41** (*a*) Circuito *RC* en paralelo. (*b*) Diagrama de este circuito; la tensión de nodo **V** se usa como un útil fasor de referencia.

Si la corriente de la fuente se especifica en un principio con el conveniente valor de $1\underline{/0^\circ}$ A y no se conoce al inicio la tensión del nodo, sigue siendo útil empezar la construcción del diagrama fasorial bajo el supuesto de una tensión de nodo (por ejemplo, $\mathbf{V} = 1\underline{/0^\circ}$ V otra vez) y utilizarlo como el fasor de referencia. De esta forma, el diagrama se completa como antes y la corriente de la fuente que circula como resultado de la tensión de nodo supuesta de nuevo es igual a $0.2 + j0.1$ A. Sin embargo, la verdadera corriente de fuente es $1\underline{/0^\circ}$ A, y por ello la tensión verdadera se obtiene al multiplicar la tensión de nodo supuesta por $1\underline{/0^\circ}/(0.2 + j0.1)$; la verdadera tensión de nodo es, en consecuencia, $4 - j2$ V $= \sqrt{20}\underline{/-26.6^\circ}$ V. La tensión supuesta implica un diagrama fasorial que difiere del verdadero por un cambio de escala (el diagrama supuesto es más pequeño por un factor de $1/\sqrt{20}$) y una rotación angular (el diagrama supuesto está rotado 26.6° en dirección contraria a la de las manecillas del reloj).

EJEMPLO 10.13

Construya un diagrama fasorial que muestre $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_L$ e $\mathbf{I}_C$ del circuito de la figura 10.42. Mediante la combinación de estas corrientes, determine el ángulo mediante el cual $\mathbf{I}_s$ adelanta a $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_C$ e $\mathbf{I}_x$.



■ **FIGURA 10.42** Circuito simple para el que se requieren varias corrientes.

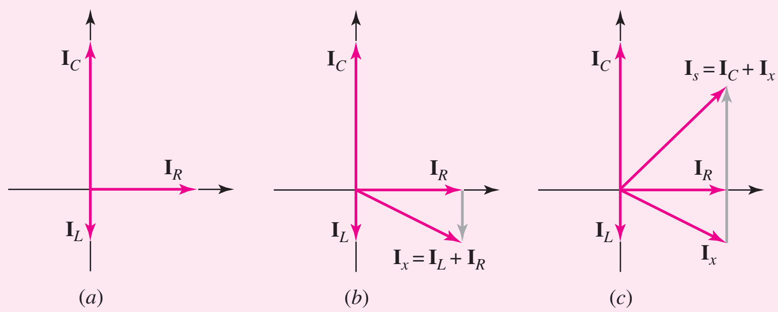
Se elige primero un fasor de referencia adecuado. Luego de examinar el circuito y las variables a determinar, vemos que una vez que se conoce $\mathbf{V}$ se calculan $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_L$ e $\mathbf{I}_C$ mediante la aplicación simple de la ley de Ohm. Por lo tanto, elegimos $\mathbf{V} = 1\underline{/0^\circ}$, por simplicidad, y después calculamos

$$\mathbf{I}_R = (0.2)1\underline{/0^\circ} \quad = 0.2\underline{/0^\circ}\text{ A}$$

$$\mathbf{I}_L = (-j0.1)1\underline{/0^\circ} = 0.1\underline{/-90^\circ}\text{ A}$$

$$\mathbf{I}_C = (j0.3)1\underline{/0^\circ} \quad = 0.3\underline{/90^\circ}\text{ A}$$

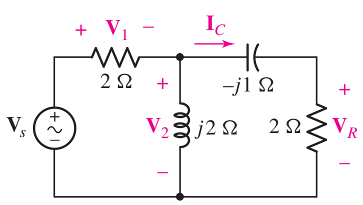
El diagrama fasorial correspondiente se presenta en la figura 10.43*a*. También necesitamos determinar las corrientes fasoriales $\mathbf{I}_s$ e $\mathbf{I}_x$. La figura 10.43*b* muestra la determinación de $\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_R = 0.2 - j0.1 = 0.224\underline{/-26.6^\circ}$ A, y la figura 10.43*c* indica la determinación $\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_x = 0.283\underline{/45^\circ}$ A. De la figura 10.43*c* acertamos que $\mathbf{I}_s$ está adelantado con respecto a $\mathbf{I}_R$ por 45°, $\mathbf{I}_C$ por −45° e $\mathbf{I}_x$ por 45° + 26.6° = 71.6°. Sin embargo, estos ángulos son sólo relativos; los valores numéricos exactos dependen de $\mathbf{I}_s$, del que depende también el valor real de $\mathbf{V}$ (supuesto aquí, por conveniencia, igual a $1\underline{/0^\circ}$ V).



■ **FIGURA 10.43** (*a*) Diagrama fasorial construido con un valor de referencia de $\mathbf{V} = 1/0^\circ$. (*b*) Determinación gráfica de $\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_R$. (*c*) Determinación gráfica de $\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_x$.

PRÁCTICA

10.17 Elija algún valor de referencia conveniente para $\mathbf{I}_C$ en el circuito de la figura 10.44, dibuje un diagrama fasorial que muestre $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_s$, y mida la proporción entre las longitudes de: (*a*) $\mathbf{V}_s$ y $\mathbf{V}_1$; (*b*) $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$; (*c*) $\mathbf{V}_s$ y $\mathbf{V}_R$.



■ **FIGURA 10.44**

Respuestas: 1.90; 1.00; 2.12.

RESUMEN Y REPASO

Este capítulo trató de la respuesta de estado estable de los circuitos a la excitación senoidal. Éste es un análisis limitado de un circuito, en algunos aspectos, ya que se ignora por completo el comportamiento transitorio. En muchas situaciones, un procedimiento como éste es más que adecuado, y al reducir la cantidad de información que se busca acerca de un circuito acelera considerablemente el análisis. La idea fundamental detrás de lo que hicimos fue que se agregaba una fuente *imaginaria* a cada fuente senoidal *real*; entonces, la identidad de Euler convertía la fuente en una exponencial compleja. Como la derivada de una función exponencial es simplemente otra exponencial, lo que de otra manera daría ecuaciones integrodiferenciales generadas por el análisis de malla o nodal, da ahora *ecuaciones algebraicas*.

Se introdujeron algunos términos nuevos: *fase en atraso*, *fase en adelanto*, *impedancia*, *admitancia* y, especialmente importante, *fasor*. Las relaciones fasoriales entre corriente y tensión hicieron surgir el concepto de impedancia, donde las resistencias se representan por un número real (resistencia, como antes), y los inductores se representan por $\mathbf{Z} = j\omega L$, mientras que los capacitores están representados por $-j/\omega C$ (ω es la frecuencia de operación de las fuentes). De ahí en adelante se aplican todas las técnicas de análisis de circuito que se aprendieron en los capítulos 3 a 5.

Podría parecer extraño tener un número imaginario como parte de nuestra solución, pero hemos encontrado que recuperando la solución del análisis en dominio de tiempo es sencillo una vez que la tensión o la corriente se expresan en forma polar. La magnitud de la cantidad que interesa es la magnitud de la función de coseno, el ángulo de fase es la fase del término de coseno, y la frecuencia se obtiene del circuito original (desaparece de la vista durante el análisis, pero los circuitos que estamos analizando no lo cambian de ninguna manera). Concluimos el capítulo con una introducción al concepto de diagramas fasoriales. Antes de las calculadoras científicas de bajo costo, tales herramientas eran sumamente valiosas en el análisis de muchos circuitos senoidales. Todavía tienen utilidad en el análisis de sistemas de potencia de ca, como se ve en capítulos subsecuentes.

En seguida se presenta para su comodidad una lista concisa de conceptos clave del capítulo, junto con los correspondientes números de ejemplos.

- ❑ Si dos ondas senoidales (o dos ondas cosenoidales) tienen ambas magnitudes positivas y la misma frecuencia, es posible determinar la forma de onda que está adelantada y la que está retrasada, al comparar sus ángulos de fase.
- ❑ La respuesta forzada de un circuito lineal a una tensión senoidal o a una fuente de corriente siempre se escribe como una senoidal simple que tiene la misma frecuencia que la fuente senoidal. (Ejemplo 10.1)
- ❑ Un fasor tiene magnitud y ángulo de fase; se entiende que la frecuencia es la de la fuente senoidal que acciona el circuito. (Ejemplo 10.2)
- ❑ Se puede efectuar una transformada fasorial sobre cualquier función senoidal y viceversa: $\mathbf{V}_m \cos(\omega t + \phi) \leftrightarrow \mathbf{V}_m\underline{/\phi}$. (Ejemplo 10.3)
- ❑ Cuando se transforma un circuito en el dominio del tiempo al circuito correspondiente en el dominio de la frecuencia, las resistencias, capacitores e inductores se sustituyen por impedancias (o, de vez en cuando, por admitancias). (Ejemplos 10.4, 10.6)
  - La impedancia de una resistencia es simplemente su resistencia.
  - La impedancia de un capacitor es igual a $1/j\omega C\ \Omega$.
  - La impedancia de un inductor es igual a $j\omega L\ \Omega$.
- ❑ Las impedancias agrupan combinaciones en serie y en paralelo de la misma manera que las resistencias. (Ejemplo 10.6)

- Todas las técnicas de análisis usadas en los circuitos resistivos se aplican a los circuitos con capacitores y/o inductores una vez que todos los elementos se sustituyen por sus equivalentes en el dominio de la frecuencia. (Ejemplos 10.5, 10.7, 10.8, 10.9, 10.10, 10.11)
- El análisis fasorial sólo se efectúa sobre circuitos de una sola frecuencia. En otro caso, debe recurrirse a la superposición y sumarse las respuestas parciales en el *dominio del tiempo*, a fin de obtener la respuesta completa. (Ejemplo 10.12)
- El poder que tienen los diagramas fasoriales es evidente cuando una función forzada conveniente se utiliza desde un inicio y el resultado inicial se escala apropiadamente. (Ejemplo 10.13)

LECTURAS ADICIONALES

Una buena referencia sobre las técnicas de análisis basadas en fasores se puede encontrar en:

R. A. DeCarlo y P. M. Lin, *Linear Circuit Analysis*, 2a. ed. Nueva York: Oxford University Press, 2001.

Los modelos de transistores dependientes de la frecuencia se estudian desde una perspectiva fasorial en el capítulo 7 de:

W. H. Hayt, Jr. y G. W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design*, 2a. ed. Nueva York: Wiley, 1995.

EJERCICIOS

10.1 Características de las senoides

1. Calcule lo siguiente: (*a*) 5 sen $(5t - 9°)$ en $t = 0$, 0.01 y 0.1 s; (*b*) 4 cos $2t$ y 4 sen $(2t + 90°)$ en $t = 0.1$ y 1.5 s; (*c*) 3.2 cos $(6t + 15°)$ y 3.2 sen $(6t + 105°)$ en $t = 0$, 0.01 y 0.1 s.
2. (*a*) Exprese cada una de las siguientes expresiones como una sola función *de coseno*: 5 sen $300t$, 1.95 sen $(\pi t - 92°)$, 2.7 sen $(50t + 5°) - 10$ cos $50t$. (*b*) Exprese cada una de las siguientes expresiones como una sola función *de seno*: 66 cos $(9t - 10°)$, 4.15 cos $10t$, 10 cos $(100t - 9°) +$ 10 sen $(100t + 19°)$.
3. Determine el ángulo en el que v_1 *adelanta* a i_1 si $v_1 = 10 \cos(10t - 45°)$ e i_1 es igual a (*a*) 5 cos $10t$; (*b*) 5 cos $(10t - 80°)$; (*c*) 5 cos $(10t - 40°)$; (*d*) 5 cos $(10t + 40°)$; (*e*) 5 sen $(10t - 19°)$.
4. Determine el ángulo en el que v_1 *está en atraso* con respecto a i_1 si $v_1 = 34 \cos(10t + 125°)$ e i_1 es igual a (*a*) 5 cos $10t$; (*b*) 5 cos $(10t - 80°)$; (*c*) 5 cos $(10t - 40°)$; (*d*) 5 cos $(10t + 40°)$; (*e*) 5 sen $(10t - 19°)$.
5. Determine qué forma de onda está en atraso en cada uno de los siguientes pares: (*a*) cos $4t$, sen $4t$; (*b*) cos $(4t - 80°)$, cos $(4t)$; (*c*) cos $(4t + 80°)$, cos $4t$; (*d*) $-$sen $5t$, cos $(5t + 2°)$; (*e*) sen $5t$ + cos $5t$, cos $(5t - 45°)$.
6. Calcule los primeros tres instantes en el tiempo $(t > 0)$ en los que son cero las siguientes funciones, primero convirtiendo a una sola senoidal: (*a*) cos $3t - 7$ sen $3t$; (*b*) cos $(10t + 45°)$; (*c*) cos $5t -$ sen $5t$; (*d*) cos $2t +$ sen $2t -$ cos $5t +$ sen $5t$.
7. (*a*) Determine los primeros dos instantes en el tiempo $(t > 0)$ en los que cada una de las funciones en el ejercicio 6 son iguales a la unidad, convirtiendo primero a una sola senoidal. (*b*) Verifique sus respuestas graficando cada forma de onda usando un paquete adecuado de software.
8. El concepto de la serie de Fourier es un eficaz medio para analizar formas de onda periódicas en términos de senoidales. Por ejemplo, la onda triangular de la figura 10.45 se puede representar por la suma infinita

$$v(t) = \frac{8}{\pi^2}\left(\text{sen}\,\pi t - \frac{1}{3^2}\,\text{sen}\,3\pi t + \frac{1}{5^2}\,\text{sen}\,5\pi t - \frac{1}{7^2}\,\text{sen}\,7\pi t + \cdots\right)$$

donde en la práctica, quizá, los primeros términos proporcionan una aproximación suficientemente exacta. (*a*) Calcule el valor exacto de $v(t)$ en $t = 0.25$ s obteniendo primero una ecuación para el segmento correspondiente de la forma de onda. (*b*) Calcule el valor aproximado en $t = 0.25$ s usando sólo el primer término de la serie de Fourier. (*c*) Repita el inciso (*b*) usando los primeros tres términos. (*d*) Grafique $v(t)$ usando sólo el primer término. (*e*) Grafique $v(t)$ usando sólo los primeros dos términos. (*f*) Grafique $v(t)$ usando sólo los primeros tres términos.

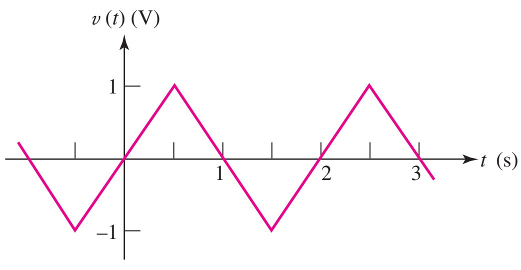


FIGURA 10.45

9. Las tensiones eléctricas domésticas casi siempre se indican como 110 V, 115 V o 120 V. Sin embargo, estos valores no representan la tensión de ca máxima. Más bien, señalan lo que se conoce como la raíz cuadrática media de la tensión, definida como

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_m^2 \cos^2(t\omega)\,dt}$$

donde $T =$ periodo de la forma de onda, V_m es la tensión máxima y $\omega =$ la frecuencia de la forma de onda ($f = 60$ Hz en Norteamérica).

(*a*) Efectúe la integración indicada y demuestre que para una tensión senoidal se tiene

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

(*b*) Calcule las tensiones máximas correspondientes a las tensiones rms de 110, 115 y 120 V.

10.2 Respuesta forzada a funciones senoidales

10. Si la fuente v_s en la figura 10.46 es igual a $4.53 \cos(0.333 \times 10^{-3}t + 30°$ V, (*a*) obtenga i_s, i_L e i_R en $t = 0$, suponiendo que no hay transitorios presentes. (*b*) Obtenga una expresión para $v_L(t)$ en términos de una sola senoidal, válida para $t > 0$, nuevamente suponiendo que no hay transitorios.

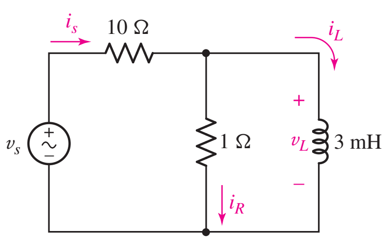


FIGURA 10.46

11. Suponiendo que ya no hay transitorios presentes, determine la corriente marcada como i_L en el circuito de la figura 10.47. Exprese su respuesta como una sola senoidal.

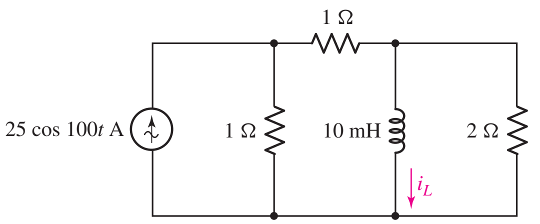
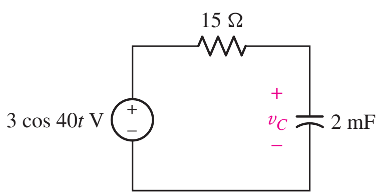
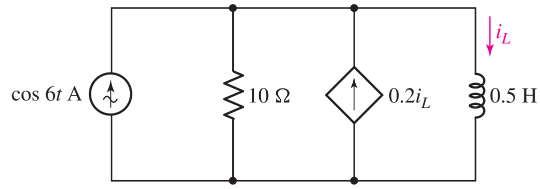


FIGURA 10.47



■ **FIGURA 10.48**

12. Calcule la potencia disipada en la resistencia de 2 Ω de la figura 10.47, suponiendo que no hay transitorios. Exprese su respuesta en términos de una sola función sinusoidal.
13. Obtenga una expresión para v_C indicada en la figura 10.48 en términos de una sola función senoidal. Usted puede suponer que todos los transitorios se han extinguido mucho antes de $t = 0$.
14. Calcule la energía almacenada en el capacitor del circuito de la figura 10.48 en $t = 10$ ms y $t = 40$ ms.
15. Obtenga una expresión para la potencia disipada en la resistencia de 10 Ω de la figura 10.49, suponiendo que no hay transitorios.



■ **FIGURA 10.49**

10.3 Función forzada compleja

16. Exprese los siguientes números complejos en forma rectangular: (*a*) $50\,\underline{/-75^\circ}$; (*b*) $19e^{j30^\circ}$; $2.5\,\underline{/-30^\circ} + 0.5\,\underline{/45^\circ}$. Convierta lo siguiente a forma polar: (*c*) $(2 + j2)\,(2 - j2)$; (*d*) $(2 + j2)\,(5\,\underline{/22^\circ})$.
17. Exprese lo siguiente en forma polar: (*a*) $2 + e^{j35^\circ}$; (*b*) $(j)(j)(-j)$; (*c*) 1. Exprese lo siguiente en forma rectangular: (*d*) $2 + e^{j35^\circ}$; (*e*) $-j9 + 5\underline{/55^\circ}$.
18. Calcule lo siguiente y exprese su respuesta en forma polar:

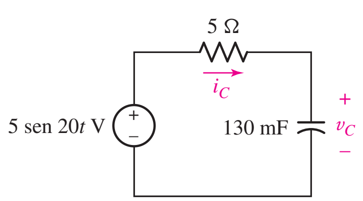
    (*a*) $4(8 - j8)$; (*b*) $4\underline{/5^\circ} - 2\underline{/15^\circ}$; (*c*) $(2 + j9) - 5\underline{/0^\circ}$; (*d*) $\dfrac{-j}{10 + 5j} - 3\underline{/40^\circ} + 2$;
    (*e*) $(10 + j5)\,(10 - j5)\,(3\underline{/40^\circ}) + 2$.

19. Calcule lo siguiente y exprese su respuesta en forma rectangular:

    (*a*) $3\,(3\underline{/30^\circ})$; (*b*) $2\underline{/25^\circ} + 5\underline{/-10^\circ}$; (*c*) $(12 + j90) - 5\underline{/30^\circ}$;
    (*d*) $\dfrac{10 + 5j}{8 - j} + 2\underline{/60^\circ} + 1$; (*e*) $(10 + 5j)\;(10 - 5j)\;(3\underline{/40^\circ}) + 2$.

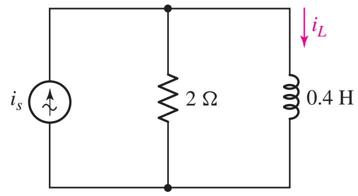
20. Realice las operaciones indicadas y exprese la respuesta tanto en forma rectangular como en forma polar:

    (*a*) $\dfrac{2 + j3}{1 + 8\underline{/90^\circ}} - 4$; (*b*) $\left(\dfrac{10\underline{/25^\circ}}{5\underline{/-10^\circ}} + \dfrac{3\underline{/15^\circ}}{3 - j5}\right) j2$;
    (*c*) $\left[\dfrac{(1 - j)(1 + j) + 1\underline{/0^\circ}}{-j}\right](3\underline{/-90^\circ}) + \dfrac{j}{5\underline{/-45^\circ}}$.

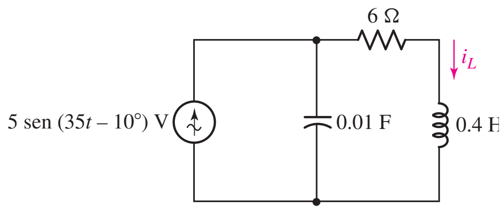


■ **FIGURA 10.50**

21. Inserte una fuente compleja adecuada en el circuito representado en la figura 10.50 y úsela para determinar las expresiones de estado estable para $i_C(t)$ y $v_C(t)$.
22. Para el circuito de la figura 10.51, si $i_s = 5 \cos 10t$ A, use la sustitución por fuente compleja para obtener una expresión de estado estable para $i_L(t)$.
23. En el circuito representado en la figura 10.51, i_s se modifica de tal manera que la resistencia de 2 Ω se reemplaza por una de 20 Ω. Si $i_L(t) = 62.5\,\underline{/31.3^\circ}$ mA, determine i_s.
24. Use una fuente compleja adecuada para determinar la corriente i_L en estado estable en el circuito de la figura 10.52.



■ FIGURA 10.51



■ FIGURA 10.52

10.4 Fasor

25. Transforme cada una de las siguientes expresiones en forma fasorial: (*a*) 75.928 cos (110.1*t*); (*b*) 5 cos (55*t* − 42°); (*c*) −sen (8 000*t* + 14°); (*d*) 3 cos 10*t* − 8 cos (10*t* + 80°).

26. Transforme cada una de las siguientes expresiones en forma fasorial: (*a*) 11 sen 100*t*; (*b*) 11 cos 100*t*; (*c*) 11 cos (100*t* −90°); (*d*) 3 cos 100*t* − 3 sen 100*t*.

27. Suponiendo una frecuencia de operación de 1 kHz, transforme las siguientes expresiones fasoriales en una sola función de coseno en el dominio del tiempo: (*a*) $9\ \underline{/65^\circ}$ V;

    (*b*) $\dfrac{2\underline{/31^\circ}}{4\underline{/25^\circ}}$ A; (*c*) $22\underline{/14^\circ} - 8\underline{/33^\circ}$ V.

28. Las siguientes tensiones complejas están escritas en una combinación de forma rectangular y polar. Reescriba cada una, usando notación fasorial convencional (es decir, una magnitud y un ángulo): (*a*) $\dfrac{2-j}{5\underline{/45^\circ}}$ V; (*b*) $\dfrac{6\underline{/20^\circ}}{1\,000} - j$ V; (*c*) $(j)(52.5\underline{/-90^\circ})$ V.

29. Suponiendo una frecuencia de operación de 50 Hz, calcule la tensión instantánea en $t = 10$ ms y $t = 25$ ms para cada una de las cantidades representadas en el ejercicio 26.

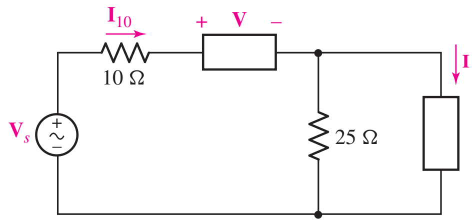
30. Suponiendo una frecuencia de operación de 50 Hz, calcule la tensión instantánea en $t = 10$ ms y $t = 25$ ms para cada una de las cantidades representadas en el ejercicio 27.

31. Considerando la convención del signo pasivo y una frecuencia de operación de 5 rad/s, calcule la tensión fasorial que se genera entre las terminales de los siguientes elementos cuando circula la corriente fasorial $\mathbf{I} = 2\ \underline{/0^\circ}$ mA: (*a*) una resistencia de 1 kΩ; (*b*) un capacitor de 1 mF; (*c*) un inductor de 1 nH.

32. (*a*) Se forma una conexión en serie entre una resistencia de 1 Ω, un capacitor de 1 F y un inductor de 1 H, en ese orden. Suponiendo una operación de $\omega = 1$ rad/s, ¿cuál es la magnitud y cuál es el ángulo de fase de la corriente fasorial que da una tensión de $1\underline{/30^\circ}$ V entre las terminales de la resistencia (observe la convención de signo pasivo)? (*b*) Calcule la relación de la tensión fasorial entre las terminales de la resistencia a la tensión fasorial que aparece entre las terminales de la combinación capacitor-inductor. (*c*) Si se duplica la frecuencia, calcule la nueva relación de la tensión fasorial entre las terminales de la resistencia a la tensión fasorial entre las terminales de la combinación capacitor-inductor.

33. Considerando la convención de signo pasivo y suponiendo una frecuencia de operación de 314 rad/s, calcule la tensión fasorial **V** que aparece entre las terminales de cada uno de los siguientes elementos cuando circula la corriente fasorial $\mathbf{I} = 10\underline{/0^\circ}$ mA: (*a*) una resistencia de 2 Ω; (*b*) un capacitor de 1 F; (*c*) un inductor de 1 H; (*d*) una resistencia de 2 Ω en serie con un capacitor de 1 F; (*e*) una resistencia de 2 Ω en serie con un inductor de 1 H. (*f*) Calcule el valor instantáneo de cada tensión determinada en los incisos (*a*) a (*e*) en $t = 0$.

34. En el circuito de la figura 10.53, que se muestra en el dominio fasorial (de frecuencia), se determina $\mathbf{I}_{10}$ como $2\underline{/42^\circ}$ mA. Si $\mathbf{V} = 40\underline{/132^\circ}$ mV: (*a*) ¿cuál es probablemente el tipo de elemento conectado a la derecha de la resistencia de 10 Ω y (*b*) ¿cuál es su valor, suponiendo que la fuente de tensión opera a una frecuencia de 1 000 rad/s?



■ **FIGURA 10.53**

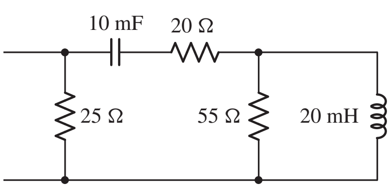
35. El circuito de la figura 10.53 se muestra representado en el dominio fasorial (de frecuencia). Si $\mathbf{I}_{10} = 4\underline{/35°}$ A, $\mathbf{V} = 10\underline{/35°}$ e $\mathbf{I} = 2\underline{/35°}$ A, (*a*) qué tipo de elemento corresponde a la tensión **V**, y cuál es su valor? (*b*) Determine el valor de $\mathbf{V}_s$.

10.5 Impedancia y admitancia

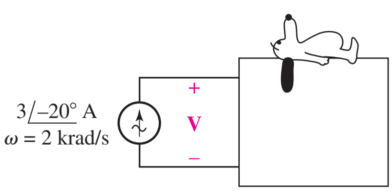
36. (*a*) Obtenga una expresión para la impedancia equivalente $\mathbf{Z}_{eq}$ de una resistencia de 1 Ω en serie con un inductor de 10 mH como una función de ω. (*b*) Grafique la magnitud de $\mathbf{Z}_{eq}$ como una función de ω dentro del intervalo $1 < \omega < 100$ krad/s (use una escala logarítmica para el eje de frecuencia). (*c*) Grafique el ángulo (en grados) de $\mathbf{Z}_{eq}$ como una función de ω dentro del intervalo $1 < \omega < 100$ krad/s (use una escala logarítmica para el eje de frecuencia). [*Pista: semilogx*() de MATLAB es una útil función de graficación.]

37. Determine la impedancia equivalente de las siguientes opciones, suponiendo una frecuencia de operación de 20 rad/s: (*a*) 1 kΩ en serie con 1 mF; (*b*) 1 kΩ en paralelo con 1 mH; (*c*) 1 kΩ en paralelo con una combinación en serie de 1 F y 1 H.

38. (*a*) Obtenga una expresión para la impedancia equivalente $\mathbf{Z}_{eq}$ de una resistencia de 1 Ω en serie con un capacitor de 10 mF como una función de ω. (*b*) Grafique la magnitud de $\mathbf{Z}_{eq}$ como una función de ω en el intervalo $1 < \omega < 100$ krad/s (use escala logarítmica para el eje de frecuencia). (*c*) Grafique el ángulo (en grados) de $\mathbf{Z}_{eq}$ como una función de ω en el intervalo $1 < \omega < 100$ krad/s (use escala logarítmica para el eje de frecuencia). [*Pista*: *semilogx*() de MATLAB es una función útil de graficación.]



■ **FIGURA 10.54**



■ **FIGURA 10.55**

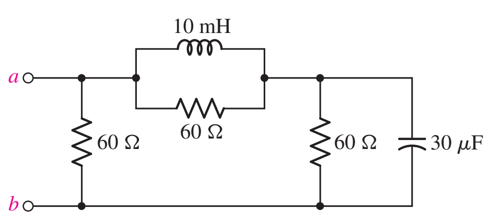
39. Determine la admitancia equivalente de las siguientes opciones, suponiendo una frecuencia de operación de 1 000 rad/s: (*a*) 25 Ω en serie con 20 mH; (*b*) 25 Ω en paralelo con 20 mH; (*c*) 25 Ω en paralelo con 20 mH en paralelo con 20 mF; (*d*) 1 Ω en serie con 1 F en serie con 1 H; (*e*) 1 Ω en paralelo con 1 F en paralelo con 1 H.

40. Considere la red representada en la figura 10.54 y determine la impedancia equivalente vista desde las terminales a circuito abierto si (*a*) $\omega = 1$ rad/s; (*b*) $\omega = 10$ rad/s; (*c*) $\omega = 100$ rad/s.

41. Intercambie el capacitor y el inductor en la red que se muestra en la figura 10.54 y calcule la impedancia equivalente vista desde las terminales a circuito abierto si $\omega = 25$ rad/s.

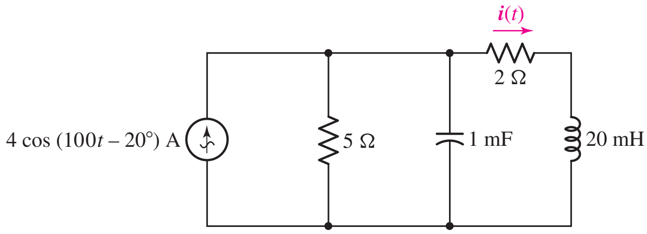
42. Encuentre **V** en la figura 10.55 si la caja contiene (*a*) 3 Ω en serie con 2 mH; (*b*) 3 Ω en serie con 125 μF; (*c*) 3 Ω, 2 mH y 125 μF en serie; (*d*) 3 Ω, 2 mH y 125 μF en serie, pero $\omega = 4$ krad/s.

43. Calcule la impedancia equivalente vista desde las terminales a circuito abierto que se muestra en la figura 10.56 si *f* es igual a (*a*) 1 Hz; (*b*) 1 kHz; (*c*) 1 MHz; (*d*) 1 GHz; (*e*) 1 THz.



■ **FIGURA 10.56**

44. Use el análisis fasorial para obtener una expresión para $i(t)$ en el circuito de la figura 10.57.



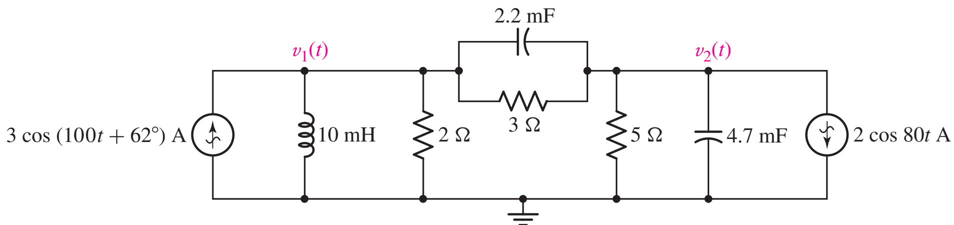
■ **FIGURA 10.57**

45. Diseñe una combinación adecuada de resistencias, capacitores y/o inductores que tenga una impedancia equivalente a $\omega = 100$ rad/s de (*a*) 1 Ω usando por lo menos un inductor; (*b*) $7\angle 10°$ Ω; (*c*) $3 - j4$ Ω.

46. Diseñe una combinación adecuada de resistencias, capacitores y/o inductores que tenga una admitancia equivalente a $\omega = 10$ rad/s de (*a*) 1 S usando por lo menos un capacitor; (*b*) $12\angle -18°$ S; (*c*) $2 + j$ mS.

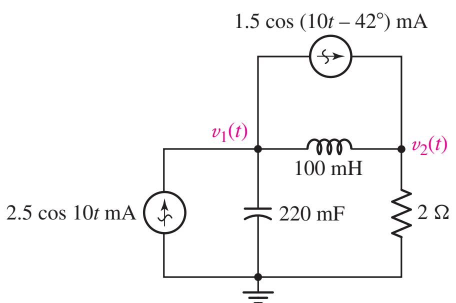
10.6 Análisis nodal y de malla

47. Para el circuito que se representa en la figura 10.58, (*a*) vuelva a dibujar con los fasores adecuados y las impedancias marcadas; (*b*) use análisis nodal para determinar las dos tensiones de nodo $v_1(t)$ y $v_2(t)$.



■ **FIGURA 10.58**

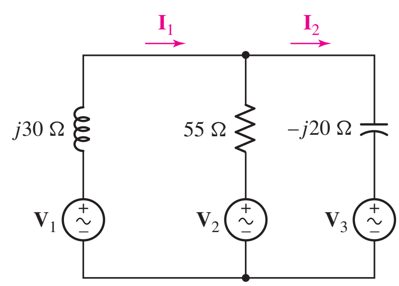
48. Para el circuito que se ilustra en la figura 10.59, (*a*) vuelva a dibujarlo, identificando las cantidades fasoriales y de impedancia adecuadas; (*b*) determine expresiones para las tres corrientes de malla en dominio de tiempo.



■ **FIGURA 10.59**

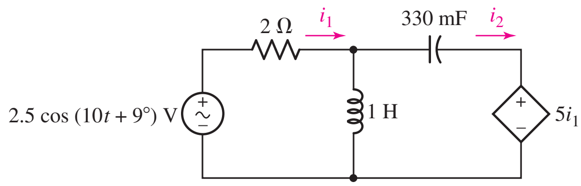
49. Con referencia al circuito de la figura 10.59, utilice técnicas de análisis fasorial para determinar las dos tensiones de nodo.

50. En el circuito en el dominio fasorial representado en la figura 10.60, sea $\mathbf{V}_1 = 10\angle -80°$ V, $\mathbf{V}_2 = 4\angle -20°$ y $\mathbf{V}_3 = 2\angle -23°$ V. Calcule $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$.



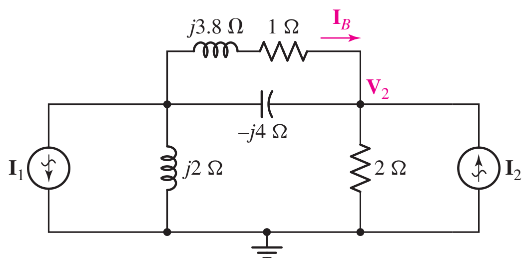
■ **FIGURA 10.60**

51. Con referencia al circuito de dos mallas en el dominio fasorial representado en la figura 10.60, calcule la relación $\mathbf{I}_1$ a $\mathbf{I}_2$ si $\mathbf{V}_1 = 3\underline{/0°}$ V, $\mathbf{V}_2 = 5.5\underline{/-130°}$ V y $\mathbf{V}_3 = 1.5\underline{/17°}$ V.
52. Utilice las técnicas de análisis fasorial para obtener expresiones para las dos corrientes de malla i_1 e i_2 como se muestra en la figura 10.61.



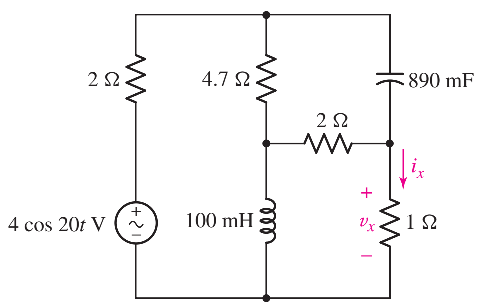
■ **FIGURA 10.61**

53. Determine $\mathbf{I}_B$ en el circuito de la figura 10.62 si $\mathbf{I}_1 = 5\underline{/-18°}$ A e $\mathbf{I}_2 = 2\underline{/5°}$ A.



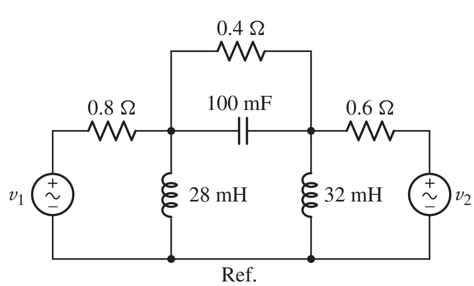
■ **FIGURA 10.62**

54. Determine $\mathbf{V}_2$ en el circuito de la figura 10.62 si $\mathbf{I}_1 = 15\underline{/0°}$ e $\mathbf{I}_2 = 25\underline{/131°}$ A.
55. Utilice el análisis fasorial para obtener una expresión para v_x marcada en el circuito de la figura 10.63.



■ **FIGURA 10.63**

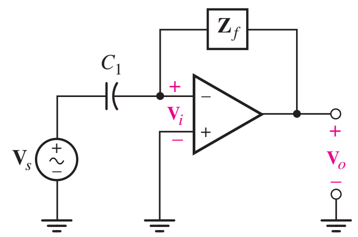
56. Determine la corriente i_x en el circuito de la figura 10.63.
57. Obtenga una expresión para cada una de las cuatro corrientes de malla (en sentido horario) para el circuito de la figura 10.64 si $v_1 = 133 \cos(14t + 77°)$ V y $v_2 = 55 \cos(14t + 22°)$ V.



■ **FIGURA 10.64**

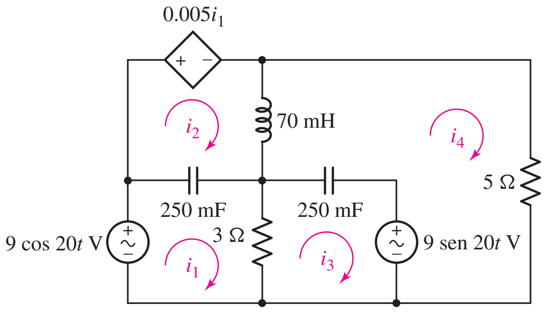
58. Determine las tensiones de nodo para el circuito de la figura 10.64, usando el nodo inferior como nodo de referencia, si $v_1 = 0.009 \cos(500t + 0.5°)$ V y $v_2 = 0.004 \cos(500t + 1.5°)$ V.

59. El amp op que se presenta en la figura 10.65 tiene una impedancia de entrada infinita, impedancia de salida cero y una ganancia grande pero finita (positiva, real) $A = -\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$. (*a*) Construya un diferenciador básico poniendo $\mathbf{Z}_f = R_f$, determine $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ y luego muestre que $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s \rightarrow -j\omega C_1 R_f$ conforme $\mathbf{A} \rightarrow \infty$. (*a*) Sea $\mathbf{Z}_f$ el representante de C_f y R_f estando en paralelo, determine $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ y luego muestre que $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s \rightarrow -j\omega C_1 R_f/(1 + j\omega C_f R_f)$ conforme $\mathbf{A} \rightarrow \infty$.



■ **FIGURA 10.65**

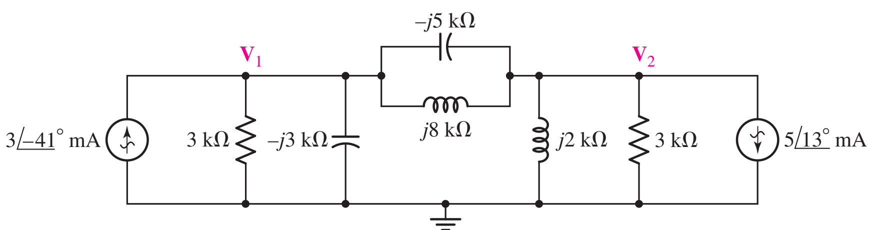
60. Obtenga una expresión para cada una de las cuatro corrientes de malla identificadas en el circuito de la figura 10.66.



■ **FIGURA 10.66**

10.7 Superposición, transformaciones de fuente y teorema de Thévenin

61. Determine la contribución individual de cada fuente de corriente a las dos tensiones de nodo $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ representadas en la figura 10.67.

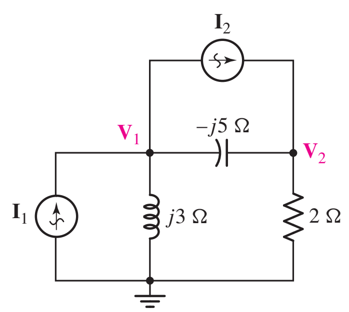


■ **FIGURA 10.67**

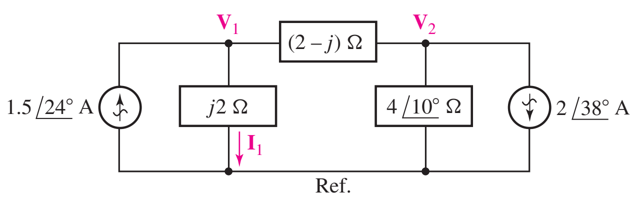
62. Determine $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ en la figura 10.68 si $\mathbf{I}_1 = 33\angle 3°$ mA e $\mathbf{I}_2 = 51\angle -91°$ mA.

63. El circuito en el dominio fasorial de la figura 10.68 se dibujó suponiendo una frecuencia de operación de 2.5 rad/s. Por desgracia, la unidad de fabricación instaló equivocadamente las fuentes, cada una operando a diferente frecuencia. Si $i_1(t) = 4 \cos 40t$ mA e $i_2(t) = 4$ sen $30t$ mA, calcule $v_1(t)$ y $v_2(t)$.

64. Obtenga el equivalente de Thévenin visto desde la impedancia de $(2 - j)$ Ω de la figura 10.69 y utilícelo para determinar la corriente $\mathbf{I}_1$.



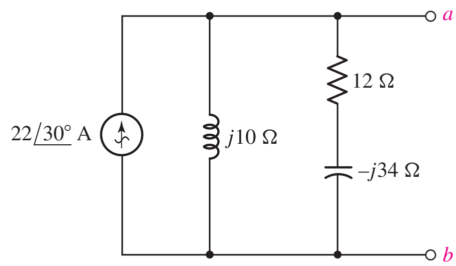
■ **FIGURA 10.68**



■ **FIGURA 10.69**

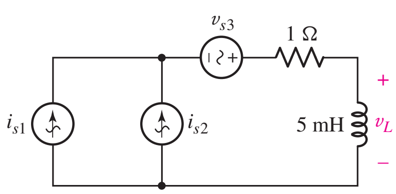
65. La impedancia de $(2 - j)\ \Omega$ en el circuito de la figura 10.69 se reemplaza por una impedancia de $(1 + j)\ \Omega$. Realice una transformación de fuente en cada fuente, simplifique el circuito resultante tanto como sea posible y calcule la corriente que fluye a través de la impedancia $(1 + j)\ \Omega$.

66. Respecto al circuito representado en la figura 10.70, (*a*) calcule el equivalente de Thévenin visto desde las terminales marcadas *a* y *b*; (*b*) determine el equivalente de Norton visto desde las terminales marcadas *a* y *b*; (*c*) calcule la corriente que fluye de *a* a *b* si una impedancia de $(7 - j2)\ \Omega$ está conectada entre dichas terminales.



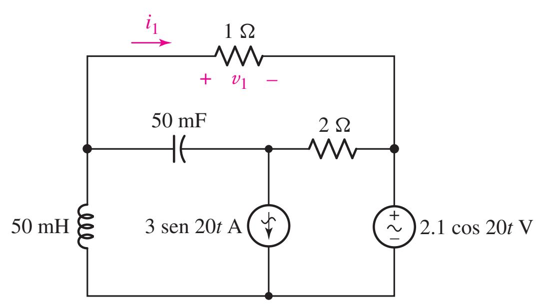
■ **FIGURA 10.70**

67. En el circuito de la figura 10.71, $i_{s1} = 8 \cos (4t - 9°)$ mA, $i_{s2} = 5 \cos 4t$ y $v_{s3} = 2$ sen $4t$. (*a*) Vuelva a dibujar el circuito en el dominio fasorial; (*b*) reduzca el circuito a una sola fuente de corriente con la ayuda de una transformación de fuente; (*c*) calcule $v_L(t)$. (*d*) Verifique su solución con una simulación adecuada en PSpice.



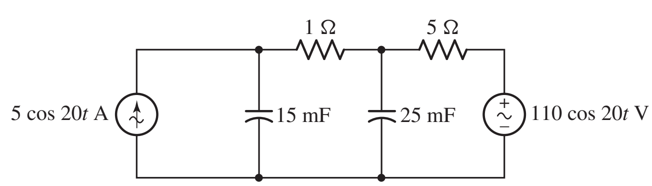
■ **FIGURA 10.71**

68. Determine la contribución individual de cada fuente en la figura 10.72 a la tensión $v_1(t)$.

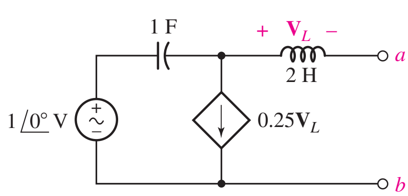


■ **FIGURA 10.72**

69. Determine la potencia disipada por la resistencia de 1 Ω en el circuito de la figura 10.73. Verifique su solución con una simulación adecuada en PSpice.



■ **FIGURA 10.73**

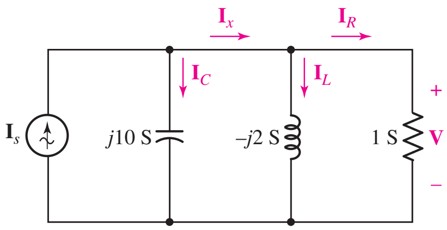


■ **FIGURA 10.74**

70. Use $\omega = 1$ rad/s y encuentre el equivalente de Norton de la red que se muestra en la figura 10.74. Construya el equivalente de Norton como una fuente de corriente $\mathbf{I}_N$ en paralelo con una resistencia R_N y ya sea una inductancia L_N o una capacitancia C_N.

10.8 Diagramas fasoriales

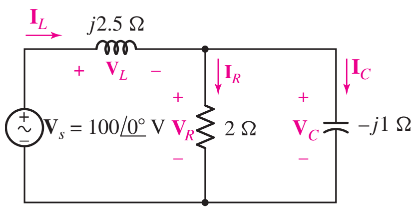
71. La fuente $\mathbf{I}_s$ en el circuito de la figura 10.75 se selecciona de tal modo que $\mathbf{V} = 5\underline{/120°}$ V. (*a*) Construya un diagrama fasorial que muestre $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_L$ e $\mathbf{I}_C$. (*b*) Use el diagrama para determinar el ángulo en el que $\mathbf{I}_s$ está en adelanto con respecto a $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_C$ e $\mathbf{I}_s$.



■ **FIGURA 10.75**

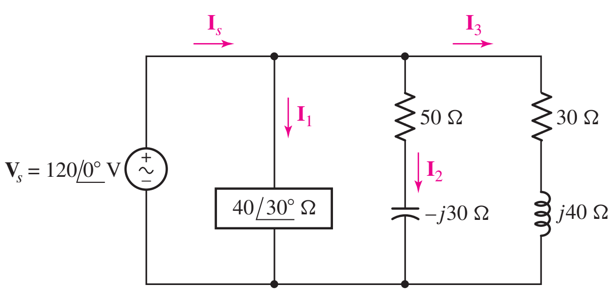
72. Sea $\mathbf{V}_1 = 100\underline{/0°}$ V, $|\mathbf{V}_2| = 140$ V y $|\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2| = 120$ V. Utilice métodos gráficos para determinar dos valores posibles del ángulo de $\mathbf{V}_2$.

73. (*a*) Calcule los valores $\mathbf{I}_L$, $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_C$, $\mathbf{V}_L$, $\mathbf{V}_R$ y $\mathbf{V}_C$, para el circuito de la figura 10.76. (*b*) Utilizando escalas de 50 V correspondiente a 1 pulgada y 25 A a 1 pulgada, muestre las siete cantidades sobre un diagrama fasorial e indique que $\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_C$ y $\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_R$.



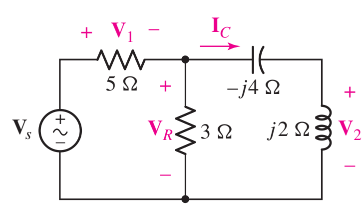
■ **FIGURA 10.76**

74. En el circuito de la figura 10.77, (*a*) calcule los valores de $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$. (*b*) Muestre $\mathbf{V}_s$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$ sobre un diagrama fasorial (las escalas de 50 V/pulgada y 2 A/pulgada funcionan bien). (*c*) Determine gráficamente $\mathbf{I}_s$ e indique su amplitud y su ángulo de fase.



■ **FIGURA 10.77**

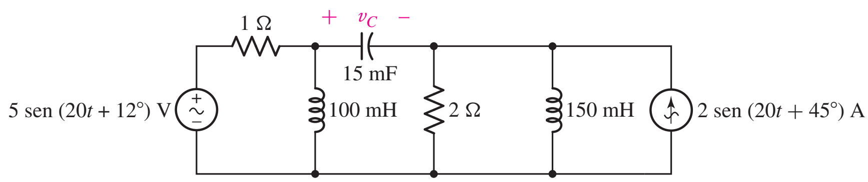
75. La fuente de tensión $\mathbf{V}_s$ en la figura 10.78 se elige de tal manera que $\mathbf{I}_C = 1\underline{/0°}$ A. (*a*) Dibuje un diagrama fasorial que muestre $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_s$ y $\mathbf{V}_R$. (*b*) Use el diagrama para determinar la relación de $\mathbf{V}_2$ a $\mathbf{V}_1$.



■ **FIGURA 10.78**

Ejercicios de integración de capítulo

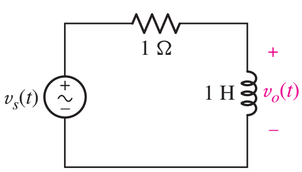
76. Para el circuito que se muestra en la figura 10.79, (*a*) dibuje la representación fasorial del circuito; (*b*) determine el equivalente de Thévenin por el capacitor y úselo para calcular $v_C(t)$. (*c*) Determine la corriente que sale de la terminal de referencia positiva de la fuente de tensión. (*d*) Verifique su solución mediante una simulación adecuada en PSpice.



■ **FIGURA 10.79**

77. El circuito de la figura 10.79 opera desafortunadamente en forma diferente a la especificada; la frecuencia en la fuente de corriente es de sólo 19 rad/s. Calcule la tensión real del capacitor y compárelo con la tensión esperada si el circuito hubiera estado trabajando correctamente.

78. Para el circuito que se muestra en la figura 10.80, (*a*) dibuje la representación fasorial correspondiente; (*b*) obtenga una expresión para $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$; (*c*) grafique $|\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s|$, la magnitud de la relación de las tensiones fasoriales, como una función de la frecuencia ω dentro del intervalo $0.01 \leq \omega \leq 100$ rad/s (use un eje x logarítmico). (*d*) ¿El circuito transfiere bajas frecuencias o altas frecuencias más eficazmente a la salida?



■ **FIGURA 10.80**

79. (*a*) Reemplace el inductor en el circuito de la figura 10.80 por un capacitor de 1 F y repita el ejercicio 10.78. (*b*) Si se designa la "frecuencia de corte" del circuito como la frecuencia a la cual se reduce la salida $1/\sqrt{2}$ veces su valor máximo, rediseñe el circuito para obtener una frecuencia de corte de 2 kHz.

80. Diseñe una red puramente pasiva (que contenga sólo resistencias, capacitores e inductores) que tenga una impedancia de $(22 - j7)/5\underline{/8°}$ Ω a una frecuencia de $f = 100$ MHz.

CAPÍTULO 11

Análisis de potencia en circuitos de ca



INTRODUCCIÓN

A menudo, una parte integral del análisis de circuitos es la determinación de la potencia entregada o la potencia absorbida (o ambas). En el contexto de la potencia de ca, podemos observar que el método relativamente sencillo que hemos utilizado en los capítulos anteriores no proporciona un panorama apropiado de la forma en que opera un sistema en particular, por lo que, en este capítulo, presentaremos algunas cantidades relacionadas con la potencia.

Comenzamos por considerar la potencia *instantánea* como el producto de la tensión y de la corriente, ambas en el dominio del tiempo que se asocia con el elemento o la red de interés. En ocasiones, la potencia instantánea resulta bastante útil por derecho propio, debido a que su valor máximo podría verse limitado a fin de no exceder el intervalo de operación seguro o útil de un dispositivo físico. Por ejemplo, los amplificadores de potencia transistorizados y de bulbos de vacío producen una salida distorsionada, por lo que los altavoces generan un sonido con esa característica cuando la potencia máxima excede cierto valor límite. Sin embargo, estamos concentrados principalmente en la potencia instantánea por la simple razón de que nos proporciona medios para calcular una cantidad más importante, la potencia *promedio* (*activa*). De manera similar, el recorrido de un viaje a través del campo se describe mejor mediante la velocidad promedio; nuestro interés en la velocidad instantánea se limita a evitar las velocidades máximas que harían peligrar la seguridad de una persona o darían pie a que interviniese la patrulla de caminos.

En los problemas prácticos trataremos con valores de potencia promedio que varían desde una pequeña fracción de un picowatt en una señal de telemetría del espacio exterior, unos cuantos watts en la potencia de audio suministrada a los altavoces de un sistema estéreo de alta fidelidad, hasta varios cientos de watts que se requieren para operar la cafetera por las mañanas o los 10 mil millones de watts generados en la presa Grand Coulee. Aun así,

CONCEPTOS CLAVE

- Cálculo de la potencia instantánea
- Potencia promedio (activa) proporcionada por una fuente senoidal
- Valores raíz cuadrática media (RMS)
- Potencia reactiva
- La relación entre potencia compleja, promedio y reactiva
- Factor de potencia de una carga



veremos que el concepto de potencia promedio tiene sus limitaciones, en especial cuando se trata del intercambio de energía entre cargas reactivas y fuentes de potencia. Lo anterior puede manejarse de manera sencilla mediante la presentación de los conceptos de potencia reactiva, potencia compleja y factor de potencia, todos muy comunes en el ámbito de la industria eléctrica.

11.1 POTENCIA INSTANTÁNEA

La ***potencia instantánea*** que se suministra a cualquier dispositivo está dada por el producto de la tensión instantánea a través del dispositivo y la corriente instantánea que circula por él (se respeta la convención de signos pasiva). Así,[1]

$$p(t) = v(t)i(t) \qquad [1]$$

Si el dispositivo en cuestión consiste en una resistencia *R*, entonces la potencia quizá se exprese sólo en términos de su corriente o nada más mediante la corriente o la tensión:

$$p(t) = v(t)i(t) = i^2(t)R = \frac{v^2(t)}{R} \qquad [2]$$

Si la tensión y la corriente se asocian con un dispositivo que es completamente inductivo, entonces:

$$p(t) = v(t)i(t) = Li(t)\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}v(t)\int_{-\infty}^{t} v(t')\,dt' \qquad [3]$$

donde suponemos de manera arbitraria que la tensión es cero en $t = -\infty$. En el caso de un capacitor,

$$p(t) = v(t)i(t) = Cv(t)\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t)\int_{-\infty}^{t} i(t')\,dt' \qquad [4]$$

donde se hace un supuesto similar en relación con la corriente.

Como ejemplo, podríamos considerar el circuito *RL* en serie que se indica en la figura 11.1, excitado mediante una fuente de tensión de escalón. La respuesta de corriente familiar está dada por:

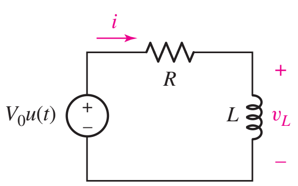


FIGURA 11.1 La potencia instantánea que se entrega a *R* es $p_R(t) = i^2(t)R = (V_0^2/R)(1-e^{-Rt/L})^2u(t)$.

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})u(t)$$

y por ello la potencia total suministrada por la fuente o absorbida por la red pasiva se obtiene mediante

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_0^2}{R}(1 - e^{-Rt/L})u(t)$$

puesto que el cuadrado de la función de escalón unitario es sencillamente la propia función de escalón unitario.

La potencia proporcionada a la resistencia se calcula a través de

$$p_R(t) = i^2(t)R = \frac{V_0^2}{R}(1 - e^{-Rt/L})^2u(t)$$

[1] Antes, conveníamos en que las variables minúsculas en itálicas se considerarían funciones del tiempo, así que hemos mantenido este espíritu hasta ahora. Sin embargo, para subrayar el hecho de que estas cantidades deben evaluarse en un instante de tiempo específico, denotaremos de manera explícita la dependencia del tiempo a lo largo de este capítulo.

Para determinar la potencia que absorbe el inductor, calculamos primero la tensión en el inductor:

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$
$$= V_0 e^{-Rt/L} u(t) + \frac{LV_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})\frac{du(t)}{dt}$$
$$= V_0 e^{-Rt/L} u(t)$$

puesto que $du(t)/dt$ es cero para $t > 0$ y $(1 - e^{-Rt/L})$ es cero en $t = 0$. Por lo tanto, la potencia que absorbe el inductor es

$$p_L(t) = v_L(t)i(t) = \frac{V_0^2}{R} e^{-Rt/L}(1 - e^{-Rt/L})u(t)$$

Sólo requerimos un poco de manipulación algebraica para demostrar que

$$p(t) = p_R(t) + p_L(t)$$

lo cual sirve para verificar la exactitud de este trabajo; los resultados se representan en la gráfica de la figura 11.2.

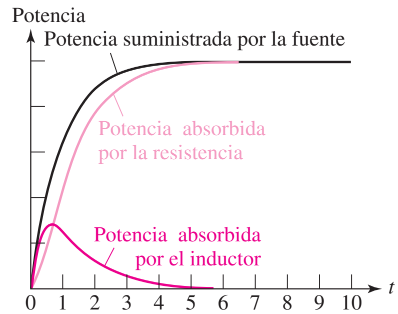


FIGURA 11.2 Gráficas de $p(t)$, $p_R(t)$ y $p_L(t)$. A medida que desaparece el transitorio, el circuito vuelve a la operación de estado permanente. Puesto que la única fuente que queda en el circuito es de cd, a la larga el inductor actúa como un cortocircuito que absorbe potencia cero.

Potencia debida a la excitación senoidal

Cambiemos la fuente de tensión en el circuito de la figura 11.1 por la fuente senoidal $V_m \cos \omega t$. La respuesta común en el dominio del tiempo está dada por

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

donde:

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \qquad \text{y} \qquad \phi = -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

Por lo tanto, la potencia instantánea que se suministra a todo el circuito en el estado senoidal permanente es:

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi)\cos \omega t$$

que es conveniente reescribir de la forma obtenida empleando la identidad trigonométrica del producto de dos funciones coseno. Por consiguiente,

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2}[\cos(2\omega t + \phi) + \cos\phi]$$
$$= \frac{V_m I_m}{2}\cos\phi + \frac{V_m I_m}{2}\cos(2\omega t + \phi)$$

La última ecuación posee varias características válidas en general para circuitos en estado senoidal permanente. Un término, el primero, no es una función del tiempo, en tanto que el segundo término tiene una variación cíclica en el *doble* de la frecuencia aplicada. Debido a que el término es una onda coseno y en vista de que las ondas seno y las coseno tienen valores promedio de cero (cuando se promedia un número entero de periodos), este ejemplo sugiere que la potencia *promedio* (activa) corresponde a $\frac{1}{2}V_m I_m \cos\phi$; como veremos dentro de poco, en realidad esto es lo que ocurre.

EJEMPLO 11.1

Una fuente de tensión, $40 + 60u(t)$ V, un capacitor de 5 μF y una resistencia de 200 Ω están en serie. Determine la potencia que absorben el capacitor y la resistencia en $t = 1.2$ ms.

Antes de $t = 0^-$, no fluye ninguna corriente, por lo que una tensión de 40 V aparece en los extremos del capacitor. En $t = 0^+$, la tensión de la combinación en serie de un capacitor y una resistencia salta a 100 V. Puesto que v_C no puede cambiar de manera instantánea, la tensión en la resistencia en $t = 0^+$ corresponde a 60 V.

Por lo tanto, la corriente que circula por los tres elementos en $t = 0^+$ es de $60/200 = 300$ mA y para $t > 0$ está dada por:

$$i(t) = 300e^{-t)\tau} \qquad \text{mA}$$

donde $\tau = RC = 1$ ms. De tal modo, la corriente que fluye en $t = 1.2$ ms es de 90.36 mA, y la potencia que absorbe la resistencia *en ese instante corresponde* simplemente a

$$i^2(t)R = 1.633 \text{ W}$$

La potencia instantánea que absorbe el capacitor es $i(t)v_C(t)$. Al reconocer que la tensión total en ambos elementos en $t > 0$ siempre será de 100 V y que la tensión en la resistencia está dada por $60e^{-t/\tau}$, tenemos

$$v_C(t) = 100 - 60e^{-t/\tau}$$

de modo que observamos que $v_C(1.2 \text{ ms}) = 100 - 60e^{-1.2} = 81.93$ V. De esta forma, la potencia que está absorbiendo el capacitor en $t = 1.2$ ms es (90.36 mA) (81.93 V) = 7.403 W.

PRÁCTICA

11.1 Una fuente de corriente de 12 cos 2 000t A, una resistencia de 200 Ω y un inductor de 0.2 H están en paralelo. Suponga que existen condiciones de estado permanente. En $t = 1$ ms, determine la potencia que absorbe: (*a*) la resistencia; (*b*) el inductor y (*c*) la fuente senoidal.

Respuestas: 13.98 kW; −5.63 kW: −8.35 kW.

11.2 POTENCIA PROMEDIO O ACTIVA

Cuando hablamos de un valor promedio de la potencia instantánea, debemos definir con toda claridad el intervalo durante el que se lleva a cabo el proceso de promedio. Elegimos primero un intervalo general de t_1 a t_2. Podríamos obtener el valor promedio al integrar $p(t)$ desde t_1 hasta t_2 y dividir el resultado entre el intervalo $t_2 - t_1$. De tal modo:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt \qquad [5]$$

El valor promedio se denota mediante la letra mayúscula P, puesto que no es una función del tiempo y suele aparecer sin ningún subíndice específico que la identifique como un valor promedio. Aunque P no es una función del tiempo, *es* una función de t_1 y t_2

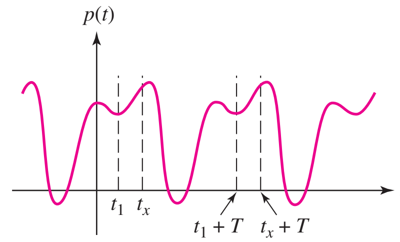
los dos instantes que definen el intervalo de integración. Esta dependencia de P en el intervalo específico se expresaría de una manera más simple si $p(t)$ fuese una función periódica. Consideramos primero este importante caso.

Potencia promedio (activa) de formas de onda periódicas

Supongamos que nuestra función forzada y las respuestas de circuito son periódicas; se ha alcanzado una condición de estado permanente, aunque no necesariamente el estado senoidal permanente. Podríamos definir de manera matemática una función *periódica* $f(t)$ al requerir que

$$f(t) = f(t+T) \qquad [6]$$

donde T es el periodo. A continuación demostramos que el valor promedio de la potencia instantánea, según se expresa mediante la ecuación [5], se calcularía sobre un intervalo de un periodo que tiene un inicio arbitrario.



■ **FIGURA 11.3** El valor promedio de P de una función periódica $p(t)$ es el mismo sobre cualquier periodo T.

Una forma de onda periódica general se ilustra en la figura 11.3 y se identifica como $p(t)$. Calculamos primero la potencia integrando desde t_1 hasta un tiempo t_2 que está un periodo después, $t_2 = t_1 + T$:

$$P_1 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} p(t)\,dt$$

y se integra luego desde algún otro tiempo t_x hasta $t_x + T$:

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{t_x}^{t_x+T} p(t)\,dt$$

La igualdad de P_1 y P_x debe ser evidente a partir de la interpretación gráfica de las integrales; la naturaleza periódica de la curva requiere que ambas áreas sean iguales. De tal modo, la ***potencia promedio (activa)*** se calcula integrando la potencia instantánea durante cualquier intervalo que sea de un periodo de longitud, y luego se divide entre el periodo:

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_x}^{t_x+T} p(t)\,dt \qquad [7]$$

Es importante observar que integraremos también sobre cualquier número entero de periodos, siempre que dividamos entre el mismo número entero de periodos. En consecuencia:

$$P = \frac{1}{nT}\int_{t_x}^{t_x+nT} p(t)\,dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad [8]$$

Si llevamos este concepto al extremo integrando sobre todo el tiempo, se obtiene otro resultado útil. Primero nos proporcionamos los límites simétricos en la integral

$$P = \frac{1}{nT}\int_{-nT/2}^{nT/2} p(t)\,dt$$

y luego tomamos los límites cuando n se vuelve infinita,

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nT}\int_{-nT/2}^{nT/2} p(t)\,dt$$

En tanto que $p(t)$ es una función con buen comportamiento matemático, como lo son todas las funciones y respuestas forzadas *físicamente*, resulta claro que si se susti-

tuye un entero n mayor por un número un poco más grande no entero, entonces el valor de la integral y de P cambian en una cantidad despreciable; además, el error disminuye cuando n crece. Sin justificar este paso de manera rigurosa, sustituimos así la variable discreta nT por la variable continua τ:

$$P = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} p(t)\, dt \qquad [9]$$

Veremos que es conveniente en varias ocasiones integrar funciones periódicas sobre este “periodo infinito”.

Potencia promedio (activa) en el estado senoidal permanente

Obtengamos el resultado general del estado senoidal permanente. Suponemos la tensión senoidal general

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

y la corriente

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

asociadas con el dispositivo en cuestión. La potencia instantánea se calcula mediante

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \phi)$$

Si expresamos otra vez el producto de dos funciones coseno como la semisuma del coseno del ángulo diferencia y el coseno del ángulo suma,

$$p(t) = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) + \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi) \qquad [10]$$

Recuerde que $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

es posible ahorrar parte de la integración mediante la inspección del resultado. El primer término es una constante, independiente de t. El otro es una función coseno; $p(t)$ es en consecuencia periódica y su periodo es igual a $\frac{1}{2}T$. Observe que el periodo T se asocia con la corriente y la tensión dadas, y no con la potencia; la función potencia tiene un periodo $\frac{1}{2}T$. Sin embargo, debemos integrar sobre un intervalo de T para determinar el valor promedio, si así lo deseamos; sólo es necesario dividir también entre T. No obstante, nuestra familiaridad con las ondas coseno y seno indica que el valor promedio de cualquiera sobre un periodo es cero. Por ello no hay necesidad de integrar de manera formal la ecuación [10]; por inspección, el valor promedio del segundo término es cero sobre un periodo T (o $\frac{1}{2}T$) y el valor promedio del primer término, una constante, debe ser también la propia constante. Por lo tanto,

$$\boxed{P = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)} \qquad [11]$$

Este importante resultado, que se presentó en la sección anterior para un circuito específico, es por lo tanto bastante general del estado senoidal permanente. La potencia promedio resulta la semisuma del producto de la amplitud de cresta de la tensión, la amplitud de cresta de la corriente y el coseno de la diferencia del ángulo de fase entre la corriente y la tensión; el sentido de la diferencia no tiene importancia.

Vale la pena considerar por separado dos casos especiales: la potencia promedio entregada a una resistencia ideal y la correspondiente a un reactor ideal (cualquier combinación de sólo capacitores e inductores).

EJEMPLO 11.2

Dada la tensión en el dominio del tiempo $v = 4\cos(\pi t/6)$ V, determine la potencia promedio y la expresión de la potencia instantánea que se produce cuando la tensión fasorial correspondiente a $\mathbf{V} = 4\angle 0^\circ$ V se aplica a través de una impedancia $\mathbf{Z} = 2\angle 60^\circ$ Ω.

La corriente fasorial es $\mathbf{V}/\mathbf{Z} = 2\angle -60^\circ$ A, y la potencia promedio (activa) es

$$P = \tfrac{1}{2}(4)(2)\cos 60^\circ = 2 \text{ W}$$

Podemos escribir la tensión en el dominio del tiempo como

$$v(t) = 4\cos\frac{\pi t}{6} \qquad \text{V}$$

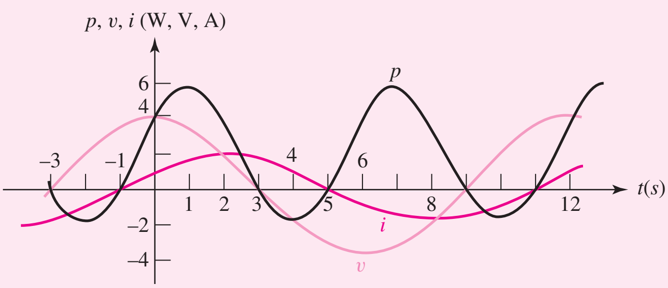
y la corriente en el dominio del tiempo como

$$i(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{6} - 60^\circ\right) \qquad \text{A}$$

La potencia instantánea, entonces, está dado por su producto:

$$p(t) = 8\cos\frac{\pi t}{6}\cos\left(\frac{\pi t}{6} - 60^\circ\right)$$
$$= 2 + 4\cos\left(\frac{\pi t}{3} - 60^\circ\right) \qquad \text{W}$$

Las tres cantidades se dibujan sobre el mismo eje de tiempo de la figura 11.4. Tanto el valor promedio de 2 W de la potencia como su periodo de 6 s, la mitad del periodo de la corriente o de la tensión, resultan evidentes. También es claro el valor cero de la potencia instantánea en cada instante, cuando la tensión o la corriente es cero.



■ **FIGURA 11.4** Las curvas de $v(t)$, $i(t)$ y $p(t)$ se grafican como funciones de tiempo de un circuito simple en el cual la tensión fasorial $\mathbf{V} = \angle 40^\circ$ V se aplica a la impedancia $\mathbf{Z} = 2\angle 60^\circ$ Ω con $\omega = \pi/6$ rad/s.

PRÁCTICA

11.2 Dada la tensión fasorial $\mathbf{V} = 115\sqrt{2}\angle 45^\circ$ V en impedancia $\mathbf{Z} = 16.26\angle 19.3^\circ$ Ω, obtenga la expresión de la potencia instantánea y calcule la potencia promedio si $\omega = 50$ rad/s.

Respuestas: $767.5 + 813.2\cos(100t + 70.7^\circ)$ W; 767.5 W.

Potencia promedio absorbida por una resistencia ideal

La diferencia de ángulo de fase entre la corriente y la tensión en una resistencia pura es cero. De tal modo,

$$P_R = \tfrac{1}{2}V_m I_m \cos 0 = \tfrac{1}{2}V_m I_m$$

o

$$P_R = \tfrac{1}{2}I_m^2 R \qquad [12]$$

o

$$P_R = \frac{V_m^2}{2R} \qquad [13]$$

Considere que se está calculando la potencia ***promedio*** entregada a una resistencia por una fuente senoidal; tenga cuidado de no confundir esta cantidad con la potencia ***instantánea*** que tiene una forma similar.

Las últimas dos fórmulas, que nos permiten determinar la potencia promedio entregada a una resistencia pura a partir del conocimiento de la corriente o de la tensión senoidal, son simples e importantes. Desafortunadamente, *se usan de manera incorrecta.* El error más común se comete al tratar de aplicarlas en casos donde la tensión incluida en la ecuación [13] *no es la que se presenta en la resistencia.* Si se tiene cuidado al emplear la corriente que circula por la resistencia de la ecuación [12] y la tensión a través de la misma en la ecuación [13], se garantiza una operación satisfactoria. Además, ¡no hay que olvidar el factor de $\frac{1}{2}$!

Potencia promedio (activa) absorbida por elementos puramente reactivos

La potencia promedio entregada a cualquier dispositivo que es puramente reactivo (es decir, que no contiene resistencias) debe ser cero. Éste es un resultado directo de la diferencia de fase de 90°, que debe existir entre la corriente y la tensión; en consecuencia, $\cos(\theta - \phi) = \cos \pm 90° = 0$ y

$$P_X = 0$$

La potencia *promedio* que se entrega a cualquier red compuesta totalmente por inductores y capacitores ideales es cero; la potencia *instantánea* es cero sólo en instantes específicos. Por lo tanto, la potencia fluye hacia la red en una parte del ciclo, y fuera de la misma durante otra parte del ciclo, *sin* potencia perdida.

EJEMPLO 11.3

Encuentre la potencia promedio (activa) que se entrega a una impedancia $\mathbf{Z}_L = 8 - j11\ \Omega$ por la que circula una corriente $\mathbf{I} = 5\underline{/20°}$ A.

Podríamos encontrar la solución bastante rápido si utilizamos la ecuación [12]. Sólo la resistencia de 8 Ω entra en el cálculo de la potencia promedio, ya que la componente $j11\ \Omega$ no absorberá ninguna potencia *promedio*. En consecuencia,

$$P = \tfrac{1}{2}(5^2)8 = 100 \text{ W}$$

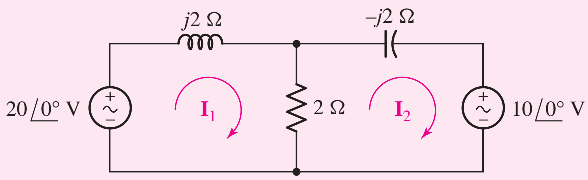
PRÁCTICA

11.3 Calcule la potencia promedio suministrada a la impedancia $6\ \underline{/25°}\ \Omega$ por la que circula una corriente $\mathbf{I} = 2 + j5$ A.

Respuesta: 78.85 W.

EJEMPLO 11.4

Determine la potencia promedio que absorbe cada uno de los tres elementos pasivos de la figura 11.5, así como la potencia promedio que suministra cada fuente.



■ **FIGURA 11.5** La potencia promedio que se entrega a cada elemento reactivo es cero en el estado permanente senoidal.

Sin hacer un análisis del circuito, ya sabemos que la potencia promedio absorbida por dos elementos reactivos es cero.

Los valores de $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ se calculan mediante cualquiera de los diversos métodos, como el análisis de malla, el análisis nodal o la superposición. Dichos valores son

$$\mathbf{I}_1 = 5 - j10 = 11.18\underline{/-63.43^\circ} \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_2 = 5 - j5 = 7.071\underline{/-45^\circ} \text{ A}$$

La corriente hacia abajo que pasa por la resistencia de 2 Ω es

$$\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = -j5 = 5\underline{/-90^\circ} \text{ A}$$

por lo que $I_m = 5$ A, y la potencia promedio que absorbe la resistencia se calcula de manera más fácil mediante la ecuación [12]:

$$P_R = \tfrac{1}{2}I_m^2R = \tfrac{1}{2}(5^2)2 = 25 \text{ W}$$

Este resultado se verifica utilizando la ecuación [11] o la [13]. A continuación concentramos nuestra atención en la fuente izquierda. La tensión $20\underline{/0^\circ}$ V y la corriente asociada $\mathbf{I}_1 = 11.18\underline{/-63.43^\circ}$ satisface la convención de signos *activa* y por ello la potencia que *entrega* esta fuente es

$$P_{\text{izquierda}} = \tfrac{1}{2}(20)(11.18)\cos[0^\circ - (-63.43^\circ)] = 50 \text{ W}$$

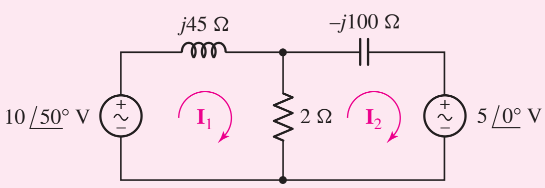
De manera similar, obtenemos que la potencia *absorbida* por la fuente derecha, utilizando la convención de signos *pasiva*, es

$$P_{\text{derecha}} = \tfrac{1}{2}(10)(7.071)\cos(0^\circ + 45^\circ) = 25 \text{ W}$$

Puesto que 50 = 25 + 25, se confirman las relaciones de potencia.

PRÁCTICA

11.4 En el circuito de la figura 11.6, calcule la potencia promedio entregada a cada uno de los elementos pasivos. Verifique la respuesta mediante el cálculo de la potencia que entregan las dos fuentes.



■ **FIGURA 11.6**

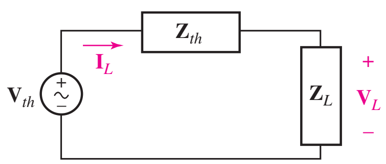
Respuestas: 0, 37.6 mW, 0, 42.0 mW, –4.4 mW.

La notación **Z*** denota el ***conjugado complejo*** del número complejo **Z** que se forma mediante la sustitución de todas las "*j*" por "−*j*". Consulte el apéndice 5 para mayores detalles.

Transferencia de potencia máxima

Consideramos antes el teorema de transferencia de potencia máxima cuando lo aplicamos a cargas resistivas y a impedancias de fuentes resistivas. En el caso de una fuente de Thévenin $\mathbf{V}_{th}$ e impedancia $\mathbf{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th}$ conectada a una carga $\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L$, se demostraría que la potencia promedio que se entrega a la carga es un máximo cuando $R_L = R_{th}$ y $X_L = -X_{th}$, es decir, cuando $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}^*_{th}$. Este resultado a menudo se dignifica llamándolo *teorema de transferencia de potencia máxima del estado senoidal permanente*:

> Una fuente de tensión independiente en *serie* con una impedancia $\mathbf{Z}_{th}$ o una fuente de corriente independiente en *paralelo* con una impedancia $\mathbf{Z}_{th}$ entrega una ***potencia promedio máxima*** a una impedancia de carga $\mathbf{Z}_L$, que el conjugado de $\mathbf{Z}_{th}$ o $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}^*_{th}$.



■ **FIGURA 11.7** Circuito de lazo simple que se utiliza para ilustrar la deducción del teorema de transferencia de potencia máxima, cuando se aplica a circuitos que operan en estado senoidal permanente.

Los detalles de la demostración se dejan para el lector, aunque el método básico se comprende al considerar el circuito de lazo simple de la figura 11.7. Podríamos escribir la impedancia equivalente de Thévenin $\mathbf{Z}_{th}$ como la suma de dos componentes, $R_{th} + jX_{th}$, y de manera similar, la impedancia de carga $\mathbf{Z}_L$ se expresa como $R_L + jX_L$. La corriente que circula por el lazo se calcula mediante

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{th}}{\mathbf{Z}_{th} + \mathbf{Z}_L} = \frac{\mathbf{V}_{th}}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L} = \frac{\mathbf{V}_{th}}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)}$$

y

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_{th}\frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_{th} + \mathbf{Z}_L} = \mathbf{V}_{th}\frac{R_L + jX_L}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L} = \mathbf{V}_{th}\frac{R_L + jX_L}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)}$$

La magnitud de $\mathbf{I}_L$ es

$$\frac{|\mathbf{V}_{th}|}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

y el ángulo de fase corresponde a

$$\underline{/\mathbf{V}_{th}} - \tan^{-1}\left(\frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L}\right)$$

De manera similar, la magnitud de V_L es igual a

$$\frac{|\mathbf{V}_{th}|\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

y su ángulo de fase está dado por

$$\underline{/\mathbf{V}_{th}} + \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R_L}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L}\right)$$

En relación con la ecuación [11], entonces, encontramos la expresión de la potencia promedio P entregada a la impedancia de carga $\mathbf{Z}_L$:

$$P = \frac{\frac{1}{2}|\mathbf{V}_{th}|^2\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{(R_{th}+R_L)^2 + (X_{th}+X_L)^2}\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R_L}\right)\right) \qquad [14]$$

Para probar que la potencia promedio máxima en realidad se entrega a la carga cuando $\mathbf{Z}_L = Z_{th}^*$, debemos efectuar dos pasos independientes. Primero, la derivada de la ecuación [14] con respecto a R_L debe igualarse a cero. Segundo, la derivada de la ecuación [14] con respecto a X_L también debe igualarse a cero. Los detalles restantes se dejan como ejercicio para el lector ávido.

EJEMPLO 11.5

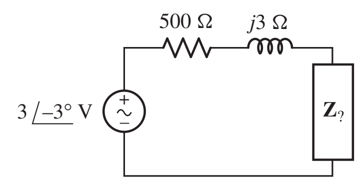
Un circuito está compuesto por la combinación en serie de una fuente de tensión senoidal 3 cos(100*t* − 3°) V, una resistencia de 500 Ω, un inductor de 30 mH y una impedancia desconocida. Si estamos seguros de que la fuente de tensión está entregando la potencia promedio (activa) máxima a la impedancia desconocida, ¿cuál es su valor?

La representación de fasores del circuito se dibuja en la figura 11.8 y éste se observa con facilidad como una impedancia desconocida $\mathbf{Z}_?$ en serie con un equivalente de Thévenin compuesto por la fuente $3\angle{-3^\circ}$ V y una impedancia de Thévenin $500 + j3\ \Omega$.

Debido a que el circuito de la figura 11.8 ya está en la forma que se requiere para aplicar el teorema de transferencia de potencia promedio máxima, sabemos que ésta se transferirá a una impedancia igual al complejo conjugado de $\mathbf{Z}_{th}$, o

$$\mathbf{Z}_? = \mathbf{Z}_{th}^* = 500 - j3\ \Omega$$

Se construye esta impedancia de varias maneras, pero la más simple es una resistencia de 500 Ω, en serie con un capacitor que tiene $-j3\ \Omega$. En razón de que la frecuencia de operación del circuito equivale a 100 rad/s, corresponde a una capacitancia de 3.333 mF.



■ **FIGURA 11.8** Representación fasorial de un circuito en serie simple compuesto por una fuente de tensión senoidal, una resistencia, un inductor y una impedancia desconocida.

PRÁCTICA

11.5 Si el inductor de 30 mH del ejemplo 11.5 se sustituye por un capacitor de 10 μF, ¿cuál es el valor de la componente inductiva de la impedancia desconocida $\mathbf{Z}_?$ si se sabe que $\mathbf{Z}_?$ está absorbiendo una potencia máxima?

Respuesta: 10 H.

Potencia promedio (activa) de funciones no periódicas

Debemos prestar cierta atención a las funciones *no periódicas.* La salida de potencia de un radiotelescopio dirigido hacia una "radioestrella" constituye un ejemplo práctico de una función de potencia no periódica para la que se desea un valor de potencia promedio. Otro es la suma de varias funciones periódicas, cada una con un periodo diferente, de tal manera que no pueda encontrarse un periodo mayor de la combinación. Por ejemplo, la corriente

$$i(t) = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} \pi t \qquad [15]$$

es no periódica debido a que la proporción de los periodos de las dos ondas senoidales es un número irracional. En $t = 0$, ambos términos son cero y crecientes. Sin embargo, el primer término es cero y creciente sólo cuando $t = 2\pi n$, donde n es un entero y por lo tanto la periodicidad exige que πt o $\pi(2\pi n)$ deban ser iguales a $2\pi m$, donde m es también un entero. No es posible una solución para esta ecuación (valores enteros de m y n). Quizá resulte útil comparar la expresión no periódica de la ecuación [15] con la función *periódica*:

$$i(t) = \text{sen } t + \text{sen } 3.14t \qquad [16]$$

donde 3.14 es una expresión decimal exacta y no se interpreta como 3.141592 . . . Con un poco de esfuerzo,[2] se demuestra que el periodo de esta onda de corriente mide igual a 100π segundos.

El valor promedio de la potencia que se entrega a una resistencia de 1 Ω mediante una corriente periódica, como la ecuación [16], o a partir de una no periódica como la ecuación [15], se determina integrando sobre un intervalo finito. De esta forma se reduce mucho la integración real debido al conocimiento amplio que tenemos de los valores promedio de las funciones simples. Por lo tanto, obtenemos la potencia promedio que entrega la corriente en la ecuación [15] aplicando la ecuación [9]:

$$P = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} (\text{sen}^2 t + \text{sen}^2 \pi t + 2\,\text{sen } t \text{ sen } \pi t)\, dt$$

Consideramos ahora a P como la suma de tres valores promedio. El valor promedio de $\text{sen}^2 t$ sobre un intervalo infinito se determina sustituyendo $\text{sen}^2 t$ por $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t)$; el promedio no es más que $\frac{1}{2}$. De manera similar, el valor promedio de $\text{sen}^2 \pi t$ también es $\frac{1}{2}$, y el último término se expresa como la suma de dos funciones coseno, cada una de las cuales debe tener ciertamente un valor promedio de cero. Por lo tanto,

$$P = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \text{ W}$$

Un resultado idéntico se obtiene en el caso de la corriente periódica de la ecuación [16]. Al aplicar este mismo método a la función de corriente, que es la suma de varias senoides de *periodos diferentes* y amplitudes arbitrarias,

$$i(t) = I_{m1}\cos\omega_1 t + I_{m2}\cos\omega_2 t + \cdots + I_{mN}\cos\omega_N t \qquad [17]$$

calculamos la potencia promedio entregada a una resistencia R,

$$P = \tfrac{1}{2}\left(I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + \cdots + I_{mN}^2\right)R \qquad [18]$$

El resultado es invariable si se asigna un ángulo de fase arbitrario a cada componente de la corriente. Este importante resultado es sorprendentemente simple cuando pensamos en los pasos que se requieren para su deducción: elevar al cuadrado la función corriente, integrarla y tomar el límite. El resultado es igual de sorpresivo, pues

EJEMPLO 11.6

Determine la potencia promedio (activa) que entrega la corriente $i_1 = 2\cos 10t - 3\cos 20t$ A a una resistencia de 4 Ω.

En razón de que los dos términos coseno están a frecuencias *diferentes*, los dos valores de potencia promedio se podrían calcular por separado y se sumarían. De tal modo, esta corriente entrega $\frac{1}{2}(2^2)4 + \frac{1}{2}(3^2)4 = 8 + 18 = 26$ W a una resistencia de 4 Ω.

[2] $T_1 = 2\pi$ y $T_2 = 2\pi/3.14$. Por lo tanto, se buscan valores integrales de m y n tales que $2\pi n = 2\pi m/3.14$, o $3.14n = m$, o $\frac{314}{100}n = m$ o $157n = 50m$. De tal modo, los valores enteros más pequeños de n y m son $n = 50$ y $m = 157$. En consecuencia, el periodo es $T = 2\pi n = 100\pi$, o $T = 2\pi(157/3.014) = 100\pi$ s.

EJEMPLO **11.7**

Determine la potencia que entrega la corriente $i_2 = 2 \cos 10t - 3 \cos 10t$ A a una resistencia de 4 Ω.

En este caso, ambas componentes de la corriente están a la *misma* frecuencia, por lo cual deben combinarse en una sola senoide a dicha frecuencia. De tal manera, $i_2 = 2 \cos 10t - 3\cos 10t = -\cos 10t$ entrega sólo $\frac{1}{2}(1^2)4 = 2$ W de potencia promedio a una resistencia de 4 Ω.

PRÁCTICA

11.6 Una fuente de tensión v_s se conecta a una resistencia de 4 Ω. Determine la potencia promedio absorbida por la resistencia, si v_s es igual a: (*a*) 8 sen 200*t* V; (*b*) 8 sen 200*t* − 6 cos(200*t* − 45°) V; (*c*) 8 sen 200*t* − 4 sen 100*t* V; (*d*) 8 sen 200*t* − 6 cos(200*t* − 45°) − 5 sen 100*t* + 4 V.

Respuestas: 8.00 W; 4.01 W; 10.00 W; 11.14 W.

muestra que, *en este caso especial de una corriente como la de la ecuación [17], en la que cada elemento tiene una frecuencia única, la superposición se aplica a la potencia,* esto es*, no* se aplica a una corriente que sea la suma de dos corrientes directas, ni a una corriente que sea la suma de dos senoides de la misma frecuencia.

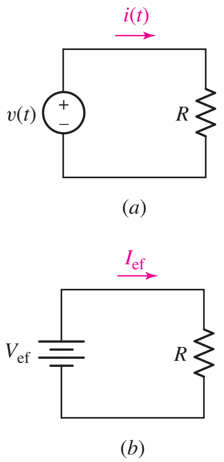
11.3 VALORES EFICACES DE CORRIENTE Y DE TENSIÓN

La mayoría de la gente está consciente de que la tensión disponible en las tomas de energía eléctrica en Norteamérica es una tensión senoidal con 60 Hz de frecuencia y 115 V de magnitud (en cualquier otro lado, es típicamente de 50 Hz y 240 V). Pero, ¿qué se entiende por "115 volts"? No es en realidad el valor instantáneo de la tensión, pues ésta no es una constante. No es tampoco la amplitud simbolizada como V_m; si presentamos la forma de onda de tensión sobre un osciloscopio calibrado, descubriríamos que la amplitud de esta tensión en una de nuestras tomas de ca es $115\sqrt{2}$, o 162.6, volts. Tampoco podemos hacer corresponder el concepto de un valor promedio con los 115 V, debido a que un valor promedio de la onda senoidal es cero. Podríamos tratar de ser un poco más precisos y calcular la magnitud del promedio sobre un semiciclo positivo o negativo; mediante el uso de un voltímetro tipo rectificador en la toma eléctrica, debemos medir 103.5 V. Sin embargo, sucede que los 115 V son el ***valor eficaz*** de esta tensión senoidal. El valor es una medida de la eficacia de la fuente de tensión al suministrar potencia a una carga resistiva.

Valor eficaz de una forma de onda periódica

Definamos de manera arbitraria el valor eficaz en términos de una forma de onda de corriente, si bien sería igualmente posible elegir una tensión. El *valor eficaz* de cualquier corriente periódica resulta igual al valor de la corriente directa que, al fluir a través de una resistencia de *R*-ohm, entrega la misma potencia promedio a la resistencia que la corriente periódica.

En otras palabras, dejamos que una corriente periódica dada fluya por la resistencia, determinamos la potencia instantánea i^2R, y luego obtenemos el valor promedio de i^2R sobre un periodo; esto es la potencia promedio (activa). Provocamos después que una corriente directa fluya por esta misma resistencia y ajustamos el valor de la corriente



■ **FIGURA 11.9** Si la resistencia recibe la misma potencia promedio en los incisos *a* y *b*, entonces el valor eficaz de $i(t)$ es igual a I_{ef}, y el valor eficaz de $v(t)$ es igual a V_{ef}.

directa hasta que se obtenga el mismo valor de potencia promedio. La magnitud resultante de la corriente directa es igual al valor eficaz de la corriente periódica dada. Estas ideas se ilustran en la figura 11.9.

La expresión matemática general del valor eficaz de $i(t)$ se obtiene después con facilidad. La potencia promedio (activa) que entrega la corriente periódica $i(t)$ a la resistencia se obtiene mediante

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 R\,dt = \frac{R}{T}\int_0^T i^2\,dt$$

donde el periodo de $i(t)$ es T. La potencia que entrega la corriente directa corresponde a

$$P = I_{ef}^2 R$$

Igualando las expresiones de potencia y despejando I_{ef}, obtenemos

$$\boxed{I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}} \qquad [19]$$

El resultado es independiente de la resistencia R, como debe ser para que contemos con un concepto ventajoso. Se obtiene una expresión similar del valor eficaz de una tensión periódica al reemplazar i e I_{ef} por v y V_{ef}, respectivamente.

Observe que el valor eficaz se obtiene al elevar al cuadrado primero la función del tiempo, tomando luego el valor promedio de la función al cuadrado sobre un periodo, y considerando por último la raíz cuadrada del promedio de la función al cuadrado. En lenguaje abreviado, la operación que implica determinar un valor eficaz es la *raíz* (cuadrada) de la *media* del *cuadrado*; por esta razón, a menudo el valor eficaz se denomina como el valor de la ***raíz cuadrática media*** o simplemente el valor ***rms***.

Valor eficaz (RMS) de una forma de onda senoidal

El caso especial más importante es el de la forma de onda senoidal. Seleccionamos la corriente senoidal

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

que tiene un periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

y la sustituimos en la ecuación [19] para obtener el valor eficaz

$$\begin{aligned}
I_{ef} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)\,dt} \\
&= I_m \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t + 2\phi)\right] dt} \\
&= I_m \sqrt{\frac{\omega}{4\pi}[t]_0^{2\pi/\omega}} \\
&= \frac{I_m}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

De esta forma, el valor eficaz de una corriente senoidal es una cantidad real independiente del ángulo de fase y numéricamente igual a $1/\sqrt{2} = 0.707$ veces la amplitud de la corriente. Por lo tanto, una corriente $\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi)$ A tiene un valor eficaz de 1 A y entregará la **misma** potencia promedio a cualquier resistencia, como lo hará una corriente **directa** de 1 A.

Debe observar con cuidado que el factor $\sqrt{2}$ que obtuvimos como la proporción entre la amplitud de la corriente periódica y el valor eficaz sólo se aplica cuando la función periódica es *senoidal*. Por ejemplo, para la forma de onda de diente de sierra, el valor eficaz es igual al valor máximo dividido entre $\sqrt{3}$. El factor mediante el cual el valor máximo debe dividirse para obtener el valor eficaz depende de la forma matemática de la función periódica dada; quizá sea racional o irracional, lo cual depende de la naturaleza de la función.

Uso de los valores RMS para calcular la potencia promedio

La utilización del valor eficaz simplifica también un poco la expresión de la potencia promedio que entrega una corriente o una tensión senoidal, al evitar el uso del factor $\frac{1}{2}$. Por ejemplo, la potencia promedio que se entrega a una resistencia de R ohms a partir de una corriente senoidal, se calcula mediante

$$P = \tfrac{1}{2} I_m^2 R$$

En razón de que $I_{ef} = I_m/\sqrt{2}$, la potencia promedio se escribirá como

$$P = I_{ef}^2 R \qquad [20]$$

El hecho de que el valor eficaz se defina en términos de una cantidad de cd equivalente, nos proporciona fórmulas de potencia promedio para circuitos resistivos que son idénticas a las utilizadas en el análisis de cd.

Las otras expresiones también se escribirán en términos de valores eficaces:

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos(\theta - \phi) \qquad [21]$$

$$P = \frac{V_{eff}^2}{R} \qquad [22]$$

Aunque hemos tenido éxito al eliminar el factor $\frac{1}{2}$ de nuestras relaciones de potencia promedio, debemos tener cuidado de determinar si una cantidad senoidal se expresa en términos de su amplitud o de su valor eficaz. En la práctica, suele usarse el valor eficaz en las áreas de la transmisión o distribución de potencia y con maquinaria rotatoria; en las aplicaciones de la electrónica y las comunicaciones, se usa más a menudo la amplitud. Supondremos que la amplitud se especifica, a menos que el término "rms" se utilice de manera explícita o que se indique otra cosa.

En el estado senoidal permanente, las tensiones y las corrientes fasoriales pueden indicarse como valores eficaces o como amplitudes; las dos expresiones difieren sólo por un factor de $\sqrt{2}$. La tensión $50\underline{/30°}$ V se expresa en términos de una amplitud; en cuanto a la tensión rms, debemos describirla como $35.4\underline{/30°}$ V rms.

Valor eficaz con circuitos de frecuencia múltiple

Para determinar el valor eficaz de una forma de onda periódica o no periódica, compuesta por la suma de varias senoides con frecuencias diferentes, podríamos emplear la relación apropiada de la potencia promedio de la ecuación [18], formulada en la sección anterior, reescribiendo en términos de valores eficaces las distintas componentes:

$$P = \left(I_{1ef}^2 + I_{2ef}^2 + \cdots + I_{Nef}^2\right) R \qquad [23]$$

A partir de lo anterior observamos que el valor eficaz de una corriente, compuesta por varias corrientes senoidales de frecuencias *diferentes* se expresa como

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{I_{1\text{ef}}^2 + I_{2\text{ef}}^2 + \cdots + I_{N\text{ef}}^2} \qquad [24]$$

Estos resultados indican que si una corriente senoidal de 5 A rms a 60 Hz fluye por una resistencia de 2 Ω, la resistencia absorbe una potencia promedio de $5^2(2) = 50$ W; si también está presente una segunda corriente —tal vez de 3 A rms a 120 Hz— la potencia que se absorbe corresponde a $3^2(2) + 50 = 68$ W. Al recurrir más bien a la ecuación [24], observamos que el valor eficaz de la suma de las corrientes de 60 y 120 Hz es 5.831 A. De tal modo, $P = 5.831^2(2) = 68$ W como antes. Sin embargo, si la segunda corriente está también a 60 Hz, el valor eficaz de la suma de ambas corrientes de 60 Hz podría tener cualquier valor entre 2 y 8 A. En este caso, la potencia absorbida tendría *cualquier* valor entre 8 W y 128 W, según sea la fase relativa de las dos componentes de corriente.

Observe que el valor eficaz de una cantidad de cd K es simplemente K, no $\frac{K}{\sqrt{2}}$.

PRÁCTICA

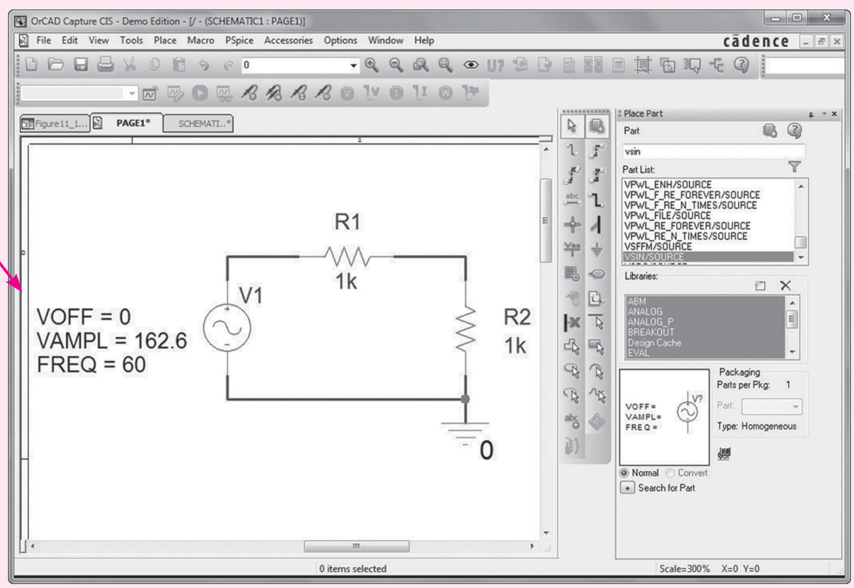
11.7 Calcule el valor eficaz de cada una de las tensiones periódicas: (*a*) 6 cos 25t; (*b*) 6 cos 25t + 4 sen(25t + 30°); (*c*) 6 cos 25t + 5 cos^2(25t); (*d*) 6 cos 25t + 5 sen 30t + 4 V.

Respuestas: 4.24 V; 6.16 V; 5.23 V; 6.82 V.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

PSpice proporciona varias técnicas útiles para calcular cantidades de potencia. En particular, las funciones incorporadas de Probe permiten graficar la potencia instantánea y calcular la potencia promedio. Por ejemplo, considere el circuito divisor de tensión simple de la figura 11.10, que se acciona mediante una onda

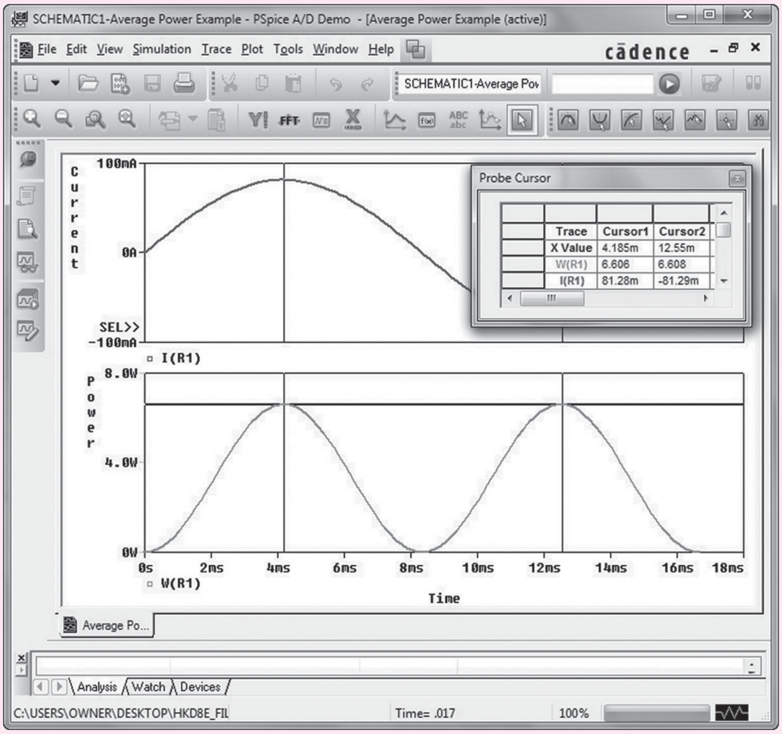
Hemos ampliado la imagen de la pantalla para una mejor lectura.



■ **FIGURA 11.10** Circuito divisor de tensión simple accionado por una rms de 115 V y que opera a 60 Hz.

senoidal de 60 Hz con una amplitud de 115 $\sqrt{2}$ V. Para empezar, llevaremos a cabo una simulación transitoria sobre un periodo de la forma de onda de tensión, $\frac{1}{60}$ s.

La corriente, junto con la potencia instantánea que se disipa en la resistencia R1, se grafican en la figura 11.11 empleando la opción **Add Plot to Window** bajo **Plot**. La potencia instantánea es periódica, con un valor promedio distinto de cero y un máximo de 6.61 W.



Hemos ampliado la imagen de la pantalla para una mejor lectura.

FIGURA 11.11 Corriente y potencia instantáneas asociadas con la resistencia R1 de la figura 11.10.

La forma más sencilla de utilizar Probe para obtener la potencia promedio (activa), que se espera que sea $\frac{1}{2}\left(162.6\frac{1000}{1\,000+1\,000}\right)(81.3 \times 10^{-3}) = 3.305$ W, radica en utilizar la característica incorporada "ejecución de la función promedio". Luego de que aparece la ventana de diálogo **Add Traces** (**Trace,** ⎁ **Add Trace . . .**), tecleamos:

$$\text{AVG(I(R1) * I(R1) * 1 000)}$$

en la ventana **Trace Expression**.

Como puede observarse en la figura 11.12, el valor promedio de la potencia de uno o dos periodos es 3.305 W, de acuerdo con el cálculo manual. Observe que, como PSpice sólo calcula en tiempos específicos, el circuito no se simuló precisamente en 8.333 ms y, por lo tanto, el **Cursor 1** indica una potencia promedio ligeramente más alta.

Probe permite también calcular el promedio de un intervalo específico utilizando la función incorporada **avgx**. Por ejemplo, al emplear esta función para

(*continúa*)

calcular la potencia promedio durante un periodo sencillo, en este caso $1/120 = 8.33$ ms, debemos teclear

AVGX(I(R1) * I(R1) * 1 000, 8.33 m)

Cualquier procedimiento originará un valor de 3.305 W en el punto final de la gráfica.

Hemos ampliado la imagen de la pantalla para una mejor lectura.

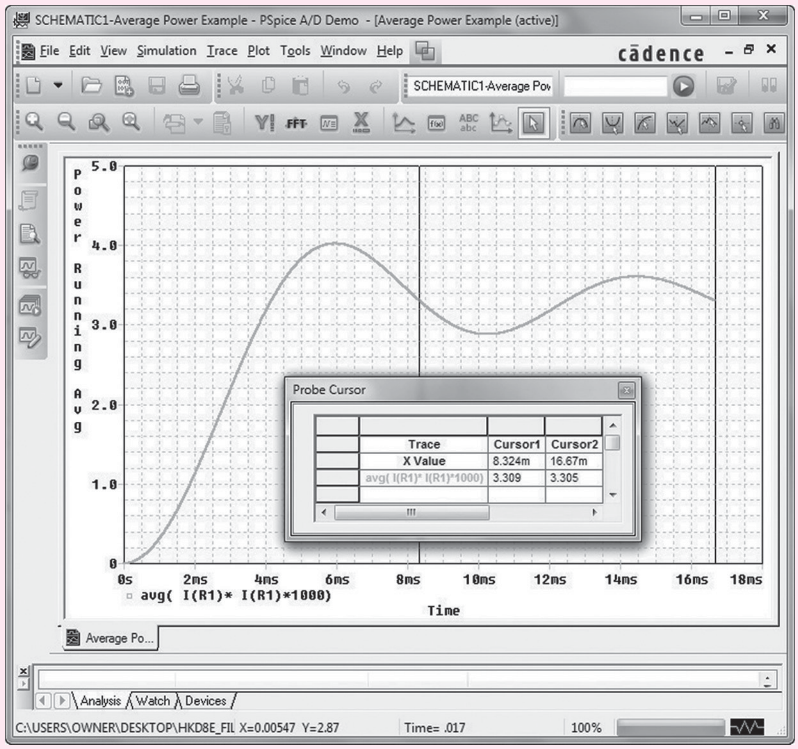


FIGURA 11.12 Ejecución del promedio de la potencia disipada por la resistencia R1.

11.4 POTENCIA APARENTE Y FACTOR DE POTENCIA

Desde una perspectiva histórica, la introducción de los conceptos de potencia aparente y de factor de potencia puede remontarse hasta la industria eléctrica, donde se requiere transferir grandes cantidades de energía eléctrica de un punto a otro; la eficiencia con la cual se efectúa tal transferencia se relaciona de manera directa con el costo de la energía eléctrica, que a fin de cuentas la pagan los consumidores. Éstos, que ofrecen cargas que producen una eficiencia de transmisión relativamente pobre, deben pagar un mayor precio por cada ***kilowatt hora*** (kWh) de energía eléctrica que en realidad reciben y consumen. De manera similar, los clientes que requieren una inversión mayor en los equipos de transmisión y distribución por parte de la empresa eléctrica, pagarán también más por cada kilowatt hora, a menos que la compañía sea benevolente y le guste perder dinero.

En primer lugar definamos la ***potencia aparente*** y el ***factor de potencia***; luego mostramos de manera breve cómo se relacionan ambos términos con las situaciones económicas antes mencionadas. Suponemos que la tensión senoidal:

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

se aplica a una red, y la corriente senoidal resultante es

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

De esta forma, el ángulo de fase mediante el cual la tensión adelanta a la corriente es $(\theta - \phi)$. La potencia promedio que se entrega a la red, suponiendo una convención pasiva de signos en sus terminales de entrada, se expresa en términos de los valores máximos:

$$P = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

o en términos de los valores eficaces:

$$P = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos(\theta - \phi)$$

Si nuestras respuestas en tensión y en corriente aplicadas fueron cantidades cd, la potencia promedio entregada a la red habría sido simplemente igual al producto de la tensión y la corriente. Al aplicar esta técnica de cd al problema senoidal, debemos obtener el valor de la potencia absorbida, que está dada "aparentemente" por el familiar producto $V_{\text{ef}} I_{\text{ef}}$. Sin embargo, este producto de los valores *eficaces* de la tensión y la corriente no es la potencia promedio; definimos dicho producto como la ***potencia aparente***. En términos dimensionales, la potencia aparente debe medirse en las mismas unidades que la potencia real, pues cos $(\theta - \phi)$ es adimensional; pero para evitar confusiones, se aplica el término ***volt-amperes*** o VA a la potencia aparente. Puesto que $\cos(\theta - \phi)$no puede tener una magnitud mayor que la unidad, resulta evidente que la magnitud de la potencia real no es mayor que la de la potencia aparente.

La potencia aparente no es un concepto limitado a las funciones y respuestas forzadas senoidales. Se podría determinar para cualesquiera formas de onda de corriente y tensión, al formar simplemente el producto de los valores eficaces de la corriente y la tensión.

La proporción entre las potencias real o promedio (activa) y la potencia aparente recibe el nombre de ***factor de potencia*** y se simboliza como FP. En consecuencia,

$$\text{FP} = \frac{\text{potencia promedio}}{\text{potencia aparente}} = \frac{P}{V_{\text{ef}} I_{\text{ef}}}$$

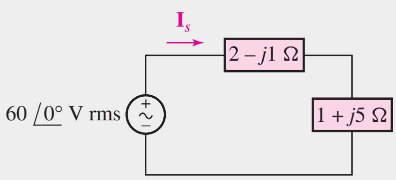
En el caso senoidal, el factor de potencia no es más que $\cos(\theta - \phi)$, donde $(\theta - \phi)$ es el ángulo mediante el cual la tensión adelanta a la corriente. Esta relación es la razón por la que el ángulo $(\theta - \phi)$ se conoce a menudo como ***ángulo de FP***.

En el caso de una carga puramente resistiva, la tensión y la corriente están en fase, $(\theta - \phi)$ es igual a cero y el FP es la unidad. En otras palabras, la potencia aparente y la potencia promedio son iguales. Sin embargo, el FP unitario también se obtendría en el caso de cargas que contengan inductancia y capacitancia, si los valores de los elementos y la frecuencia de operación se eligen con cuidado, a fin de proporcionar una impedancia de entrada que tenga un ángulo de fase cero. Una carga puramente reactiva, esto es, que no contenga resistencia, ocasionará una diferencia de fase entre la tensión y la corriente de más o menos 90°, por lo cual el FP es cero.

Entre estos dos casos extremos existen las redes generales en las que el FP varía desde cero hasta la unidad. Por ejemplo, un FP de 0.5 indica una carga que tiene una impedancia de entrada, con un ángulo de fase de 60° o −60°; el primero describe una carga inductiva, pues la tensión adelanta a la corriente en 60°, mientras que el último se refiere a una carga capacitiva. La ambigüedad en la naturaleza exacta de la carga se resuelve mediante la referencia a un FP adelantado o a un FP retrasado, donde los términos *adelantado* o *retrasado* se refieren a la *fase de la corriente con respecto de la tensión.* De tal modo, una carga inductiva tendrá un FP retrasado, y una carga capacitiva un FP adelantado.

EJEMPLO 11.8

Calcule los valores de la potencia promedio suministrada a cada una de las cargas que se indican en la figura 11.13, así como la potencia aparente que proporciona la fuente y el factor de potencia de las cargas combinadas.



■ **FIGURA 11.13** Circuito en el que se busca la potencia promedio (activa) entregada a cada elemento, la potencia aparente suministrada por la fuente y el factor de potencia de la carga combinada.

▶ ***Identificar el objetivo del problema.***

La potencia promedio se refiere a la que consumen los componentes resistivos de los elementos de carga; la potencia aparente es el producto de la tensión eficaz y de la corriente eficaz de la combinación de carga.

▶ ***Recopilar la información conocida.***

La tensión eficaz es de 60 V rms, que aparece en los extremos de una carga combinada de $2 - j + 1 + j5 = 3 + j4\ \Omega$.

▶ ***Imaginar un plan.***

El análisis fasorial simple proporcionará la corriente. El conocimiento de la tensión y de la corriente nos permitirá calcular la potencia promedio y la potencia aparente; estas dos cantidades pueden utilizarse para obtener el factor de potencia.

▶ ***Construir un conjunto apropiado de ecuaciones.***

La potencia promedio P suministrada a una carga está dada por

$$P = I_{ef}^2 R$$

donde R es la parte real de la impedancia de la carga. La potencia aparente que suministra la fuente es $V_{ef}I_{ef}$, donde $V_{ef} = 60$ V rms.

El factor de potencia se calcula como la proporción entre estas dos cantidades:

$$\text{FP} = \frac{\text{potencia promedio}}{\text{potencia aparente}} = \frac{P}{V_{ef}\, I_{ef}}$$

▶ ***Determinar si se requiere información adicional.***

Se requiere I_{ef}:

$$\mathbf{I} = \frac{60\underline{/0°}}{3 + j4} = 12\underline{/-53.13°}\ \text{A rms}$$

por lo que $I_{ef} = 12$ A rms, y *ang* $\mathbf{I} = -53.13°$.

▶ ***Buscar la solución.***

La potencia promedio (activa) entregada a la carga localizada en la parte superior está dada por

$$P_{\text{superior}} = I_{ef}^2 R_{\text{arriba}} = (12)^2(2) = 288\ \text{W}$$

y la potencia promedio entregada a la carga de la derecha está dada por

$$P_{\text{inferior}} = I_{ef}^2 R_{\text{derecha}} = (12)^2(1) = 144\ \text{W}$$

La fuente en sí misma entrega una potencia aparente de $V_{ef}I_{ef} = (60)(12) = 720$ VA.

Por último, el factor de potencia de las cargas combinadas se obtiene al considerar la tensión y la corriente asociadas con esas mismas cargas. Este factor de potencia es, desde luego, idéntico al de la fuente. Por ello,

$$\text{FP} = \frac{P}{V_{ef}\ I_{ef}} = \frac{432}{60(12)} = 0.6 \ \textit{retrasado}$$

puesto que la carga combinada es *inductiva*.

▶ ***Verificar la solución. ¿Es razonable o la esperada?***
La potencia promedio total entregada a la fuente es 288 + 144 = 432 W.
La potencia promedio proporcionada por la fuente es

$$P = V_{ef}I_{ef}\cos(ang\ \mathbf{V} - ang\ \mathbf{I}) = (60)(12)\cos(0 = 53.13^\circ) = 432\ \text{W}$$

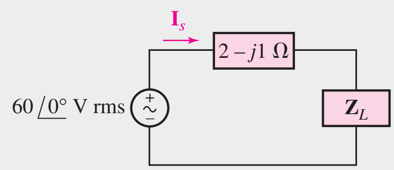
por lo que podemos observar que el balance es correcto.

Hubiéramos podido describir también la impedancia de carga combinada como $5\underline{/53.1^\circ}\ \Omega$, identificar 53.1° como el ángulo del FP y de ese modo tener un FP de cos 53.1° = 0.6 *retrasado*.

PRÁCTICA

11.8 En el circuito de la figura 11.14, determine el factor de potencia de las cargas combinadas, si $Z_L = 10\ \Omega$.

Respuesta: 0.9966 adelantado.



■ **FIGURA 11.14**

11.5 POTENCIA COMPLEJA

Como vimos en el capítulo 10, los números "complejos" en realidad no "complican" el análisis. Al permitirnos llevar juntos dos trozos de información a través de una serie de cálculos mediante los componentes "real" e "imaginario", a menudo simplifican notablemente lo que de otra manera podría necesitar tediosos cálculos. Esto es especialmente cierto respecto a la potencia, ya que tenemos elementos resistivos así como inductivos y capacitivos en una carga general. En esta sección definimos la ***potencia compleja*** para permitirnos el cálculo limpio y eficiente de las diversas contribuciones a la potencia total. La magnitud de la potencia compleja es simplemente la potencia aparente. La parte real es la potencia promedio y, como veremos, la parte imaginaria es una nueva cantidad que se llama ***potencia reactiva***, que describe la rapidez de transferencia de energía hacia y desde los componentes de la carga reactiva (por ejemplo, inductores y capacitores).

Definimos la potencia compleja con referencia a una tensión senoidal general $\mathbf{V}_{ef} = V_{ef}\underline{/\theta}$ entre un par de terminales y una corriente senoidal general $\mathbf{I}_{ef} = I_{ef}\underline{/\phi}$ que fluye por una de las terminales, de modo que cumple la convención pasiva de signos. La potencia promedio P que absorbe la red a través sus dos terminales es, entonces,

$$P = V_{ef}I_{ef}\cos(\theta - \phi)$$

La nomenclatura compleja se introduce a continuación, utilizando la fórmula de Euler de la misma manera que hicimos al presentar los fasores. Se expresa P como

$$P = V_{ef}I_{ef}\ \text{Re}\{e^{j(\theta-\phi)}\}$$

o

$$P = \text{Re}\{V_{\text{ef}}\, e^{j\theta}\, I_{\text{ef}}\, e^{-j\phi}\}$$

La tensión fasorial se reconocería ahora como el primero de los dos factores dentro de las llaves de la ecuación anterior, aunque los segundos factores no corresponden en realidad a la corriente fasorial, pues el ángulo incluye un signo negativo, que no está presente en la expresión de la corriente fasorial. Esto es, la corriente fasorial se obtiene mediante

$$\mathbf{I}_{\text{ef}} = I_{\text{ef}}\, e^{j\phi}$$

y por lo tanto debemos utilizar la notación conjugada:

$$\mathbf{I}^*_{\text{ef}} = I_{\text{ef}}\, e^{-j\phi}$$

Por consiguiente,

$$P = \text{Re}\{\mathbf{V}_{\text{ef}}\mathbf{I}^*_{\text{ef}}\}$$

y ahora podríamos dejar que la potencia se vuelva compleja al definir la ***potencia compleja*** **S** como

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{ef}}\mathbf{I}^*_{\text{ef}} \qquad [25]$$

Si inspeccionamos primero la forma polar o exponencial de la potencia compleja,

$$\mathbf{S} = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}}\, e^{j(\theta-\phi)}$$

resulta evidente que la magnitud de **S**, $V_{\text{ef}}I_{\text{ef}}$, es la potencia aparente y el ángulo de **S**, $(\theta - \phi)$, es el ángulo FP (es decir, el ángulo mediante el cual la tensión adelanta a la corriente).

En forma rectangular, tenemos

$$\mathbf{S} = P + jQ \qquad [26]$$

donde P es la potencia promedio como antes. La parte imaginaria de la potencia compleja se simboliza como Q y se denomina *potencia reactiva.* Las dimensiones de Q son las mismas que las de la potencia real P, de la potencia compleja **S** y de la potencia aparente $|\mathbf{S}|$. Para evitar confusiones con estas otras cantidades, la unidad de Q se define como ***volt-ampere-reactivo*** (VAR). A partir de las ecuaciones [25] y [26] observamos que

El signo de la potencia reactiva caracteriza la naturaleza de una carga pasiva a la cual se especifican $\mathbf{V}_{\text{ef}}$ e $\mathbf{I}_{\text{ef}}$. Si la carga es inductiva, entonces $(\theta - \phi)$ es un ángulo entre 0 y 90º, cuyo seno es positivo y la potencia reactiva es *positiva*. Una carga capacitiva produce una potencia reactiva *negativa*.

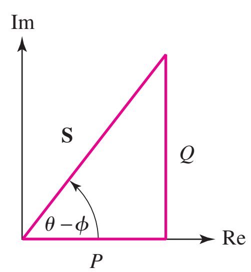
$$Q = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}}\, \text{sen}(\theta - \phi) \qquad [27]$$

La interpretación física de la potencia reactiva es la tasa del flujo de energía en el tiempo, hacia delante y hacia atrás entre la fuente (es decir, la compañía eléctrica) y las componentes reactivas de la carga (es decir, las inductancias y capacitancias). Estos componentes se cargan y se descargan de manera alternada, lo cual provoca un flujo de corriente desde y hacia la fuente, respectivamente.

La tabla 11.1 muestra un resumen de las cantidades relacionadas a la potencia compleja.

Triángulo de potencia

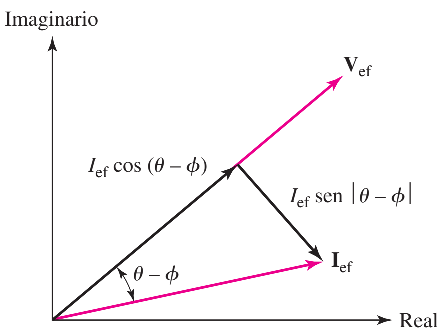
La representación gráfica que se emplea de manera muy común para la potencia compleja se conoce como ***triángulo de potencia***, el cual se ilustra en la figura 11.15. El diagrama indica que sólo se requieren dos de las tres cantidades de potencia, pues la tercera se obtiene mediante relaciones trigonométricas. Si el triángulo de potencia se encuentra en el primer cuadrante $(\theta - \phi > 0)$, el factor de potencia está *retrasado* (corresponde a una carga inductiva), y si el triángulo de potencia se ubica en el cuarto cuadrante $(\theta - \phi < 0)$, el factor de potencia está *adelantado* (lo que corresponde a una



■ **FIGURA 11.15** Representación del triángulo de potencia de la potencia compleja.

TABLA 11.1 Resumen de las cantidades relacionadas con la potencia compleja.

Cantidad	Símbolo	Fórmula	Unidades
Potencia promedio (activa)	P	$V_{ef}I_{ef}\cos(\theta - \phi)$	watt (W)
Potencia reactiva	Q	$V_{ef}I_{ef}\,\text{sen}(\theta - \phi)$	volt-ampere reactivo (VAR)
Potencia compleja	$\mathbf{S}$	$P + jQ$ $V_{ef}I_{ef}\,\underline{/\theta - \phi}$ $\mathbf{V}_{ef}\mathbf{I}_{ef}^{*}$	volt-ampere (VA)
Potencia aparente	$\lvert\mathbf{S}\rvert$	$V_{ef}I_{ef}$	volt- ampere (VA)



■ **FIGURA 11.16** El fasor de corriente $\mathbf{I}_{ef}$ se descompone en dos partes, una componente en fase con el fasor de tensión $\mathbf{V}_{ef}$ y la otra 90º fuera de fase respecto del fasor de tensión. Esta última componente se denomina *componente en cuadratura*.

carga capacitiva). Por lo tanto, una gran cantidad de información cualitativa concerniente a la carga está disponible de un solo vistazo.

Observaríamos otra interpretación de la potencia reactiva si construyéramos un diagrama de fasores que contenga $\mathbf{V}_{ef}$ e $\mathbf{I}_{ef}$ como se indica en la figura 11.16. Si la corriente fasorial se divide en dos componentes, una en fase con la tensión, con una magnitud $\mathbf{I}_{ef}\cos(\theta - \phi)$ y otra 90° fuera de fase con la tensión, y una magnitud igual a $\mathbf{I}_{ef}$ sen $|\theta - \phi|$, entonces resulta claro que la potencia real está dada por el producto de la magnitud del fasor de tensión y de la componente de la corriente fasorial que está en fase con la tensión. Además, el producto de la magnitud del fasor de tensión y la componente de la corriente fasorial, que está 90° fuera de fase con la tensión, es la potencia reactiva Q. Suele hablarse de la componente de un fasor que está 90° fuera de fase respecto del otro fasor como la ***componente en cuadratura***. Así, Q es simplemente $\mathbf{V}_{ef}$ veces la componente en cuadratura de $\mathbf{I}_{ef}$. Q se conoce también como ***potencia en cuadratura***.

Medición de potencia

En términos estrictos, un wattímetro registra la potencia real promedio P, o sea activa, consumida por una carga, y con un vármetro se obtendrá la potencia reactiva Q consumida por la carga. Sin embargo, es común que se puedan medir ambas cantidades con el mismo aparato, el cual también es capaz de medir la potencia aparente y el factor de potencia (figura 11.17).



■ **FIGURA 11.17** Medidor de potencia digital de sujeción fabricado por Amprobe, con el que se pueden medir corrientes de ca hasta de 400 A y tensiones de hasta 600 V. *Copyright AMPROBE.*

APLICACIÓN PRÁCTICA

Corrección del factor de potencia

Cuando una compañía eléctrica suministra potencia a grandes consumidores industriales, casi siempre incluye una cláusula de FP en sus tarifas. De acuerdo con esta cláusula, se hace un cargo adicional al consumidor siempre que el FP esté por debajo de cierto valor especificado, casi siempre alrededor de 0.85 retrasado. Se consume muy poca potencia industrial a FP adelantados, debido a la naturaleza de las cargas industriales características. Son varias las razones que obligan a la compañía eléctrica a realizar este cargo adicional para FP bajos. En primer lugar, es evidente que una capacidad superior de transmisión de corriente debe integrarse en sus generadores para proporcionar las corrientes más altas que van junto con la operación de FP inferiores a una potencia y a una tensión constantes. Otra razón se debe a las pérdidas crecientes en su sistema de transmisión y distribución.

Con el fin de recuperar las pérdidas y estimular a sus consumidores a utilizar un FP elevado, cierta compañía eléctrica cobra una penalización de 0.22 dólares/kVAR por cada kVAR que esté sobre un valor de referencia calculado como 0.62 veces la demanda de potencia promedio:

$$\mathbf{S} = P + jQ = P + j0.62P = P(1 + j0.62)$$
$$= P(1.177\underline{/31.8^\circ})$$

Esta referencia apunta a un FP de 0.85 retrasado, ya que $\cos 31.8^\circ = 0.85$ y Q es positiva, situación que se representa de manera gráfica en la figura 11.18. Los consumidores con un ángulo de FP mayor que éste se ven sujetos a penalizaciones financieras.

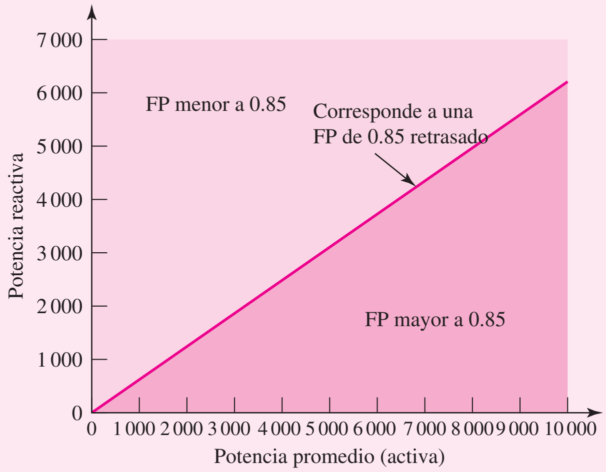


FIGURA 11.18 Gráfica que muestra una relación aceptable entre la potencia reactiva y la potencia promedio en el caso de una referencia de factor de potencia de 0.85 retrasado.

El requerimiento de potencia reactiva por lo común se ajusta mediante la instalación de capacitores de compensación situados en paralelo con la carga (casi siempre en el exterior de la subestación de la instalación del cliente). Se puede mostrar que el valor de capacitancia necesario es

$$C = \frac{P(\tan\theta_{\text{anterior}} - \tan\theta_{\text{nuevo}})}{\omega V_{\text{rms}}^2} \qquad [28]$$

donde ω es la frecuencia, θ_{anterior} es el ángulo del FP presente y θ_{nuevo} es el ángulo del FP esperado. Sin embargo,

Resulta fácil demostrar que la potencia compleja entregada a varias cargas interconectadas es igual a la suma de las potencias complejas entregada a cada una de las cargas individuales, sin importar cómo están interconectadas. Por ejemplo, considere las dos cargas que se muestran conectadas en paralelo en la figura 11.20. Si se suponen valores rms, la potencia compleja que consume la carga combinada está dada por

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{I}^* = \mathbf{V}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)^* = \mathbf{V}(\mathbf{I}_1^* + \mathbf{I}_2^*)$$

y así

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{I}_1^* + \mathbf{V}\mathbf{I}_2^*$$

como se estableció.

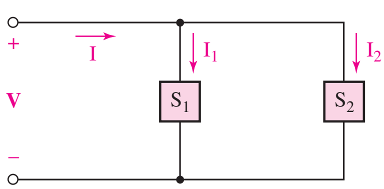


FIGURA 11.20 Circuito utilizado para mostrar que la potencia compleja consumida por dos cargas en paralelo es la suma de las potencias complejas consumidas por las cargas individuales.

por conveniencia, los bancos de capacitores de compensación se fabrican con incrementos específicos en unidades de capacidad de kVAR. Un ejemplo de una instalación de este tipo se presenta en la figura 11.19.

Consideremos ahora un ejemplo específico. Una planta de maquinaria industrial particular tiene una demanda máxima de 5 000 kW y un requerimiento reactivo de 6 000 kVAR mensuales. Utilizando el plan de pagos anterior, en el caso de este cliente, ¿cuál es el costo anual asociado con las penalizaciones del FP? Si la compensación puede conseguirse a través de la empresa eléctrica a un costo de 2 390 dólares por incremento de 1 000 kVAR y a 3 130 dólares por incremento de 2 000 kVAR, ¿cuál es la solución con el costo más adecuado para el cliente?



■ **FIGURA 11.19** Instalación de capacitores de compensación. (Cortesía de Nokian Capacitors Ltd.)

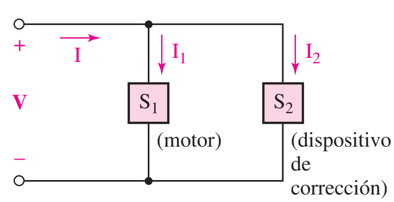
El FP de la instalación es el ángulo de la potencia compleja **S**, que en este caso corresponde a $5\,000 + j6\,000$ kVA. De tal modo, el ángulo es $\tan^{-1}(6\,000/5\,000) = 50.19°$ y el FP es 0.64 retrasado. El valor de la potencia reactiva de referencia, calculado como 0.62 veces la demanda máxima, es $0.62(5\,000) = 3\,100$ kVAR. Por lo tanto, la planta consume $6\,000 - 3\,100 = 2\,900$ kVAR más de potencia reactiva de lo que la compañía eléctrica está dispuesta a permitir sin penalización. Esto representa una estimación anual de $12(2\,900)(0.22) = 7\,656$ dólares, además de los costos de la electricidad ordinaria.

Si el cliente opta por un solo incremento de 1 000 kVAR instalados (a un costo de 2 390 dólares), la potencia reactiva en exceso que se extrae se reduce a $2\,900 - 1\,000 = 1\,900$ KVAR, por lo que la penalización anual es en este caso igual a $12(1\,900)(0.22) = 5\,016$ dólares. El costo total de este año es entonces de $5\,016 + 2\,390 = 7\,406$ dólares, que equivale a un ahorro de 250 dólares. Si el consumidor prefiere un incremento instalado de 2 000 kVAR (a un costo de 3 130 dólares), la potencia reactiva en exceso que se extrae se reduce a $2\,900 - 2\,000 = 900$ kVAR, por lo que la penalización anual es ahora de $12(900)(0.22) = 2\,376$ dólares. En consecuencia, el costo total de este año es de $2\,376 + 3\,130 = 5\,506$ dólares, lo que genera un ahorro durante el primer año de 2 150 dólares. Sin embargo, si el cliente continúa e instala 3 000 kVAR de capacitores de compensación, de manera que no se estima penalización, le costará en realidad 14 dólares más en el primer año, que si sólo se instalan 2 000 kVAR.

EJEMPLO 11.9

Un consumidor industrial opera un motor de inducción de 50 kW (67.1 hp) a un FP retrasado de 0.8. La tensión de la fuente corresponde a 230 V rms. Para obtener tarifas eléctricas inferiores, el consumidor desea elevar el FP a 0.95 retrasado. Presente una solución posible.

Aunque se podría elevar el FP mediante el incremento de la potencia real y manteniendo constante la potencia reactiva, esta maniobra no redundaría en una factura más baja y no es un remedio que interese al consumidor. Es necesario agregar al sistema una carga puramente reactiva, y resulta claro que debe hacerse en paralelo, pues la tensión del suministro del motor de inducción no debe cambiar. El circuito de la figura 11.21 se aplica si se interpreta a $\mathbf{S}_1$ como la potencia compleja del motor de inducción y a $\mathbf{S}_2$ como la potencia compleja extraída por el dispositivo de corrección del FP.



■ **FIGURA 11.21**

(*continúa*)

La potencia compleja que se suministra al motor de inducción debe tener una parte real de 50 kW y un ángulo de $\cos^{-1}(0.8)$, o 36.9°. Por consiguiente,

$$\mathbf{S}_1 = \frac{50\angle 36.9^\circ}{0.8} = 50 + j37.5 \text{ kVA}$$

Para alcanzar un FP de 0.95, la potencia compleja total debe convertirse en

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \frac{50}{0.95}\angle \cos^{-1}(0.95) = 50 + j16.43 \text{ kVA}$$

Por lo tanto, la potencia compleja consumida por la carga correctiva se obtiene mediante

$$\mathbf{S}_2 = -j21.07 \text{ kVA}$$

La impedancia de carga necesaria $\mathbf{Z}_2$ se determinaría con varios pasos sencillos. Elegimos el ángulo de fase de 0° para la fuente de tensión, y por lo tanto la corriente que atraviesa $\mathbf{Z}_2$ es

$$\mathbf{I}_2^* = \frac{\mathbf{S}_2}{\mathbf{V}} = \frac{-j21\,070}{230} = -j91.6 \text{ A}$$

o

$$\mathbf{I}_2 = j91.6 \text{ A}$$

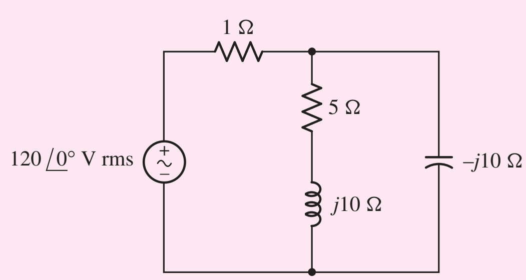
En consecuencia,

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_2} = \frac{230}{j91.6} = -j2.51\ \Omega$$

Si la frecuencia de operación es de 60 Hz, a esta carga se le puede proveer de un capacitor de 1 056 μF conectado en paralelo con el motor. Sin embargo, su costo inicial, mantenimiento y depreciación deben solventarse mediante la reducción del recibo de pago de consumo eléctrico.

PRÁCTICA

11.9 En el circuito de la figura 11.22, determine la potencia compleja que absorbe: (*a*) la resistencia de 1 Ω; (*b*) el capacitor de $-j10\ \Omega$; (*c*) la impedancia de $5 + j10\ \Omega$; (*d*) la fuente.



■ **FIGURA 11.22**

Respuestas: 26.6 + *j*0 VA; 0 − *j*1 331 VA; 532 + *j*1 065 VA; −559 + *j*266 VA.

PRÁCTICA

11.10 Una fuente de 440 V rms suministra potencia a una carga $Z_L = 10 + j2\ \Omega$ a través de una línea de transmisión que tiene una resistencia total de 1.5 Ω. Determine: (*a*) la potencia promedio y aparente suministrada a la carga; (*b*) la potencia promedio y aparente que se pierde en la línea de transmisión; (*c*) la potencia promedio y aparente suministrada por la fuente; (*d*) el factor de potencia al que opera la fuente.

Respuestas: 14.21 kW, 14.49 kVA; 2.131 kW, 2.131 kVA; 16.34 kW, 16.59 kVA; 0.985 retrasado.

RESUMEN Y REPASO

En este capítulo introdujimos un buen número de términos nuevos relacionados con la potencia (resumidos en la tabla 11.2), que pueden producir un poco de sorpresa después de que los ***watts*** parecían funcionar tan bien hasta el momento. La nueva terminología es en gran medida significativa para los sistemas de potencia ca, donde se supone que las tensiones y las corrientes son senoidales (la prevalencia de fuentes de potencia de modo conmutado en muchos sistemas de cómputo puede alterar esta situación; éste es un tema para textos de ingeniería de potencia más avanzados). Después de clarificar lo que se entiende por potencia instantánea, explicamos el concepto de potencia promedio P. Esta cantidad no está en función del tiempo, sino en función de la diferencia de fase entre las formas senoidales de onda de la tensión y la corriente. Los elementos puramente reactivos, tales como los inductores y capacitores ideales, absorben *cero potencia promedio*. Sin embargo, como tales elementos sí aumentan la magnitud de la corriente que fluye entre la fuente y la carga, se vuelven de uso común

TABLA **11.2** Resumen de los términos de potencia de ca

Término	Símbolo	Unidad	Descripción
Potencia instantánea	$p(t)$	W	$p(t) = v(t)i(t)$. Valor de la potencia en un instante específico. ¡*No* es el producto de los fasores de tensión y de corriente!
Potencia promedio (activa)	P	W	En el estado senoidal permanente, $P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta - \phi)$, donde θ es el ángulo de defasamiento de la tensión y ϕ es el ángulo de defasamiento de la corriente. Las reactancias no contribuyen a P.
Valor eficaz o rms	V_{rms} o I_{rms}	V o A	Definido, por ejemplo, como $I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}$; si $i(t)$ es senoidal, entonces $I_{ef} = I_m/\sqrt{2}$.
Potencia aparente	$\lvert\mathbf{S}\rvert$	VA	$\lvert\mathbf{S}\rvert = V_{ef}I_{ef}$, y es el valor máximo posible de la potencia promedio; $P = \lvert\mathbf{S}\rvert$ sólo para cargas puramente resistivas.
Factor de potencia	FP	Ninguno	Razón de la potencia promedio (activa) y potencia aparente. El FP es unitario en el caso de una carga puramente resistiva, y cero en el de una puramente reactiva.
Potencia reactiva	Q	VAR	Medio para medir la tasa de flujo de energía hacia y desde cargas reactivas.
Potencia compleja	$\mathbf{S}$	VA	Una conveniente cantidad compleja que contiene tanto la potencia promedio P, como la potencia reactiva Q: $\mathbf{S} = P + jQ$.

dos nuevos términos: *potencia aparente* y *factor de potencia*. La potencia promedio y la potencia aparente son idénticas cuando la tensión y la corriente están en fase (es decir, corresponden a una carga puramente resistiva). El factor de potencia da una medida numérica de qué tan reactiva es una carga dada: un factor de potencia (FP) igual a la unidad corresponde a una carga puramente resistiva (si *hay* inductores presentes, una capacitancia adecuada los está "cancelando"); un FP de cero indica una carga puramente reactiva, y el signo del ángulo indica si la carga es capacitiva o inductiva. La combinación de estos conceptos permite crear una representación más compacta que se conoce como *potencia compleja*, **S**. La magnitud de **S** es la potencia aparente, P es la parte real de **S**, mientras Q, la *potencia reactiva* (cero para las cargas resistivas), es la parte imaginaria de **S**.

Se hizo una pausa en el camino para introducir la noción de valores efectivos de corriente y tensión, que a menudo se llaman *valores rms*. Desde este momento en adelante debemos tener cuidado de establecer si un valor dado de tensión o corriente se está expresando como magnitud o su correspondiente valor rms, ya que se puede introducir un error de ~40%. Es interesante que también descubrimos una extensión del teorema de la máxima transferencia de potencia que se encontró en el capítulo 5, a saber, que la potencia promedio máxima se suministra a una carga cuya impedancia Z_L es el *complejo conjugado* de la impedancia equivalente de Thévenin de la red a la cual está conectada.

Para mayor facilidad se resumen en seguida los puntos clave de este capítulo, junto con los números de los ejemplos correspondientes.

- La potencia instantánea que absorbe un elemento está determinada por la expresión $p(t) = v(t)i(t)$. (Ejemplos 11.1, 11.2)
- La potencia promedio entregada a una impedancia por una fuente senoidal es $\frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta - \phi)$, donde $\theta =$ el ángulo de fase de la tensión y $\phi =$ el ángulo de fase de la corriente. (Ejemplo 11.2)
- Sólo la componente *resistiva* de una carga consume una potencia promedio (activa) distinta de cero. La potencia promedio entregada a la componente *reactiva* de una carga es cero. (Ejemplos 11.3, 11.4)
- La transferencia de potencia promedio máxima ocurre cuando se satisface la condición $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{th}^*$. (Ejemplo 11.5)
- Cuando están presentes fuentes múltiples, cada una operando a frecuencia diferente, se pueden sumar las contribuciones individuales a la potencia promedio. Esto no es verdad para fuentes que operan en la misma frecuencia. (Ejemplos 11.6 y 11.7)
- El valor eficaz o rms de una forma senoidal se obtiene al dividir su amplitud entre $\sqrt{2}$.
- El factor de potencia (FP) de una carga es la razón de su potencia disipada promedio (activa) y su potencia aparente. (Ejemplo 11.8)
- Una carga puramente resistiva tendrá un factor de potencia unitario. Una carga puramente reactiva tendrá un factor de potencia cero. (Ejemplo 11.8)
- La potencia compleja se define como $\mathbf{S} = P + jQ$, o $\mathbf{S} = \mathbf{V}_{ef}\mathbf{I}_{ef}^*$. Se mide en unidades de volt-amperes (VA). (Ejemplo 11.9)
- La potencia reactiva Q es la componente imaginaria de la potencia compleja y constituye una medida de la tasa de flujo de energía hacia o desde las componentes reactivas de una carga; su unidad es el volt-ampere-reactivo (VAR). (Ejemplo 11.9)
- Los capacitores se emplean a menudo para mejorar el FP de cargas industriales, con el fin de minimizar la potencia reactiva que requiere la compañía de electricidad. (Ejemplo 11.9)

LECTURAS ADICIONALES

Se puede encontrar un panorama muy completo de los conceptos de la potencia de ca en el capítulo 2 de:

B. M. Weedy, *Electric Power Systems*, 3a. ed. Chichester, England: Wiley, 1984.

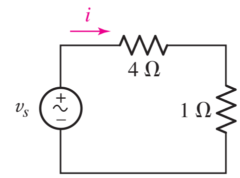
Temas contemporáneos relativos a los sistemas de potencia de ca se pueden encontrar en:

International Journal of Electrical Power & Energy Systems, Guildford, England: IPC Science and Technology Press, 1979-. ISSN: 0142-0615.

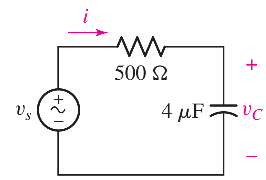
EJERCICIOS

11.1 Potencia instantánea

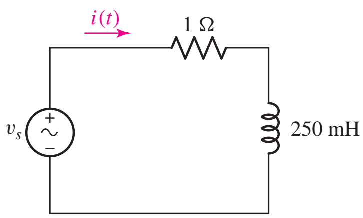
1. Determine la potencia instantánea suministrada a la resistencia de 1 Ω de la figura 11.23 en $t = 0$, $t = 1$ s y $t = 2$ s si v_s es igual a (*a*) 9 V; (*b*) 9 sen $2t$ V; (*c*) 9 sen $(2t + 13°)$ V; (*d*) $9e^{-t}$ V.
2. Determine la potencia absorbida en $t = 1.5$ ms por cada uno de los tres elementos del circuito que se muestra en la figura 11.24 si v_s es igual a (*a*) $30u(-t)$ V; (*b*) $10 + 20u(t)$ V.
3. Calcule la potencia absorbida en $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = 200$ ms por cada uno de los elementos del circuito de la figura 11.25 si v_s es igual a (*a*) $-10u(-t)$ V; (*b*) $20 + 5u(t)$ V.



■ FIGURA 11.23

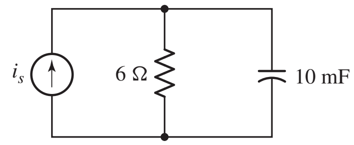


■ FIGURA 11.24

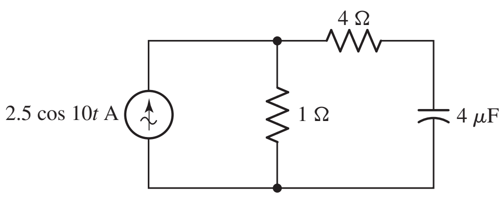


■ FIGURA 11.25

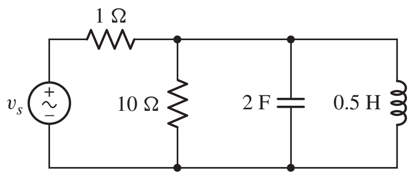
4. Tres elementos están conectados en paralelo: una resistencia de 1 kΩ, un inductor de 15 mH y una fuente senoidal de 100 cos $(2 \times 10^5 t)$ mA. Todos los transitorios han desaparecido desde hace tiempo, de modo que el circuito está operando en estado estable. Determine la potencia que está absorbiendo cada elemento en $t = 10$ μs.
5. Sea $i_s = 4u(-t)$ A en el circuito de la figura 11.26. (*a*) Demuestre que, para todo $t > 0$, la potencia instantánea absorbida por la resistencia es de igual magnitud pero de signo contrario que la potencia instantánea absorbida por el capacitor. (*b*) Determine la potencia absorbida por la resistencia en $t = 60$ ms.
6. La fuente de corriente en el circuito de la figura 11.26 está dada por $i_s = 8 - 7u(t)$ A. Calcule la potencia absorbida por los tres elementos en $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = 75$ ms.
7. Suponiendo que no hay transitorios presentes, calcule la potencia absorbida por cada uno de los elementos que se muestran en la figura 11.27 en $t = 0$, 10 y 20 ms.



■ FIGURA 11.26



■ FIGURA 11.27

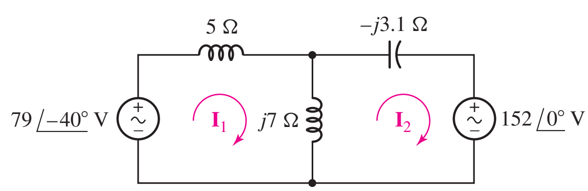


■ **FIGURA 11.28**

8. Calcule en la figura 11.28 la potencia absorbida por el inductor en $t = 0$ y $t = 1$ s si $v_s = 10u(t)$ V.
9. Un capacitor de 100 mF almacena una energía de 100 mJ hasta el punto en el que un conductor con una resistencia de 1.2 Ω se presenta en sus terminales. ¿Cuál es la potencia instantánea disipada en el conductor en $t = 120$ ms? Si la capacidad de calor específico[3] del conductor es de 0.9 kJ/kg · K y su masa es de 1 g, estime el incremento de temperatura del conductor en el primer segundo a partir de que el capacitor se descarga suponiendo que ambos elementos se encuentran inicialmente a 23°C.
10. Si hacemos que un típico rayo que cae desde una nube hasta la tierra represente una corriente de 30 kA en un intervalo de 150 μs, calcule (*a*) la potencia instantánea entregada a la varilla de cobre, la cual tiene una resistencia de 1.2 mΩ en el momento en el que cae el rayo; y (*b*) la energía total entregada a la varilla.

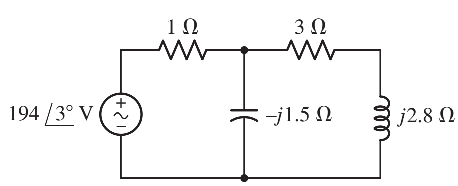
11.2 Potencia promedio (activa)

11. La corriente fasorial $\mathbf{I} = 9\underline{/15^\circ}$ mA (correspondiente a una senoide que opera a 45 rad/s) se aplica a la conexión en serie de una resistencia de 18 kΩ y un capacitor de 1μF. Obtenga una expresión para (*a*) la potencia instantánea y (*b*) la potencia promedio absorbida por la carga combinada.
12. Una tensión fasorial $\mathbf{V} = 100\underline{/45^\circ}$ V (la senoide opera a 155 rad/s) se aplica a la conexión en paralelo de una resistencia de 1 Ω y un inductor de 1 mH. (*a*) Obtenga una expresión para la potencia promedio absorbida por cada elemento pasivo. (*b*) Grafique la potencia instantánea suministrada a la conexión en paralelo, junto con la potencia instantánea absorbida individualmente por cada elemento. (Use una sola gráfica.)
13. Calcule la potencia promedio suministrada por la corriente $4 - j2$ A a (*a*) $\mathbf{Z} = 9$ Ω; (*b*) $\mathbf{Z} = -j1\,000$ Ω; (*c*) $\mathbf{Z} = 1 - j2 + j3$ Ω; (*d*) $\mathbf{Z} = 6\underline{/32^\circ}$; (*e*) $\mathbf{Z} = \dfrac{1.5\underline{/-19^\circ}}{2 + j}$ kΩ.
14. Con referencia al circuito de dos mallas representado en la figura 11.29, determine la potencia promedio absorbida por cada elemento pasivo y la potencia promedio suministrada por cada fuente, y verifique que la potencia promedio total suministrada = potencia promedio total absorbida.



■ **FIGURA 11.29**

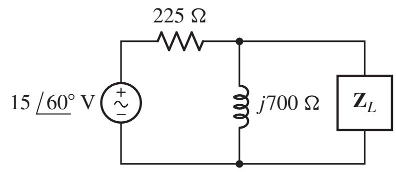
15. (*a*) Calcule la potencia promedio absorbida por cada elemento pasivo en el circuito de la figura 11.30, y verifique que sea igual a la potencia promedio suministrada por la fuente. (*b*) Verifique su solución con una simulación PSpice adecuada.



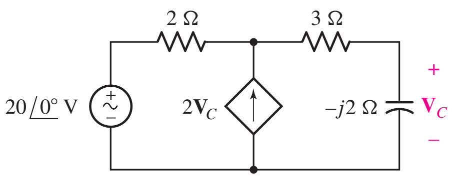
■ **FIGURA 11.30**

[3] Suponga que el calor específico c está dado por $c = Q/m \cdot \Delta T$, donde Q = la energía entregada al conductor, m es la masa y ΔT es el incremento de temperatura.

16. (a) ¿Qué impedancia de carga $\mathbf{Z}_L$ tomará la máxima potencia promedio de la fuente que se muestra en la figura 11.31? (b) Calcule la potencia promedio máxima suministrada a la carga.
17. La inductancia de la figura 11.31 se reemplaza por la impedancia $9 - j8$ kΩ. Repita el ejercicio 16.
18. Determine la potencia promedio suministrada por la fuente dependiente en el circuito de la figura 11.32.

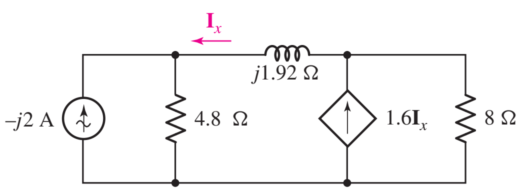


■ **FIGURA 11.31**



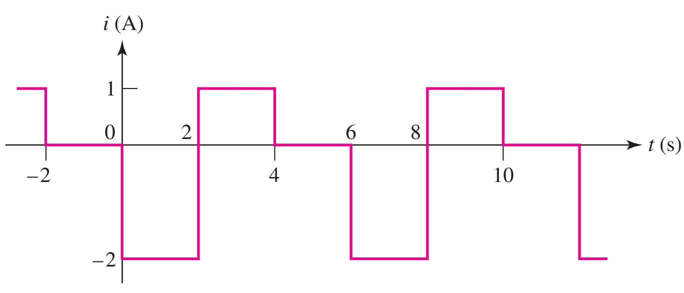
■ **FIGURA 11.32**

19. (a) Calcule la potencia promedio suministrada a cada elemento pasivo en el circuito de la figura 11.33. (b) Determine la potencia suministrada por cada fuente. (c) Reemplace la carga resistiva de 8 Ω con una impedancia capaz de tomar máxima potencia promedio del resto del circuito. (d) Verifique su solución mediante una simulación PSpice.

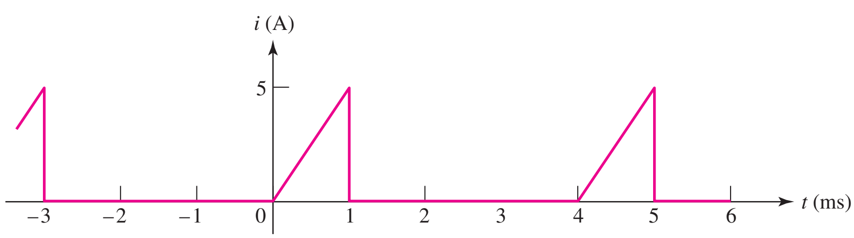


■ **FIGURA 11.33**

20. (a) Calcule el valor promedio de cada forma de onda que se muestra en la figura 11.34. (b) Eleve al cuadrado cada forma de onda y determine el valor promedio de cada nueva forma de onda periódica.



(a)



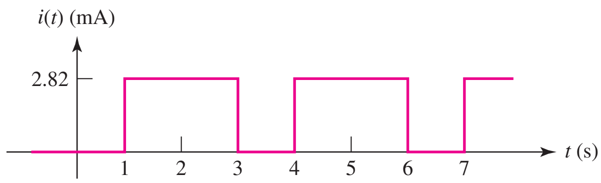
(b)

■ **FIGURA 11.34**

21. Calcule la potencia promedio suministrada a una carga de 2.2 Ω por la tensión v_s igual a (*a*) 5 V; (*b*) $4 \cos 80t - 8 \operatorname{sen} 80t$ V; (*c*) $10 \cos 100t + 12.5 \cos(100t + 19)$ V.

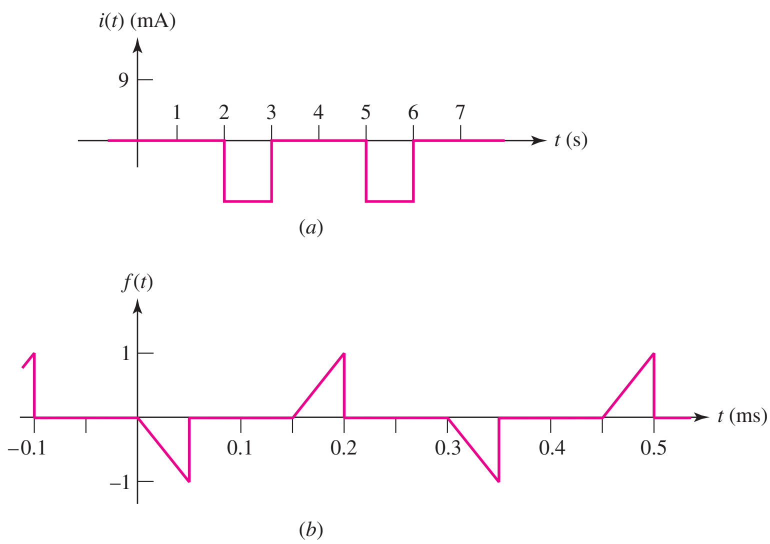
11.3 Valores eficaces de corriente y de tensión

22. Calcule el valor eficaz de las siguientes formas de onda: (*a*) $7 \operatorname{sen} 30t$ V; (*b*) $100 \cos 80t$ mA; (*c*) $120\sqrt{2} \cos(5\,000t - 45°)$ V; (*d*) $\frac{100}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2t + 72°)$ A.
23. Determine el valor eficaz de las siguientes formas de onda: (*a*) $62.5 \cos 100t$ mV; (*b*) $1.95 \cos 2t$ A; (*c*) $208\sqrt{2} \cos(100\pi t + 29°)$ V; (*d*) $\frac{400}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2\,000t - 14°)$ A.
24. Calcule el valor eficaz de (*a*) $i(t) = 3 \operatorname{sen} 4t$ A; (*b*) $v(t) = 4 \operatorname{sen} 20t \cos 10t$; (*c*) $i(t) = 2 - \operatorname{sen} 10t$ mA; (*d*) la forma de onda graficada en la figura 11.35.



■ **FIGURA 11.35**

25. Para cada forma de onda graficada en la figura 11.34, determine su frecuencia, su periodo y su valor rms.
26. Determine tanto el valor promedio como el rms de cada forma de onda representada en la figura 11.36.



■ **FIGURA 11.36**

27. La combinación en serie de una resistencia de 1 kΩ y de un inductor de 2 H no debe disipar más de 250 mW de potencia en cualquier instante. Suponiendo una corriente senoidal con $\omega = 500$ rad/s, ¿cuál es la corriente rms más grande que puede tolerarse?
28. Para cada una de las siguientes formas de onda, determine su periodo, su frecuencia y su valor eficaz; (*a*) 5 V; (*b*) $2 \operatorname{sen} 80t - 7 \cos 20t + 5$ V; (*c*) $5 \cos 50t + 3 \operatorname{sen} 50t$ V; (*d*) $8 \cos^2 90t$ mA. (*e*) Verifique sus respuestas con la simulación adecuada.
29. Con referencia al circuito de la figura 11.37, determine si un valor puramente real de *R* puede dar por resultado tensiones rms iguales entre las terminales del inductor de 14 mH y la resistencia *R*. Si es así, calcule *R* y la tensión rms entre sus terminales; si no, explique por qué no.

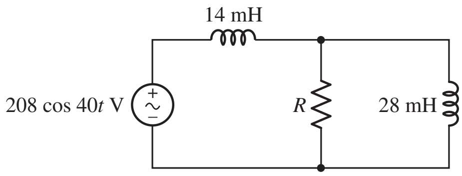


FIGURA 11.37

30. (*a*) Calcule los valores tanto promedio como rms de la forma de onda graficada en la figura 11.38. (*b*) Verifique sus soluciones mediante una simulación PSpice adecuada. (*Pista:* Usted puede querer emplear dos formas de onda pulsantes sumadas).

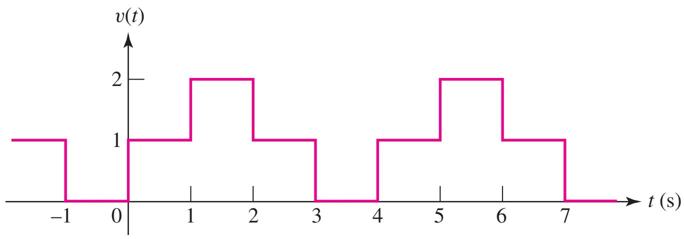


FIGURA 11.38

11.4 Potencia aparente y factor de potencia

31. Para el circuito de la figura 11.39, calcule la potencia promedio suministrada a cada carga, la potencia aparente suministrada por la fuente y el factor de potencia de la carga combinada si (*a*) $\mathbf{Z}_1 = 14\underline{/32^\circ}\ \Omega$ y $\mathbf{Z}_2 = 22\ \Omega$; (*b*) $\mathbf{Z}_1 = 2\underline{/0^\circ}\ \Omega$ y $\mathbf{Z}_2 = 6 - j\ \Omega$; (*c*) $\mathbf{Z}_1 = 100\underline{/70^\circ}\ \Omega$ y $\mathbf{Z}_2 = 75\underline{/90^\circ}\ \Omega$.

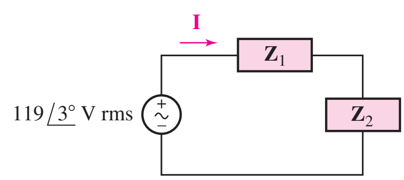


FIGURA 11.39

32. Calcule el factor de potencia de las cargas combinadas del circuito representado en la figura 11.39 si (*a*) ambas cargas son puramente resistivas; (*b*) ambas cargas son puramente inductivas y $\omega = 100$ rad/s; (*c*) ambas cargas son puramente capacitivas y $\omega = 200$ rad/s; (*d*) $\mathbf{Z}_1 = 2\mathbf{Z}_2 = 5 - j8\ \Omega$.
33. Una carga dada está conectada a un sistema de potencia ca. Si se sabe que la carga se caracteriza por pérdidas resistivas y ya sea por capacitivas, inductivas o ninguna (pero no ambas), ¿qué tipo de elemento reactivo es parte de la carga si el factor de potencia se mide como (*a*) la unidad; (*b*) 0.85 en retraso; (*c*) 0.221 en adelanto; (*d*) cos (-90°)?
34. Una carga desconocida está conectada a una salida doméstica estándar europea (240 V rms, 50 Hz). Determine la diferencia de ángulo de fase entre la tensión y la corriente, y si la tensión adelanta o atrasa con respecto a la corriente si (*a*) $\mathbf{V} = 240\underline{/243^\circ}$ V rms e $\mathbf{I} = 3\underline{/9^\circ}$ A rms; (*b*) el factor de potencia de la carga es 0.55 en retraso; (*c*) el factor de potencia de la carga es 0.685 atrasado; (*d*) la carga capacitiva toma 100 W de potencia promedio y 500 volt-amperes de potencia aparente.
35. (*a*) Diseñe una carga que tome una potencia promedio de 25 W con un FP adelantado de 0.88 de una toma doméstica estándar norteamericana (120 V rms, 60 Hz). (*b*) Diseñe una carga sin capacitores que tome una potencia promedio de 150 W y una potencia aparente de 25 W de una salida doméstica en el este de Japón (110 V rms, 50 Hz).
36. Suponiendo una frecuencia de operación de 40 rad/s para el circuito que se muestra en la figura 11.40 y una impedancia de carga de $50\underline{/-100^\circ}\ \Omega$, calcule (*a*) la potencia instantánea suministrada individualmente a la carga y a la resistencia en puente de 1 kΩ en $t = 20$ ms; (*b*) la potencia promedio suministrada tanto a ambos elementos pasivos; (*c*) la potencia aparente suministrada a la carga; (*d*) el factor de potencia al cual opera la fuente.

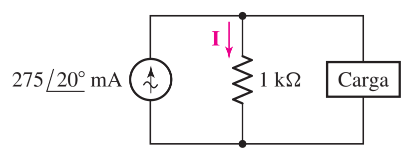
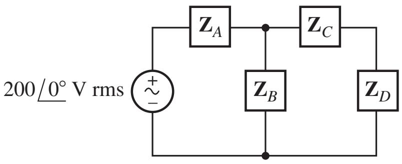


FIGURA 11.40

37. Calcule el factor de potencia al que opera la fuente de la figura 11.40 si la carga es (*a*) puramente resistiva; (*b*) $1\,000 + j900\ \Omega$; (*c*) $500\underline{/-5^\circ}\ \Omega$.



■ **FIGURA 11.41**

38. Determine la impedancia de carga para el circuito representado en la figura 11.40 si la fuente opera a un FP de (*a*) 0.95 adelantado; (*b*) unidad; (*c*) 0.45 atrasado.

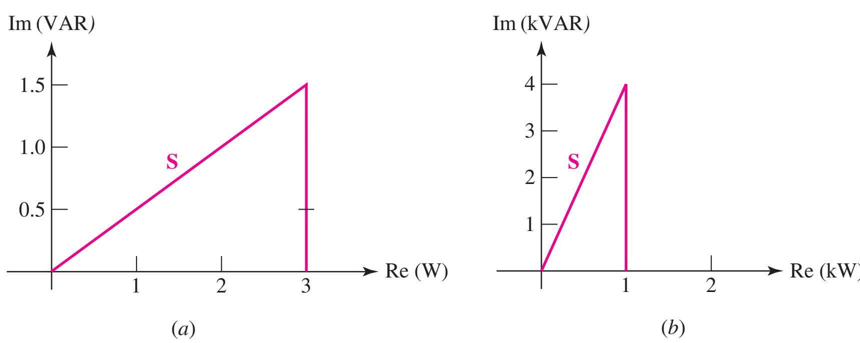
39. Para el circuito de la figura 11.41, encuentre la potencia aparente suministrada a cada carga y el factor de potencia al que opera la fuente, si (*a*) $\mathbf{Z}_A = 5 - j2\ \Omega$, $\mathbf{Z}_B = 3\ \Omega$, $\mathbf{Z}_C = 8 + j4\ \Omega$, y $\mathbf{Z}_D = 15\underline{/-30°}\ \Omega$; (*b*) $\mathbf{Z}_A = 2\underline{/-15°}\ \Omega$, $\mathbf{Z}_B = 1\ \Omega$, $\mathbf{Z}_C = 2 + j\Omega$ y $\mathbf{Z}_D = 4\underline{/45°}\ \Omega$.

11.5 Potencia compleja

40. Calcule la potencia compleja **S** (en forma polar) que toma cierta carga, si se sabe que (*a*) toma 100 W de potencia promedio con un FP de 0.75 atrasado; (*b*) toma una corriente de $\mathbf{I} = 9 + j5$ A rms cuando se conecta a la tensión $120\underline{/32°}$ V rms; (*c*) toma 1 000 W de potencia promedio y 10 VAR de potencia reactiva con un FP adelantado; (*d*) toma una potencia aparente de 450 W con un FP de 0.65 atrasado.

41. Calcule la potencia aparente, el factor de potencia y la potencia reactiva correspondientes a una carga si demanda potencia compleja **S** igual a (*a*) $1 + j0.5$ kVA; (*b*) 400 VA; (*c*) $150\underline{/-21°}$ VA; (*d*) $75\underline{/25°}$ VA.

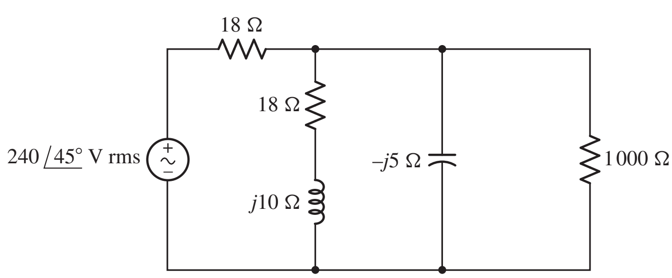
42. Para cada triángulo de potencia representado en la figura 11.42, determine **S** (en forma polar) y el FP.



■ **FIGURA 11.42**

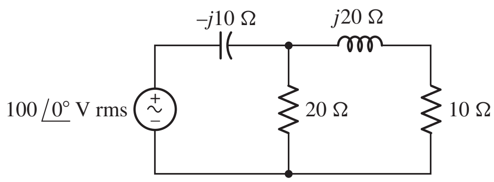
43. Con referencia a la red representada en la figura 11.21, si el motor toma una potencia compleja de $150\underline{/24°}$ VA, (*a*) determine el FP con el que opera la fuente; (*b*) determine la impedancia del dispositivo correctivo necesario para cambiar el FP de la fuente a 0.98 en atraso. (*c*) ¿Es físicamente posible obtener un FP adelantado para la fuente? *Explique*.

44. Determine la potencia compleja absorbida por cada componente pasivo en el circuito de la figura 11.43, y el factor de potencia con el que opera la fuente.



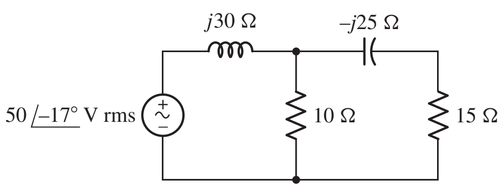
■ **FIGURA 11.43**

45. ¿Qué valor de capacitancia se debe agregar en paralelo a la resistencia de 10 Ω de la figura 11.44 para aumentar el FP de la fuente a 0.95 a 50 Hz?



■ **FIGURA 11.44**

46. La operación del horno de secado de una maderería local tiene una demanda promedio mensual de potencia de 175 kW, pero asociada con esto, hay una toma promedio de potencia reactiva de 205 kVAR. Si la compañía de suministro eléctrico carga 0.15 dólares por kVAR por cada kVAR por encima del valor de referencia (0.7 por la demanda promedio pico), (*a*) estime el costo anual para la maderería por la multa por FP; (*b*) calcule el dinero ahorrado en el primero y en el segundo años, respectivamente, si hay disponibles para compra capacitores de compensación de 100 kVAR a 75 dólares cada uno (instalados).
47. Calcule la potencia compleja suministrada a cada componente pasivo del circuito que se muestra en la figura 11.45, y determine el factor de potencia de la fuente.

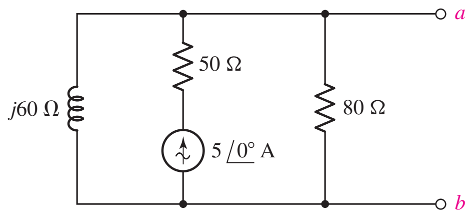


■ **FIGURA 11.45**

48. Reemplace la resistencia de 10 Ω en el circuito de la figura 11.45 por un inductor de 200 mH, suponga una frecuencia de operación de 10 rad/s y calcule (*a*) el FP de la fuente; (*b*) la potencia aparente suministrada por la fuente; (*c*) la potencia reactiva suministrada por la fuente.
49. En vez de contener un capacitor como se indica en la figura 11.45, el circuito se construye erróneamente usando dos inductores idénticos, cada uno de los cuales con una impedancia de *j*30 Ω a la frecuencia de operación de 50 Hz. (*a*) Calcule la potencia compleja suministrada a cada componente pasivo. (*b*) Verifique su solución calculando la potencia compleja suministrada por la fuente. (*c*) ¿Con qué factor de potencia está operando la fuente?
50. Usando la estrategia general empleada en el ejemplo 11.9, deduzca la ecuación [28], que permite calcular el valor correctivo de la capacitancia para cualquier frecuencia general de operación.

Ejercicios de integración de capítulo

51. Una carga toma 10 A rms cuando se conecta a un suministro de 1 200 V rms a 50 Hz. Si la fuente opera a un FP de 0.9 atrasado, calcule (*a*) la magnitud de la tensión pico; (*b*) la potencia instantánea absorbida por la carga en $t = 1$ ms; (*c*) la potencia aparente suministrada por la fuente; (*d*) la potencia reactiva suministrada a la carga; (*e*) la impedancia de la carga, y (*f*) la potencia compleja suministrada por la carga (en forma polar).
52. Para el circuito de la figura 11.46, suponga que la fuente opera a una frecuencia de 100 rad/s. (*a*) Determine el FP al que opera la fuente. (*b*) Calcule la potencia aparente absorbida por cada uno de los tres elementos pasivos. (*c*) Calcule la potencia promedio suministrada por la fuente. (*d*) Determine el equivalente de Thévenin desde la perspectiva de las terminales marcadas *a* y *b*, y calcule la potencia promedio suministrada a una resistencia de 100 Ω conectado entre las mismas terminales.



■ **FIGURA 11.46**

53. Quite la resistencia de 50 Ω en la figura 11.46, suponga una frecuencia de operación de 50 Hz y (*a*) determine el factor de potencia al que opera la carga; (*b*) calcule la potencia promedio suministrada por la fuente; (*c*) calcule la potencia instantánea absorbida por la inductancia en $t = 2$ ms; (*d*) determine la capacitancia que se debe conectar entre las terminales marcadas *a* y *b* para aumentar el FP de la fuente a 0.95.
54. Una fuente de 45 sen $32t$ V se conecta en serie con una resistencia de 5 Ω y un inductor de 20 mH. Calcule (*a*) la potencia reactiva suministrada por la fuente; (*b*) la potencia aparente absorbida por cada uno de los tres elementos; (*c*) la potencia compleja **S** absorbida por cada elemento; (*d*) el factor de potencia con el que opera la fuente.
55. Para el circuito de la figura 11.37, (*a*) deduzca una expresión para la potencia compleja suministrada por la fuente en términos de la resistencia desconocida *R*; (*b*) calcule la capacitancia necesaria que se debe agregar en paralelo al inductor de 28 mH para lograr un FP unitario.



CAPÍTULO

12 Circuitos polifásicos



INTRODUCCIÓN

La mayor parte de la potencia se suministra a los consumidores en forma de tensiones y corrientes senoidales, que usualmente se conocen como corriente alterna, o simplemente *ca*. Aunque hay excepciones, por ejemplo algunos tipos de motores de tren, la mayoría de los equipos están diseñados para funcionar ya sea en 50 o en 60 Hz. La mayoría de los sistemas de 60 Hz están ahora estandarizados para trabajar en 120 V, mientras que los sistemas de 50 Hz usualmente corresponden a 240 V (ambas tensiones se expresan en unidades rms). La tensión real que se suministra a un aparato puede variar algo con respecto a estos valores, y los sistemas de distribución usan tensiones significativamente mayores para minimizar la corriente y por lo tanto el calibre del cable. Originalmente, Thomas Edison se inclinaba por una red de distribución de potencia puramente de cd, según parece debido a su preferencia por la sencilla álgebra que se necesitaba para analizar dichos circuitos. Nikola Tesla y George Westinghouse, otros dos pioneros en el campo de la electricidad, propusieron los sistemas de distribución de ca porque permitían obtener pérdidas significativamente menores. A final de cuentas, ellos fueron más persuasivos, a pesar de algunas demostraciones más bien teatrales por parte de Edison.

La respuesta transitoria de los sistemas de potencia de ca resulta interesante cuando se determina la demanda de potencia máxima, pues la mayoría de los equipos requieren más corriente para arrancar que para operar de manera continua. Sin embargo, en muchos casos la operación en estado permanente reviste un interés fundamental, por lo que nuestra experiencia con el análisis basado en fasores demostrará su utilidad. En este capítulo presentaremos un nuevo tipo de fuente de tensión, la fuente trifásica, que se conecta en una configuración Y de tres o cuatro hilos, o en una configuración Δ de tres hilos. De modo similar, podremos observar que las cargas se conectan en Y o en Δ según la aplicación.

CONCEPTOS CLAVE

- Sistemas monofásicos de potencia
- Sistemas trifásicos de potencia
- Fuentes trifásicas
- Tensión de línea *versus* tensión de fase
- Corriente de línea *versus* corriente de fase
- Redes conectadas en Y
- Redes conectadas en Δ
- Cargas balanceadas
- Análisis por fase
- Medición de la potencia en sistemas trifásicos



12.1 SISTEMAS POLIFÁSICOS

Hasta ahora, siempre que hemos usado el término "fuente senoidal" el lector se imagina una sola tensión o corriente senoidal con una amplitud, frecuencia y fase específicas. En este capítulo presentamos el concepto de fuentes ***polifásicas***, enfocándonos en particular en los sistemas trifásicos. Existen distintas ventajas al usar maquinaria rotatoria para generar potencia trifásica, en vez de potencia monofásica; asimismo, la transmisión de potencia de un sistema trifásico genera ventajas económicas. Aunque la mayor parte del equipo eléctrico que se ha visto hasta ahora es monofásico, el trifásico no es poco común, sobre todo en el entorno de la manufactura. En particular, los motores que se utilizan en los grandes sistemas de refrigeración y en las instalaciones de maquinado se alambran a menudo para potencia trifásica. En lo que se refiere a las demás aplicaciones, una vez que nos hayamos familiarizado con los fundamentos de los sistemas polifásicos, podremos ver que resulta simple obtener potencia monofásica con conectar una sola "pata" ("pierna") del sistema polifásico.

Consideremos brevemente el sistema polifásico más común, un sistema trifásico balanceado. La fuente tiene tres terminales (sin contar con una conexión ***neutra*** o de ***tierra***), y las mediciones del voltímetro mostrarán la presencia de tensiones senoidales de igual amplitud entre dos terminales cualesquiera. Sin embargo, estas tensiones no están en fase; cada una de ellas está 120° fuera de fase, en relación con las otras dos, y el signo del ángulo de fase depende del sentido de giro de las tensiones. En la figura 12.1 se presenta un conjunto posible de tensiones. Una ***carga balanceada (o equilibrada)*** obtiene su potencia de las tres fases. *En ningún instante la potencia instantánea que demanda la carga instantánea llega a ser cero; en realidad, la potencia instantánea total es constante.* Lo anterior significa una ventaja en la maquinaria rotatoria, pues mantiene el momento de torsión sobre el rotor de una forma mucho más constante que en caso de que se utilizase una fuente monofásica. Como resultado, hay menos vibración.

El uso de un número de fases superiores, como los sistemas de seis y 12 fases, se limita casi por entero al suministro de potencia a grandes ***rectificadores***, los cuales convierten la corriente alterna en directa con sólo permitir que la corriente fluya

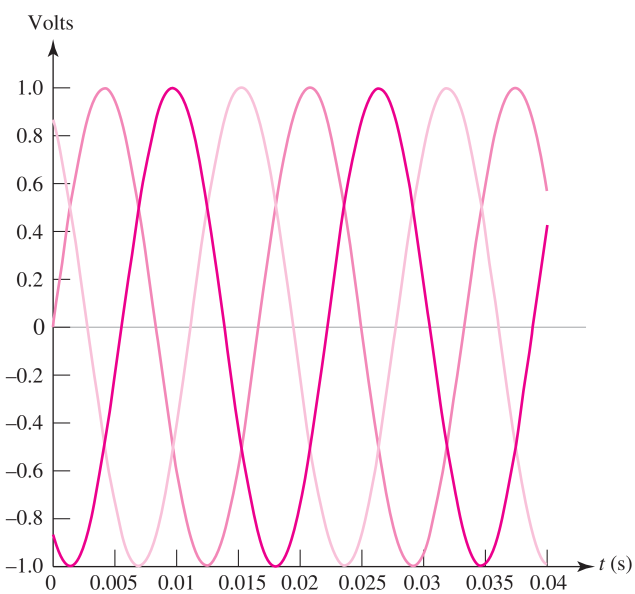
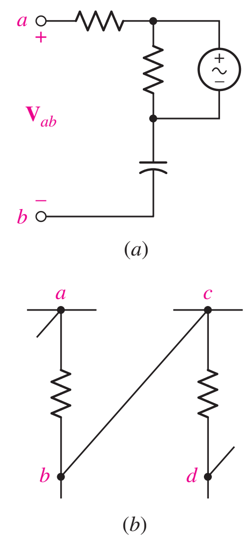


FIGURA 12.1 Ejemplo de un conjunto de tres tensiones, cada una de las cuales está 120º fuera de fase respecto de las otras dos. Como puede verse, sólo una de las tensiones será cero en un instante particular.

hacia la carga en una dirección, de modo que el signo de la tensión en los extremos de la carga permanece igual. La salida del rectificador es una corriente directa más una componente pulsante más pequeña, o rizo, que disminuye cuando aumenta el número de fases.

Casi sin excepción, los sistemas polifásicos contienen en la práctica fuentes que pueden aproximarse muy bien a fuentes de tensión ideales, o a fuentes de tensión ideales en serie con pequeñas impedancias internas. En tanto, las fuentes de corriente trifásicas raramente son utilizadas.

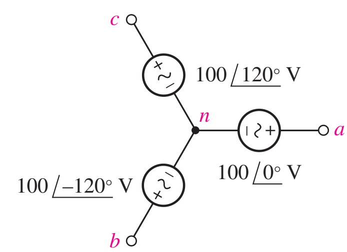


■ **FIGURA 12.2** (*a*) Definición de tensión $\mathbf{V}_{ab}$. (*b*) $\mathbf{V}_{ad} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{cd} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{cd}$.

Notación de doble subíndice

Resulta conveniente describir las tensiones y las corrientes polifásicas mediante la ***notación de doble subíndice***, con la cual una tensión o una corriente, respectivamente $\mathbf{V}_{ab}$ o $\mathbf{I}_{aA}$, tiene más significado que si se indicara como $\mathbf{V}_3$ o $\mathbf{I}_x$. Por definición, la tensión del punto *a* con respecto al punto *b* es $\mathbf{V}_{ab}$. De esta forma, el signo positivo se localiza en *a*, como se indica en la figura 12.2*a*. Por lo tanto, consideramos el doble subíndice como *equivalente* al par de signos positivo-negativo; el uso de ambos sería redundante. Si observamos la figura 12.2*b*, veremos que $\mathbf{V}_{ad} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{cd}$. La ventaja de la notación de doble subíndice radica en el hecho de que la ley de tensiones de Kirchhoff requiere que la tensión entre dos puntos sea la misma, sin que importe la trayectoria que se sigue entre los puntos; de tal manera, $\mathbf{V}_{ad} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bd} = \mathbf{V}_{ac} + \mathbf{V}_{cd} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{cd}$, etc. El beneficio de esta notación es que la LVK se cumple sin necesidad de consultar el diagrama de circuito; las ecuaciones correctas se escriben aun cuando se incluya un punto o subíndice, que no se marca sobre el diagrama. Por ejemplo, podríamos escribir $\mathbf{V}_{ad} = \mathbf{V}_{ax} + \mathbf{V}_{xd}$, donde *x* identifica la localización de cualquier punto que seleccionemos.

Una representación posible de los sistemas de tensión trifásicos[1] se muestra en la figura 12.3. Supongamos que se conocen las tensiones $\mathbf{V}_{an}$, $\mathbf{V}_{bn}$ y $\mathbf{V}_{cn}$:

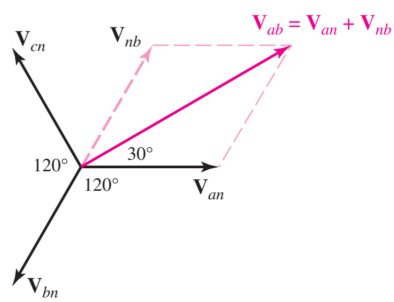


■ **FIGURA 12.3** Red utilizada como ejemplo numérico de una notación de tensión de doble subíndice.

$$\mathbf{V}_{an} = 100\underline{/0^\circ}\ \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{bn} = 100\underline{/-120^\circ}\ \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{cn} = 100\underline{/-240^\circ}\ \text{V}$$

Por ello podemos calcular la tensión $\mathbf{V}_{ab}$ con tomar en cuenta los subíndices:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nb} &= \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn}\\ &= 100\underline{/0^\circ} - 100\underline{/-120^\circ}\ \text{V}\\ &= 100 - (-50 - j86.6)\ \text{V}\\ &= 173.2\underline{/30^\circ}\ \text{V}\end{aligned}$$



■ **FIGURA 12.4** Este diagrama fasorial ilustra el uso gráfico de la convención de tensión de doble subíndice para obtener $\mathbf{V}_{ab}$ relativa a la red de la figura 12.3.

Las tres tensiones indicadas y la construcción del fasor $\mathbf{V}_{ab}$ se ilustran en el diagrama de fasores de la figura 12.4.

También se aplicaría la notación de doble subíndice a las corrientes. Se define la corriente $\mathbf{I}_{ab}$ como la corriente que circula de *a* a *b por la trayectoria más directa*. En todo circuito completo que consideremos, debe haber desde luego al menos dos

[1] Al mantener la convención de la potencia eléctrica industrial, los valores rms de las corrientes y las tensiones se usarán de manera implícita a lo largo de este capítulo.

trayectorias posibles entre los puntos *a* y *b*, así que convenimos que no recurriremos a la notación de doble subíndice, a menos que sea obvio que una trayectoria es mucho más corta o mucho más directa. Casi siempre esta trayectoria pasa por un solo elemento. De tal modo, la corriente $\mathbf{I}_{ab}$ se indica en forma correcta en la figura 12.5. De hecho, incluso no necesitamos la flecha de dirección cuando hablamos de esta corriente: los subíndices nos la *indican*. Sin embargo, la identificación de una corriente como $\mathbf{I}_{cd}$ del circuito de la figura 12.5 podría provocar confusiones.

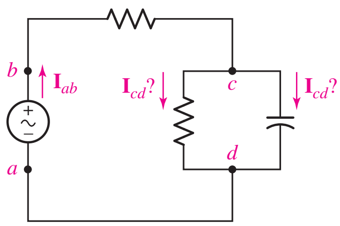


FIGURA 12.5 Ilustración del uso y abuso de la convención de doble subíndice para la notación de corriente.

PRÁCTICA

12.1 Sea $\mathbf{V}_{ab} = 100\angle 0°$ V, $\mathbf{V}_{bd} = 40\angle 80°$ V y $\mathbf{V}_{ca} = 70\angle 200°$ V. Determine (*a*) $\mathbf{V}_{ad}$; (*b*) $\mathbf{V}_{bc}$; (*c*) $\mathbf{V}_{cd}$.

12.2 Sea el circuito de la figura 12.6 donde $\mathbf{I}_{fj} = 3$ A, $\mathbf{I}_{de} = 2$ A e $\mathbf{I}_{hd} = -6$ A. Determine (*a*) $\mathbf{I}_{cd}$; (*b*) $\mathbf{I}_{ef}$; (*c*) $\mathbf{I}_{ij}$.

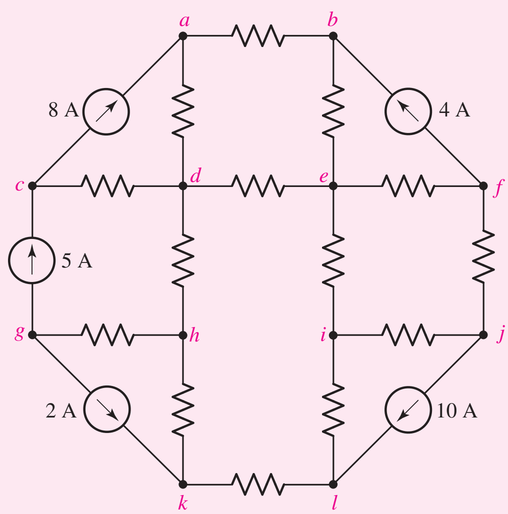


FIGURA 12.6

Respuestas: 12.1: $114.0\angle 20.2°$ V; $41.8\angle 145.0°$ V; $44.0\angle 20.6°$ V; 12.2: – 3 A; 7 A; 7 A.

12.2 SISTEMAS MONOFÁSICOS DE TRES HILOS

Antes de estudiar en detalle los sistemas polifásicos, puede ser útil primero analizar un sistema monofásico de tres hilos. Una *fuente monofásica de tres hilos* se define como la que tiene tres terminales de salida como *a*, *n* y *b* de la figura 12.7*a*, en las que las tensiones de fasor $\mathbf{V}_{an}$ y $\mathbf{V}_{nb}$ son iguales. Por lo tanto, podríamos representar la fuente mediante la combinación de dos fuentes de tensión idénticas; en la figura 12.7*b*, $\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb} = \mathbf{V}_1$. Es patente que $\mathbf{V}_{ab} = 2\mathbf{V}_{an} = 2\mathbf{V}_{nb}$ y en consecuencia tenemos una fuente a la cual se conectarían las cargas que operan con cualquiera de las dos tensiones. El sistema doméstico normal es monofásico de tres hilos, lo que permite la operación de aparatos tanto de 110 V como de 220 V. Por lo general, los aparatos de tensión superior son aquellos que demandan cantidades superiores de potencia; la operación a mayor tensión origina una demanda de corriente más pequeña para la misma potencia. En consecuencia, podemos emplear con seguridad un alambre de diámetro menor en el

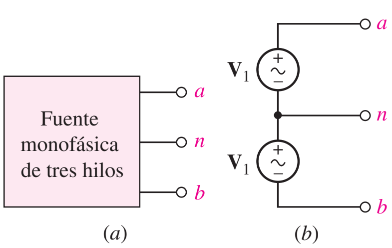


FIGURA 12.7 (*a*) Fuente monofásica de tres hilos. (*b*) Representación de una fuente monofásica de tres hilos mediante dos fuentes de tensión idénticas.

aparato, en el sistema de distribución doméstico y en el sistema de distribución de la compañía de electricidad, ya que resulta necesario emplear alambre de diámetro mayor con corrientes más altas para reducir el calor que se produce debido a la resistencia del alambre.

El nombre ***monofásico*** se origina porque las tensiones $\mathbf{V}_{an}$ y $\mathbf{V}_{nb}$, al ser iguales, deben tener el mismo ángulo de fase. Sin embargo, desde otro punto de vista, las tensiones entre los hilos exteriores y el alambre central, que suele denominarse *neutro,* está exactamente a 180° fuera de fase. Es decir, $\mathbf{V}_{an} = -\mathbf{V}_{bn}$, y $\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} = 0$. Más adelante veremos que los sistemas polifásicos balanceados se caracterizan por un sistema de tensiones de igual *amplitud* cuya suma (fasorial o vectorial) es cero. En realidad, desde esta perspectiva, el sistema monofásico de tres hilos es un sistema bifásico balanceado. No obstante, *bifásico* es un término que por lo común se reserva para designar un sistema desbalanceado relativamente intrascendente que utiliza dos fuentes de tensión 90° fuera de fase entre sí.

Consideremos ahora un sistema monofásico de tres hilos que contiene cargas idénticas $\mathbf{Z}_p$ entre cada alambre exterior y el neutro (figura 12.8). Primero supondremos que los hilos que conectan a la fuente con la carga son conductores perfectos. Puesto que

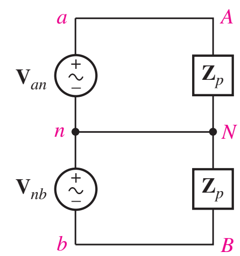


FIGURA 12.8 Sistema monofásico de tres hilos. Las dos cargas son idénticas y la corriente del neutro es cero.

$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb}$$

entonces,

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_p} = \mathbf{I}_{Bb} = \frac{\mathbf{V}_{nb}}{\mathbf{Z}_p}$$

y, por lo tanto,

$$\mathbf{I}_{nN} = \mathbf{I}_{Bb} + \mathbf{I}_{Aa} = \mathbf{I}_{Bb} - \mathbf{I}_{aA} = 0$$

En consecuencia, no hay corriente en el hilo neutro, por lo que éste podría eliminarse sin alterar ninguna corriente o tensión del sistema, resultado que se consigue mediante la igualdad de las dos cargas y de las dos fuentes.

Efecto de una impedancia de alambre finita

Pensemos a continuación en el efecto de una impedancia finita en cada uno de los hilos. Si las líneas *aA* y *bB* tienen cada una la misma impedancia, ésta puede sumarse a $\mathbf{Z}_p$, lo que origina también en este caso dos cargas iguales y una corriente neutra cero. Permitamos ahora que el hilo neutro posea una impedancia $\mathbf{Z}_n$. Sin efectuar ningún análisis detallado, la superposición debe mostrarnos que la simetría del circuito seguirá dando lugar a una corriente del neutro igual a cero. Además, la adición de cualquier impedancia conectada de manera directa desde una de las líneas exteriores a la otra línea exterior producirá también un circuito simétrico y una corriente de neutro igual a cero. Por lo tanto, la corriente de neutro igual a cero es consecuencia de una carga balanceada, o simétrica; la impedancia distinta de cero en el hilo neutro no cambió el estado de la simetría.

El sistema más general monofásico de tres hilos contendrá cargas desiguales entre cada línea exterior y el neutro, así como otra carga de manera directa entre las dos líneas exteriores; deberíamos esperar que las impedancias de las dos líneas exteriores fueran casi iguales, aunque la impedancia del neutro es a menudo un poco mayor. Pensemos en un ejemplo de un sistema de este tipo, con interés particular en la corriente que fluiría ahora en la corriente del hilo neutro, así como en la eficiencia total con la que nuestro sistema transmite potencia a una carga desbalanceada (desequilibrada).

EJEMPLO 12.1

Analice el sistema de la figura 12.9 y determine la potencia que se entrega a cada una de las tres cargas, así como la potencia perdida en el hilo neutro y en cada una de las dos líneas.

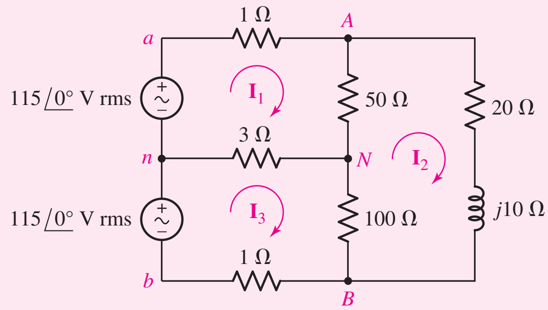


FIGURA 12.9 Sistema monofásico de tres hilos característico.

Identificar el objetivo del problema.

Las tres cargas en el circuito son: la resistencia de 50 Ω, la otra de 100 Ω y una impedancia de $20 + j10$ Ω. Cada una de las dos líneas presenta una resistencia de 1 Ω, y la resistencia del hilo neutro corresponde a 3 Ω. Necesitamos la corriente que circula por cada una de éstas a fin de determinar la potencia.

Recopilar la información conocida.

Tenemos un sistema monofásico de tres hilos; el diagrama de circuito de la figura 12.9 está por completo marcado. Las corrientes calculadas estarán en unidades rms.

Elaborar un plan.

El circuito conduce al análisis de malla, pues tiene tres mallas definidas de manera clara. El resultado del análisis será un conjunto de corrientes de malla, que en este caso se utiliza para calcular la potencia absorbida.

Construir un conjunto apropiado de ecuaciones.

Las tres ecuaciones de malla son:

$$-115\underline{/0^\circ} + \mathbf{I}_1 + 50(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + 3(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3) = 0$$

$$(20 + j10)\mathbf{I}_2 + 100(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) + 50(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) = 0$$

$$-115\underline{/0^\circ} + 3(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1) + 100(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + \mathbf{I}_3 = 0$$

que puede reordenarse para obtener las tres siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
54\mathbf{I}_1 \quad & -50\mathbf{I}_2 & -3\mathbf{I}_3 \quad & = 115\underline{/0^\circ} \\
-50\mathbf{I}_1 \quad & +(170 + j10)\mathbf{I}_2 & -100\mathbf{I}_3 \quad & = 0 \\
-3\mathbf{I}_1 \quad & -100\mathbf{I}_2 & +104\mathbf{I}_3 \quad & = 115\underline{/0^\circ}
\end{aligned}$$

Determinar si se requiere de información adicional.

Tenemos un conjunto de tres ecuaciones con tres incógnitas, por lo que podemos tratar de resolver el problema en este punto.

Buscar la solución.

Resolviendo para las corrientes fasoriales $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$ mediante una calculadora científica, obtenemos:

$$\mathbf{I}_1 = 11.24\underline{/-19.83^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = 9.389\underline{/-24.47^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_3 = 10.37\underline{/-21.80^\circ} \text{ A}$$

Por lo tanto, las corrientes en las líneas exteriores son

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_1 = 11.24\underline{/-19.83^\circ} \text{ A}$$

e

$$\mathbf{I}_{bB} = -\mathbf{I}_3 = 10.37\underline{/158.20^\circ} \text{ A}$$

y la corriente del neutro más pequeña es

$$\mathbf{I}_{nN} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1 = 0.9459\underline{/-177.7^\circ} \text{ A}$$

En consecuencia, se determinaría la potencia promedio (activa) demandada por cada carga:

$$P_{50} = |\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2|^2\,(50) = 206 \text{ W}$$

$$P_{100} = |\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2|^2\,(100) = 117 \text{ W}$$

$$P_{20+j10} = |\mathbf{I}_2|^2\,(20) = 1\,763 \text{ W}$$

Observe que no es necesario incluir un factor de $\frac{1}{2}$ puesto que estamos trabajando con valores rms de corriente.

La potencia activa de la carga total es igual a 2 086 W. A continuación calculamos la pérdida en cada uno de los hilos:

$$P_{aA} = |\mathbf{I}_1|^2\,(1) = 126 \text{ W}$$

$$P_{bB} = |\mathbf{I}_3|^2\,(1) = 108 \text{ W}$$

$$P_{nN} = |\mathbf{I}_{nN}|^2\,(3) = 3 \text{ W}$$

lo que da una pérdida de línea total de 237 W. Los hilos son, de manera evidente, bastante largos; en otro caso, la pérdida de potencia más o menos elevada en las dos líneas exteriores provocaría un peligroso aumento de temperatura.

¡Imagine el calor que producen los dos focos eléctricos de 100 W! Estos alambres exteriores deben disipar una cantidad comparable de calor. Para mantener baja su temperatura, se requiere de una gran área.

Verificar la solución. ¿Es razonable o es la esperada?

La potencia activa (promedio) total absorbida corresponde a 206 + 117 + 1 763 + 237, o 2 323 W, valor que puede confirmarse si se determina la potencia activa (promedio) que entrega cada fuente de tensión:

$$P_{an} = 115(11.24)\cos 19.83^\circ = 1\,216 \text{ W}$$

$$P_{bn} = 115(10.37)\cos 21.80^\circ = 1\,107 \text{ W}$$

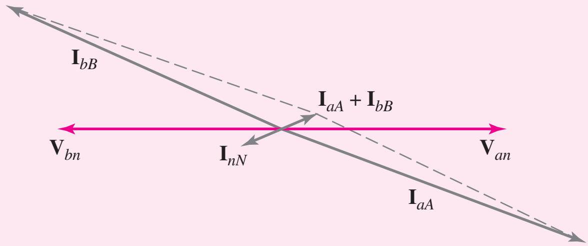
o un total de 2 323 W. La ***eficiencia de transmisión*** del sistema es:

$$\eta = \frac{\text{total de potencia entregada a la carga}}{\text{total de potencia generada}} = \frac{2\,086}{2\,086 + 237} = 89.8\%$$

(*continúa*)

Este valor no sería creíble en el caso de una máquina de vapor o un motor de combustión interna, aunque es demasiado bajo en el caso de un sistema de distribución bien diseñado. Se deben utilizar hilos de diámetro mayor si no se pueden colocar la fuente y la carga de manera cercana entre sí.

El diagrama de fasores que muestra las dos tensiones de fuente, las corrientes en las líneas exteriores y la corriente en el neutro se ilustra en la figura 12.10. El hecho de que $\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{nN} = 0$ se indica en el diagrama.



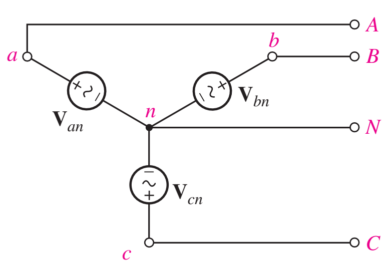
■ **FIGURA 12.10** Las tensiones de fuente y tres de las corrientes del circuito de la figura 12.9 se muestran en el diagrama fasorial. Observe que $\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{nN} = 0$.

PRÁCTICA

12.3 Modifique el circuito de la figura 12.9 agregando una resistencia de 1.5 Ω a cada una de las dos líneas exteriores, y una resistencia de 2.5 Ω al hilo neutro. Determine la potencia promedio (activa) que se entrega a cada una de las tres cargas.

Respuestas: 153.1 W; 95.8 W; 1 374 W.

12.3 CONEXIÓN Y-Y TRIFÁSICA



■ **FIGURA 12.11** Fuente trifásica de cuatro hilos conectados en Y.

Las fuentes trifásicas tienen tres terminales, denominadas terminales de *línea*; además pueden contar o no con una cuarta terminal, la conexión *neutra*. Comenzaremos con el análisis de una fuente trifásica que tiene una conexión neutra, la cual se debe representar mediante tres fuentes de tensión ideales conectadas en Y, como se indica en la figura 12.11; las terminales *a*, *b*, *c* y *n* están disponibles. Sólo examinaremos las fuentes trifásicas balanceadas, que se definirían de modo que

$$|\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}|$$

y

$$\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0$$

Estas tres tensiones, localizadas cada una entre una línea y el neutro, se llaman ***tensiones de fase***. Si elegimos de manera arbitraria $\mathbf{V}_{an}$ como la referencia, o definimos:

$$\mathbf{V}_{an} = V_p\underline{/0^\circ}$$

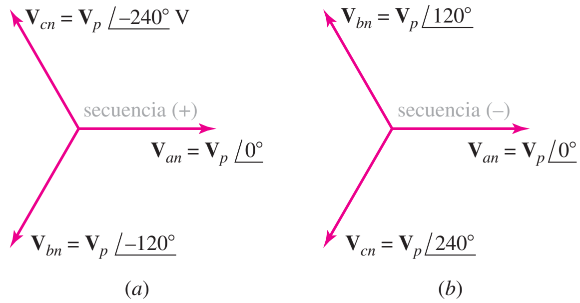
donde emplearemos de manera constante V_p para representar la *amplitud* rms de cualquiera de estas tensiones de fase, por lo cual la definición de la fuente trifásica se indica así

$$\mathbf{V}_{bn} = V_p\underline{/-120^\circ} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{V}_{cn} = V_p\underline{/-240^\circ}$$

o

$$\mathbf{V}_{bn} = V_p\underline{/120^\circ} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{V}_{cn} = V_p\underline{/240^\circ}$$

La primera recibe el nombre de ***secuencia de fase positiva*** o ***secuencia de fase abc*** y se ilustra en la figura 12.12*a*; la segunda se conoce como ***secuencia de fase negativa***



■ **FIGURA 12.12** (*a*) Secuencia de fase positiva o *abc*. (*b*) Secuencia de fase negativa o *cba*.

o ***secuencia de fase cba*** y se indica mediante el diagrama fasorial de la figura. 12.12*b*. La secuencia de fase real de una fuente trifásica física depende de la elección arbitraria de las tres terminales que se denominarán *a*, *b* y *c*, las que siempre se podrían elegir para proporcionar una secuencia de fase positiva; supondremos que se hizo lo anterior en la mayoría de los sistemas que analizaremos.

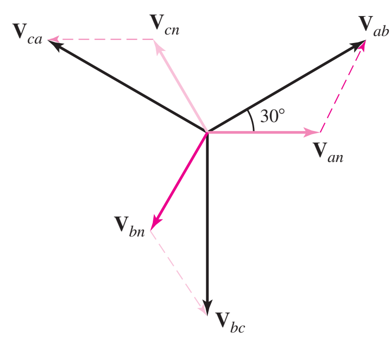
Tensiones de línea a línea (tensión de línea)

A continuación determinaremos las tensiones de línea a línea (denominadas muchas veces como ***tensiones de línea***) que se presentan cuando las tensiones de fase son las de la figura 12.12*a*. Resulta más fácil realizar lo anterior con la ayuda de un diagrama de fasores, puesto que todos los ángulos son múltiplos de 30°. La construcción necesaria se ilustra en la figura 12.13, y los resultados son

$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p \angle 30° \quad [1]$$

$$\mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p \angle -90° \quad [2]$$

$$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p \angle -210° \quad [3]$$



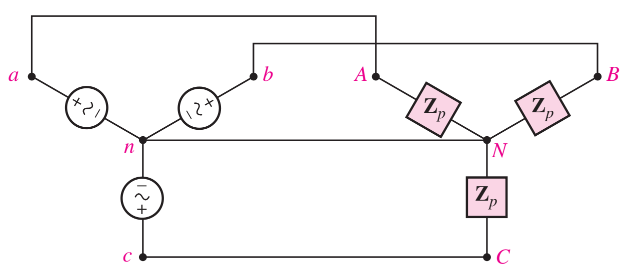
■ **FIGURA 12.13** Diagrama fasorial que se utiliza para determinar las tensiones de línea a partir de las tensiones de fase dadas. O, algebraicamente, $\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn} = V_p \angle 0° - V_p \angle -120° = V_p - V_p\cos(-120°) - jV_p\operatorname{sen}(-120°) = V_p(1 + \frac{1}{2} + j\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}V_p \angle 30°$.

La ley de tensiones de Kirchhoff requiere que la suma de las tres tensiones sea cero; se sugiere al lector que efectúe un ejercicio para verificar dicha afirmación.

Si la amplitud rms de cualquiera de las tensiones de línea se denota por V_L, entonces una de las características importantes de la fuente trifásica conectada en Y puede expresarse como

$$\boxed{V_L = \sqrt{3}V_p}$$

Observe que con una secuencia positiva $\mathbf{V}_{an}$ adelanta a $\mathbf{V}_{bn}$ y $\mathbf{V}_{bn}$ adelanta a $\mathbf{V}_{cn}$ en cada caso en 120°; asimismo, $\mathbf{V}_{ab}$ adelanta a $\mathbf{V}_{bc}$ y $\mathbf{V}_{bc}$ adelanta a $\mathbf{V}_{ca}$, de nuevo en 120°. La afirmación es cierta en el caso de secuencia de fase negativa si la palabra "retrasa" se sustituye por la de "adelanta".



■ **FIGURA 12.14** Sistema trifásico balanceado conectado en Y-Y que incluye un neutro.

A continuación conectaremos a nuestra fuente una carga trifásica balanceada conectada en Y, utilizando tres líneas y un neutro, como se dibuja en la figura 12.14. La carga se representa por una impedancia $\mathbf{Z}_p$ entre cada línea y el neutro. Las tres corrientes de línea se calculan con mucha facilidad puesto que en realidad se tienen tres circuitos monofásicos que poseen un hilo de conexión común.[2]

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_p}$$

$$\mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_p} = \frac{\mathbf{V}_{an}\underline{/-120^\circ}}{\mathbf{Z}_p} = \mathbf{I}_{aA}\underline{/-120^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{aA}\underline{/-240^\circ}$$

y por lo tanto

$$\mathbf{I}_{Nn} = \mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{cC} = 0$$

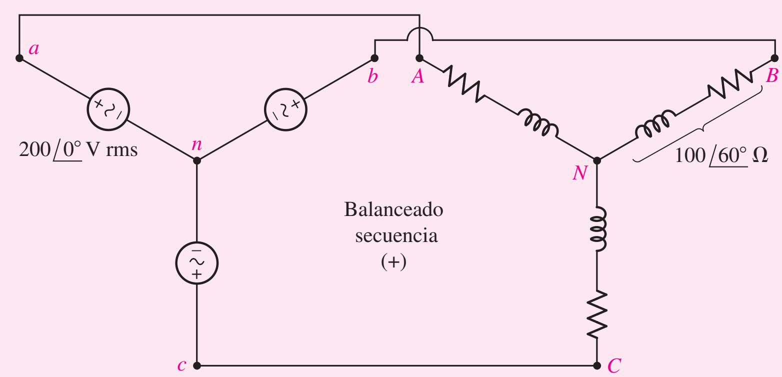
De tal modo, el neutro no conduce corriente si la fuente y la carga están balanceadas, y si los cuatro hilos tienen impedancia cero. ¿Cómo cambiará lo anterior si se insertara una impedancia $\mathbf{Z}_L$ en serie en cada una de las tres líneas y una impedancia $\mathbf{Z}_n$ en el neutro? Se combinarían las impedancias de línea con las de carga. Esta carga eficaz seguirá balanceada y podría eliminarse un hilo neutro perfectamente conductor. En consecuencia, si no se produce cambio en el sistema con un cortocircuito, o un circuito abierto entre n y N, se insertaría cualquier impedancia en el neutro y la corriente de éste permanecería igual a cero.



Concluimos que si tenemos fuentes, cargas e impedancias de línea balanceadas, podríamos reemplazar un hilo neutro de cualquier impedancia por cualquier otra impedancia, incluso por un cortocircuito o un circuito abierto; la sustitución no afectará las tensiones o las corrientes del sistema. Muchas veces resulta útil *imaginar* un cortocircuito entre los dos puntos neutros, ya sea que esté presente o ausente un hilo neutro; el problema se reduce en ese caso a tres problemas monofásicos, todos idénticos salvo por la diferencia en el ángulo de fase. En tal situación, se afirma que el problema se resuelve "por fase".

EJEMPLO 12.2

En el circuito de la figura 12.15, encuentre las corrientes de fase y de línea y las tensiones de fase y de línea indicadas por todo el circuito y calcule la potencia total que se disipa en la carga.



■ **FIGURA 12.15** Sistema trifásico balanceado conectado en Y-Y.

[2] Observe que esto es cierto al aplicar la superposición y al considerar cada fase a la vez.

En razón de que se indica una de las tensiones de fase de fuente y se nos dice que utilicemos la secuencia de fase positiva, las tres tensiones de fase son:

$$\mathbf{V}_{an} = 200\underline{/0^\circ} \text{ V} \qquad \mathbf{V}_{bn} = 200\underline{/-120^\circ} \text{ V} \qquad \mathbf{V}_{cn} = 200\underline{/-240^\circ} \text{ V}$$

La tensión de línea es igual a $200\sqrt{3} = 346$ V; el ángulo de fase de cada tensión de línea se determina construyendo un diagrama de fasores, como hicimos en la figura 12.13 (en realidad, se aplica el diagrama de fasores de la figura 12.13), restando las tensiones de fase mediante una calculadora científica o remitiéndonos a las ecuaciones [1] a [3]. Encontramos que $\mathbf{V}_{ab} = 346\underline{/30^\circ}$ V, $\mathbf{V}_{bc} = 346\underline{/-90^\circ}$ V y $\mathbf{V}_{ca}$ es $= 346\underline{/-210^\circ}$ V.

La corriente de línea para la fase A es

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_p} = \frac{200\underline{/0^\circ}}{100\underline{/60^\circ}} = 2\underline{/-60^\circ} \text{ A}$$

Puesto que sabemos que es un sistema trifásico balanceado, podemos escribir las restantes corrientes de línea con base en $\mathbf{I}_{aA}$:

$$\mathbf{I}_{bB} = 2\underline{/(-60^\circ - 120^\circ)} = 2\underline{/-180^\circ} \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_{cC} = 2\underline{/(-60^\circ - 240^\circ)} = 2\underline{/-300^\circ} \text{ A}$$

Finalmente la potencia absorbida por la fase A es $\text{Re}\{\mathbf{V}_{an}\mathbf{I}^*_{aA}\}$, o

$$P_{AN} = 200(2)\cos(0^\circ + 60^\circ) = 200 \text{ W}$$

De tal modo, la potencia promedio (activa) total extraída por la carga trifásica es igual a 600 W.

El diagama de fasores se presenta en la figura 12.16. Una vez que sabemos cualquiera de las magnitudes de las tensiones de línea y algunas de las magnitudes de la corriente de línea, los ángulos de las tres tensiones y las tres corrientes se habrían obtenido sin dificultad al leer el diagrama.

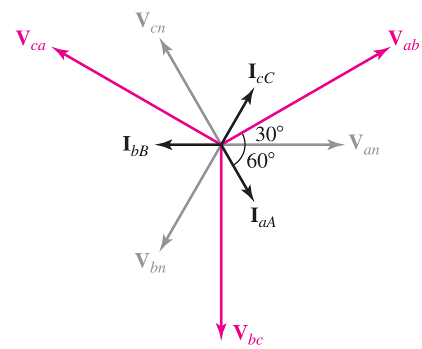


FIGURA 12.16 Diagrama fasorial que se aplica al circuito de la figura 12.15.

PRÁCTICA

12.4 Un sistema trifásico balanceado de tres hilos tiene una carga conectada en Y. Cada fase contiene tres cargas en paralelo: $-j100\ \Omega$, $100\ \Omega$ y $50 + j50\ \Omega$. Suponga una secuencia de fase positiva con $\mathbf{V}_{ab} = 400\underline{/0^\circ}$ V. Encuentre: (*a*) $\mathbf{V}_{an}$; (*b*) $\mathbf{I}_{aA}$; (*c*) la potencia activa total extraída por la carga.

Respuestas: $231\underline{/-30^\circ}$ V; $4.62\underline{/-30^\circ}$ A; 3 200 W.

Antes de analizar otro ejemplo, ésta sería una buena oportunidad para explorar con rapidez un planteamiento que se hizo en la sección 12.1; es decir, aun cuando las tensiones y corrientes de fase tienen valor cero en instantes específicos de tiempo (cada 1/120 s en Norteamérica), la potencia instantánea entregada a la carga *total* nunca es cero. Considere una vez más la fase A del ejemplo 12.2, con la tensión y la corriente de fase escritas en el dominio del tiempo:

> Se requiere el factor $\sqrt{2}$ para convertir unidades rms.

$$v_{AN} = 200\sqrt{2}\cos(120\pi t + 0^\circ) \text{ V}$$

e

$$i_{AN} = 2\sqrt{2}\cos(120\pi t - 60^\circ) \text{ A}$$

En consecuencia, la potencia instantánea que absorbe la fase *A* es:

$$\begin{aligned} p_A(t) = v_{AN} i_{AN} &= 800\cos(120\pi t)\cos(120\pi t - 60^\circ) \\ &= 400[\cos(-60^\circ) + \cos(240\pi t - 60^\circ)] \\ &= 200 + 400\cos(240\pi t - 60^\circ)\ \text{W} \end{aligned}$$

de modo similar,

$$p_B(t) = 200 + 400\cos(240\pi t - 300^\circ)\ \text{W}$$

y

$$p_C(t) = 200 + 400\cos(240\pi t - 180^\circ)\ \text{W}$$

Por lo tanto, la potencia instantánea que absorbe la carga *total* es

$$p(t) = p_A(t) + p_B(t) + p_C(t) = 600\ \text{W}$$

independiente del tiempo, que es el mismo valor que la potencia promedio (activa) calculada en el ejemplo 12.2.

EJEMPLO 12.3

Un sistema trifásico balanceado con una tensión de línea de 300 V se suministra a una carga balanceada conectada en Y con 1 200 W a un FP adelantado de 0.8. Determine la corriente de línea y la impedancia de carga por fase.

La tensión de fase es $300/\sqrt{3}$ V y la potencia por fase corresponde a 1 200/3 = 400 W. De tal manera, se determinaría la corriente de línea a partir de la relación de potencia

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}}(I_L)(0.8)$$

así que la corriente de línea es entonces 2.89 A. La impedancia de fase está dada por

$$|\mathbf{Z}_p| = \frac{V_p}{I_L} = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89} = 60\ \Omega$$

Puesto que el FP es 0.8 adelantado, el ángulo de fase de la impedancia equivale a $-36.9°$; de tal modo, $\mathbf{Z}_p = 60\underline{/-36.9^\circ}\ \Omega$.

PRÁCTICA

12.5 Un sistema trifásico balanceado de tres hilos tiene una tensión de línea de 500 V y están presentes dos cargas balanceadas conectadas en Y: una carga capacitiva con $7 - j2\ \Omega$ por fase y una carga inductiva con $4 + j2\ \Omega$ por fase. Determine: (*a*) la tensión de fase; (*b*) la corriente de línea; (*c*) la potencia activa total extraída por la carga; (*d*) el factor de potencia con el que opera la fuente.

Respuestas: 289 V; 97.5 A; 83.0 kW; 0.983 retrasado.

EJEMPLO 12.4

Una carga de iluminación balanceada de 600 W se añade (en paralelo) al sistema del ejemplo 12.3. Determine la nueva corriente de línea.

Dibujamos primero un circuito por fase adecuado, como se muestra en la figura 12.17. Suponemos que la carga de 600 W es una carga balanceada distribuida de manera uniforme entre las tres fases, lo que da lugar a 200 W adicionales consumidos por cada fase.

La amplitud de la corriente de iluminación (marcada $\mathbf{I}_1$) está determinada por

$$200 = \frac{300}{\sqrt{3}}|\mathbf{I}_1|\cos 0°$$

por lo que

$$|\mathbf{I}_1| = 1.155 \text{ A}$$

De forma similar, descubrimos que la amplitud de la corriente de carga capacitiva (marcada $\mathbf{I}_2$) queda invariable en su valor previo, pues su tensión ha permanecido igual:

$$|\mathbf{I}_2| = 2.89 \text{ A}$$

Si suponemos que la fase con la que trabajamos tiene una tensión de fase con un ángulo de 0°, entonces, ya que $\cos^{-1}(0.8) = 36.9°$,

$$\mathbf{I}_1 = 1.155\underline{/0°} \text{ A} \qquad \mathbf{I}_2 = 2.89\underline{/+36.9°} \text{ A}$$

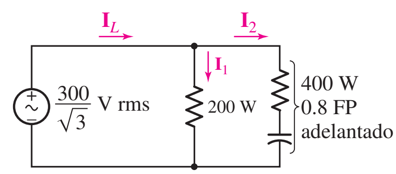
y la corriente de línea es

$$\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 3.87\underline{/+26.6°} \text{ A}$$

Podemos revisar nuestros resultados al calcular la potencia generada por esta fase de la fuente

$$P_p = \frac{300}{\sqrt{3}}3.87\cos(+26.6°) = 600 \text{ W}$$

lo cual concuerda con el hecho de que sabemos que la fase individual suministra 200 W a la nueva carga de iluminación, así como 400 W a la carga original.



■ **FIGURA 12.17** Circuito por fase que se usa para analizar un ejemplo trifásico *balanceado*.

PRÁCTICA

12.6 Tres cargas balanceadas conectas en Y se instalan en un sistema trifásico balanceado de cuatro hilos. La carga 1 demanda una potencia total de 6 kW a un factor de potencia unitario; la carga 2 requiere 10 kVA a un FP = 0.96 retrasado, y la carga 3 necesita 7 kW a 0.85 retrasado. Si la tensión de fase en las cargas es de 135 V, cada línea tiene una resistencia de 0.1 Ω, y si el neutro tiene una resistencia de 1 Ω, determine: (*a*) la potencia activa total consumida por las cargas; (*b*) el FP combinado de las cargas; (*c*) la pérdida de potencia total en las cuatro líneas; (*d*) la tensión de fase en la fuente; (*e*) el factor de potencia con el que opera la fuente.

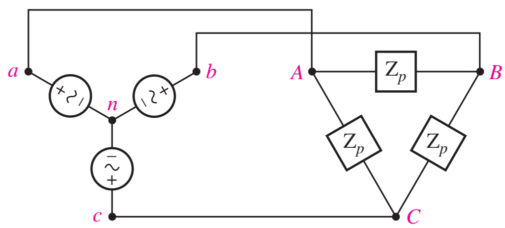
Respuestas: 22.6 kW; 0.954 retrasado; 1 027 W; 140.6 V; 0.957 retrasado.

Si una carga *desbalanceada* conectada en Y está presente en un sistema trifásico, que en otro caso estaría balanceado, el circuito tal vez se seguirá analizando en un esquema por fase *si* está presente el hilo neutro y *si* tiene impedancia cero. De no cumplirse

ninguna de estas condiciones, se deben utilizar otros métodos, como el análisis de malla o el nodal. Sin embargo, los ingenieros que dedican la mayor parte de su tiempo a los sistemas trifásicos desbalanceados encontrarán que el uso de *componentes simétricos* ahorrará mucho tiempo, pero este método no se explicará aquí.

12.4 CONEXIÓN DELTA (Δ)

Una configuración alternativa a la carga conectada en Y es la carga conectada en Δ, como se muestra en la figura 12.18. Este tipo de configuración es muy común y no posee una conexión neutra.



■ **FIGURA 12.18** Carga balanceada conectada en Δ que se presenta en un sistema trifásico de tres hilos. La fuente está conectada en Y.

Consideremos una carga balanceada conectada en Δ que está compuesta por una impedancia $\mathbf{Z}_p$ insertada entre cada par de líneas. Observe la figura 12.18 y suponga que se conocen las tensiones de línea

$$V_L = |\mathbf{V}_{ab}| = |\mathbf{V}_{bc}| = |\mathbf{V}_{ca}|$$

o que sabe cuáles son las tensiones de fase

$$V_p = |\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}|$$

donde

$$V_L = \sqrt{3}V_p \qquad \text{y} \qquad \mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p\underline{/30^\circ}$$

como calculamos antes. Debido a que se conoce la tensión en cada rama de la Δ, las *corrientes de fase* se obtienen sin dificultad:

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_p} \qquad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{bc}}{\mathbf{Z}_p} \qquad \mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{ca}}{\mathbf{Z}_p}$$

y sus diferencias determinan las corrientes de línea, en la forma

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA}$$

En razón de que estamos trabajando con un sistema balanceado, las tres corrientes de fase son de igual amplitud:

$$I_p = |\mathbf{I}_{AB}| = |\mathbf{I}_{BC}| = |\mathbf{I}_{CA}|$$

Las corrientes de línea también tienen la misma amplitud; la simetría se manifiesta a partir del diagrama de fasores de la figura 12.19. De tal modo, tenemos

$$I_L = |\mathbf{I}_{aA}| = |\mathbf{I}_{bB}| = |\mathbf{I}_{cC}|$$

e

$$I_L = \sqrt{3}I_p$$

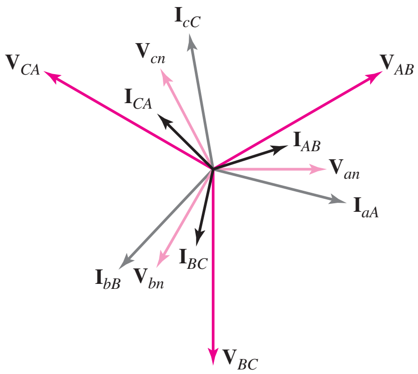


FIGURA 12.19 Diagrama fasorial que podría aplicarse al circuito de la figura 12.18 si $\mathbf{Z}_p$ fuera una impedancia inductiva.

Por el momento descartaremos la fuente y examinaremos sólo la carga balanceada. Si la carga está conectada en Δ entonces resultan indistinguibles la tensión de fase y la de línea, aunque la corriente de línea es mayor que la de fase por un factor de $\sqrt{3}$. Sin embargo, con una carga conectada en Y la corriente de fase y la de línea se refieren a la misma corriente, y la tensión de línea es mayor que la de fase por un factor de $\sqrt{3}$.

EJEMPLO 12.5

Determine la amplitud de la corriente de línea en un sistema trifásico con una tensión de línea de 300 V que suministra 1 200 W a una carga conectada en Δ a un FP de 0.8 retrasado; entonces encuentre la impedancia de fase.

Pensemos otra vez en una sola fase que demanda 400 W con un FP de 0.8 retrasado bajo una tensión de línea de 300 V. De tal manera,

$$400 = 300(I_p)(0.8)$$

e

$$I_p = 1.667 \text{ A}$$

así que la relación entre las corrientes de fase y las de línea produce

$$I_L = \sqrt{3}(1.667) = 2.89 \text{ A}$$

Además, el ángulo de fase de la carga es $\cos^{-1}(0.8) = 36.9°$, por lo cual la impedancia en cada fase debe ser:

$$\mathbf{Z}_p = \frac{300}{1.667}\underline{/36.9^\circ} = 180\underline{/36.9^\circ}\ \Omega$$

También en este caso nos conviene recordar que suponemos que todas las tensiones y las corrientes se indican como valores rms.

PRÁCTICA

12.7 Cada fase de una carga trifásica balanceada conectada en Δ consiste en un inductor de 200 mH en serie, con una combinación en paralelo de un capacitor de 5 μF y una resistencia de 200 Ω. Piense en una resistencia de línea cero y una tensión de fase de 200 V a $\omega = 400$ rad/s. Determine: (*a*) la corriente de fase; (*b*) la corriente de línea; (*c*) la potencia activa total que absorbe la carga.

Respuestas: 1.158 A; 2.01 A; 693 W.

EJEMPLO 12.6

Determine la amplitud de la corriente de línea en un sistema trifásico con una tensión de línea de 300 V que suministra 1 200 W a una carga conectada en Y y un FP de 0.8 retrasado. ***(Es el mismo circuito que el del ejemplo 12.5, pero con una carga conectada en Y.)***

En el esquema por fase, tenemos ahora una tensión de fase de $300/\sqrt{3}$ V, una potencia de 400 W y un FP retrasado de 0.8. En consecuencia,

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}}(I_p)(0.8)$$

e

$$I_p = 2.89 \quad (\text{por lo que } I_L = 2.89 \text{ A})$$

El ángulo de fase de la carga es otra vez de 36.9°, por lo cual la impedancia en cada fase de la Y corresponde a

$$\mathbf{Z}_p = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89}\underline{/36.9^\circ} = 60\underline{/36.9^\circ}\ \Omega$$

El factor $\sqrt{3}$ no sólo relaciona las cantidades de fase y de línea, sino que aparece también como una expresión útil para la potencia (activa) total consumida por cualquier carga trifásica balanceada. Si suponemos una carga conectada en Y, con un ángulo del factor de potencia θ, la potencia (activa) tomada por cualquier fase está dada por:

$$P_p = V_p I_p \cos\theta = V_p I_L \cos\theta = \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\theta$$

y la potencia (activa) total es igual a

$$P = 3P_p = \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta$$

De manera similar, la potencia activa que se entrega a cada fase de la carga conectada en Δ se calcula mediante

$$P_p = V_p I_p \cos\theta = V_L I_p \cos\theta = V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos\theta$$

lo que da una potencia activa total de

$$P = 3P_p = \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta \qquad [4]$$

PRÁCTICA

12.8 Un sistema trifásico balanceado de tres hilos se termina con dos cargas en paralelo conectadas en Δ. La carga 1 demanda 40 kVA con un FP de 0.8 retrasado, en tanto que la carga 2 absorbe 24 kW con un FP de 0.9 adelantado. Suponga que no hay resistencia de línea y sea $\mathbf{V}_{ab} = 440\underline{/30^\circ}$ V. Calcule: (*a*) la potencia activa total suministrada a las cargas; (*b*) la corriente de fase $\mathbf{I}_{AB1}$ de la carga retrasada; (*c*) $\mathbf{I}_{AB2}$; (*d*) $\mathbf{I}_{aA}$.

Respuestas: 56.0 kW; $30.3\underline{/-6.87^\circ}$ A; $20.2\underline{/55.8^\circ}$ A; $75.3\underline{/-12.46^\circ}$A.

Así, la ecuación [4] permite calcular la potencia activa total que se entrega a una carga balanceada, a partir del conocimiento de la magnitud de la tensión de línea, de la corriente de línea y del ángulo de fase de la impedancia (o admitancia) de carga, sin que importe que la carga se conecte en Y o en Δ. La corriente de línea en los ejemplos 12.5 y 12.6 puede obtenerse ahora en dos pasos simples:

$$1\,200 = \sqrt{3}(300)(I_L)(0.8)$$

Por lo tanto,

$$I_L = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2.89 \text{ A}$$

En la tabla 12.1 se presenta una breve comparación de las tensiones de fase y de línea, así como de las corrientes de fase y de línea tanto para cargas conectadas en Y como en Δ que están alimentadas por una fuente trifásica conectada en Y.

TABLA 12.1 Comparación de cargas trifásicas conectadas en Y y en Δ. V_p es la magnitud de la tensión de cada una de las fases de la *fuente* conectadas en Y.

Carga	Tensión de fase	Tensión de línea	Corriente de fase	Corriente de línea	Potencia por fase
Y	$\mathbf{V}_{AN} = V_p\underline{/0^\circ}$ $\mathbf{V}_{BN} = V_p\underline{/-120^\circ}$ $\mathbf{V}_{CN} = V_p\underline{/-240^\circ}$	$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{ab}$ $= (\sqrt{3}\underline{/30^\circ})\mathbf{V}_{AN}$ $= \sqrt{3}V_p\underline{/30^\circ}$ $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{bc}$ $= (\sqrt{3}\underline{/30^\circ})\mathbf{V}_{BN}$ $= \sqrt{3}V_p\underline{/-90^\circ}$ $\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{ca}$ $= (\sqrt{3}\underline{/30^\circ})\mathbf{V}_{CN}$ $= \sqrt{3}V_p\underline{/-210^\circ}$	$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AN} = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{bB} = \mathbf{I}_{BN} = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{CN} = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}_p}$	$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AN} = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{bB} = \mathbf{I}_{BN} = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{CN} = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}_p}$	$\sqrt{3}\,V_L I_L$ cos θ donde cos $\theta =$ factor de potencia de la carga.
Δ	$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{ab}$ $= \sqrt{3}V_p\underline{/30^\circ}$ $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{bc}$ $= \sqrt{3}V_p\underline{/-90^\circ}$ $\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{ca}$ $= \sqrt{3}V_p\underline{/-210^\circ}$	$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{ab}$ $= \sqrt{3}V_p\underline{/30^\circ}$ $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{bc}$ $= \sqrt{3}V_p\underline{/-90^\circ}$ $\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{ca}$ $= \sqrt{3}V_p\underline{/-210^\circ}$	$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_p}$	$\mathbf{I}_{aA} = (\sqrt{3}\underline{/-30^\circ})\frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{bB} = (\sqrt{3}\underline{/-30^\circ})\frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{cC} = (\sqrt{3}\underline{/-30^\circ})\frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_p}$	$\sqrt{3}\,V_L I_L$ cos θ donde cos $\theta =$ factor de potencia de la carga.

Fuentes conectadas en Δ

También se podría conectar la configuración de una fuente en Δ, lo cual, sin embargo, no es común, pues un ligero desbalance (desequilibrio) en las fases de la fuente puede ocasionar una circulación de corrientes elevadas en el lazo Δ. Por ejemplo, denominemos a las tres fuentes monofásicas como $\mathbf{V}_{ab}$, $\mathbf{V}_{bc}$ y $\mathbf{V}_{cd}$. Antes de cerrar la Δ al conectar d con a, determinaremos el desbalance mediante la suma $\mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc}, + \mathbf{V}_{ca}$. Supongamos que la amplitud del resultado es sólo 1% de la tensión de línea. Por lo tanto, la corriente que circula es casi $\frac{1}{3}$ de la tensión de línea dividida entre la impe-

APLICACIÓN PRÁCTICA

Sistemas de generación de potencias

Hoy en día, la generación de electricidad se consigue mediante una amplia variedad de técnicas. Por ejemplo, la conversión directa de energía solar en electricidad por medio de tecnología fotovoltaica (celdas solares) origina la producción de potencia de cd. Sin embargo, a pesar de representar una tecnología bastante aceptable desde la perspectiva ambiental, las instalaciones con base fotovoltaica son en la actualidad más costosas que otros medios de producir electricidad y requieren el uso de inversores para convertir la potencia de cd en ca. Otras tecnologías, como los aerogeneradores eólicos, la geotermia, la hidrodinámica, la energía nuclear y los generadores basados en combustible fósil, son comparativamente mucho más económicas. En estos sistemas un eje gira por la acción de un ***impulsor primario***, como el viento sobre un propulsor o el agua o corriente sobre las aspas de una turbina (figura 12.20).

Una vez que el impulsor primario se ha dispuesto para generar movimiento rotacional de un eje, existen varios medios para convertir esta energía mecánica en energía eléctrica. Un ejemplo es un ***generador síncrono*** (como el de la figura 12.21), que es una máquina compuesta por dos secciones principales: una parte estacionaria, llamada ***estator***, y una parte giratoria, denominada ***rotor***. La corriente directa se suministra a bobinas de alambre devanadas en torno al rotor a fin de generar un campo magnético, que se hace girar mediante la acción del impulsor primario solidario del eje del rotor. Un conjunto de tensiones trifásicas se induce entonces en un segundo conjunto de devanados alrededor del estator. Los generadores síncronos deben su nombre al hecho de que la frecuencia de la tensión de ca que se produce se sincroniza con la rotación mecánica del rotor.

La demanda real de un generador aislado varía de manera considerable, a medida que se añaden o eliminan diversas cargas, de igual modo que cuando se arrancan las unidades de aire acondicionado, las luces se apagan o encienden, etc. La salida de tensión de un generador debe ser independiente en condiciones ideales de la carga, lo cual no sucede en la práctica. La tensión $\mathbf{E}_A$ que se induce en cualquier fase determinada del estator, denominada a veces ***tensión generada interna***, tiene una magnitud dada por

$$E_A = K\phi\omega$$

donde K es una constante que depende de la manera en que se construya la máquina, ϕ es el flujo magnético que producen los devanados de campo del rotor (y, por lo tanto, es independiente de la carga) y ω es la velocidad angular, que depende sólo del impulsor primario y no de la carga unida al generador. De esta forma, *la variación de la carga no afecta la magnitud de* $\mathbf{E}_A$. La tensión interna generada se relaciona con la tensión de fase $\mathbf{V}_\phi$ y la corriente de fase $\mathbf{I}_A$ por

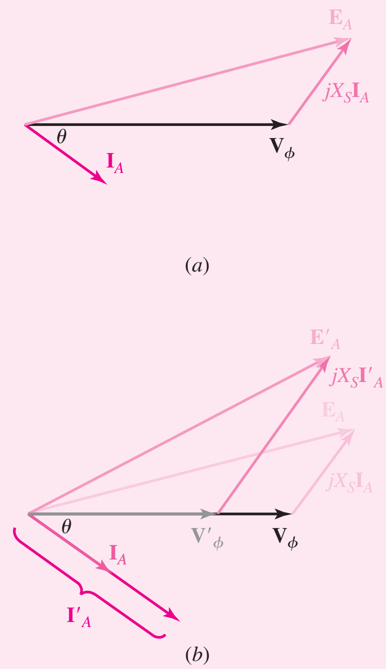
$$\mathbf{E}_A = \mathbf{V}_\phi + jX_S\mathbf{I}_A$$



■ **FIGURA 12.20** Instalación de captación de energía eólica en Altamont Pass, California, que consta de más de siete mil aerogeneradores individuales. (© *Digital Vision/PunchStock*)



■ **FIGURA 12.21** Rotor de 24 polos de un generador síncrono que está siendo colocado en su posición.
(*Foto cortesía del Dr. Wade Enright, Te Kura Pukaha Vira O Te Whare Wananga O Waitaha, Aotearoa.*)



■ **FIGURA 12.22** Diagramas fasoriales que describen el efecto de carga sobre un generador síncrono que permanece aislado. (*a*) El generador conectado a una carga con un factor de potencia retrasado de cos θ. (*b*) Se agrega una carga adicional, sin que cambie el factor de potencia. La magnitud de la tensión generada de manera interna $\mathbf{E}_A$ permanece igual mientras aumenta la corriente de salida, de modo que se reduce la tensión de salida $\mathbf{V}_\phi$.

donde X_S es la ***reactancia síncrona*** del generador. Si se aumenta la carga, entonces se consumirá una corriente mayor $\mathbf{I}'_A$ del generador. Si no cambia el factor de potencia (es decir, permanece constante el ángulo entre $\mathbf{V}_\phi$ e $\mathbf{I}_A$), $\mathbf{V}_\phi$ se reducirá puesto que E_A no puede cambiar.

Por ejemplo, considere el diagrama de fasores de la figura 12.22*a*, que describe la salida de tensión-corriente de una sola fase de un generador conectado a una carga con un factor de potencia retrasado de cos θ. También se ilustra la tensión generada interna $\mathbf{E}_A$. Si se añade una carga adicional, sin cambiar el factor de potencia, como se representa en la figura 12.22*b*, la corriente suministrada $\mathbf{I}_A$ se incrementa hasta $\mathbf{I}'_A$. Sin embargo, la magnitud de la tensión generada interna, que se forma por la suma de los fasores $jX_S\mathbf{I}'_A$ y $\mathbf{V}'_\phi$, debe permanecer invariable. De tal manera, $E'_A = E_A$, por lo que la *salida* de tensión ($\mathbf{V}'_\phi$) del generador se reducirá un poco, como se describe en la figura 12.22*b*.

La ***regulación de tensión*** de un generador se define:

$$\%\text{ de regulación} = \frac{\mathrm{V}_{\text{sin carga}} - \mathrm{V}_{\text{carga completa}}}{\mathrm{V}_{\text{carga completa}}} \times 100$$

Idealmente, este valor debe ser lo más cercano posible a cero, aunque sólo puede lograrse si la corriente cd que se utiliza para controlar el flujo ϕ alrededor de los devanados de campo varía para compensar el cambio de las condiciones de carga, lo cual se convierte de inmediato en un proceso bastante complejo. Por esta razón, cuando se diseña una instalación de generación de potencia suelen preferirse varios generadores más pequeños conectados en paralelo, a un generador grande capaz de manejar la carga máxima. Cada generador funciona con o cerca de su carga máxima, por lo que la salida de tensión es en esencia constante; los generadores individuales se añaden o eliminan del sistema dependiendo de la demanda.

dancia interna de cualquier fuente. ¿Qué magnitud tendría esta impedancia? Depende de la corriente que se espera que la fuente entregue, con una caída despreciable de la tensión a nivel de las terminales. Si suponemos que la corriente máxima ocasiona una caída de tensión de 1% en las terminales, entonces *¡la corriente circulante es un tercio de la corriente máxima!* Lo anterior reduce la capacidad de la corriente útil de la fuente e incrementa también las pérdidas en el sistema.

También debemos advertir que las fuentes trifásicas balanceadas se transformarían de Y a Δ o viceversa, sin afectar las corrientes o tensiones de la carga. Las relaciones necesarias entre las tensiones de línea y de fase se presentan en la figura 12.13 en el caso en el que $\mathbf{V}_{an}$ tiene un ángulo de referencia de 0°. Esta transformación permite utilizar cualquier conexión de fuente que prefiramos, así que todas las relaciones de carga serán correctas. Desde luego, no podemos especificar alguna corriente o tensión dentro de la fuente, hasta que conozcamos cómo está conectada en realidad. Las cargas trifásicas balanceadas quizá se transformen entre las configuraciones conectadas en Y y en Δ mediante la relación

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$$

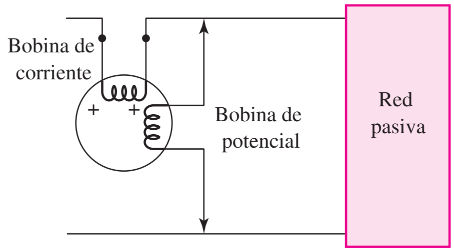
que tal vez valga la pena recordar.

12.5 MEDICIÓN DE POTENCIA EN SISTEMAS TRIFÁSICOS

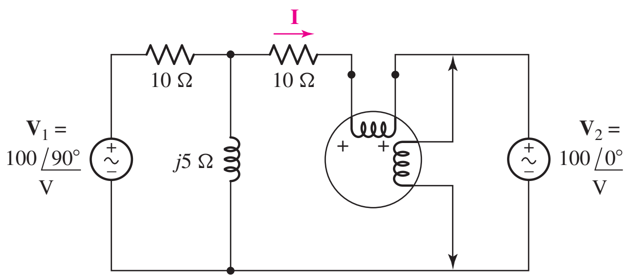
Uso del wattímetro

En los sistemas eléctricos grandes, no sólo es importante conocer la tensión y la corriente; la potencia se expresa tan a menudo que medirla de manera directa resulta de gran utilidad. Esto se realiza usualmente mediante un dispositivo que se conoce como ***wattímetro***, que debe tener la capacidad de determinar tanto la tensión como la corriente asociada ya sea con la fuente, la carga o ambas. Los dispositivos modernos son muy similares a los multímetros digitales, y dan una lectura numérica de la cantidad que se está midiendo. Estos dispositivos usan frecuentemente el hecho de que la corriente genera un campo magnético, que se puede medir sin cortar el circuito. Sin embargo, en el campo todavía encontramos versiones analógicas del multímetro, y siguen teniendo algunas ventajas sobre las versiones digitales, como la capacidad de funcionar sin una fuente separada de potencia (por ejemplo una batería), y la información secundaria que proviene de observar el movimiento de una aguja, en contraposición con números que simplemente aparecen en una pantalla. Por lo tanto, en esta sección, nos enfocamos en la medición de potencia usando un medidor analógico tradicional, ya que es sencillo cambiar a un dispositivo digital si se tiene. Antes de iniciar la explicación de las técnicas especializadas que se utilizan para medir la potencia en sistemas trifásicos, nos conviene considerar de manera breve la forma en que se usa un **wattímetro** en un circuito monofásico.

La medición de potencia se consigue casi siempre a frecuencias inferiores de unos cuantos cientos de Hz mediante el uso de un wattímetro que contiene dos bobinas independientes. Una de ellas se elabora con alambre grueso, que tiene una resistencia muy baja, y se denomina *bobina de corriente.* La segunda está compuesta por un número mucho mayor de vueltas de alambre delgado, con resistencia relativamente alta, a la que se le llama *bobina de potencial* o *bobina de tensión.* Se podría insertar de manera interna o externa una resistencia adicional en serie con la bobina de potencial. El momento de torsión que se aplica al sistema móvil y a la aguja indicadora resulta proporcional al producto instantáneo de las corrientes que fluyen en ambas bobinas. Sin embargo, la inercia mecánica del sistema móvil provoca una desviación, proporcional al valor *promedio* de este momento de torsión.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 12.23** (*a*) Conexión de un wattímetro que asegurará una lectura de escala ascendente de la potencia que absorbe la red pasiva. (*b*) Ejemplo donde el wattímetro se instala para producir una indicación de escala ascendente de la potencia activa que absorbe la fuente de la derecha.

El wattímetro se emplea conectándolo en una red de manera que la corriente que fluye en la bobina de corriente sea la que circula dentro de la red, y la tensión en la bobina de potencial corresponda a la tensión entre las dos terminales de la red. Por ello, la corriente en la bobina de potencial es la tensión de entrada dividida entre la resistencia de la bobina de potencial.

Resulta claro que el wattímetro tiene cuatro terminales disponibles, así que es necesario efectuar las conexiones correctas a ellas para obtener una lectura de escala ascendente en el medidor. De modo específico, supongamos que medimos la potencia que absorbe una red pasiva. La bobina de corriente se inserta en serie con uno de los dos conductores conectados a la carga, y la bobina de potencial se instala entre los dos conductores, por lo general en el "lado de la carga" de la bobina de corriente. Las terminales de la bobina de potencial se indican a menudo mediante flechas, como en la figura 12.23*a*. Cada bobina tiene dos terminales y se requiere observar la relación adecuada entre el sentido de la corriente y la tensión. Casi siempre se marca con (+) un extremo de cada bobina, por lo que se obtiene una lectura de escala ascendente si fluye una corriente positiva hacia el extremo (+) de la bobina de corriente, mientras la terminal (+) de la bobina de potencial sea positiva con respecto al extremo sin marca. En consecuencia, el wattímetro que se muestra en la red de la figura 12.23*a* proporciona una desviación de escala ascendente cuando la red de la derecha absorbe potencia. Una inversión de cualquiera de las bobinas, pero no de ambas, provocará que el medidor trate de desviarse hacia las escalas inferiores; la inversión de ambas bobinas no afectará nunca la lectura.

Como ejemplo del empleo de un wattímetro de este tipo en la medición de potencia promedio (activa), consideremos el circuito de la figura 12.23*b*. La conexión del wattímetro es tal, que una lectura ascendente de la escala corresponde a una potencia activa positiva absorbida por la red que está a la derecha del medidor, es decir, la fuente derecha. La potencia activa que absorbe dicha fuente está dada por

$$P = |\mathbf{V}_2|\,|\mathbf{I}| \cos(ang\,\mathbf{V}_2 - ang\,\mathbf{I})$$

Utilizando la superposición o el análisis de malla, encontramos que la corriente es

$$\mathbf{I} = 11.18\underline{/153.4^\circ}\ \text{A}$$

por lo cual la potencia activa que se absorbe corresponde a

$$P = (100)(11.18)\cos(0^\circ - 153.4^\circ) = -1\,000\ \text{W}$$

Por lo tanto, la aguja indicadora descansa contra el tope de la escala descendente. En la práctica, la bobina de potencial se invierte con mayor rapidez que la bobina de corriente y dicha inversión proporciona una lectura en la escala ascendente de 1 000 W.

PRÁCTICA

12.9 Determine la lectura del wattímetro en la figura 12.24; establezca si la bobina de potencial se invirtió o no para obtener una lectura de escala ascendente, e identifique el dispositivo o dispositivos que absorben o generan tal potencia. La terminal (+) del wattímetro se conecta: (*a*) *x*; (*b*) *y*; (*c*) *z*.

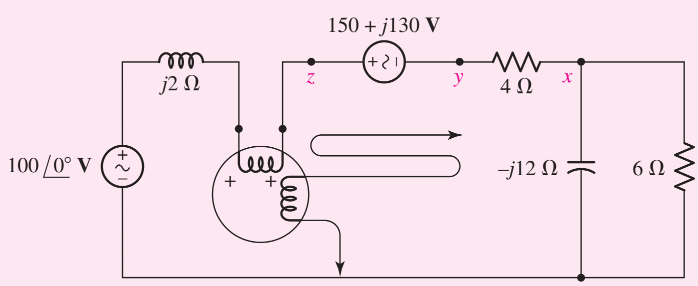


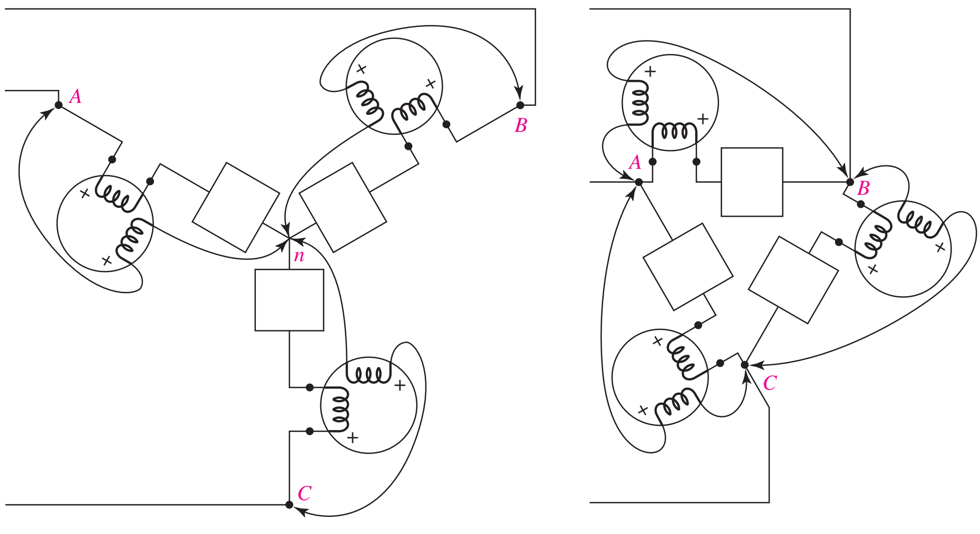
FIGURA 12.24

Respuestas: 1 200 W, como está, $P_{6\Omega}$ (absorbida); 2 200 W como está, $P_{4\Omega} + P_{6\Omega}$ (absorbida); 500 W, invertida, absorbida por 100 V.

El wattímetro en el sistema trifásico

A primera vista, la medición de la potencia consumida por una carga trifásica parece ser un problema simple. Sólo necesitamos poner un wattímetro en cada una de las tres fases y sumar los resultados. Por ejemplo, las conexiones apropiadas de una carga en Y se muestran en la figura 12.25*a*. Cada wattímetro tiene su bobina de corriente insertada en una fase de la carga y su bobina de potencial conectada entre el lado de la línea de esa carga y el neutro. De manera similar, se conectarían tres wattímetros en la forma que se indica en la figura 12.25*b* a fin de medir la potencia activa total tomada por una carga que se conecta en Δ. Los métodos son teóricamente correctos, aunque quizá sean inútiles en la práctica debido a que el neutro de la Y no siempre es accesible y no se cuenta con las fases de la Δ. Por ejemplo, una máquina rotatoria trifásica sólo tiene tres terminales accesibles, que denominamos *A*, *B* y *C*.

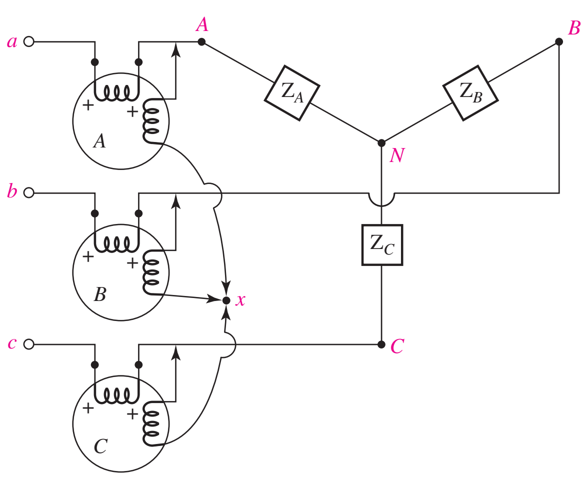
Resulta claro que necesitamos un método de medición de la potencia activa total consumida por una carga trifásica con sólo tres terminales accesibles; podríamos efectuar mediciones en el lado de "línea", pero no en el de la "carga". Disponemos de un método de este tipo que puede medir la potencia consumida por una carga *desbalan-*



■ **FIGURA 12.25** Tres wattímetros se conectan de manera que cada uno registra la potencia tomada por una fase de una carga trifásica y la suma de las lecturas de la potencia total. (*a*) Carga conectada en Y. (*b*) Carga conectada en Δ. Ni las cargas ni la fuente necesitan estar balanceadas.

ceada, a partir de una fuente *desbalanceada.* Conectamos tres wattímetros de manera que cada uno tenga su bobina de corriente y su bobina de tensión entre esa línea y algún punto común x, como se indica en la figura 12.26. Aunque se ilustra un sistema con una carga conectada en Y, los argumentos que presentamos son también válidos para una carga conectada en Δ. El punto x quizá sea alguno no especificado en el sistema trifásico, o sólo un punto en el espacio donde las tres bobinas de potencial tengan un nodo en común. La potencia promedio activa indicada por el wattímetro A debe ser

$$P_A = \frac{1}{T}\int_0^T v_{Ax} i_{aA}\, dt$$



■ **FIGURA 12.26** Método de conexión de tres wattímetros para medir la potencia (activa) total que toma una carga trifásica. Sólo son accesibles las tres terminales de la carga.

donde T es el periodo de todas las tensiones de fuente. Las lecturas de los otros dos wattímetros se indican mediante expresiones similares, así que la potencia promedio (activa) total consumida por la carga resulta

$$P = P_A + P_B + P_C = \frac{1}{T}\int_0^T (v_{Ax}i_{aA} + v_{Bx}i_{bB} + v_{Cx}i_{cC})\,dt$$

Cada una de las tres tensiones de la expresión anterior se escribe en términos de una tensión de fase y de la tensión entre el punto x y el neutro,

$$v_{Ax} = v_{AN} + v_{Nx}$$
$$v_{Bx} = v_{BN} + v_{Nx}$$
$$v_{Cx} = v_{CN} + v_{Nx}$$

y, por lo tanto,

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (v_{AN}i_{aA} + v_{BN}i_{bB} + v_{CN}i_{cC})\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T v_{Nx}(i_{aA} + i_{bB} + i_{cC})\,dt$$

Sin embargo, podríamos pensar que la carga trifásica completa es un supernodo, de modo que la ley de corrientes de Kirchhoff requiere que

$$i_{aA} + i_{bB} + i_{cC} = 0$$

De tal modo,

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (v_{AN}i_{aA} + v_{BN}i_{bB} + v_{CN}i_{cC})\,dt$$

Al consultar el diagrama de circuito observamos que esta suma es en realidad la suma de las potencias promedio (activa) tomadas por cada fase de la carga, ¡y la suma de las lecturas de los tres wattímetros representa, por lo tanto, ¡la potencia promedio (activa) total consumida por la carga completa!

Ilustremos este procedimiento mediante un ejemplo numérico, antes de descubrir que uno de estos tres wattímetros en realidad resulta superfluo. Supondremos una fuente balanceada

$$\mathbf{V}_{ab} = 100\underline{/0^\circ}\text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{bc} = 100\underline{/-120^\circ}\text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{ca} = 100\underline{/-240^\circ}\text{ V}$$

o

$$\mathbf{V}_{an} = \frac{100}{\sqrt{3}}\underline{/-30^\circ}\text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{bn} = \frac{100}{\sqrt{3}}\underline{/-150^\circ}\text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{cn} = \frac{100}{\sqrt{3}}\underline{/-270^\circ}\text{ V}$$

y una carga desbalanceada:

$$\mathbf{Z}_A = -j10\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_B = j10\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_C = 10\ \Omega$$

Supongamos que hay wattímetros ideales, como los de la figura 12.26, con el punto x ubicado sobre el neutro de la fuente n. Las tres corrientes de línea se podrían obtener mediante un análisis de malla:

$$\mathbf{I}_{aA} = 19.32\underline{/15^\circ}\text{ A}$$
$$\mathbf{I}_{bB} = 19.32\underline{/165^\circ}\text{ A}$$
$$\mathbf{I}_{cC} = 10\underline{/-90^\circ}\text{ A}$$

La tensión entre los neutros es

$$\mathbf{V}_{nN} = \mathbf{V}_{nb} + \mathbf{V}_{BN} = \mathbf{V}_{nb} + \mathbf{I}_{bB}(j10) = 157.7\underline{/-90^\circ}$$

La potencia promedio (activa) indicada por cada wattímetro se calcularía mediante

$$P_A = V_p I_{aA}\cos(ang\mathbf{V}_{an} - ang\,\mathbf{I}_{aA})$$
$$= \frac{100}{\sqrt{3}}19.32\cos(-30^\circ - 15^\circ) = 788.7\text{ W}$$
$$P_B = \frac{100}{\sqrt{3}}19.32\cos(-150^\circ - 165^\circ) = 788.7\text{ W}$$
$$P_C = \frac{100}{\sqrt{3}}10\cos(-270^\circ + 90^\circ) = -577.4\text{ W}$$

Observe que la lectura de uno de los wattímetros es negativa. La explicación previa sobre el uso básico del wattímetro indica que una lectura de escala ascendente sobre ese medidor se obtiene después de que se invierte la bobina de potencial o la bobina de corriente.

o una potencia activa total de 1 kW. Puesto que una corriente rms de 10 A fluye por la carga *resistiva*, la potencia activa total que demanda la carga es

$$P = 10^2(10) = 1\text{ kW}$$

así que los dos métodos concuerdan.

Método de los dos wattímetros

Hemos probado que el punto x, la conexión común de las tres bobinas de potencial, se podría ubicar en cualquier lugar que deseáramos sin afectar la suma algebraica de las tres lecturas de wattímetro. Pensemos ahora en el efecto de ubicar el punto x, esta conexión común de los tres wattímetros, de manera directa sobre una de las líneas. Por ejemplo, si un extremo de cada bobina de potencial regresa a B, entonces no hay tensión en la bobina de potencial (de tensión) del wattímetro B, así que *la lectura de este medidor debe ser cero*. En consecuencia, se podría eliminar y la suma algebraica de las dos lecturas de los wattímetros restantes seguiría siendo la potencia (activa) total consumida por la carga. Cuando la ubicación de x se elige de esta manera, describimos el método de medición de potencia (activa) como el de los ***dos wattímetros***. La suma algebraica de las lecturas indica la potencia activa total, independientemente de: 1) el desbalance de la carga, 2) el desbalance de la fuente, 3) la diferencia entre los dos wattímetros, y 4) la forma de onda de la fuente periódica. El único supuesto es que las correcciones del wattímetro son suficientemente pequeñas como para que podamos pasarlas por alto. Por ejemplo, en la figura 12.26, por la bobina de corriente de cada medidor pasó la corriente de línea consumida por la carga más la corriente que toma la bobina de potencial (de tensión). En razón de que la última corriente suele ser bastante pequeña, su efecto se estima a partir del conocimiento de la resistencia de la bobina de potencial (de tensión) y de la tensión en sus extremos. Estas dos cantidades permiten realizar una estimación precisa de la potencia activa que se disipa en la bobina de potencial (de tensión).

En el ejemplo numérico que acaba de describirse, supongamos ahora que se usan dos wattímetros, uno con bobina de corriente en la línea A y con bobina de potencial

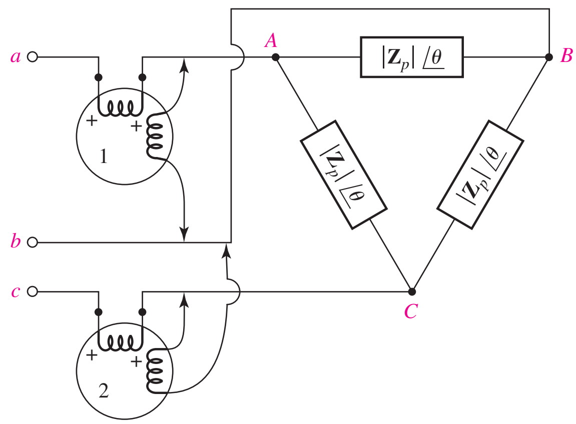


FIGURA 12.27 Dos wattímetros conectados para leer la potencia activa total que consume una carga trifásica balanceada (equilibrada).

entre las líneas A y B, el otro con la bobina de corriente en la línea C y la bobina de potencial entre C y B. La lectura del primer medidor es

$$\begin{aligned} P_1 &= V_{AB} I_{aA} \cos(ang\ V_{AB} - ang\ I_{aA}) \\ &= 100(19.32)\cos(0^\circ - 15^\circ) \\ &= 1\,866 \text{ W} \end{aligned}$$

y la del segundo

$$\begin{aligned} P_2 &= V_{CB} I_{cC} \cos(ang\ V_{CB} - ang\ I_{cC}) \\ &= 100(10)\cos(60^\circ + 90^\circ) \\ &= -866 \text{ W} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P = P_1 + P_2 = 1\,866 - 866 = 1\,000 \text{ W}$$

como esperabamos a partir de la experiencia reciente con el circuito.

En el caso de una carga balanceada, el método de los dos wattímetros permite determinar el ángulo del FP, así como la potencia activa total consumida por la carga. Supongamos una impedancia de carga con un ángulo de fase θ; podríamos utilizar una conexión en Y o en Δ pero supondremos la conexión en Δ que se presenta en la figura 12.27. La construcción de un diagrama fasorial normal, como el de la figura 12.19, permite determinar el ángulo de fase apropiado entre las diversas tensiones y corrientes de línea. Por lo tanto, determinamos las lecturas

$$\begin{aligned} P_1 &= |\mathbf{V}_{AB}||\mathbf{I}_{aA}|\cos(ang\ \mathbf{V}_{AB} - ang\ \mathbf{I}_{aA}) \\ &= V_L I_L \cos(30^\circ + \theta) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} P_2 &= |\mathbf{V}_{CB}||\mathbf{I}_{cC}|\cos(ang\ \mathbf{V}_{CB} - ang\ \mathbf{I}_{cC}) \\ &= V_L I_L \cos(30^\circ - \theta) \end{aligned}$$

La proporción entre ellas se calcula mediante:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\cos(30^\circ + \theta)}{\cos(30^\circ - \theta)} \qquad [5]$$

Si desarrollamos los términos coseno, la ecuación se resuelve con facilidad para $\tan\theta$:

$$\tan\theta = \sqrt{3}\,\frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} \qquad [6]$$

De tal modo, las lecturas iguales del wattímetro indican una carga de FP unitaria; las lecturas iguales y opuestas señalan una carga puramente reactiva; una lectura de P_2 que es (algebraicamente) mayor que P_1, indica una impedancia inductiva; y una lectura de P_2 menor que P_1 significa una carga capacitiva. ¿Cómo podemos indicar cuál wattímetro lee P_1 y cuál lee P_2? Es cierto que P_1 está en la línea A, y que P_2 se encuentra en la línea C; además, nuestro sistema de secuencia de fase positiva obliga a que V_{an} esté retrasada respecto a V_{en}. Esta información basta para diferenciar entre dos wattímetros, pero resulta confuso aplicarla en la práctica. Incluso si no pudiéramos distinguir entre los dos, conocemos la magnitud del ángulo de fase pero no su signo, lo cual muchas veces es información suficiente. Si la carga es un motor de inducción, el ángulo debe ser positivo y no necesitamos realizar ninguna prueba para determinar cuál lectura es cuál. Si se supone que no hay conocimiento previo de la carga, entonces existen varios métodos para resolver la ambigüedad. Quizás el más simple sea el que implica agregar una carga reactiva de alta impedancia, dígase un capacitor trifásico, a través de la carga desconocida. La carga debe volverse más capacitiva. Por lo tanto, si disminuye la magnitud de tan θ (o la magnitud de θ), entonces la carga era inductiva, a la vez que un aumento en la magnitud de tan θ significa una impedancia capacitiva original.

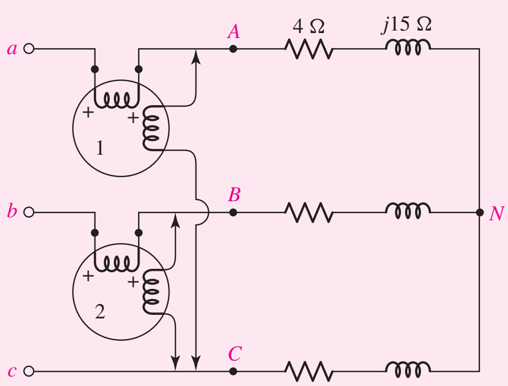
EJEMPLO 12.7

La carga balanceada en la figura 12.28 se alimenta mediante un sistema trifásico balanceado que tiene $\mathbf{V}_{ab} = 230\underline{/0°}$ V rms y una secuencia de fase positiva. Determine la lectura de cada wattímetro y la potencia activa total consumida por la carga.

La bobina de potencial (de tensión) del wattímetro #1 se conecta para medir la tensión $\mathbf{V}_{ac}$, y su bobina de corriente mide la corriente de fase $\mathbf{I}_{aA}$. Puesto que sabemos utilizar la secuencia de fase positiva, las tensiones de línea son

$$\mathbf{V}_{ab} = 230\underline{/0°}\text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{bc} = 230\underline{/-120°}\text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{ca} = 230\underline{/120°}\text{ V}$$

Observe que $\mathbf{V}_{ac} = -\,\mathbf{V}_{ac} = 230\underline{/-60°}$ V.



■ **FIGURA 12.28** Sistema trifásico balanceado conectado a una carga trifásica balanceada (equilibrada), cuya potencia activa se mide mediante el método de los dos wattímetros.

(*continúa*)

La corriente de fase $\mathbf{I}_{aA}$ está dada por la tensión de fase $\mathbf{V}_{an}$ dividida entre la impedancia de fase $4 + j15\ \Omega$,

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{4 + j15} = \frac{(230/\sqrt{3})\underline{/-30^\circ}}{4 + j15}\ \text{A}$$
$$= 8.554\underline{/-105.1^\circ}\ \text{A}$$

Podríamos ahora calcular la potencia que mide el wattímetro #1 como

$$P_1 = |\mathbf{V}_{ac}||\mathbf{I}_{aA}|\cos(ang\,\mathbf{V}_{ac} - ang\,\mathbf{I}_{aA})$$
$$= (230)(8.554)\cos(-60^\circ + 105.1^\circ)\ \text{W}$$
$$= 1\,389\ \text{W}$$

De modo similar, determinamos que

$$P_2 = |\mathbf{V}_{bc}||\mathbf{I}_{bB}|\cos(ang\,\mathbf{V}_{bc} - ang\,\mathbf{I}_{bB})$$
$$= (230)(8.554)\cos(-120^\circ - 134.9^\circ)\ \text{W}$$
$$= -512.5\ \text{W}$$

En razón de que esta medición originaría que el medidor se pegara a la escala descendente, una de las bobinas necesitaría invertirse para efectuar la lectura.

En consecuencia, la potencia promedio total que absorbe la carga es

$$P = P_1 + P_2 = 876.5\ \text{W}$$

PRÁCTICA

12.10 En el circuito de la figura 12.26, sean las cargas $\mathbf{Z}_A = 25\underline{/60^\circ}\ \Omega$, $\mathbf{Z}_B = 50\underline{/-60^\circ}\ \Omega$, $\mathbf{Z}_C = 50\underline{/60^\circ}\ \Omega$, $\mathbf{V}_{AB} = 600\underline{/0^\circ}$ V rms con una secuencia de fase (+), y el punto x se ubica en C. Determine: (*a*) P_A; (*b*) P_B; (*c*) P_C.

Respuestas: 0; 7 200 W; 0.

RESUMEN Y REPASO

No cualquiera encuentra directamente circuitos polifásicos, pero son parte de casi todas las instalaciones en edificios grandes. En este capítulo estudiamos cómo se pueden suministrar tres tensiones, cada una 120° fuera de fase con respecto a las otras, por un solo generador (y por lo tanto tener la misma frecuencia) y se pueden conectar a una carga de tres componentes. Por ser así conveniente, introdujimos la notación con doble subíndice, que se usa comúnmente. Un sistema de tres fases tendrá por lo menos tres terminales; no es obligatorio tener una conexión de alambre para el neutro, pero es común por lo menos para la fuente. Si se usa una carga conectada en Δ, entonces no hay conexión neutra para ella. Cuando está presente un alambre neutro, podemos definir las *tensiones de fase* $\mathbf{V}_{an}$, $\mathbf{V}_{bn}$ y $\mathbf{V}_{cn}$ entre cada fase (a, b o c) y el neutro. La ley de tensiones de Kirchhoff requiere que la suma de estas tres tensiones sea cero, sin que importe si sus ángulos están relacionados por una secuencia de fase positiva o negativa. Las *tensiones de línea* (es decir, entre fases) se pueden relacionar directamente con las tensiones de fase; para una carga conectada en Δ son iguales. De manera similar, las *corrientes de línea* y las *corrientes de fase* se pueden relacionar directamente entre sí; en una carga conectada en Y (estrella) son iguales. A primera vista, tales sistemas pueden parecer algo complicados, pero la simetría permite con frecuencia realizar el análisis por fase, simplificando considerablemente nuestros cálculos.

En seguida se presenta una lista concisa de los conceptos clave, para comodidad del lector, junto con los números de ejemplos correspondientes.

- La mayor parte de la producción eléctrica tiene forma de potencia trifásica.
- Casi toda la electricidad residencial en Norteamérica tiene la forma de corriente alterna monofásica, con una frecuencia de 60 Hz y una tensión rms de 115 V. En otros sitios, lo más común es 50 Hz a 240 V rms.
- La notación con doble subíndice se usa comúnmente en sistemas de potencia, tanto para tensiones como para corrientes. (Ejemplo 12.1)
- Las fuentes trifásicas se pueden conectar en Y o en Δ. Ambos tipos de fuente tienen tres terminales, una para cada fase; las fuentes conectadas en Y tienen también una conexión neutra. (Ejemplo 12.2)
- En un sistema trifásico balanceado, cada tensión de fase tiene la misma magnitud, aunque está siempre 120° fuera de fase respecto de las otras dos. (Ejemplo 12.2)
- Las cargas en un sistema trifásico se conectan en Y o en Δ.
- En una fuente balanceada conectada en Y, con secuencia de fase positiva (*abc*), las tensiones de línea son:

$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p\angle 30^\circ \qquad \mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p\angle -90^\circ$$
$$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p\angle -210^\circ$$

  donde las tensiones de fase son:

$$\mathbf{V}_{an} = V_p\angle 0^\circ \qquad \mathbf{V}_{bn} = V_p\angle -120^\circ \qquad \mathbf{V}_{cn} = V_p\angle -240^\circ$$

  (Ejemplo 12.2)
- En un sistema con carga conectada en Y, las corrientes de línea son iguales a las corrientes de fase. (Ejemplos 12.3, 12.4, 12.6)
- En una carga conectada en Δ las tensiones de línea son iguales a las de fase. (Ejemplo 12.5)
- En un sistema balanceado con secuencia de fase positiva y una carga balanceada conectada en Δ, las corrientes de línea son

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{AB}\sqrt{3}\angle -30^\circ \qquad \mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{BC}\sqrt{3}\angle -150^\circ \qquad \mathbf{I}_c = \mathbf{I}_{CA}\sqrt{3}\angle +90^\circ$$

  donde las corrientes de fase corresponden a

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_\Delta} \qquad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{bc}}{\mathbf{Z}_\Delta} \qquad \mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{ca}}{\mathbf{Z}_\Delta}$$

  (Ejemplo 12.5)
- La mayor parte de los cálculos de potencia se efectúan por fase suponiendo un sistema balanceado; de otra manera, el análisis nodal/malla siempre resulta un método válido. (Ejemplos 12.3, 12.4, 12.5)
- La potencia en un sistema trifásico (balanceado o desbalanceado) puede medirse con sólo dos wattímetros. (Ejemplo 12.7)
- La potencia instantánea en cualquier sistema trifásico balanceado es constante.

LECTURAS ADICIONALES

Un panorama muy completo de los conceptos acerca de potencia de ca se puede encontrar en el capítulo 2 de:

B. M. Weedy, *Electric Power Systems*, 3a. ed., Chichester, England: Wiley, 1984.

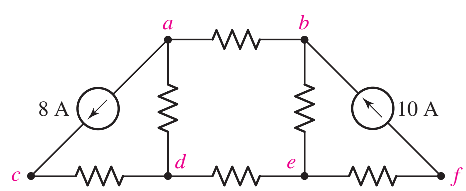
Un libro muy completo acerca de la generación de energía a partir del viento es de:

T. Burton, D. Sharpe, N. Jenkins y E. Bossanyi, *Wind Energy Handbook*, Chichester, England: Wiley, 2001.

EJERCICIOS

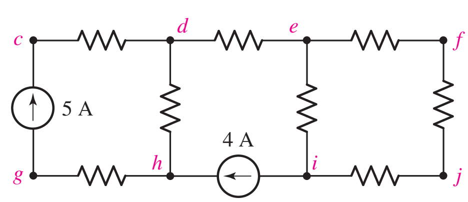
12.1 Sistemas polifásicos

1. Un dispositivo desconocido de tres terminales tiene terminales llamadas *b*, *c* y *e*. Cuando se instaló en un circuito dado, las mediciones indicaron que $V_{ec} = -9$ V y $V_{eb} = -0.65$ V. (*a*) Calcule V_{cb}. (*b*) Determine la potencia disipada en la unión *b-e* si la corriente I_b que fluye hacia la terminal marcada *b* es igual a 1 μA.
2. Un tipo común de transistor se conoce como MESFET, que es el acrónimo de ***m**etal-**s**emiconductor **f**ield **e**ffect **t**ransistor* (transistor de efecto de campo de semiconductor metálico). Tiene tres terminales llamadas compuerta (*g*, de "gate"), la fuente (*s*, de "source") y el drenador (*d,* de la palabra en inglés *drain*). Como ejemplo, considere un MESFET dado que opera en un circuito de manera que $V_{sg} = 0.2$ V y $V_{ds} = 3$ V. (*a*) Calcule V_{gs} y V_{dg}. (*b*) Si se encuentra que fluye a la terminal de corriente la corriente de compuerta (*g* de la palabra en inglés *gate*) $I_g = 100$ pA, calcule la potencia perdida en la unión compuerta-fuente.
3. Para cierta fuente trifásica conectada en Y, $\mathbf{V}_{an} = 400\underline{/33°}$ V, $\mathbf{V}_{bn} = 400\underline{/153°}$ V y $\mathbf{V}_{cx} = 160\underline{/208°}$ V. Determine (*a*) $\mathbf{V}_{cn}$; (*b*) $\mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn}$; (*c*) $\mathbf{V}_{ax}$; (*d*) $\mathbf{V}_{bx}$.
4. Describa lo que se entiende por fuente "polifásica", exprese una posible ventaja de tales fuentes que podría contrarrestar su complejidad adicional con respecto a las fuentes de potencia de una sola fase, y explique la diferencia entre fuentes "equilibradas" y "no equilibradas".
5. Varias de las tensiones correspondientes a cierto circuito están dadas por $\mathbf{V}_{12} = 9\underline{/30°}$ V, $\mathbf{V}_{32} = 3\underline{/130°}$ V y $\mathbf{V}_{14} = 2\underline{/10°}$ V. Determine $\mathbf{V}_{21}$, $\mathbf{V}_{13}$, $\mathbf{V}_{34}$ y $\mathbf{V}_{24}$.
6. La tensión nodal que describe un circuito dado se puede expresar como $\mathbf{V}_{14} = 9 - j$ V, $\mathbf{V}_{24} = 3 + j3$ V y $\mathbf{V}_{34} = 8$ V. Calcule $\mathbf{V}_{12}$, $\mathbf{V}_{32}$ y $\mathbf{V}_{13}$. Exprese sus respuestas en forma fasorial.
7. En el circuito de la figura 12.29, desafortunadamente se han omitido los valores de las resistencias, pero se conocen varias de las corrientes. Específicamente, $I_{ad} = 1$ A. (*a*) Calcule I_{ab}, I_{cd}, I_{de}, I_{fe} e I_{be}. (*b*) Si $V_{ba} = 125$ V, determine el valor de la resistencia que interconecta los nodos *a* y *b*.



■ FIGURA 12.29

8. Para el circuito que se muestra en la figura 12.30, (*a*) determine I_{gh}, I_{cd} e I_{dh}. (*b*) Calcule I_{ed}, I_{ei} e I_{jf}. (*c*) Si cada una de todas las resistencias del circuito tiene un valor de 1 Ω, determine las tres corrientes de malla que fluyen en sentido horario.



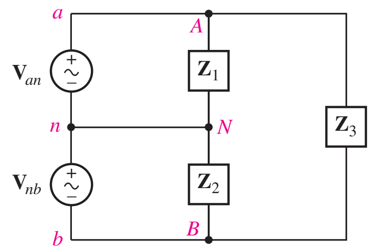
■ FIGURA 12.30

9. Se agregan resistencias en paralelo a las resistencias entre las terminales *d* y *e* y las terminales *f* y *j*, respectivamente, del circuito de la figura 12.30. (*a*) ¿Cuáles tensiones se pueden todavía describir usando notación de doble subíndice? (*b*) ¿Cuáles corrientes de línea se pueden todavía describir con notación de doble subíndice?

12.2 Sistemas monofásicos de tres hilos

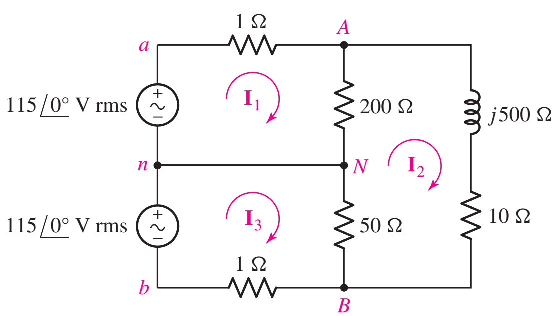
10. La mayoría de los aparatos electrónicos de consumo general están energizados por tomas de corriente de 110 V, pero varios tipos de aparatos (como las secadoras de ropa) se conectan a salidas de 220 V. Las tensiones más bajas son, en general, más seguras. ¿Entonces, qué es lo que motiva a los fabricantes de algunos equipos para diseñarlos para funcionar con 220 V?

11. El sistema monofásico de tres cables de la figura 12.31 tiene tres impedancias de carga independientes. Si la fuente está equilibrada y $\mathbf{V}_{an} = 110 + j0$ V rms, (*a*) exprese $\mathbf{V}_{an}$ y $\mathbf{V}_{bn}$ en notación fasorial. (*b*) Determine la tensión fasorial que aparece entre las terminales de la impedancia $\mathbf{Z}_3$. (*c*) Determine la potencia promedio suministrada por las dos fuentes si $\mathbf{Z}_1 = 50 + j0\ \Omega$, $\mathbf{Z}_2 = 100 + j45\ \Omega$ y $\mathbf{Z}_3 = 100 - j90\ \Omega$. (*d*) Represente la carga $\mathbf{Z}_3$ mediante una conexión en serie de dos elementos y exprese sus valores respectivos si las fuentes operan a 60 Hz.

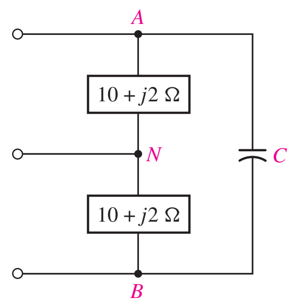


■ **FIGURA 12.31**

12. Para el sistema representado en la figura 12.32, las pérdidas óhmicas en el alambre neutro son tan pequeñas que se pueden despreciar y se puede modelar adecuadamente como un cortocircuito. (*a*) Calcule la pérdida de potencia en las dos líneas como resultado de su resistencia diferente a cero. (*b*) Calcule la potencia promedio que se suministra a la carga. (*c*) Determine el factor de potencia de toda la carga.



■ **FIGURA 12.32**



■ **FIGURA 12.33**

13. Con referencia a la carga equilibrada que se representa en la figura 12.33, si se conecta a una fuente equilibrada de tres cables que opera en 50 Hz de modo que $V_{AN} = 115$ V, (*a*) determine el factor de potencia de la carga si se omite el capacitor; (*b*) determine el valor de la capacitancia *C* que permitirá tener un factor de potencia igual a la unidad para toda la carga.

14. En el sistema de tres cables de la figura 12.32, (*a*) reemplace la resistencia de 50 Ω por una resistencia de 200 Ω y calcule la corriente que fluye por el cable neutro. (*b*) determine un nuevo valor para la resistencia de 50 Ω de manera que la magnitud de la corriente del alambre neutro sea 25% del de la corriente de línea $\mathbf{I}_{aA}$.

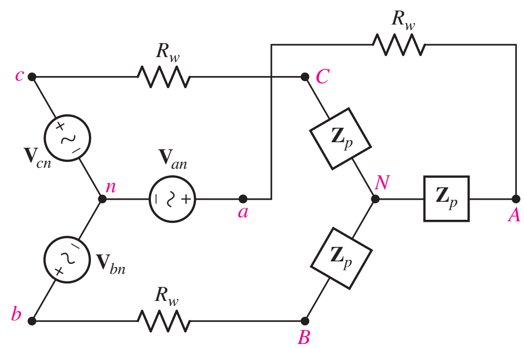
12.3 Conexión Y-Y trifásica

15. (*a*) Demuestre que si $\mathbf{V}_{an} = 400\underline{/33°}$ V, $\mathbf{V}_{bn} = 400\underline{/-87°}$ V y $\mathbf{V}_{bn} = 400\underline{/-207°}$ V, entonces $\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0$. (*b*) ¿Las tensiones del inciso (*a*) representan secuencia de fase positiva o negativa? *Explique*.

16. Considere un sistema simple con secuencia de fase positiva, tres fases, tres cables, que opera en 50 Hz con una carga equilibrada. Cada tensión de fase de 240 V está conectada a las terminales de una carga compuesta por la conexión en serie de 50 Ω y 500 mH. Calcule

(*a*) cada corriente de línea; (*b*) el factor de potencia de la carga; (*c*) la potencia total suministrada por la fuente trifásica.

17. Suponga que el sistema que se muestra en la figura 12.34 está equilibrado, $R_w = 0$, $\mathbf{V}_{an} = 208\underline{/0^\circ}$ V, y con secuencia de fase positiva. Calcule todas las corrientes de fase y de línea y todas las tensiones de fase y de línea si $\mathbf{Z}_p$ es igual a (*a*) 1 kΩ; (*b*) $100 + j48$ Ω; (*c*) $100 - j48$ Ω.



■ **FIGURA 12.34**

18. Repita el ejercicio 17 con $R_w = 10$ Ω y verifique sus respuestas mediante simulaciones PSpice si la frecuencia de operación es de 60 Hz.

19. Cada impedancia $\mathbf{Z}_p$ en el sistema equilibrado trifásico de la figura 12.34 está compuesta con una conexión en paralelo de una capacitancia de 1 mF, una inductancia de 100 mH y una resistencia de 10 Ω. Las fuentes tienen secuencia de fase positiva y operan a 50 Hz. Si $\mathbf{V}_{ab} = 208\underline{/0^\circ}$ V y $R_w = 0$, calcule (*a*) todas las tensiones de fase; (*b*) todas las tensiones de línea; (*c*) las tres corrientes de línea; (*d*) la potencia total que consume la carga.

20. Suponiendo que el sistema representado en la figura 12.34 está equilibrado con la tensión de línea de 100 V, calcule la corriente de línea y la impedancia de carga por fase si $R_w = 0$ y la carga consume (*a*) 1 kW con un FP de 0.85 atrasado; (*b*) 300 W por fase con un FP de 0.92 adelantado.

21. El sistema trifásico equilibrado de la figura 12.34 se caracteriza por una secuencia de fase positiva y una tensión de línea de 300 V. $\mathbf{Z}_p$ está dada por la combinación en paralelo de una carga capacitiva de $5 - j3$ Ω y una carga inductiva de $9 + j2$ Ω. Si $R_w = 0$, calcule (*a*) el factor de potencia de la fuente; (*b*) la potencia total suministrada por la fuente; (*c*) repita los incisos (*a*) y (*b*) si $R_w = 1$ Ω.

22. Una carga balanceada conectada en Y de $100 + j50$ Ω está conectada a una fuente trifásica equilibrada. Si la corriente de línea es de 42 A y la fuente suministra 12 kW, determine (*a*) la tensión de línea; (*b*) la tensión de fase.

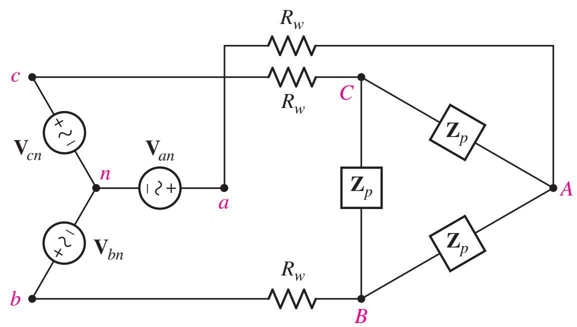
23. Un sistema trifásico está construido con una fuente equilibrada conectada en Y que opera a 50 Hz y tiene una tensión de línea de 210 V, y cada fase de la carga equilibrada consume 130 W con un factor de potencia adelantado de 0.75. (*a*) Calcule la corriente de línea y la potencia total suministrada a la carga. (*b*) Si una carga puramente resistiva de 1 Ω se conecta en paralelo con cada carga existente, calcule la nueva corriente de línea y la potencia total suministrada a la carga. (*c*) Verifique sus respuestas usando simulaciones PSpice adecuadas.

24. Volviendo al sistema trifásico equilibrado que se describió en el ejercicio 21, determine la potencia compleja suministrada a la carga tanto para $R_w = 0$ como para $R_w = 1$ Ω.

25. Cada carga en el circuito de la figura 12.34 está compuesta por un inductor de 1.5 H en paralelo con un capacitor de 100 μF y una resistencia de 1 kΩ. La resistencia $R_w = 0$ Ω. Usando secuencia de fase positiva con $\mathbf{V}_{ab} = 115\underline{/0^\circ}$ V en $f = 60$ Hz, determine la corriente de línea rms y la potencia total suministrada a la carga. Verifique sus respuestas con una simulación PSpice adecuada.

12.4 Conexión delta (Δ)

26. Un sistema trifásico equilibrado está suministrando 10 kW a una carga conectada en Δ con un factor de potencia adelantado de 0.7. Si la tensión de fase es de 208 V y la fuente opera a 50 V, (*a*) calcule la corriente de línea; (*b*) determine la impedancia de fase; (*c*) calcule el nuevo factor de potencia y la nueva potencia total suministrada a la carga si se conecta un inductor de 2.5 H en paralelo con cada fase de la carga.
27. Si cada una de las tres fases en una carga equilibrada conectada en Δ se compone de un capacitor de 10 mF en paralelo con la conexión en serie de una resistencia de 470 Ω conectado en serie y una combinación inductora de 4 mH, suponga una tensión de fase de 400 V a 50 Hz. (*a*) Calcule la corriente de fase; (*b*) la corriente de línea; (*c*) la tensión de línea; (*d*) el factor de potencia con el que opera la fuente; (*e*) la potencia total suministrada a la carga.
28. Una carga trifásica va a recibir potencia de una fuente trifásica de tres cables y tres fases conectada en Y que tiene tensión de fase de 400 V y opera a 50 Hz. Cada fase de la carga consiste en una combinación en paralelo de una resistencia de 500 Ω, un inductor de 10 mH y un capacitor de 1 mF. (*a*) Calcule la corriente de línea, la tensión de línea, la corriente de fase y el factor de potencia de la carga si la carga también está conectada en Y. (*b*) Modifique el alambrado de la carga de modo que esté conectado en Δ y determine las mismas cantidades que se piden en el inciso (*a*).
29. Para las dos situaciones que se describen el ejercicio 28, calcule la potencia total que se suministra a cada una de las dos cargas.
30. Dos cargas conectadas en Δ están conectadas entre ellas en paralelo y son alimentadas por un sistema conectado en Y. La menor de las dos cargas consume 10 kVA con un FP atrasado de 0.75, y la mayor toma 25 kVA con un FP adelantado de 0.80. La tensión de línea es de 400 V. Calcule (*a*) el factor de potencia con el que opera la fuente; (*b*) la potencia total que consumen las dos cargas; (*c*) la corriente de fase de cada carga.
31. Para el sistema trifásico equilibrado que se muestra en la figura 12.35, se determina que se pierden 100 W en cada cable. Si la tensión de fase de la fuente es de 400 V y la carga consume 12 kW con un FP atrasado de 0.83, determine la resistencia del cable R_w.

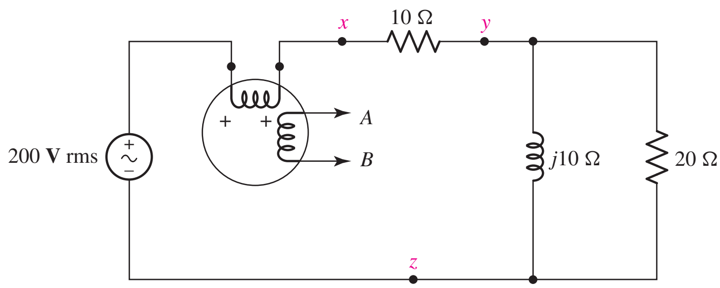


■ **FIGURA 12.35**

32. La carga equilibrada conectada en Δ de la figura 12.35 demanda 10 kVA con un FP atrasado de 0.91. Si las pérdidas en las líneas son despreciables, calcule $\mathbf{I}_{bB}$ y $\mathbf{V}_{an}$ si $\mathbf{V}_{ca} = 160\underline{/30°}$ V y las tensiones de la fuente se describen usando secuencia de fase positiva.
33. Repita el ejercicio 32 si $R_w = 1$ Ω. Verifique su solución usando una simulación PSpice adecuada.
34. Calcule $\mathbf{I}_{aA}$, $\mathbf{I}_{AB}$ y $\mathbf{V}_{an}$ si la carga conectada en Δ de la figura 12.35 toma una potencia compleja total de $1\,800 + j700$ W, $R_w = 1.2$ Ω y la fuente genera una potencia compleja de $1\,850 + j700$ W.
35. Un sistema trifásico equilibrado que tiene una tensión de línea de 240 V rms contiene una carga conectada en Δ de $12 + j$ kΩ por fase y también una carga conectada en Y de $5 + j3$ kΩ por fase. Encuentre la corriente de línea, la potencia que toma la carga combinada y el factor de potencia de la carga.

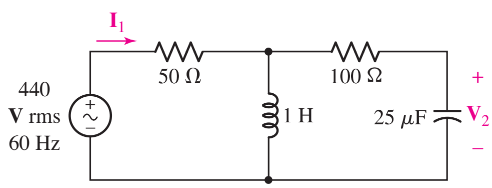
12.5 Medición de potencia en sistemas trifásicos

36. Encuentre la potencia leída por el wattímetro (para ello debe establecer si los hilos de conexión tienen que invertirse o no para obtenerla) en el circuito de la figura 12.36, si las terminales *A* y *B*, respectivamente, se conectan a (*a*) *x* y *y*; (*b*) *x* y *z*; (*c*) *y* y *z*.



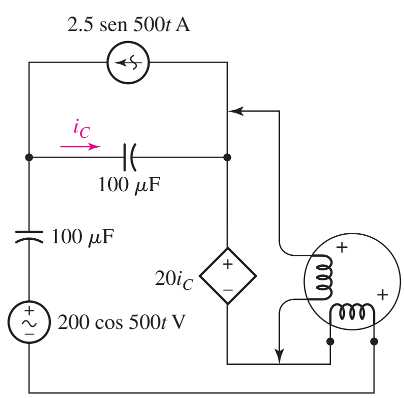
■ **FIGURA 12.36**

37. Se conecta un wattímetro en el circuito de la figura 12.37, de manera que $\mathbf{I}_1$ entra en la terminal (+) de la bobina de corriente mientras que $\mathbf{V}_2$ es la tensión de la bobina de potencial (de tensión). Proporcione la lectura del wattímetro y obtenga la solución con una simulación de PSpice apropiada.



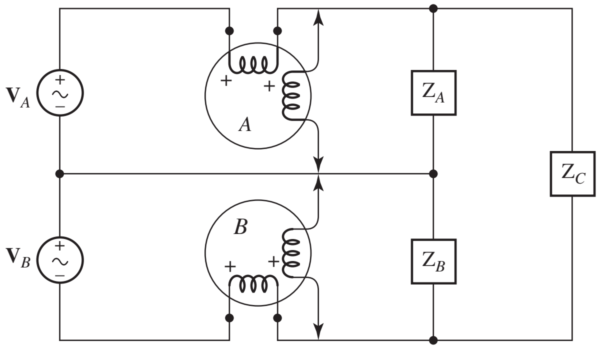
■ **FIGURA 12.37**

38. Obtenga la lectura dada por el wattímetro conectado en el circuito de la figura 12.38.



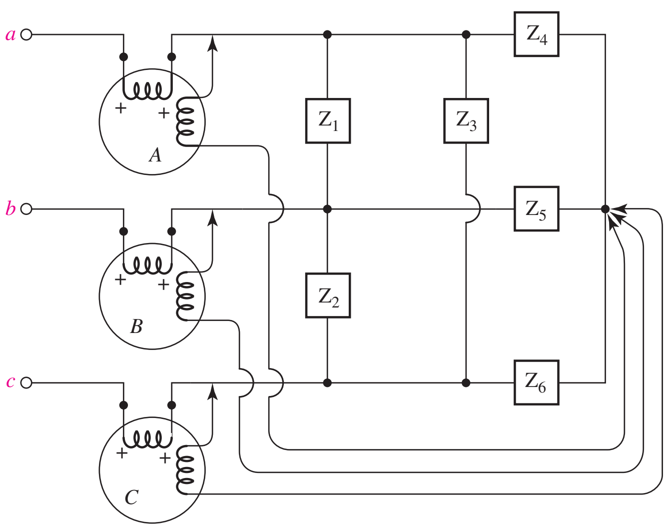
■ **FIGURA 12.38**

39. (*a*) Proporcione ambas lecturas dadas por los wattímetros de la figura 12.39 si $\mathbf{V}_A = 100\underline{/0^\circ}$ V rms, $\mathbf{V}_B = 50\underline{/90^\circ}$ V rms, $\mathbf{Z}_A = 10 - j10\ \Omega$, $\mathbf{Z}_B = 8 + j6\ \Omega$ y $\mathbf{Z}_C = 30 + j10\ \Omega$. (*b*) ¿La suma de estas lecturas es igual a la potencia activa total tomada por las tres cargas? Verifique sus respuestas con una simulación PSpice apropiada.



■ **FIGURA 12.39**

40. Los valores de los parámetros del circuito de la figura 12.40 son $\mathbf{V}_{ab} = 200\underline{/0°}$, $\mathbf{V}_{bc} = 200\underline{/120°}$, $\mathbf{V}_{ca} = 200\underline{/240°}$ V rms, $\mathbf{Z}_4 = \mathbf{Z}_5 = \mathbf{Z}_6 = 25\underline{/30°}\ \Omega$, $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = 50\underline{/-60°}\ \Omega$. Determine la lectura dada por cada wattímetro.



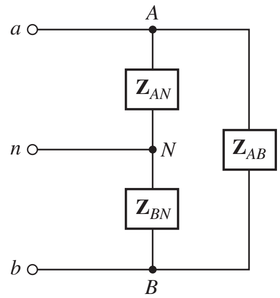
■ **FIGURA 12.40**

Ejercicios de integración de capítulo

41. Explique en qué circunstancias se puede preferir una carga conectada en Δ sobre una carga conectada en Y que tome la misma potencia promedio y la misma potencia compleja.

42. Cierta fuente de 208 V, 60 Hz, tres fases, se conecta en Y y muestra secuencia de fase positiva. Cada fase de la carga equilibrada consiste en una bobina que se modela como una resistencia de 0.2 Ω en serie con una inductancia de 580 mH. (*a*) Determine las tensiones de línea y la corriente en fase si la carga está conectada en Δ. (*b*) Repita el inciso (*a*) si la carga es conectada en Y.

43. (*a*) ¿La carga representada en la figura 12.41 se considera una carga trifásica? *Explique*. (*b*) Si $\mathbf{Z}_{AN} = 1 - j7\ \Omega$, $\mathbf{Z}_{BN} = 3\underline{/22°}\ \Omega$ y $\mathbf{Z}_{AB} = 2 + j\Omega$, calcule todas las corrientes y tensiones de fase (y de línea) suponiendo una tensión de fase a neutro de 120 Vca (las dos fases están desfasadas 180°). (*c*) ¿En qué circunstancias fluye la corriente en el cable neutro?



■ **FIGURA 12.41**

44. Los equipos de computación en una pequeña planta de manufactura trabajan todos con corriente estándar de 120 Vca, pero sólo hay disponible potencia trifásica de 208 Vca. Explique cómo se puede conectar el equipo al alambrado de potencia existente.



CAPÍTULO 13

Circuitos acoplados magnéticamente



CONCEPTOS CLAVE

- Inductancia mutua
- Autoinductancia
- Convención del punto
- Impedancia reflejada o referida
- Redes T y Π equivalentes
- Transformador ideal
- Relación de vueltas de un transformador ideal
- Acoplamiento de impedancias
- Ajuste del nivel de tensión
- Análisis con PSpice de circuitos con transformadores

INTRODUCCIÓN

Siempre que la corriente fluye a través de un conductor, ya sea de ca o de cd, se genera un campo magnético alrededor de él. En el contexto de los circuitos, nos referimos a menudo al *flujo magnético* a través de un lazo de alambre, que no es más que la componente normal promedio del campo magnético que emana del lazo, multiplicada por el área del mismo. Cuando un campo magnético variable en el tiempo generado por un lazo penetra un segundo lazo, se induce una tensión entre los extremos de este último. Para distinguir este fenómeno de la "inductancia" que definimos antes, denominada de manera más adecuada "autoinductancia", definiremos un nuevo término: *inductancia mutua.*

No hay un dispositivo tal que sea un "inductor mutuo", pero el principio constituye la base de un dispositivo muy importante: el *transformador*, que consta de dos bobinas de alambre separadas por una pequeña distancia y se utiliza, por lo común, para convertir las tensiones de ca en valores mayores o menores según la aplicación. Todo aparato eléctrico requiere corriente de cd para operar, aunque los enchufes en una toma de corriente de pared de ca emplean un transformador para ajustar los niveles de tensión antes de la *rectificación*, función que efectúan casi siempre los diodos y que se describe en cualquier texto introductorio de electrónica.

13.1 INDUCTANCIA MUTUA

Cuando definimos la inductancia en el capítulo 7, hicimos especificando la relación entre la tensión y la corriente en las terminales

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

donde se tomó en cuenta la convención pasiva de signos. Las bases físicas de tal característica de corriente-tensión se sustentan en dos aspectos:

1. La producción de ***flujo magnético*** por una corriente, que es proporcional a la corriente en inductores lineales.
2. La producción de una tensión por un campo magnético variable en el tiempo, proporcional a la tasa de cambio del campo magnético o del flujo magnético.

Coeficiente de inductancia mutua

La inductancia mutua se debe a una ligera extensión de los argumentos anteriores. Una corriente que fluye en una bobina establece un campo magnético en torno a la misma y alrededor también de una segunda bobina cercana. El flujo variable en el tiempo que rodea a la segunda bobina produce una tensión en sus terminales, proporcional a la tasa de cambio en el tiempo de la corriente que fluye por la primera bobina. La figura 13.1*a* muestra un modelo simple de dos bobinas L_1 y L_2, suficientemente próximas una de otra para que el flujo que atraviesa L_1, producto de la corriente $i_1(t)$, establezca una tensión en circuito abierto $v_2(t)$ entre las terminales de L_2. Sin considerar el signo algebraico apropiado de la relación en este momento, definimos el *coeficiente de inductancia mutua*, o simplemente ***inductancia mutua***, M_{21}, como

$$v_2(t) = M_{21}\frac{di_1(t)}{dt} \qquad [1]$$

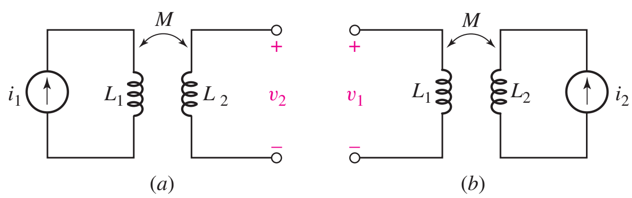


FIGURA 13.1 (*a*) Una corriente i_1 en L_1 produce una tensión, en circuito abierto, v_2 en L_2. (*b*) Una corriente i_2 en L_2 produce una tensión, en circuito abierto, v_1 en L_1.

El orden de los subíndices en M_{21} indica que se produce una respuesta de tensión en L_2 a raíz de una fuente de corriente en L_1. Si se invierte el sistema, como se indica en la figura 13.1*b*, tenemos

$$v_1(t) = M_{12}\frac{di_2(t)}{dt} \qquad [2]$$

Sin embargo, no son necesarios dos coeficientes de inductancia mutua; más adelante usaremos relaciones de energía para probar que M_{12} y M_{21} son iguales, de tal modo que $M_{12} = M_{21} = M$. La existencia del acoplamiento mutuo entre dos bobinas se indica mediante una flecha doble, como en la figura 13.1*a* y *b*.

La inductancia mutua se mide en henrys, y al igual que la resistencia, la inductancia y la capacitancia, es una cantidad positiva.[1] Sin embargo, la tensión $M\,di/dt$ quizás aparezca como una cantidad positiva o negativa, según crezca o no la corriente en un instante específico.

[1] No se supone de manera universal que la inductancia mutua sea positiva. En particular resulta conveniente permitir que "lleve su propio signo" cuando están implicadas tres o más bobinas y cada una interactúa con las otras dos. Restringiremos la atención al caso simple y más importante de dos bobinas.

Convención del punto

El inductor es un elemento de dos terminales y podemos utilizar la convención pasiva de signos para elegir el signo correcto de la tensión $L\,di/dt$ o $j\omega L\mathbf{I}$. Si la corriente entra en la terminal donde se ubica la referencia de tensión positiva, se usa el signo positivo. Sin embargo, no se puede tratar la inductancia mutua exactamente de la misma manera, porque implica cuatro terminales. La elección de un signo correcto se establece mediante el empleo de una de varias posibilidades que incluyen la ***"convención del punto"***, o mediante la inspección de la forma particular en la que se devana cada bobina. Utilizaremos la convención del punto y tan sólo observaremos con brevedad la construcción física de las bobinas; el empleo de otros símbolos especiales no se requiere cuando sólo se acoplan dos bobinas.

La convención del punto utiliza un gran punto situado en un extremo de cada una de las dos bobinas que se acoplan mutuamente. Determinamos el signo de la tensión mutua de la forma siguiente:

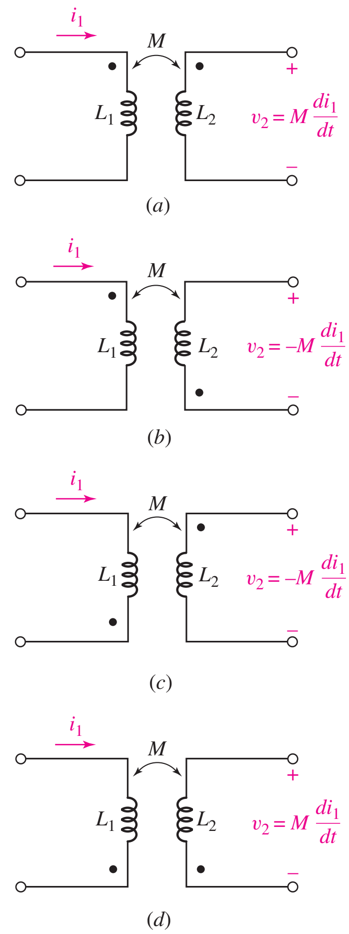


FIGURA 13.2 La corriente que entra en la terminal con punto de una bobina produce una tensión que se mide positiva en la terminal con punto de la segunda bobina. La corriente que entra en la terminal sin punto de una bobina genera una tensión que se mide positiva en la terminal sin punto de la segunda.

> Una corriente que entra a la terminal con *punto* de una bobina, produce una tensión en circuito abierto con una referencia de tensión *positiva* en la terminal con *punto* de la segunda bobina.

De tal modo, en la figura 13.2*a*, i_1 entra en la terminal con punto de L_1, v_2 se mide positiva en la terminal con punto de L_2, y es igual a $M\,di_1/dt$. Hemos visto antes que muchas veces no es posible elegir tensiones o corrientes a lo largo de un *circuito*, de modo que la convención pasiva de signos se satisfaga siempre; la misma situación surge con el acoplamiento mutuo. Por ejemplo, tal vez resulte más conveniente representar a v_2 por medio de una referencia de tensión positiva en la terminal sin punto, como en la figura 13.2*b*; en ese caso $v_2 = -M\,di_1/dt$. Las corrientes que entran a la terminal con punto tampoco se encuentran siempre disponibles, como se indica mediante la figura 13.2*c* y *d*. Observamos entonces que:

> Una corriente que entra a la terminal *sin punto* de una bobina proporciona una tensión que se mide *positivamente* en la terminal *sin punto* de la segunda bobina.

Observe que en el análisis anterior no se incluye ninguna contribución a la tensión de la inductancia propia, la cual ocurriría si i_2 fuera diferente de cero. Consideraremos en detalle esta situación, pero es apropiado presentar, primero, un ejemplo rápido.

EJEMPLO 13.1

En el circuito que se presenta en la figura 13.3, determine: (*a*) v_1 si $i_2 = 5$ sen $45t$ A e $i_1 = 0$; (*b*) v_2 si $i_1 = -8e^{-t}$ A e $i_2 = 0$.

(*a*) Puesto que la corriente i_2 está entrando en la terminal *sin punto* de la bobina derecha, la referencia positiva de la tensión inducida en la bobina izquierda es la terminal sin punto. Por lo tanto, tenemos una tensión en circuito abierto de

$$v_1 = -(2)(45)(5\cos 45t) = -450\cos 45t \qquad \text{V}$$

que aparece entre las terminales de la bobina izquierda como consecuencia del flujo magnético variable en el tiempo que genera i_2 al circular dentro de

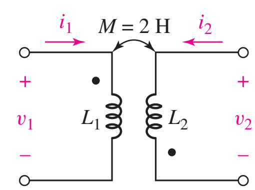


FIGURA 13.3 La convención del punto proporciona una relación entre la terminal a la que entra una corriente en una bobina, así como la referencia de tensión positiva de la otra bobina.

(*continúa*)

la bobina derecha. Puesto que no fluye corriente a través de la bobina de la izquierda, no hay contribución de la autoinducción a v_1. (*b*) Ahora tenemos una corriente que entra a la terminal *con punto*, pero v_2 tiene su referencia positiva en la terminal *sin punto*. De tal manera,

$$v_2 = -(2)(-1)(-8e^{-t}) = -16e^{-t} \qquad \text{V}$$

PRÁCTICA

13.1 Suponiendo que $M = 10$ H con L_2 en circuito abierto, e $i_1 = -\,2e^{-5t}$ A, calcule la tensión v_2 en: (*a*) la figura 13.2*a*; (*b*) la figura 13.2*b*.

Respuestas: $100e^{-5t}$ V; $-100e^{-5t}$ V.

Tensión combinada de la inducción mutua y de la autoinducción

Sólo hemos considerado la tensión mutua presente en una bobina en *circuito abierto*. En general, una corriente distinta de cero fluirá en cada una de las dos bobinas, así que se generará una tensión mutua en una bobina debido a la corriente que fluye en la otra. *Esta tensión mutua se presenta independientemente y aparte de cualquier tensión de autoinducción*. En otras palabras, la tensión en las terminales de L_1 estará compuesta por dos términos, $L_1\, di_1/dt$ y $M\, di_2/dt$, cada uno con un signo que depende de las direcciones de la corriente, la tensión medida y la ubicación de los dos puntos. En la parte de un circuito, dibujada en la figura 13.4, se muestran las corrientes i_1 e i_2, cada una de las cuales entra a la terminal con punto. La tensión a través de L_1 se compone, por lo tanto, de dos partes:

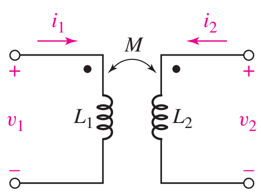


FIGURA 13.4 En razón de que los pares v_1, i_1 y v_2, i_2 satisfacen la convención de signos pasiva, las tensiones de autoinducccción son positivas; dado que i_1 e i_2 entran cada una en terminales con punto y puesto que v_1 y v_2 se miden positivas en las terminales con punto, las tensiones de la inducción mutua también son positivas.

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

al igual que la tensión a través de L_2,

$$v_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

En la figura 13.5, las corrientes y las tensiones no se eligen con el fin de obtener todos los términos positivos de v_1 y v_2. Si se inspeccionan sólo los símbolos de referencia de i_1 y v_1 es patente que no se satisface la convención pasiva de signos y que el signo de $L_1\, di_1/dt$ debe, por lo tanto, ser negativo. Se llega a una conclusión idéntica para el término $L_2\, di_2/dt$. Se establece el signo del término mutuo de v_2 inspeccionando la dirección de i_1 y v_2 puesto que i_1 entra en la terminal con punto y v_2 se mide positiva en la terminal con punto, el signo de $M\, di_1/dt$ debe ser positivo. Por último, i_2 entra en la terminal sin punto de L_2, y v_1 se mide positiva en la terminal sin punto de L_1; en consecuencia, la parte mutua de v_1, $M\, di_2/dt$, también debe ser positiva. Así, tenemos que

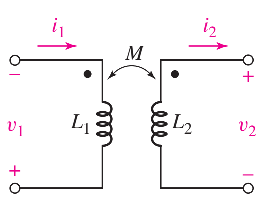


FIGURA 13.5 Debido a que los pares v_1, i_1 y v_2, i_2 no se miden de acuerdo con la convención de signos pasiva, las tensiones de autoinducción son negativas; en razón de que i_1 entra en la terminal con punto y v_2 se mide positiva en la terminal con punto, el término mutuo de v_2 es positivo; y dado que i_2 entra a la terminal sin punto y v_1 se mide positiva en la terminal sin punto, el término mutuo de v_1 también es positivo.

$$v_1 = -L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad v_2 = -L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

Las mismas consideraciones propician elecciones idénticas de los signos para la excitación mediante una fuente senoidal que opera a la frecuencia angular ω

$$\mathbf{V}_1 = -j\omega L_1\mathbf{I}_1 + j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad \mathbf{V}_2 = -j\omega L_2\mathbf{I}_2 + j\omega M\mathbf{I}_1$$

Bases físicas de la convención del punto

Podemos comprender mejor el simbolismo del punto si consideramos las bases físicas de la convención; el significado de los puntos se interpreta ahora en términos del *flujo magnético*. En la figura 13.6 se presentan dos bobinas devanadas sobre una forma cilíndrica y resulta evidente la dirección de cada devanado. Si suponemos que la corriente i_1 es positiva y que crece con el tiempo, el flujo magnético que i_1 produce dentro de la forma cilíndrica tiene una dirección que se podría conocer mediante la regla de la mano derecha: cuando esa mano rodea la bobina con los dedos apuntando en la dirección del flujo de corriente, el pulgar indica la dirección del flujo dentro de la bobina. Así, i_1 produce un flujo que se dirige hacia abajo; dado que i_1 aumenta con el tiempo, el flujo, que es proporcional a i_1, también se incrementa con el tiempo. Considerando ahora la segunda bobina, imaginemos que i_2 es positiva y creciente; la aplicación de la regla de la mano derecha muestra que i_2 produce también un campo magnético que se dirige hacia abajo y que aumenta. Dicho de otro modo, las corrientes supuestas i_1 e i_2 originan *flujos aditivos*.

La tensión entre las terminales de cualquier bobina proviene de la tasa de cambio en el tiempo del flujo dentro de esa bobina. Por lo tanto, la tensión en las terminales de la primera bobina es mayor con i_2 circulando de lo que sería si i_2 fuera cero. Por ello, i_2 induce una tensión en la primera bobina que tiene el mismo sentido que la tensión autoinducida en esa bobina. El signo de la tensión autoinducida se conoce gracias a la convención pasiva de signos que de ese modo permite obtener el signo de la tensión mutua.

La convención del punto sólo permite descartar la construcción física de las bobinas al colocar en una terminal de cada bobina un punto tal que las corrientes que entran a las terminales así marcadas produzcan flujos aditivos. Resulta claro que siempre hay dos posibles ubicaciones para los puntos, pues siempre podrían moverse a los otros extremos de las bobinas y seguirse presentando los flujos aditivos.

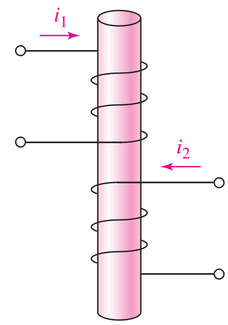


FIGURA 13.6 Construcción física de dos bobinas mutuamente acopladas. A partir de considerar la dirección del flujo magnético que produce cada bobina, se demuestra que los puntos pueden ubicarse en la terminal superior de cada bobina, o en su terminal inferior.

EJEMPLO 13.2

En el caso del circuito que se indica en la figura 13.7*a*, determine la proporción existente entre la tensión de salida en la resistencia de 400 Ω y la tensión de la fuente, expresada mediante una notación fasorial.

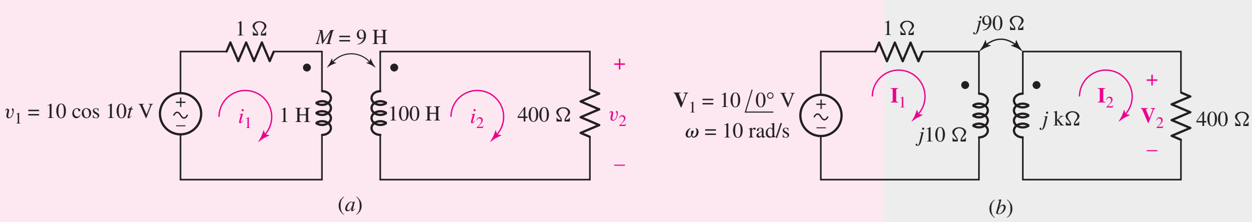


FIGURA 13.7 (*a*) Circuito que contiene inductancia mutua, en el cual se desea obtener la proporción (razón) de tensión $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$. (*b*) La autoinductancia y las inductancias mutuas se sustituyen por las impedancias correspondientes.

Identificar el objetivo del problema.

Necesitamos la expresión de $\mathbf{V}_2$. Dividiremos luego entre $10\underline{/0°}$ V.

(*continúa*)

Recopilar la información conocida.

Comenzamos sustituyendo 1 H y 100 H por sus correspondientes impedancias, $j10\ \Omega$ y $j\ \mathrm{k}\Omega$, respectivamente (figura 13.7*b*). También sustituimos la inductancia mutua de 9 H por $j\omega M = j90\ \Omega$.

Elaborar un plan.

El análisis de malla tal vez sea un buen método, ya que tenemos un circuito con dos mallas perfectamente definidas. Una vez que encontramos $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{V}_2$ es simplemente $400\mathbf{I}_2$.

Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.

En la malla izquierda, el signo del término mutuo se determina aplicando la convención del punto. Puesto que $\mathbf{I}_2$ entra en la terminal sin punto de L_2, la tensión mutua en L_1 debe tener la referencia positiva en la terminal sin punto. Por lo tanto,

$$(1 + j10)\mathbf{I}_1 - j90\mathbf{I}_2 = 10\underline{/0^\circ}$$

Puesto que $\mathbf{I}_1$ entra a la terminal marcada con punto, el término mutuo de la malla derecha tiene su referencia (+) en la terminal con punto del inductor de 100 H. Por lo tanto, podríamos escribir

$$(400 + j1\,000)\mathbf{I}_2 - j90\mathbf{I}_1 = 0$$

Determinar si se requiere información adicional.

Existen dos ecuaciones con dos incógnitas, $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. Luego de resolver para las dos corrientes, obtendríamos la tensión de salida $\mathbf{V}_2$ al multiplicar $\mathbf{I}_2$ por 400 Ω.

Buscar la solución.

Después de resolver estas dos ecuaciones con una calculadora científica, tenemos

$$\mathbf{I}_2 = 0.172\underline{/-16.70^\circ}\ \mathrm{A}$$

Por lo tanto.

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{400(0.172\underline{/-16.70^\circ})}{10\underline{/0^\circ}}$$
$$= 6.880\underline{/-16.70^\circ}$$

Verificar la solución. ¿Es razonable o la esperada?

Observamos que la tensión de salida $\mathbf{V}_2$ es en realidad mayor en magnitud que la tensión de entrada $\mathbf{V}_1$. ¿Debemos esperar siempre este resultado? La respuesta es negativa. Como veremos en secciones posteriores, el transformador se construye para lograr ya *sea* una reducción *o* un aumento de tensión. Sin embargo, efectuamos una estimación rápida a fin de encontrar al menos un límite superior e inferior para la respuesta. Si la resistencia de 400 Ω se sustituye por un cortocircuito, $\mathbf{V}_2 = 0$. Si en vez de eso sustituimos la resistencia de 400 Ω por un circuito abierto, $\mathbf{I}_2 = 0$ y, en consecuencia,

$$\mathbf{V}_1 = (1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1$$

y

$$\mathbf{V}_2 = j\omega M\mathbf{I}_1$$

Al resolver, sabemos que el valor máximo que esperaríamos para $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ es $8.955\underline{/5.711^\circ}$. De tal modo, nuestra respuesta al menos parece razonable.

La tensión de salida del circuito de la figura 13.7*a* es mayor en magnitud que la tensión de entrada, por lo que se logra una ganancia de tensión con este tipo de circuito. También resulta interesante considerar esta proporción (razón) de tensiones como una función de ω.

Para determinar $\mathbf{I}_2(j\omega)$ en relación con este circuito particular, escribimos las ecuaciones de malla en términos de la frecuencia angular no especificada ω:

$$(1 + j\omega)\mathbf{I}_1 \qquad -j\omega 9\mathbf{I}_2 = 10\underline{/0^\circ}$$

y

$$-j\omega 9\mathbf{I}_1 + (400 + j\omega 100)\,\mathbf{I}_2 = 0$$

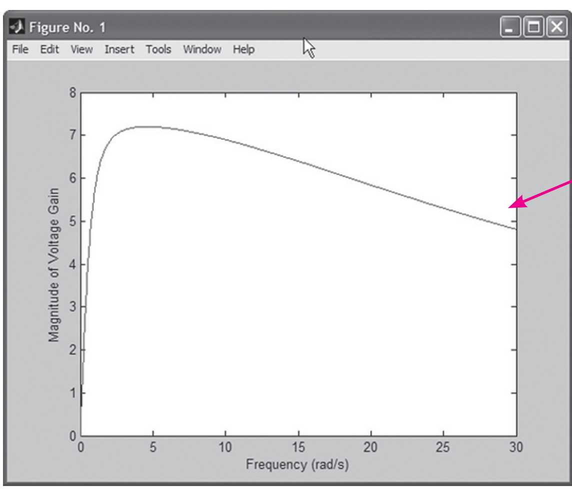
Al resolver por sustitución, observamos que

$$\mathbf{I}_2 = \frac{j90\omega}{400 + j500\omega - 19\omega^2}$$

De tal manera, obtenemos la proporción (razón) entre la tensión de salida y la de entrada como una función de la frecuencia angular ω

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{400\mathbf{I}_2}{10}$$
$$= \frac{j\omega 3\,600}{400 + j500\omega - 19\omega^2}$$

Esta proporción (razón), denominada algunas veces ***función de transferencia del circuito***, se grafica en la figura 13.8 y tiene una magnitud máxima de casi 7 cerca de una frecuencia de 4.6 rad/s. Sin embargo, para frecuencias muy pequeñas o muy grandes, la magnitud de la función de transferencia es menor que la unidad.



Hemos ampliado la imagen de la pantalla para una mejor lectura.

■ **FIGURA 13.8** La ganancia de tensión $|\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1|$ del circuito que se muestra en la figura 13.7*a* se grafica como una función de ω mediante el siguiente programa de MATLAB:

```
>> w = linspace(0,30,1000);
>> num = j*w*3600;
>> for indx = 1:1000
den = 400 + j*500*w(indx) −9*w(indx)*w(indx);
gain(indx) = num(indx)/den;
end
>> plot(w, abs(gain));
>> xlabel('Frequency (rad/s)');
>> ylabel('Magnitude of Voltage Gain');
```

El circuito sigue siendo pasivo, salvo la fuente de tensión, y la *ganancia de tensión* no debe interpretarse en forma errónea como una *ganancia de potencia*. En $\omega = 10$ rad/s, la ganancia de tensión es igual a 6.88, pero la fuente de tensión ideal, que tiene una tensión de terminal de 10 V, entrega una potencia total de 8.07 W, de la cual sólo 5.94 W llegan a la resistencia de 400 Ω. La proporción entre la potencia de salida y la de la fuente, que se puede definir como ***ganancia de potencia***, es entonces 0.736.

PRÁCTICA

13.2 En el caso del circuito de la figura 13.9, escriba ecuaciones de malla apropiadas para la malla izquierda y la malla derecha, si $v_s = 20e^{-1\,000t}$ V.

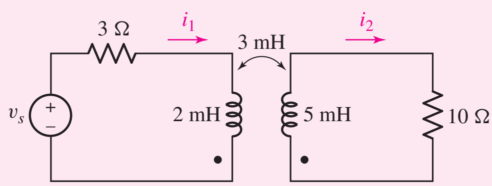
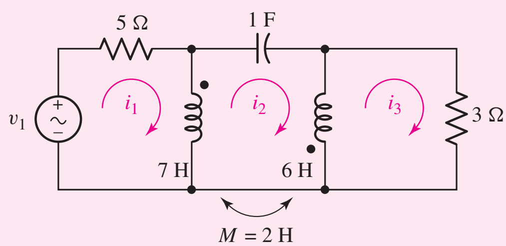


FIGURA 13.9

Respuestas: $20e^{-1\,000t} = 3i_1 + 0.002\, di_1/dt - 0.003\, di_2/dt$; $10i_2 + 0.005\, di_2/dt - 0.03\, di_1/dt = 0$.

EJEMPLO 13.3

Escriba el conjunto completo de ecuaciones del circuito de la figura 13.10*a*.



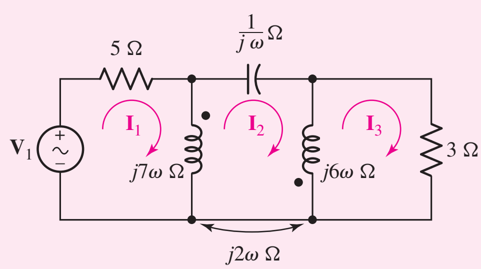


FIGURA 13.10 (*a*) Circuito de tres mallas con acoplamiento mutuo. (*b*) La capacitancia de 1 F, así como la autoinductancia y la inductancia mutua, se sustituyen por sus impedancias correspondientes.

También en este caso, el primer paso consiste en sustituir tanto la inductancia mutua como las dos autoinductancias por sus impedancias correspondientes, como en la figura 13.10*b*. Al aplicar la ley de tensiones de Kirchhoff en la primera malla, se asegura un signo positivo para el término mutuo al elegir $(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2)$ como la corriente que pasa por la segunda bobina. Por lo tanto,

$$5\mathbf{I}_1 + 7j\omega(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + 2j\omega(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) = \mathbf{V}_1$$

o

$$(5 + 7j\omega)\mathbf{I}_1 - 9j\omega\mathbf{I}_2 + 2j\omega\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_1 \qquad [3]$$

La segunda malla requiere dos términos de autoinductancia y dos términos de inductancia mutua. Poniendo especial atención a los puntos, obtenemos

$$7j\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + 2j\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) + \frac{1}{j\omega}\mathbf{I}_2 + 6j\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) + 2j\omega(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) = 0$$

o

$$-9j\omega\mathbf{I}_1 + \left(17j\omega + \frac{1}{j\omega}\right)\mathbf{I}_2 - 8j\omega\mathbf{I}_3 = 0 \qquad [4]$$

Por último, en el caso de la tercera malla,

$$6j\omega(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + 2j\omega(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + 3\mathbf{I}_3 = 0$$

o

$$2j\omega\mathbf{I}_1 - 8j\omega\mathbf{I}_2 + (3 + 6j\omega)\mathbf{I}_2 = 0 \qquad [5]$$

Las ecuaciones [3] a [5] se resuelven mediante cualquiera de los métodos convencionales.

PRÁCTICA

13.3 En el caso del circuito de la figura 13.11, escriba una ecuación de malla apropiada en términos de las corrientes fasoriales $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ para: (*a*) la malla izquierda; (*b*) la malla derecha.

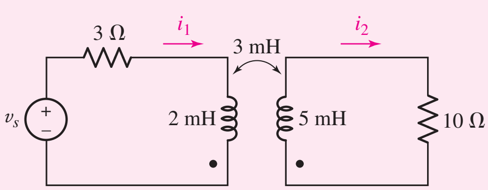
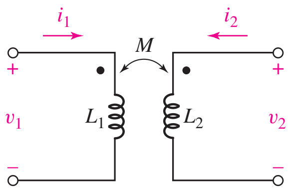


FIGURA 13.11

Respuestas: $\mathbf{V}_s = (3 + j10)\mathbf{I}_1 - j15\mathbf{I}_2$; $0 = -j15\mathbf{I}_1 + (10 + j25)\mathbf{I}_2$.

13.2 CONSIDERACIONES ENERGÉTICAS

Pensemos en la energía que se almacena en un par de inductores mutuamente acoplados. El resultado será de utilidad de diferentes maneras. Justifiquemos primero el supuesto de que $M_{12} = M_{21}$, y luego podremos determinar el máximo valor posible de la inductancia mutua entre los dos inductores dados.



■ **FIGURA 13.12** Par de bobinas acopladas con inductancia mutua de $M_{12} = M_{21} = M$.

Igualdad de M_{12} y M_{21}

En el par de bobinas acopladas que se ilustra en la figura 13.12 se señalan las corrientes, las tensiones y los puntos de polaridad. Para demostrar que $M_{12} = M_{21}$, empezamos igualando a cero todas las corrientes y las tensiones, con lo cual establecemos como cero la energía inicial almacenada en la red. Luego ponemos en circuito abierto el par de terminales del derecho e incrementamos i_1 desde cero hasta cierto valor constante (cd) I_1 en el tiempo $t = t_1$. La potencia que entra a la red desde la izquierda en cualquier instante es

$$v_1 i_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1$$

además, la potencia que entra desde la derecha equivale a

$$v_2 i_2 = 0$$

puesto que $i_2 = 0$

La energía almacenada dentro de la red cuando $i_1 = I_1$ es, por lo tanto,

$$\int_0^{t_1} v_1 i_1 \, dt = \int_0^{I_1} L_1 i_1 \, di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

Mantenemos ahora i_1 constante ($i_1 = I_1$), y permitimos que i_2 cambie desde cero en $t = t_1$ hasta algún valor constante I_2 en $t = t_2$. En ese caso, la energía que entrega la fuente del lado derecho es igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} v_2 i_2 \, dt = \int_0^{I_2} L_2 i_2 \, di_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Sin embargo, aun cuando el valor de i_1 permanece constante, la fuente del lado izquierdo también entrega energía a la red durante tal intervalo:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_1 i_1 \, dt = \int_{t_1}^{t_2} M_{12} \frac{di_2}{dt} i_1 \, dt = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = M_{12} I_1 I_2$$

La energía total almacenada en la red, cuando i_1 e i_2 han alcanzado valores constantes, está dada por

$$W_{\text{total}} = \tfrac{1}{2} L_1 I_1^2 + \tfrac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

Ahora bien, podríamos establecer las mismas corrientes finales en esta red, lo que permitiría que las corrientes alcanzaran sus valores finales en el orden inverso; esto es, se aumenta primero i_2 desde cero hasta I_2 y después se mantiene I_2 constante mientras i_1 crece desde cero hasta I_1. Si se calcula la energía total almacenada en este experimento, el resultado que se encontrará será

$$W_{\text{total}} = \tfrac{1}{2} L_1 I_1^2 + \tfrac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$

La única diferencia es el intercambio de las inductancias mutuas M_{21} y M_{12}. Sin embargo, las condiciones inicial y final en la red son las mismas, y por ello los dos valores de la energía almacenada deben resultar idénticos. Por lo tanto,

$$M_{12} = M_{21} = M$$

y

$$W = \tfrac{1}{2} L_1 I_1^2 + \tfrac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \qquad [6]$$

Si una corriente entra a la terminal marcada con punto, al tiempo que la otra sale de una terminal marcada con punto, se invierte el signo de la energía mutua:

$$W = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 - M I_1 I_2 \qquad [7]$$

Aunque las ecuaciones [6] y [7] se obtuvieron al considerar los valores finales de las dos corrientes como constantes, dichas "constantes" pueden tener cualquier valor, así que las expresiones de energía representan de manera correcta la energía que se almacena cuando los valores *instantáneos* de i_1 e i_2 son I_1 e I_2, respectivamente. En otras palabras, los símbolos en minúscula podrían también utilizarse sin ningún problema:

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1 [i_1(t)]^2 + \frac{1}{2}L_2 [i_2(t)]^2 \pm M [i_1(t)] [i_2(t)] \qquad [8]$$

El único supuesto sobre el que se basa la ecuación [8] es el establecimiento lógico del nivel de referencia de energía cero, cuando ambas corrientes son cero.

Establecimiento del límite superior de *M*

Se podría utilizar ahora la ecuación [8] para establecer un límite superior correspondiente al valor de M. Puesto que $w(t)$ representa la energía que se almacena dentro de la red *pasiva*, no puede ser negativa para cualesquier valor de i_1, i_2, L_1, L_2 o M. Supongamos primero que i_1 e i_2 son positivas o negativas; por lo tanto, su producto resulta positivo. Según la ecuación [8], el único caso en el que la energía tal vez sería negativa es

$$w = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 - M i_1 i_2$$

que escribiríamos, al completar el cuadrado, como

$$w = \frac{1}{2}\left(\sqrt{L_1}i_1 - \sqrt{L_2}i_2\right)^2 + \sqrt{L_1 L_2}i_1 i_2 - M i_1 i_2$$

Debido a que en realidad la energía no puede ser negativa, tampoco es viable que lo sea el lado derecho de esta ecuación. Sin embargo, el primer término quizá sea tan pequeño como cero, por lo que tenemos la restricción de que no es posible que la suma de los dos últimos términos sea negativa. Por consiguiente,

$$\sqrt{L_1 L_2} \geq M$$

o

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \qquad [9]$$

Por lo tanto, existe un límite superior de la posible magnitud de la inductancia mutua, que no será mayor a la media geométrica de las inductancias de las dos bobinas entre las cuales existe la inductancia mutua. Si bien hemos obtenido esta desigualdad con el supuesto de que i_1 e i_2 portan el mismo signo algebraico, es factible un desarrollo similar si los signos son opuestos; sólo se requiere elegir el signo positivo en la ecuación [8].

También podríamos haber demostrado la validez de la desigualdad [9] a partir de una consideración física del acoplamiento magnético. Si pensamos que i_2 es cero y que la corriente i_1 establece el enlace de flujo magnético que vincula tanto a L_1 como a L_2, resulta evidente que el flujo dentro de L_2 no es mayor que el flujo dentro de L_1, el cual representa el flujo total. En consecuencia, desde un punto de vista cualitativo hay un límite superior para la magnitud de la inductancia mutua posible entre dos inductores determinados.

Coeficiente de acoplamiento

El grado con el cual M se acerca a su valor máximo se describe mediante el ***coeficiente de acoplamiento***, definido como

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \qquad [10]$$

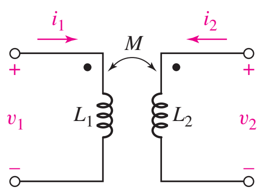
Puesto que $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$,

$$0 \leq k \leq 1$$

Los valores más grandes del coeficiente de acoplamiento se obtienen con bobinas que están físicamente más próximas, las que se devanan u orientan para proporcionar un flujo magnético común mayor, o que se les fija una trayectoria común a través de un material que sirve para concentrar y localizar el flujo magnético (un material de alta permeabilidad). Se dice que las bobinas que tienen un coeficiente de acoplamiento cercano a la unidad están *estrechamente acopladas*.

EJEMPLO 13.4

En la figura 13.13, sean $L_1 = 0.4$ H, $L_2 = 2.5$ H, $k = 0.6$ e $i_1 = 4i_2 = 20 \cos(500t - 20°)$ mA. Determine ambos $v_1(0)$ y la energía total almacenada en el sistema en $t = 0$.



■ **FIGURA 13.13** Dos bobinas con un coeficiente de acoplamiento de 0.6, $L_1 = 0.4$ H y $L_2 = 2.5$ H.

Para determinar el valor de v_1, necesitamos incluir las contribuciones tanto de la autoinductancia de la bobina 1 como de la inductancia mutua. Por consiguiente, prestando atención a la convención del punto, tenemos

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

A fin de evaluar esta cantidad, necesitamos el valor de M, el cual se obtiene de la ecuación [10]:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.6\sqrt{(0.4)(2.5)} = 0.6 \text{ H}$$

Así, $v_1(0) = 0.4[-10\text{sen}(-20°)] + 0.6[-2.5 \text{ sen}(-20°)] = 1.881$ V.

La energía total se determina sumando la energía almacenada en cada inductor, la cual tiene tres componentes independientes puesto que se sabe que dos bobinas estarán acopladas magnéticamente. Debido a que ambas corrientes entran a la terminal "con punto", tenemos

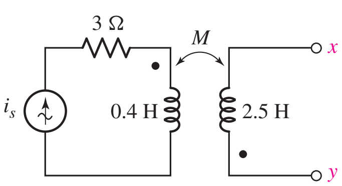
$$w(t) = \tfrac{1}{2} L_1 [i_1(t)]^2 + \tfrac{1}{2} L_2 [i_2(t)]^2 + M[i_1(t)]\,[i_2(t)]$$

Ya que $i_1(0) = 20 \cos(-20°) = 18.79$ mA e $i_2(0) = 0.25 i_1(0) = 4.698$ mA, encontramos que la energía total almacenada en las dos bobinas en $t = 0$ corresponde a 151.2 μJ.

PRÁCTICA

13.4 Sea $i_s = 2 \cos 10t$ A en el circuito de la figura 13.14, calcule la energía total almacenada en la red pasiva en $t = 0$ si $k = 0.6$ y las terminales x y y se dejan: (a) en circuito abierto; (b) en cortocircuito.

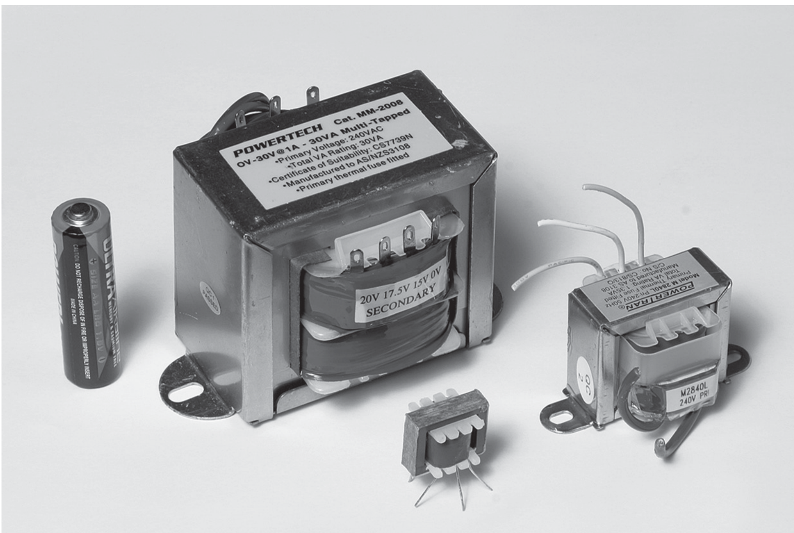
Respuestas: 0.8 J; 0.512 J.



■ **FIGURA 13.14**

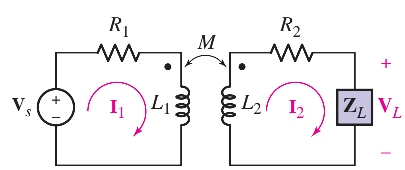
13.3 EL TRANSFORMADOR LINEAL

Ya podemos aplicar el conocimiento del acoplamiento magnético a la descripción de dos dispositivos prácticos específicos, cada uno de los cuales puede representarse por un modelo que contiene inductancia mutua. Ambos dispositivos son transformadores, un término que definiríamos como una red que contiene dos o más bobinas que se acoplan magnéticamente (figura 13.15) de manera deliberada. En esta sección analizamos el transformador lineal, que constituye un modelo excelente del transformador lineal práctico que se utiliza a frecuencias de radio o a frecuencias superiores. En la sección siguiente consideraremos al transformador ideal, un modelo idealizado de acoplamiento unitario de un transformador físico que tiene un núcleo hecho de algún material magnético, casi siempre una aleación de hierro.



■ **FIGURA 13.15** Selección de pequeños transformadores para su uso en aplicaciones de la electrónica; se muestra una batería tamaño AA para efectos de poder observar la escala.

En la figura 13.16 se muestra un transformador con dos corrientes de malla identificadas. La primera malla, que a menudo contiene la fuente, recibe el nombre de ***primario***; en tanto que la segunda, que suele contener la carga, se conoce como el ***secundario***. Los inductores marcados como L_1 y L_2 también se conocen como el primario y el secundario, respectivamente, del transformador. Supondremos que el transformador es *lineal*, lo que implica que no se emplea ningún material magnético (que puede provocar una relación *no lineal* entre el flujo y la corriente). Sin embargo, sin un material de este tipo, resulta difícil conseguir un coeficiente de acoplamiento superior a unos cuantos décimos. Las dos resistencias sirven para explicar la resistencia del alambre (incluyendo la de los embobinados), a partir del cual se devanan las bobinas del primario y del secundario, y cualesquiera otras pérdidas.



■ **FIGURA 13.16** Transformador lineal que contiene una fuente en el circuito primario y una carga en el circuito secundario. La resistencia se incluye también tanto en el primario como en el secundario.

Impedancia reflejada (referida)

Sea la impedancia de entrada que se presenta en las terminales del circuito primario. Las dos ecuaciones de malla son

$$\mathbf{V}_s = (R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \quad [11]$$

y

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L)\mathbf{I}_2 \qquad [12]$$

Podemos simplificar al definir

$$\mathbf{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L$$

por lo que

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad [13]$$

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 \qquad [14]$$

Despejando de la segunda ecuación $\mathbf{I}_2$ y sustituyendo el resultado en la primera ecuación, podemos encontrar la impedancia de entrada, esto es,

$\mathbf{Z}_{\text{ent}}$ es la impedancia vista por la bobina primaria del transformador.

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_1} = \mathbf{Z}_{11} - \frac{(j\omega)^2 M^2}{\mathbf{Z}_{22}} \qquad [15]$$

Antes de manipular más esta expresión, deducimos varias conclusiones muy interesantes. En primer lugar, este resultado es independiente de la ubicación de los puntos sobre cualquier devanado, pues si cualquier punto se mueve al otro extremo de la bobina, el resultado es un cambio en el signo de cada término que incluye a M en las ecuaciones [11] a [14]. Este mismo efecto se obtendría al sustituir M por $(-M)$, aunque un cambio así no tiene posibilidad de afectar la impedancia de entrada, como lo confirma la ecuación [15]. También podríamos observar en la ecuación [15] que la impedancia de entrada es ni más ni menos que $\mathbf{Z}_{11}$, si el acoplamiento se reduce hasta cero. Cuando el acoplamiento aumenta a partir de cero, la impedancia de entrada difiere de $\mathbf{Z}_{11}$ por una cantidad $\omega^2M^2/\mathbf{Z}_{22}$, llamada ***impedancia reflejada o referida***. La naturaleza de este cambio resulta más evidente si desarrollamos esta expresión:

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{R_{22} + jX_{22}}$$

y racionalizamos la impedancia reflejada (referida),

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} + \frac{-j\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}$$

Puesto que $\omega^2M^2R_{22}/(R_{22}^2 + R_{22}^2)$ debe ser positiva, resulta evidente que la presencia del secundario aumenta las pérdidas en el circuito primario. En otras palabras, su presencia podría tomarse en cuenta en el primario y aumentar el valor de R_1. Además, la reactancia que refleja el secundario en el circuito primario tiene un signo que es opuesto al de X_{22}, la reactancia neta alrededor del lazo secundario. Esta reactancia X_{22} es la suma de ωL_2 y X_L; ésta es necesariamente positiva para cargas inductivas, y positiva o negativa para cargas capacitivas, según la magnitud de la reactancia de la carga.

PRÁCTICA

13.5 Los valores de los elementos de cierto transformador lineal son $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, $L_1 = 2$ mH, $L_2 = 10$ mH y $M = 4$ mH. Si $\omega = 5000$ rad/s, determine $\mathbf{Z}_{\text{ent}}$ para $\mathbf{Z}_L$ igual a: (*a*) 10 Ω; (*b*) *j*20 Ω; (*c*) 10 + *j*20 Ω; (*d*) −*j*20 Ω.

Respuestas: 5.32 + *j*2.74 Ω; 3.49 + *j*4.33 Ω; 4.24 + *j*4.57 Ω; 5.56 − *j*2.82 Ω.

Redes equivalentes T y Π

A menudo resulta conveniente sustituir un transformador por una red equivalente en la forma de T o Π. Si separamos las resistencias respectivas del primario y del secundario del transformador, sólo queda el par de inductores acoplados mutuamente, como se muestra en la figura 13.17. Observe que las dos terminales inferiores del transformador se conectan entre sí para formar una red de tres terminales. Efectuamos lo anterior debido a que ambas redes equivalentes son también redes de tres terminales. Las ecuaciones diferenciales que describen este circuito son, también en este caso,

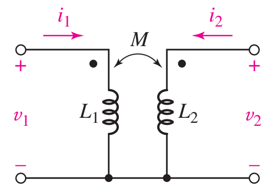


FIGURA 13.17 Transformador particular que se debe sustituir por una red equivalente Π o T.

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \quad [16]$$

y

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} \quad [17]$$

La forma de estas dos ecuaciones es familiar y se interpreta con facilidad en términos del análisis de malla. Elegimos una i_1 en dirección de las manecillas del reloj y una i_2 en el sentido contrario, de manera que i_1 e i_2 resulten por completo identificables con las corrientes de la figura 13.17. Los términos $M\,di_2/dt$ en la ecuación [16] y $M\,di_1/dt$ en la ecuación [17] indican que ambas mallas deben tener entonces una *autoinductancia* común M. En razón de que la inductancia total alrededor de la malla izquierda es L_1, se requiere incorporar una autoinductancia de $L_1 - M$ en la primera malla, pero no en la segunda. De modo similar, se necesita una autoinductancia de $L_2 - M$ en la segunda malla, pero no en la primera. La red equivalente resultante se presenta en la figura 13.18 y la equivalencia se garantiza mediante pares idénticos de ecuaciones que relacionan v_1, i_1, v_2 e i_2 para las dos redes.

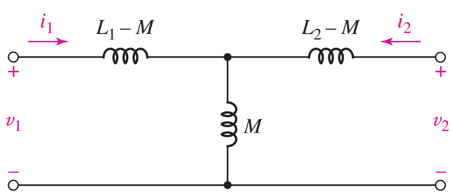


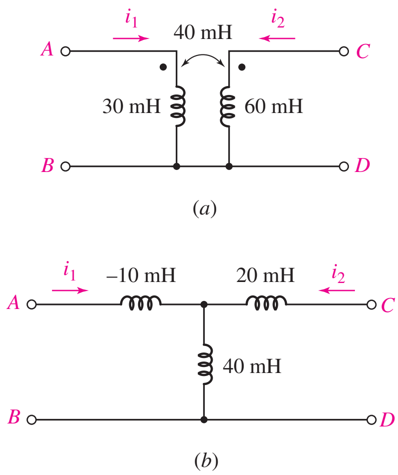
FIGURA 13.18 Circuito equivalente en T del transformador que se muestra en la figura 13.17.

Si cualquiera de los puntos en los devanados de un transformador dado se ponen sobre el extremo opuesto de su bobina, será negativo el signo de los términos mutuos de las ecuaciones [16] y [17], lo cual es análogo a reemplazar M por $-M$. Además, con una sustitución de este tipo en la red de la figura 13.18 obtenemos el equivalente correcto de este caso. (Los tres valores de autoinductancia serían entonces $L_1 + M$, $-M$ y $L_2 + M$.)

Las inductancias en el equivalente T son autoinductancias; no se presenta inductancia mutua. Es posible que se obtengan valores negativos de inductancia para el circuito equivalente, aunque esto no tiene importancia si nuestro único deseo es un análisis matemático. Hay ocasiones en las que con los procedimientos relativos a la síntesis de redes para proporcionar una función de transferencia deseada se determinan circuitos que contienen una red en T con una inductancia negativa, la cual podría realizarse mediante un transformador lineal apropiado.

EJEMPLO 13.5

Determine el circuito equivalente en T del transformador lineal que se muestra en la figura 13.19*a*.



■ **FIGURA 13.19** (*a*) Transformador lineal utilizado como ejemplo. (*b*) Red equivalente en T del transformador.

Identificamos $L_1 = 30$ mH, $L_2 = 60$ mH y $M = 40$ mH; asimismo, observamos que los puntos se encuentran en las terminales superiores, del mismo modo que en el circuito básico de la figura 13.17.

Por consiguiente, $L_1 - M = -10$ mH está en el brazo izquierdo superior, $L_2 - M = 20$ mH se ubica en el derecho superior y el ramo del centro contiene $M = 40$ mH. El circuito equivalente completo en T se muestra en la figura 13.19*b*.

Para demostrar la equivalencia, dejamos las terminales *C* y *D* en circuito abierto y aplicamo $v_{AB} = 10 \cos 100t$ V a la entrada, en la figura 13.19*a*. De tal modo,

$$i_1 = \frac{1}{30 \times 10^{-3}} \int 10\cos(100t)\, dt = 3.33 \operatorname{sen} 100t \qquad \text{A}$$

y

$$v_{CD} = M\frac{di_1}{dt} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100 \cos 100t$$
$$= 13.33 \cos 100t \qquad \text{V}$$

Aplicando la misma tensión en el equivalente T, descubrimos que

$$i_1 = \frac{1}{(-10+40) \times 10^{-3}} \int 10\cos(100t)\, dt = 3.33 \operatorname{sen} 100t \qquad \text{A}$$

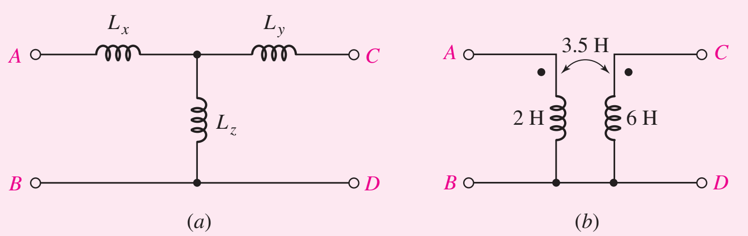
también en este caso. Asimismo, la tensión en *C* y *D* equivale a la tensión en el inductor de 40 mH. De tal modo,

$$v_{CD} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100 \cos 100t = 13.33 \cos 100t \qquad \text{V}$$

y las dos redes producen resultados iguales.

PRÁCTICA

13.6 (*a*) Si las dos redes que se presentan en la figura 13.20 son equivalentes, especifique los valores de L_x, L_y y L_z. (*b*) Repita el ejercicio suponiendo ahora que el punto en el secundario de la figura 13.20*b* se localiza en la parte inferior de la bobina.



■ **FIGURA 13.20**

Respuestas: −1.5, 2.5, 3.5 H; 5.5, 9.5, −3.5 H.

La red en Π equivalente no se obtiene con tanta facilidad, ya que es más complicada y no se utiliza mucho. La elaboraremos resolviendo la ecuación [17] para di_2/dt y sustituyendo el resultado en la ecuación [16]:

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2}v_2 - \frac{M^2}{L_2}\frac{di_1}{dt}$$

o

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2}v_1 - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}v_2$$

Si integramos ahora desde 0 hasta t, obtenemos

$$i_1 - i_1(0)u(t) = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_1\, dt' - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_2\, dt' \qquad [18]$$

De modo similar, también tenemos

$$i_2 - i_2(0)u(t) = \frac{-M}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_1\, dt' + \frac{L_1}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_2\, dt' \qquad [19]$$

Las ecuaciones [18] y [19] se interpretan como un par de ecuaciones nodales; debe instalarse una fuente de corriente de escalón en cada nodo para proporcionar las condiciones iniciales adecuadas. Los factores que multiplican cada integral tienen la misma forma general de inversas de ciertas inductancias equivalentes. Por lo tanto, el segundo coeficiente de la ecuación [18], $M/(L_1L_2 - M^2)$, es $1/L_B$, o el recíproco de las inductancias que se extienden entre los nodos 1 y 2, como el que se muestra en la red en Π equivalente de la figura 13.21. Así,

$$L_B = \frac{L_1L_2 - M^2}{M}$$

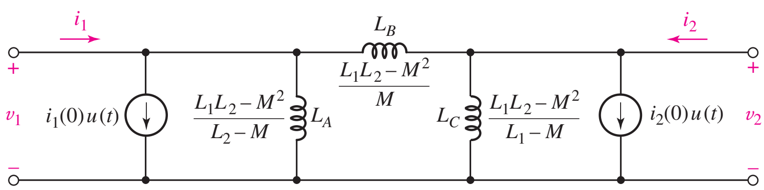


FIGURA 13.21 Red en Π que es equivalente al transformador de la figura 13.17.

El primer coeficiente en la ecuación [18], $L_2/(L_1 L_2 - M^2)$, es $1/L_A + 1/L_B$. En consecuencia,

$$\frac{1}{L_A} = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2} - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}$$

o

$$L_A = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M}$$

Por último,

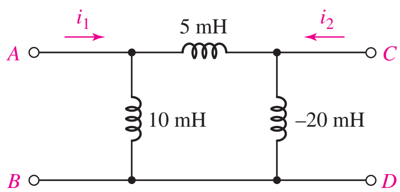
$$L_C = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M}$$

Ningún acoplamiento magnético se presenta entre los inductores en la Π equivalente, y las corrientes iniciales en las tres *autoinductancias* son iguales a cero.

Podríamos compensar la inversión de cualquier punto en el transformador determinado con tan sólo cambiar el signo de M en la red equivalente. Además, del mismo modo que las encontramos en la T equivalente, quizás aparezcan autoinductancias negativas en la red en Π equivalente.

EJEMPLO 13.6

Determine la red en Π equivalente del transformador de la figura 13.19*a*, suponiendo corrientes iniciales iguales a cero.



■ **FIGURA 13.22** Equivalente en Π del transformador lineal que se presentó en la figura 13.19*a*. Se supone que $i_1(0) = 0$ e $i_2(0) = 0$.

Puesto que el término $L_1L_2 - M^2$ es común a L_A, L_B y L_C, empezamos evaluando esta cantidad, con lo cual obtenemos

$$30 \times 10^{-3} \times 60 \times 10^{-3} - (40 \times 10^{-3})^2 = 2 \times 10^{-4}\ \text{H}^2$$

De esta manera:

$$L_A = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M} = \frac{2 \times 10^{-4}}{20 \times 10^{-3}} = 10\ \text{mH}$$

$$L_C = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M} = -20\ \text{mH}$$

y

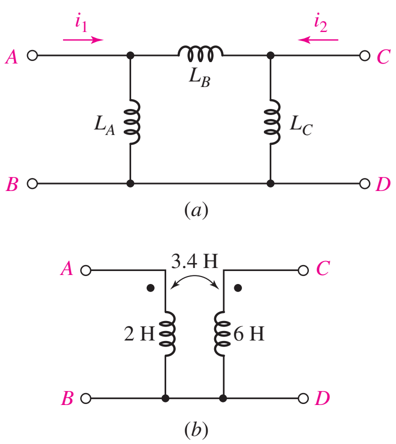
$$L_B = \frac{L_1L_2 - M^2}{M} = 5\ \text{mH}$$

La red en Π equivalente se muestra en la figura 13.22.

Si verificamos de nuevo el resultado obtenido cuando $v_{AB} = 10 \cos 100t$ V con las terminales *C* y *D* en circuito abierto, obtenemos de inmediato la tensión de salida mediante una división de tensión:

$$v_{CD} = \frac{-20 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3} - 20 \times 10^{-3}} 10 \cos 100t = 13.33 \cos 100t \qquad \text{V}$$

como antes. Por lo tanto, la red en la figura 13.22 es eléctricamente equivalente a las redes de la figura 13.19*a* y *b*.



■ **FIGURA 13.23**

PRÁCTICA

13.7 Si las redes en la figura 13.23 son equivalentes, especifique los valores (en mH) de L_A, L_B y L_C.

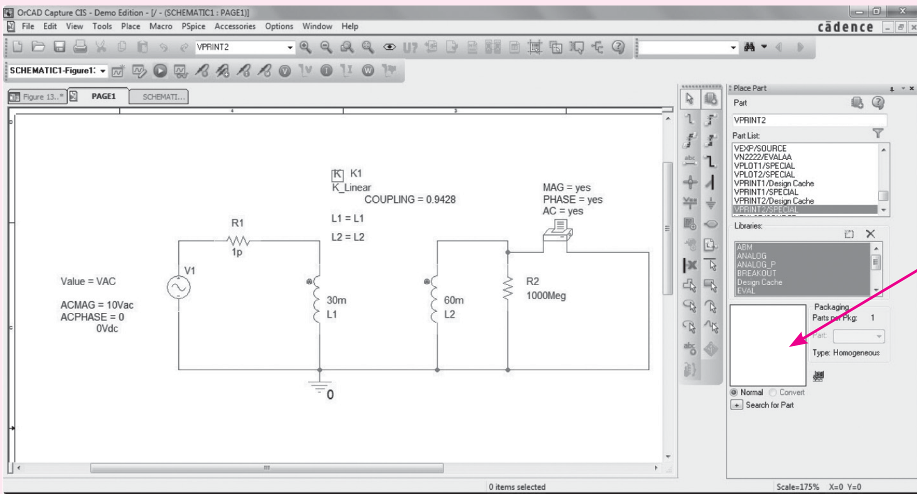
Respuesta: $L_A = 169.2$ mH, $L_B = 129.4$ mH, $L_C = -314.3$ mH.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

La capacidad para simular circuitos que contienen inductancias acopladas magnéticamente es una función útil, sobre todo con la continua reducción de las dimensiones de los circuitos modernos. Cuando varios lazos y lazos parciales de conductores se juntan en nuevos diseños, los diversos circuitos y subcircuitos que se pretenden aislar mutuamente se acoplan de manera inadvertida a través de campos magnéticos parásitos e interactúan entre sí. PSpice nos permite incorporar este efecto mediante la componente **K_Linear**, que enlaza un par de inductores en el diagrama mediante un coeficiente de acoplamiento k en el intervalo $0 \leq k \leq 1$.

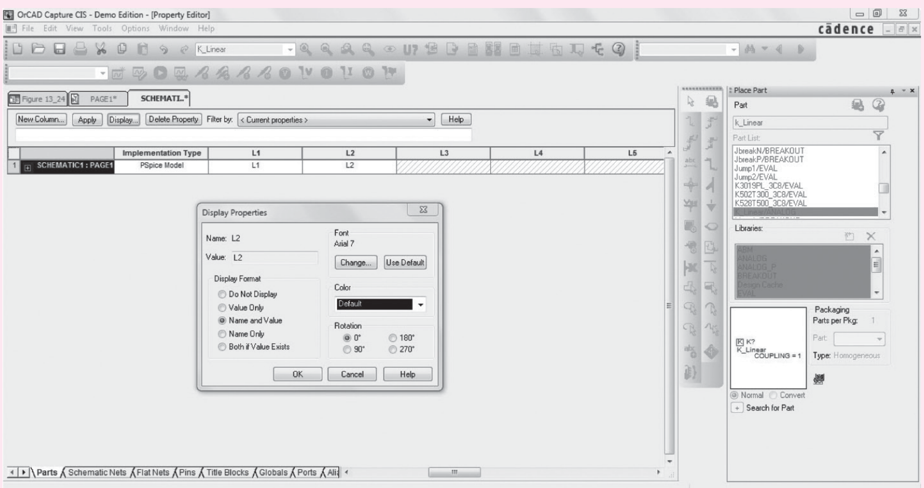
Por ejemplo, considere el circuito de la figura 13.19*a*, que consta de dos bobinas cuyo acoplamiento se describe mediante una inductancia mutua de $M = 40$ mH, correspondiente a un coeficiente de acoplamiento de $k = 0.9428$. El diagrama del circuito básico se presenta en la figura 13.24*a*. Observe que cuando se coloca primero en forma horizontal en el diagrama, la terminal con punto se ubica a la

izquierda, en torno a la cual se gira el símbolo. Note también que el componente **K_Linear** no está “alambrado” en ninguna parte del diagrama; su ubicación es arbitraria. Los dos inductores acoplados, **L1** y **L2**, se especifican junto con el coeficiente de acoplamiento mediante la Property Editor (figura 13.24*b*).



Hemos ampliado la imagen de la pantalla para una mejor lectura.

(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 13.24** (*a*) El circuito de la figura 13.19*a*, modificado para satisfacer necesidades de simulación. (*b*) La caja de diálogo Property Editor muestra cómo varios inductores se nombran para ser enlazados.

El circuito se conecta a una fuente de tensión senoidal de 100 rad/s (15.92 Hz), un hecho que se incorpora mediante un barrido ca a una frecuencia dada. También se requiere agregar las dos resistencias al diagrama para que PSpice lleve a cabo la simulación sin generar un mensaje de error. Primero, se inserta una pequeña resistencia en serie entre la fuente de tensión y L1; se eligió un valor de 1 pΩ para minimizar sus efectos. Segundo, se conectó a L2 una resistencia de 1 000 MΩ (infinito, en esencia). La salida de la simulación tiene una magnitud en tensión de 13.33 V y un ángulo de fase de -3.819×10^{-8} grados (esencialmente cero), lo que concuerda con los valores que se calcularon a mano en el ejemplo 13.5.

PSpice proporciona también dos modelos de transformador diferentes, uno lineal, **XFRM_LINEAR**, y uno ideal, **XFRM_NONLINEAR**, un elemento de circuito que es el tema de la siguiente sección. El transformador lineal requiere que los valores se especifiquen para el coeficiente de acoplamiento y para ambas inductancias de bobina. El transformador ideal necesita también un coeficiente de acoplamiento, aunque, como veremos, un transformador *ideal* tiene valores de inductancia infinitos o casi infinitos. Por lo tanto, los parámetros restantes requeridos para la parte **XFRM_NONLINEAR** son el número de vueltas de alambre que tiene cada bobina.

13.4 EL TRANSFORMADOR IDEAL

Un ***transformador ideal*** constituye una aproximación útil a un transformador acoplado de forma muy estrecha, en el que el coeficiente de acoplamiento es en esencia la unidad y en el que las reactancias inductivas del primario y del secundario son muy grandes en comparación con las impedancias de la terminación. Tales características se obtienen con mucha precisión mediante la mayor parte de los transformadores de núcleo de hierro bien diseñados, sobre un intervalo razonable de frecuencias para un intervalo razonable de impedancias a nivel terminal. El análisis aproximado de un circuito que contiene un transformador de núcleo de hierro podría lograrse con mucha facilidad sustituyéndolo por un transformador ideal, que podría pensarse como un modelo de primer orden de un transformador de núcleo de hierro.

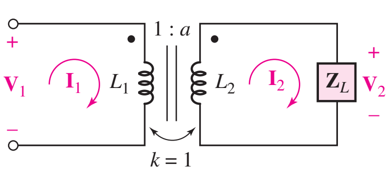
Relación de vueltas de un transformador ideal

Con el transformador ideal surge un nuevo concepto: la ***relación de número de vueltas*** a. La autoinductancia de una bobina es proporcional al cuadrado del número de vueltas de alambre que forman la bobina. Esta relación es válida sólo si todo el flujo establecido por la corriente que fluye en las bobinas enlaza a todas las vueltas. Para formular este resultado de manera cuantitativa se requiere utilizar conceptos de campo magnético, tema que no se incluye en la explicación del análisis de circuitos. Sin embargo, quizá sea suficiente un argumento cualitativo. Si una corriente i fluye a través de una bobina de N vueltas, entonces el flujo magnético de una sola vuelta se reproducirá N veces. Si consideramos que las N vueltas son coincidentes una con la otra, entonces la totalidad del flujo abarca a todas las vueltas. Cuando la corriente y el flujo cambian con el tiempo, se induce una tensión en *cada vuelta* que es N veces mayor que la ocasionada por una bobina de una sola vuelta. De tal modo, la tensión inducida en la *bobina de N vueltas* debe ser N^2 veces la tensión de una sola vuelta. A partir de lo anterior, se origina la proporcionalidad entre la inductancia y el cuadrado del número de vueltas. Se concluye que:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = a^2 \qquad [20]$$

o

$$\boxed{a = \frac{N_2}{N_1}} \qquad [21]$$



■ **FIGURA 13.25** Transformador ideal que se conecta a una impedancia de carga general.

La figura 13.25 presenta un transformador ideal al que se conecta una carga secundaria. La naturaleza ideal del transformador se establece mediante varias convenciones: el uso de líneas verticales entre las dos bobinas para indicar las laminaciones de hierro presentes en muchos transformadores con núcleo de este metal, el valor unitario

del coeficiente de acoplamiento y la presencia del símbolo 1:a, lo que sugiere una relación de vueltas de N_1 a N_2.

Analicemos este transformador en el estado senoidal permanente. Las dos ecuaciones de malla son

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad [22]$$

y

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_L + j\omega L_2)\mathbf{I}_2 \qquad [23]$$

Se determina primero la impedancia de entrada de un transformador ideal. Al resolver la ecuación [23] para $\mathbf{I}_2$ y sustituir en la ecuación [22], obtenemos

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 j\omega L_1 + \mathbf{I}_1\frac{\omega^2 M^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

y

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

Puesto que $k = 1$, $M^2 = L_1L_2$, tenemos entonces

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

Además del coeficiente de acoplamiento unitario, otra característica de un transformador ideal es una impedancia demasiado grande tanto en las bobinas del primario como del secundario, sin que importe la frecuencia de operación. Lo anterior sugiere que el caso ideal sería que L_1 y L_2 tendieran al infinito. Sin embargo, su proporción debe permanecer finita, según se especifica mediante la relación de vueltas. De tal manera,

$$L_2 = a^2 L_1$$

lo cual lleva a

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 a^2 L_1^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1}$$

Si dejáramos ahora que L_1 se volviera infinita, ambos términos del lado derecho de la expresión anterior también lo harían, de modo que el resultado sería indeterminado. Por lo tanto, se requiere combinar primero estos dos términos:

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{j\omega L_1\mathbf{Z}_L - \omega^2 a^2 L_1^2 + \omega^2 a^2 L_1^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1} \qquad [24]$$

o

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{j\omega L_1\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1} = \frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_L/j\omega L_1 + a^2} \qquad [25]$$

Ahora bien, cuando $L_1 \to \infty$ observamos que $\mathbf{Z}_{\text{ent}}$ se convierte en:

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{\mathbf{Z}_L}{a^2} \qquad [26]$$

para $\mathbf{Z}_L$ finita.

Este resultado tiene algunas implicaciones interesantes y al menos una de ellas parece contradecir una de las características del transformador lineal. La impedancia de entrada de un transformador ideal es proporcional a la impedancia de carga,

con la constante de proporcionalidad igual al recíproco del cuadrado de la relación de vueltas. En otras palabras, si la impedancia de *carga* es capacitiva, entonces la impedancia de *entrada* también resulta capacitiva. Sin embargo, en el transformador lineal, la impedancia reflejada o referida sufrió un cambio de signo en su parte reactiva; una carga capacitiva proporciona una contribución inductiva a la impedancia de entrada. La explicación de este hecho se obtiene al reconocer primero que $\mathbf{Z}_L/a^2$ *no* es la impedancia reflejada (referida), si bien a menudo se denomina de manera inexacta mediante ese nombre. La verdadera impedancia reflejada es infinita en el transformador ideal; de otra manera no podría "cancelar" la impedancia infinita de la inductancia primaria; tal cancelación ocurre en el numerador de la ecuación [24]. La impedancia $\mathbf{Z}_L/a^2$ representa un término pequeño que corresponde a la cantidad mediante la que no ocurre una cancelación exacta. La verdadera impedancia reflejada (referida) en el transformador ideal sí cambia de signo en su parte reactiva; sin embargo, cuando las respectivas inductancias del primario y del secundario se vuelven infinitas, el efecto de la reactancia infinita de la bobina del primario y de la reactancia reflejada (referida) infinita, pero negativa, de la bobina del secundario se cancela.

Por lo tanto, la primera característica importante del transformador ideal es su capacidad para cambiar la magnitud de una impedancia, o para cambiar el nivel de impedancia. Un transformador ideal que tiene 100 vueltas en el primario y 10 000 vueltas en el secundario presenta una relación de vueltas de 10 000/100, o 100. Cualquier impedancia puesta a lo largo del secundario aparece reducida (o referida) en magnitud en las terminales del primario por un factor de 100^2 o 10 000. Una resistencia de 20 000 Ω se observa como de 2 Ω, un inductor de 200 mH se mira como 20 μH y un capacitor de 100 pF se ve como de 1 μF. Si se intercambian los devanados del primario y del secundario, entonces $a = 0.01$ y la impedancia de carga al parecer se incrementa en magnitud. En la práctica, este cambio exacto en la magnitud no siempre sucede, pues debemos recordar que al efectuar el último paso en nuestra deducción y dejar que L_1 se volviera infinita en la ecuación [25], fue necesario pasar por alto $\mathbf{Z}_L$ en comparación con $j\omega L_2$. Puesto que L_2 nunca puede ser infinita, resulta evidente que el modelo del transformador ideal será inválido si las impedancias de carga son muy grandes.

Uso de transformadores para el acoplamiento de impedancia

Un ejemplo práctico del uso de un transformador con núcleo de hierro como un dispositivo para cambiar el nivel de impedancia se presenta en el acoplamiento de un amplificador de potencia de audio de bulbo de vacío con un sistema de altavoz (bocinas). Para alcanzar una transferencia de potencia máxima, sabemos que la resistencia de la carga debe ser igual a la resistencia interna de la fuente; el altavoz o bocina suele tener una magnitud de impedancia (supuesta muchas veces como una resistencia) de sólo unos cuantos ohms, en tanto que el amplificador de potencia por lo común posee una resistencia interna de varios miles de ohms. Así, se requiere un transformador ideal en el que $N_2 < N_1$. Por ejemplo, si la impedancia interna del amplificador (o generador) corresponde a 4 000 Ω y la impedancia del altavoz es 8 Ω, entonces deseamos que

$$\mathbf{Z}_g = 4\,000 = \frac{\mathbf{Z}_L}{a^2} = \frac{8}{a^2}$$

o

$$a = \frac{1}{22.4}$$

y, en consecuencia,

$$\frac{N_1}{N_2} = 22.4$$

Uso de transformadores para ajuste de corriente

Existe una relación simple entre las corrientes del primario y del secundario, respectivamente $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ en un transformador ideal. De acuerdo con la ecuación [23], tenemos

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{j\omega M}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

También en este caso dejamos que L_2 se vuelva infinita, así que podemos concluir que

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{j\omega M}{j\omega L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

o

$$\boxed{\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{1}{a}} \qquad [27]$$

Por lo tanto, la proporción (o razón) entre las corrientes respectivas del primario y del secundario es la relación (o razón) de número de vueltas. Si tenemos que $N_2 > N_1$ entonces $a > 1$, de modo que es patente que circula una corriente mayor en el devanado con menor número de vueltas. En otras palabras,

$$N_1\mathbf{I}_1 = N_2\mathbf{I}_2$$

Asimismo, debe señalarse que la relación (o razón) de corrientes es el *negativo* de la relación de vueltas si cualquier corriente se invierte o se cambia la localización de cualquier punto.

En el ejemplo en el que se usó un transformador ideal para cambiar el nivel de impedancia a fin de acoplar de manera eficiente un altavoz con un amplificador de potencia, una corriente rms de 50 mA a 1 000 Hz en el primario provoca una corriente rms de 1.12 A a 1 000 Hz en el secundario. La potencia suministrada al altavoz es igual a $(1.12)^2(8)$, o 10 W, y la potencia que el amplificador de potencia entrega al transformador corresponde a $(0.05)^2 4\,000$, o 10 W. El resultado es reconfortante, pues el transformador ideal no contiene ni un dispositivo activo que pueda generar potencia, ni ninguna resistencia que pueda absorberla.

Uso de transformadores en el ajuste del nivel de tensión

Dado que la potencia que se entrega al transformador ideal es idéntica a la suministrada a la carga, siempre que las corrientes del primario y del secundario se relacionan por la relación (o razón) de número de vueltas, debe parecer razonable que las tensiones respectivas del primario y del secundario también deban vincularse con esa misma relación. Si definimos la tensión del secundario, o tensión de carga, como

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_L$$

y la tensión del primario como la tensión en L_1, entonces

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \mathbf{I}_1\frac{\mathbf{Z}_L}{a^2}$$

La proporción (razón) de las dos tensiones se vuelve entonces

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = a^2 \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}$$

o

$$\boxed{\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = a = \frac{N_2}{N_1}} \qquad [28]$$

La razón entre la tensión del secundario y la del primario es igual a la relación del número de vueltas. Debemos observar con cuidado que esta ecuación es opuesta a la [27], pues lo anterior es una fuente común de errores en los estudiantes. La razón también puede ser negativa si se invierte alguna tensión, o si se cambia cualquier ubicación de punto.

Por lo tanto, al elegir sólo la relación (o razón) de número de vueltas, podemos ahora cambiar cualquier tensión de ca en cualquier otra tensión de ca. Si $a > 1$, la tensión del secundario será mayor que la del primario, de modo que el artefacto será lo que denominamos por lo general un ***transformador elevador***. Si $a < 1$, la tensión del secundario será menor que la del primario, y tendríamos un ***transformador reductor***. Las compañías eléctricas casi siempre generan potencia a una tensión en el intervalo de 12 a 25 kV. Aunque es una tensión bastante grande, las pérdidas de transmisión a largas distancias se reducen a través del aumento del nivel de tensión hasta varios cientos de miles de volts mediante un transformador elevador (figura 13.26*a*); después dicha tensión se reduce a varias decenas de kilovolts en las subestaciones de distribución de potencia locales, mediante transformadores reductores (figura 13.26*b*). También se ubican transformadores reductores adicionales fuera de los edificios, a fin de reducir la tensión desde la tensión de transmisión hasta el nivel de 110 o 220 V requerido para operar maquinaria (figura 13.26*c*).

Al combinar las relaciones (razones) de corrientes y de tensiones, o sea las ecuaciones [27] y [28], obtenemos

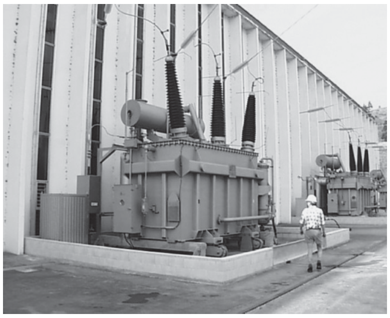
$$\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1\mathbf{I}_1$$

y observamos que los voltamperes del primario y del secundario son iguales. La magnitud de este producto suele especificarse como un valor máximo permisible en los transformadores de potencia. Si la carga tiene un ángulo de fase θ, o sea

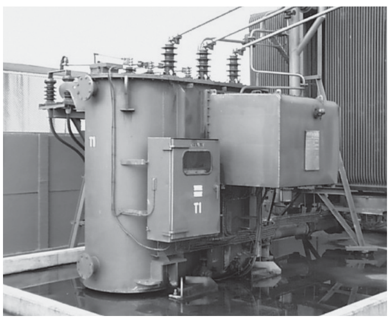
$$\mathbf{Z}_L = |\mathbf{Z}_L|\underline{/\theta}$$

entonces $\mathbf{V}_2$ adelanta a $\mathbf{I}_2$ en un angulo θ. Además, la impedancia de entrada es $\mathbf{Z}_L/a^2$ y por ello $\mathbf{V}_1$ también adelanta a $\mathbf{I}_1$ por el mismo ángulo θ. Si dejamos que la tensión y la corriente representen valores rms, entonces $|\mathbf{V}_2|\ |\mathbf{I}_2| \cos\theta$ debe ser igual a $|\mathbf{V}_1|\ |\mathbf{I}_1| \cos\theta$, de modo que toda la potencia entregada en las terminales del primario llega a la carga; el transformador no absorbe ni libera (suministra) ninguna potencia.

Las características del transformador ideal, que se determinaron en su totalidad mediante el análisis fasorial, son en verdad válidas en el estado senoidal permanente, pero no hay razón para creer que sean correctas para la respuesta *completa*. En la actualidad, a menudo se aplican y la demostración de que esta afirmación es válida resulta mucho más simple que el análisis basado en fasores que justamente acabamos de terminar. Sin embargo, nuestro análisis sirvió para señalar las aproximaciones específicas que deben hacerse mediante un modelo más exacto de un transformador real, a fin de obtener un transformador ideal. Por ejemplo, vimos que la reactancia del devanado secundario necesita ser mucho mayor en magnitud que la impedancia de cualquier carga que se conecte al secundario. De ese modo se logra cierta sensación



(*a*)



(*b*)



(*c*)

FIGURA 13.26 (*a*) Transformador elevador que se utiliza para incrementar la tensión de salida del generador para la transmisión. (*b*) Transformador de subestación empleado para reducir la tensión desde el nivel de transmisión de 220 kV hasta varias decenas de kilovolts para distribución local. (*c*) Transformador reductor que se utiliza para reducir el nivel de tensión de distribución hasta 240 V para consumo eléctrico.
(*Fotos cortesía del Dr. Wade Enright, Te Kura Pukaha Vira O Te Whare Wananga O Waitaha, Aotearoa.*)

EJEMPLO 13.7

En el caso del circuito de la figura 13.27, determine la potencia promedio (activa) que se disipa en la resistencia de 10 kΩ.

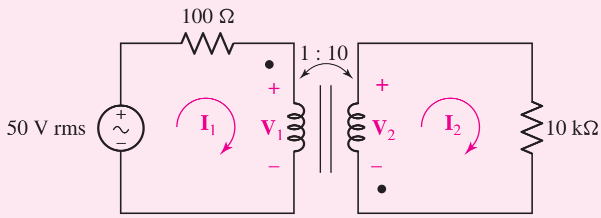


FIGURA 13.27 Circuito de un transformador ideal simple.

La potencia promedio (activa) disipada por la resistencia de 10 kΩ es, simplemente,

$$P = 10\,000|\mathbf{I}_2|^2$$

La fuente de 50 V rms "percibe" (ve) una impedancia de entrada del transformador de $\mathbf{Z}_L/a^2$ o 100 Ω. De tal modo, obtenemos

$$\mathbf{I}_1 = \frac{50}{100 + 100} = 250 \text{ mA rms}$$

A partir de la ecuación [27], $\mathbf{I}_2 = (1/a)\mathbf{I}_1 = 25$ mA rms, por lo que podemos ver que la resistencia de 10 kΩ disipa 6.25 W.

En este ejemplo se pasan por alto los ángulos de fase, pues no afectan el cálculo de la potencia promedio (activa) disipada por una carga puramente resistiva.

PRÁCTICA

13.8 Repita el ejemplo 13.7 utilizando tensiones para calcular la potencia disipada.

Respuesta: 6.25 W.

de que se obtienen ciertas condiciones de operación en las que el transformador deja de comportarse como un transformador ideal.

Relaciones de tensión en el dominio del tiempo

Ahora determinemos la forma en que se relacionan las cantidades en el dominio del tiempo v_1 y v_2 en el transformador ideal. Volviendo al circuito de la figura 13.17 y a las ecuaciones [16] y [17] que lo describen, podemos resolver la segunda ecuación para di_2/dt y sustituir en la primera:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2} v_2 - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

Sin embargo, para acoplamiento unitario, $M^2 = L_1 L_2$, y tenemos

$$v_1 = \frac{M}{L_2} v_2 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} v_2 = \frac{1}{a} v_2$$

APLICACIÓN PRÁCTICA

El transformador superconductor (o supraconductor)

En casi todos los casos, pasamos por alto los diversos tipos de pérdidas que pueden presentarse en un transformador particular. Sin embargo, cuando se trabaja con grandes transformadores de potencia se requiere prestar gran atención a estas pérdidas, a pesar de eficiencias totales que, por lo general, llegan a 97% o más. Si bien esta gran eficiencia puede considerarse como un valor casi ideal, quizá represente una gran cantidad de energía desperdiciada cuando el transformador maneja varios miles de amperes de corriente. Las llamadas pérdidas i^2R (pronunciado "i cuadrada R") representan potencia disipada como calor, las cuales pueden incrementar la temperatura de las bobinas de los transformadores. La resistencia del alambre aumenta con la temperatura, por lo que el calentamiento sólo conduce a la obtención de pérdidas mayores. Además, las altas temperaturas producen la degradación del aislamiento del alambre, lo cual da lugar a una vida de servicio más corta del transformador. En consecuencia, muchos transformadores de potencia modernos utilizan un baño de aceite líquido que elimina el exceso de calor de sus bobinas; sin embargo, este procedimiento tiene varias desventajas en las que se incluyen el impacto ambiental y el peligro de incendio por derramamiento de aceite como resultado de la corrosión con el tiempo (figura 13.28).

Un medio factible para mejorar el desempeño de estos artefactos consiste en utilizar alambre superconductor para sustituir las bobinas resistivas de un diseño de transformador normal. Los superconductores son materiales que resisten altas temperaturas, pero que de repente no muestran resistencia al flujo de corriente, una vez que se alcanza una temperatura crítica. En el caso de la mayor



FIGURA 13.28 Incendio que sucedió en el año 2004 en la subestación de energía eléctrica estadounidense de 340 000 V cerca de Mishawaka, Indiana. (© *AP/Wide World Photos*)

Así, la relación entre la tensión del primario y la del secundario se determina al aplicar la respuesta completa en el dominio del tiempo.

Una expresión que relaciona la corriente del primario y la del secundario en el dominio del tiempo se obtiene con mayor facilidad dividiendo la ecuación [16] entre L_1,

$$\frac{v_1}{L_1} = \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1}\frac{di_2}{dt} = \frac{di_1}{dt} + a\frac{di_2}{dt}$$

y recurriendo luego a una de las hipótesis implícitas en el transformador ideal: L_1 debe ser infinita. Si suponemos que v_1 no es infinita, entonces

$$\frac{di_1}{dt} = -a\frac{di_2}{dt}$$

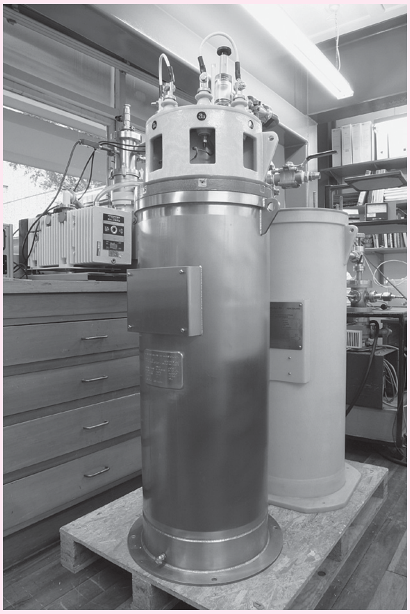
Integrando, tenemos

$$i_1 = -ai_2 + A$$

parte de los elementos, tal temperatura crítica es sólo unos cuantos grados superior al cero absoluto, de modo que se requiere de enfriamiento criogénico muy costoso basado en helio líquido. Sin embargo, con el descubrimiento en los ochenta de los superconductores cerámicos que tienen temperaturas críticas del orden de 90 K (−183°C) y más elevadas, fue posible sustituir el equipo criogénico basado en helio por sistemas de nitrógeno líquido.

La figura 13.29 muestra el prototipo de un transformador superconductor con núcleo parcial desarrollado en la Universidad de Canterbury. Este diseño emplea nitrógeno líquido, elemento que es benigno para el medio ambiente, en lugar de un baño de aceite, y es significativamente menor que un transformador convencional de la misma capacidad. El resultado es una mejora medible de la eficiencia total del transformador, la cual se traduce en un ahorro operativo sustancial para el propietario.

A pesar de lo anterior, todos los diseños tienen desventajas que deben compararse con las ventajas que ofrecen, y los diseños de transformador superconductor no son una excepción a la regla. Por ahora, el obstáculo más importante es el costo relativamente alto de fabricar varios kilómetros de alambre superconductor, comparado con el costo del alambre de cobre. Parte de ello se debe al gran reto que representa la fabricación de alambre superconductor a partir de materiales cerámicos, pero parte también es debida al entubado de plata que se utiliza para rodear al superconductor a fin de ofrecer una trayectoria de baja resistencia a la corriente en caso de que el sistema de enfriamiento falle (aunque menos caro que la plata, el cobre reacciona con la cerámica y, por lo tanto, no es una alternativa viable). El resultado neto es que, si bien tal vez un transformador superconductor ahorre dinero a una empresa eléctrica durante mucho tiempo —la gran mayoría de los transformadores superan los 30 años de servicio—, el costo inicial es mucho más alto que el correspondiente a un transformador resistivo tradicional. En la actualidad, muchas compañías (incluso las empresas de electricidad) se manejan por consideraciones de costos a corto plazo, y no siempre están ansiosas por invertir enormes capitales cuyos beneficios sólo se logren a largo plazo.



■ **FIGURA 13.29** Transformador prototipo de potencia superconductora de núcleo parcial de 15 kVA.
(*Fotografía cortesía del Departamento de Ingeniería Eléctrica y en Computación, Universidad de Canterbury*.)

donde A es una constante de integración que no varía con el tiempo. De tal modo, si pasamos por alto toda la corriente directa en ambos devanados y enfocamos nuestra atención sólo en la parte variable en el tiempo de la respuesta, entonces

$$i_1 = -ai_2$$

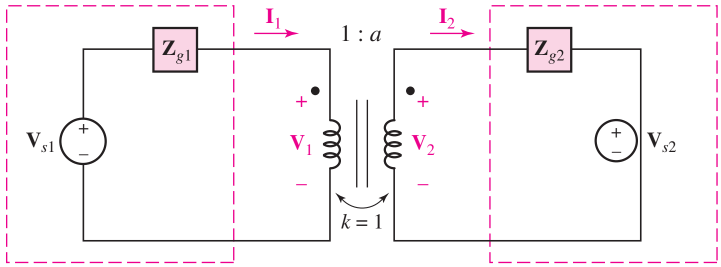
El signo negativo se debe a la ubicación de los puntos y a la selección de las direcciones de corriente en la figura 13.17.

En consecuencia, se obtienen las mismas relaciones (razones) de corrientes y de tensiones en el dominio del tiempo que las determinadas antes en el dominio de la frecuencia, siempre que se pasen por alto las componentes de cd. Los resultados en el dominio del tiempo son más generales, aunque se obtuvieron mediante un proceso menos informativo.

Circuitos equivalentes

Podríamos utilizar las características establecidas del transformador ideal para simplificar circuitos en los que aparecen transformadores ideales. Supongamos, con fines ilustrativos, que todo lo que se encuentra a la izquierda de las terminales del primario

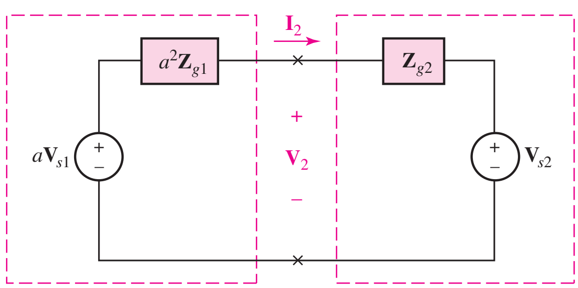
se sustituyó por su equivalente de Thévenin, al igual que en la red a la derecha de las terminales del secundario. Por lo tanto, consideremos el circuito de la figura 13.30. Suponemos una excitación a cualquier frecuencia de pulsación (o angular) ω.



■ **FIGURA 13.30** Las redes conectadas a las terminales del primario y del secundario de un transformador ideal se representan por sus equivalentes de Thévenin.

Ahora se podrían utilizar los teoremas de Thévenin o de Norton para conseguir un circuito equivalente que no contenga un transformador. Por ejemplo, determinemos el equivalente de Thévenin de la red de la izquierda de las terminales del secundario. Al poner en circuito abierto el secundario, $\mathbf{I}_2 = 0$ y por ello $\mathbf{I}_1 = 0$ (recuerde que L_1 es infinita). No aparece tensión en $\mathbf{Z}_{g1}$, y por lo tanto $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}s_1$ y $\mathbf{V}_{2oc} = a\mathbf{V}s_1$. La impedancia de Thévenin se obtiene si se elimina $\mathbf{V}s_1$ y se utiliza el cuadrado de la relación de número de vueltas, teniendo cuidado al utilizar el recíproco de la relación de vueltas, pues observamos hacia el interior de las terminales del secundario. En consecuencia, $\mathbf{Z}_{th2} = \mathbf{Z}_{g1}a^2$.

Como una verificación de nuestro equivalente, determinemos la corriente en el secundario en cortocircuito $\mathbf{I}_{2sc}$. Con el secundario en cortocircuito, el generador del primario encara una impedancia de $\mathbf{Z}_{g1}$ y, por consiguiente, $\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}s_1/\mathbf{Z}_{g1}$. Así, $\mathbf{I}_{2sc} = \mathbf{V}_{s1}/a\mathbf{Z}_{g1}$. La proporción o razón entre la tensión en circuito abierto y la corriente en cortocircuito es: $a^2\mathbf{Z}_{g1}$, como debe ser. El equivalente de Thévenin del transformador y el circuito primario se muestran en el circuito de la figura 13.31.



■ **FIGURA 13.31** El equivalente de Thévenin de la red que está a la izquierda de las terminales del secundario en la figura 13.30 se utiliza para simplificar ese circuito.

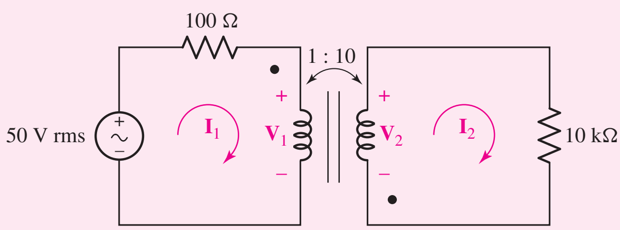
Entonces, cada tensión del primario se debería multiplicar por la relación de número de vueltas, cada corriente del primario dividirse entre esta misma relación y cada impedancia del primario multiplicarse por el cuadrado de ella; después, estas tensiones, corrientes e impedancias modificadas sustituyen a las tensiones, corrientes e impedancias dadas, más el transformador. Si se intercambia cualquier punto, el equivalente se obtiene mediante el negativo de la relación (o razón) del número de vueltas.

Observe que esta equivalencia, como se ilustra en la figura 13.31, sólo es posible si la red se conecta a las dos terminales del primario, y las que están conectadas a las terminales del secundario pueden sustituirse por sus equivalentes de Thévenin. Esto es, cada una debe ser una red de dos terminales. Por ejemplo, si cortamos los dos hilos de conexión del primario en el transformador, el circuito debe dividirse en dos redes independientes; no es posible que haya un elemento de red que establezca un vínculo en el transformador entre el primario y el secundario.

Un análisis similar del transformador y de la red secundaria muestra que se podría reemplazar todo lo que está a la derecha de las terminales del primario por una red idéntica sin el transformador. Para ello se debe dividir cada tensión entre a, multiplicar cada corriente por a y dividir cada impedancia entre a^2. Una inversión de cualquier devanado requiere el uso de una relación de vueltas de $-a$.

EJEMPLO 13.8

En el circuito de la figura 13.32, determine el circuito equivalente en el que se sustituyen el transformador y el circuito del secundario, así como en el que se sustituyen el transformador y el circuito del primario.



■ **FIGURA 13.32** Circuito simple en el que la carga resistiva se acopla con la impedancia de la fuente mediante un transformador ideal.

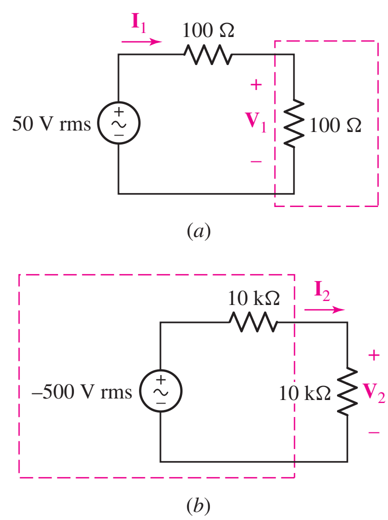
Éste es el mismo circuito analizado en el ejemplo 13.7. Como antes, la impedancia de entrada es $10\,000/(10)^2$, o 100 Ω y por ello $|\mathbf{I}_1| = 250$ mA rms. También calculamos la tensión en la bobina del primario:

$$|\mathbf{V}_1| = |50 - 100\mathbf{I}_1| = 25 \text{ V rms}$$

y de ese modo determinamos que la fuente entrega $(25 \times 10^{-3})(50) = 12.5$ W, de los cuales $(25 \times 10^{-3})^2(100) = 6.25$ W se disipan en la resistencia interna de la fuente y $12.5 - 6.25 = 6.25$ W se entregan a la carga. Ésta es la condición para la transferencia de potencia máxima a la carga.

Si se eliminan el circuito del secundario y el transformador ideal mediante el uso del equivalente de Thévenin, la fuente de 50 V y la resistencia de 100 Ω ven sólo una impedancia de 100 Ω. De este modo se obtiene el circuito simplificado de la figura 13.33*a*. En estas condiciones, la corriente y la tensión del primario resultan de inmediato evidentes.

Si, en lugar de eso, la red de la izquierda de las terminales del secundario se reemplaza por su equivalente de Thévenin, encontramos que (teniendo presente la ubicación de los puntos) $\mathbf{V}_{th} = -10(50) = -500$ V rms y $\mathbf{Z}_{th} = (-10)^2(100) =$ 10 kΩ; el circuito resultante se presenta en la figura 13.33*b*.



■ **FIGURA 13.33** El circuito de la figura 13.32 se simplifica mediante la sustitución de: (*a*) el transformador y el circuito del secundario por el equivalente de Thévenin, o (*b*) el transformador y el circuito del primario por el equivalente de Thévenin.

PRÁCTICA

13.9 Sea $N_1 = 1\,000$ vueltas y $N_2 = 5\,000$ vueltas en el transformador ideal de la figura 13.34. Si $\mathbf{Z}_L = 500 - j400\ \Omega$, determine la potencia promedio (activa) que se entrega a $\mathbf{Z}_L$ para: (*a*) $\mathbf{I}_2 = 1.4\underline{/20^\circ}$ A rms; (*b*) $\mathbf{V}_2 = 900\underline{/40^\circ}$ V rms; (*c*) $\mathbf{V}_1 = 80\underline{/100^\circ}$ V rms; (*d*) $\mathbf{I}_1 = 6\underline{/45^\circ}$ A rms; (*e*) $\mathbf{V}_s = 200\underline{/0^\circ}$ V rms.

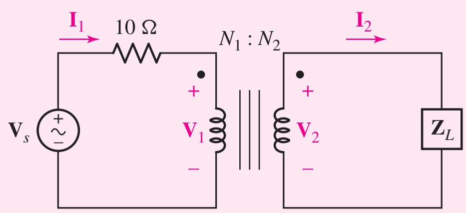


FIGURA 13.34

Respuestas: 980 W; 988 W; 195.1 W; 720 W; 692 W.

RESUMEN Y REPASO

Los transformadores desempeñan un papel importante en la industria eléctrica, al permitir subir las tensiones para la transmisión y bajarlas hasta el nivel necesario por los equipos individuales. En este capítulo estudiamos los transformadores en el contexto más amplio de los circuitos acoplados magnéticamente, donde el flujo magnético correspondiente a la corriente puede enlazar dos o más elementos en un circuito (o incluso circuitos vecinos). Esto se entiende más fácilmente extendiendo el concepto de inductancia que estudiamos en el capítulo 7 para introducir la idea de inductancia mutua (que tiene unidades de henrys). Vimos que el coeficiente M de inductancia mutua está limitado a menos de la media geométrica de las dos inductancias que se acoplan (es decir, $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$), y se usó la convención del punto para determinar la polaridad de la tensión inducida entre las terminales de una inductancia como resultado de la corriente que fluye a través de la otra. Cuando las dos inductancias no están especialmente cercanas, M puede ser más bien pequeña. Sin embargo, en el caso de un transformador bien diseñado, puede alcanzar su valor máximo. Para describir tales situaciones, introdujimos el concepto del coeficiente de acoplamiento k. Cuando se trata de un transformador lineal, el análisis se puede facilitar representando el elemento por una red equivalente en T (o, menos común, ∏), pero se hace mucho análisis de circuitos suponiendo un transformador ideal. En tales casos, ya no nos interesan M ni k, sino más bien la relación de vueltas a. Vimos que las tensiones entre las terminales de los devanados primario y secundario, así como sus corrientes individuales, están relacionados por este parámetro. Esta aproximación es muy útil tanto para el análisis como para el diseño. Concluimos el capítulo con una breve explicación de cómo el teorema de Thévenin se puede aplicar a circuitos con transformadores ideales.

Podríamos continuar, ya que el estudio de los circuitos inductivamente acoplados es un tema interesante; pero, en este momento, podría ser adecuado poner en lista algunos de los conceptos clave que ya se han explicado, junto con los diversos ejemplos correspondientes.

- ❑ La inductancia mutua describe la tensión inducida en los extremos de una bobina debida al campo magnético generado por una segunda bobina. (Ejemplo 13.1)
- ❑ La convención del punto permite asignar un signo al término de la inductancia mutua. (Ejemplo 13.1)

- De acuerdo con la convención del punto, una corriente que entra a la terminal *con punto* de una bobina produce una tensión en circuito abierto con una referencia de tensión positiva en la terminal *con punto* de la segunda bobina. (Ejemplos 13.1, 13.2, 13.3)
- La energía total almacenada en un par de bobinas acopladas incluye tres términos independientes: las dos energías almacenadas en cada una de las autoinductancias representada por el término ($\frac{1}{2}Li^2$) en cada caso y la energía almacenada en la inductancia mutua (Mi_1i_2). (Ejemplo 13.4)
- El coeficiente de acoplamiento está dado por $k = M/\sqrt{L_1L_2}$, y se restringe a valores entre 0 y 1. (Ejemplo 13.4)
- Un transformador lineal consta de dos bobinas acopladas: el devanado primario y el devanado secundario. (Ejemplos 13.5, 13.6)
- Un transformador ideal es un modelo útil de los transformadores prácticos con núcleo de hierro. El coeficiente de acoplamiento se considera unitario y se supone que los valores de inductancia serán infinitos. (Ejemplos 13.7, 13.8)
- La relación (o razón) del número de vueltas $a = N_2/N_1$ de un transformador ideal se relaciona con las tensiones respectivas de la bobina del primario y la del secundario: $\mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1$. (Ejemplo 13.8)
- La relación (o razón) del número de vueltas a relaciona también las corrientes en las bobinas respectivas del primario y del secundario: $\mathbf{I}_1 = a\mathbf{I}_2$. (Ejemplos 13.7, 13.8)

LECTURAS ADICIONALES

Casi todo lo que se desea saber acerca de los transformadores puede encontrarse en:

M. Heathcote, *J&P Transformer Book*, 12a. ed., Oxford: Reed Educational and Professional Publishing Ltd., 1998.

Otro título muy completo acerca de transformadores es:

W. T. McLyman, *Transformer and Inductor Design Handbook*, 3a. ed., Nueva York: Marcel Dekker, 2004.

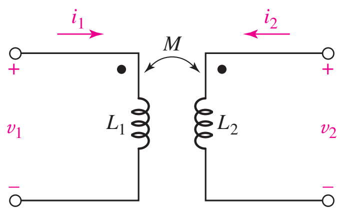
Un buen libro acerca de transformadores con un fuerte enfoque económico es:

B. K. Kennedy, *Energy Efficient Transformers,* Nueva York: McGrawHill, 1998.

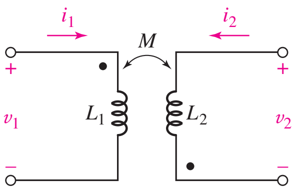
EJERCICIOS

13.1 Inductancia mutua

1. Considere las dos inductancias representadas en la figura 13.35. Suponga $L_1 = 10$ mH, $L_2 = 5$ mH y $M = 1$ mH. Determine la expresión en estado estable para (*a*) v_1 si $i_1 = 0$ e $i_2 = 5 \cos 8t$ A; (*b*) v_2 si $i_1 = 3$ sen $100t$ A e $i_2 = 0$; (*c*) v_2 si $i_1 = 5 \cos(8t - 40°)$ A e $i_2 =$ 4 sen $8t$ A.

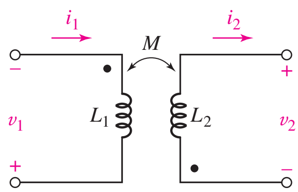


■ **FIGURA 13.35**

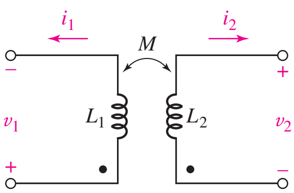


■ **FIGURA 13.36**

2. Con referencia a la figura 13.36, suponga $L_1 = 400$ mH, $L_2 = 230$ mH y $M = 10$ mH. Determine la expresión en estado estable para (*a*) v_1 si $i_1 = 0$ e $i_2 = 2\cos 40t$ A; (*b*) v_2 si $i_1 = 5\cos(40t + 15°)$ A e $i_2 = 0$. (*c*) Repita los incisos (*a*) y (*b*) si M se aumenta a 300 mH.
3. En la figura 13.37, suponga $L_1 = 1\ \mu$H, $L_2 = 2\mu$H y $M = 150$ nH. Obtenga una expresión en estado estable para (*a*) v_1 si $i_2 = -\cos 70t$ mA e $i_1 = 0$; (*b*) v_2 si $i_1 = 55\cos(5t - 30°)$ A; (*c*) v_2 si $i_1 = 6$ sen $5t$ A e $i_2 = 3$ sen $5t$.

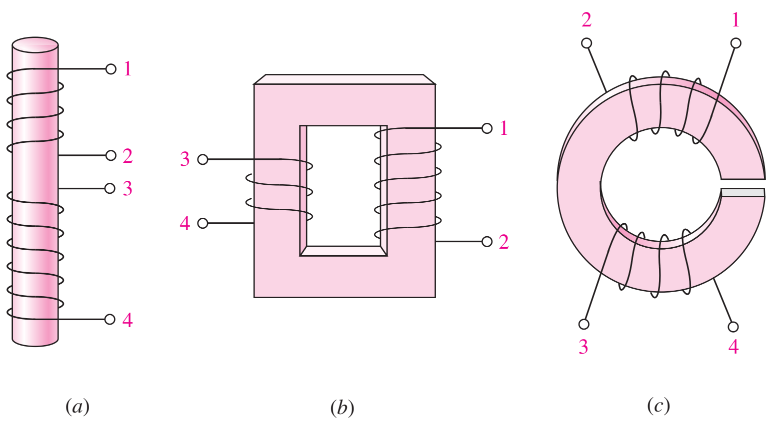


■ **FIGURA 13.37**



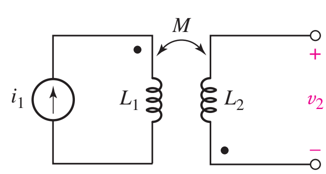
■ **FIGURA 13.38**

4. Para la configuración de la figura 13.38, $L_1 = 0.5L_2 = 1$ mH y $M = 0.85\sqrt{L_1 L_2}$. Calcule $v_2(t)$ si (*a*) $i_2 = 0$ e $i_1 = 5e^{-t}$ mA; (*b*) $i_2 = 0$ e $i_1 = 5\cos 10t$ mA; (*c*) $i_2 = 5\cos 70t$ mA e $i_1 = 0.5i_2$.
5. En la figura 13.39 se muestra la construcción física de tres pares de bobinas acopladas. Señale las dos diferentes ubicaciones posibles de los dos puntos en cada par de bobinas.



■ **FIGURA 13.39**

6. En el circuito de la figura 13.40, $i_1 = 5$ sen $(100t - 80°)$ mA, $L_1 = 1$ H y $L_2 = 2$ H. Si $v_2 = 250$ sen $(100t - 80°)$ mV, calcule M.

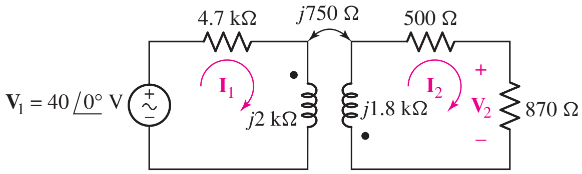


■ **FIGURA 13.40**

7. En el circuito representado en la figura 13.40, determine i_1 si $v_2(t) = 4\cos 5t$ V, $L_1 = 1$ mH, $L_2 = 4$ mH y $M = 1.5$ mH.
8. Calcule v_1 y v_2 si $i_1 = 5$ sen $40t$ mA e $i_2 = 5\cos 40t$ mA, $L_1 = 1$ mH, $L_2 = 3$ mH y $M = 0.5$ mH, para las inductancias acopladas que se muestran en (*a*) la figura 13.37; (*b*) la figura 13.38.

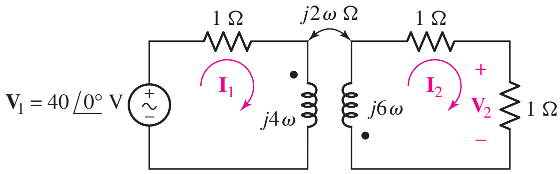
9. Calcule v_1 y v_2 si $i_1 = 3\cos(2\,000t + 13°)$ mA e $i_2 = 5$ sen $400t$ mA, $L_1 = 1$ mH, $L_2 = 3$ mH y $M = 200$ nH, para las inductancias acopladas que se muestran en (*a*) la figura 13.35, (*b*) la figura 13.36.

10. Para el circuito de la figura 13.41, calcule $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_2/\mathbf{I}_1$.



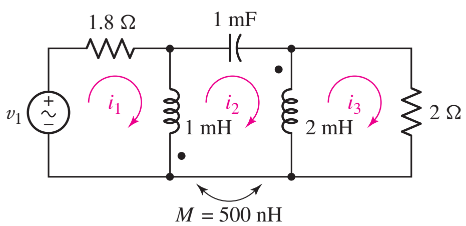
■ **FIGURA 13.41**

11. Para el circuito de la figura 13.42, grafique la magnitud de $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ como una función de la frecuencia ω, dentro del intervalo $0 \le \omega \le 2$ rad/s.



■ **FIGURA 13.42**

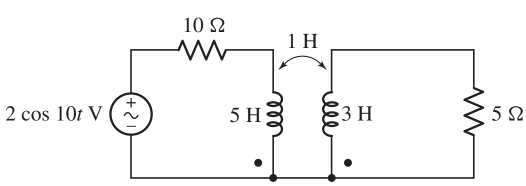
12. Para el circuito de la figura 13.43, (*a*) dibuje la representación en los fasores; (*b*) escriba un sistema completo de ecuaciones de malla; (*c*) calcule $i_2(t)$ si $v_1(t) = 8$ sen $720t$ V.



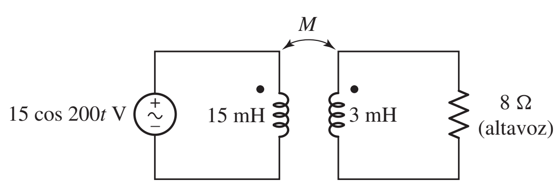
■ **FIGURA 13.43**

13. En el circuito de la figura 13.43, M se reduce en un orden de magnitud. Calcule i_3 si $v_1 = 10\cos(800t - 20°)$ V.

14. En el circuito que se muestra en la figura 13.44, encuentre la potencia promedio absorbida por (*a*) la fuente; (*b*) cada una de las dos resistencias; (*c*) cada una de las dos inductancias; (*d*) la inductancia mutua.



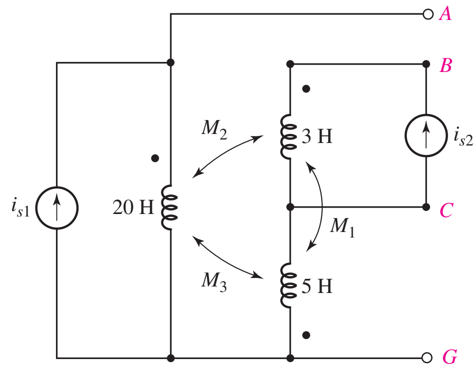
■ **FIGURA 13.44**



■ **FIGURA 13.45**

15. El circuito de la figura 13.45 está diseñado para accionar un altavoz simple de 8 Ω. ¿Qué valor de M da por resultado 1 W de potencia promedio suministrada al altavoz?

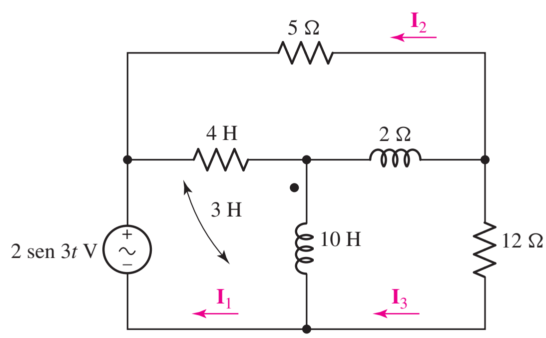
16. Considere el circuito de la figura 13.46. Las dos fuentes son $i_{s1} = 2 \cos t$ mA e $i_{s2} = 1.5$ sen t mA. Si $M_1 = 2$ H, $M_2 = 0$ H y $M_3 = 10$ H, calcule $v_{AG}(t)$.



■ **FIGURA 13.46**

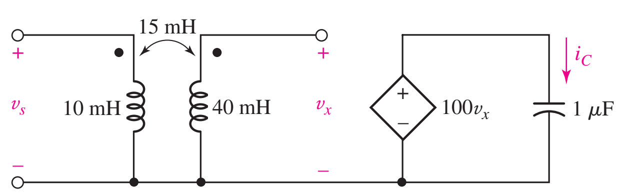
17. Para el circuito de la figura 13.46, $M_1 = 1$ H, $M_2 = 1.5$ H y $M_3 = 2$ H. Si $i_{s1} = 8 \cos 2t$ A e $i_{s2} = 7$ sen $2t$ A, calcule (*a*) $\mathbf{V}_{AB}$; (*b*) $\mathbf{V}_{AG}$; (*c*) $\mathbf{V}_{CG}$.

18. Para el circuito de la figura 13.47, encuentre las corrientes $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$ si $f = 60$ Hz.

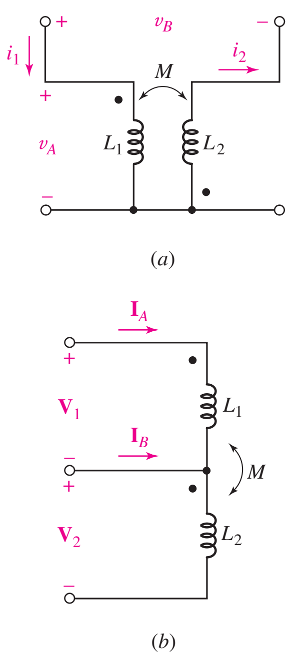


■ **FIGURA 13.47**

19. Determine la expresión de $i_C(t)$ válida para $t > 0$ en el circuito de la figura 13.48, si $v_s(t) = 10t^2u(t)/(t^2 + 0.01)$ V.



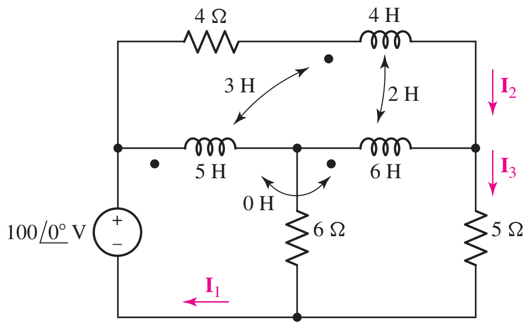
■ **FIGURA 13.48**



■ **FIGURA 13.49**

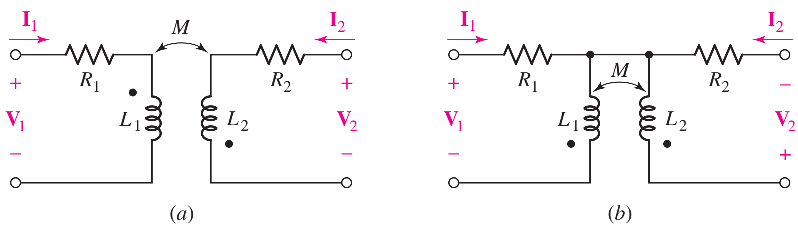
20. Para la red de inductores acoplados de la figura 13.49*a*, suponga $L_1 = 20$ mH, $L_2 = 30$ mH, $M = 10$ mH, y obtenga ecuaciones para v_A y v_B si (*a*) $i_1 = 0$ e $i_2 = 5$ sen $10t$; (*b*) $i_1 = 5 \cos 20t$ e $i_2 = 2 \cos(20t - 100°)$ mA. (*c*) Exprese $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ como funciones de $\mathbf{I}_A$ e $\mathbf{I}_B$ para la red que se muestra en la figura 13.49*b*.

21. Observe que no hay acoplamiento mutuo entre los inductores de 5 y 6 H en el circuito de la figura 13.50. (*a*) Escriba un conjunto de ecuaciones en términos de $\mathbf{I}_1(j\omega)$, $\mathbf{I}_2(j\omega)$, e $\mathbf{I}_3(j\omega)$. (*b*) Calcule $\mathbf{I}_3(j\omega)$ si $\omega =$ rad/s.



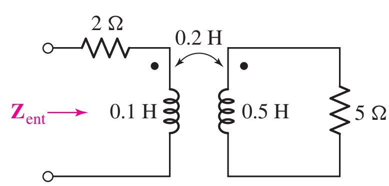
■ FIGURA 13.50

22. Calcule $\mathbf{V}_1(j\omega)$ y $\mathbf{V}_2(j\omega)$ en términos de $\mathbf{I}_1(j\omega)$ e $\mathbf{I}_2(j\omega)$ para cada circuito de la figura 13.51.



■ FIGURA 13.51

23. (*a*) Encuentre $\mathbf{Z}_{ent}(j\omega)$ en la red de la figura 13.52. (*b*) Grafique $\mathbf{Z}_{ent}$ sobre el intervalo de frecuencia de pulsación $0 \leq \omega \leq 1\,000$ rad/s. (*c*) Determine $\mathbf{Z}_{ent}(j\omega)$ para $\omega = 50$ rad/s.

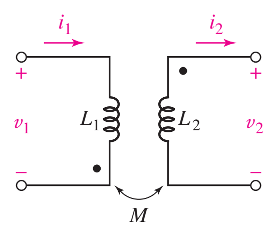


■ FIGURA 13.52

13.2 Consideraciones energéticas

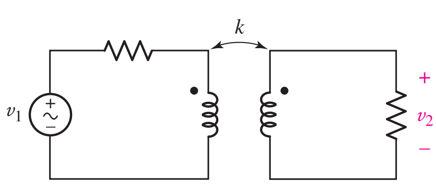
24. Para las bobinas acopladas de la figura 13.53, $L_1 = L_2 = 10$ H, y M es igual a su valor máximo posible. (*a*) Calcule el coeficiente de acoplamiento k. (*b*) Calcule la energía almacenada en el campo magnético que enlaza las dos bobinas en $t = 200$ ms si $i_1 = 10 \cos 4t$ mA e $i_2 = 2 \cos 4t$ mA.

25. Respecto a los inductores acoplados que se muestran en la figura 13.53, $L_1 = 10$ mH, $L_2 = 5$ mH y $k = 0.75$. (*a*) Calcule M. (*b*) Si $i_1 = 100$ sen $40t$ mA e $i_2 = 0$, calcule la energía almacenada en cada bobina y en el campo magnético que enlaza a los dos inductores en $t = 2$ ms. (*c*) Repita el inciso (*b*) si i_2 se iguala a $75 \cos 40t$ mA.



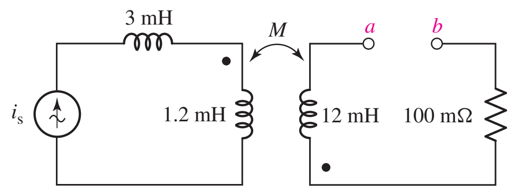
■ FIGURA 13.53

26. Para el circuito de la figura 13.54, $L_1 = 2$ mH, $L_2 = 8$ mH y $v_1 = \cos 8t$ V. (*a*) Obtenga una ecuación para $v_2(t)$. (*b*) Grafique $\mathbf{V}_2$ como una función de k. (*c*) Grafique el ángulo de fase (en grados) de $\mathbf{V}_2$ como una función de k.



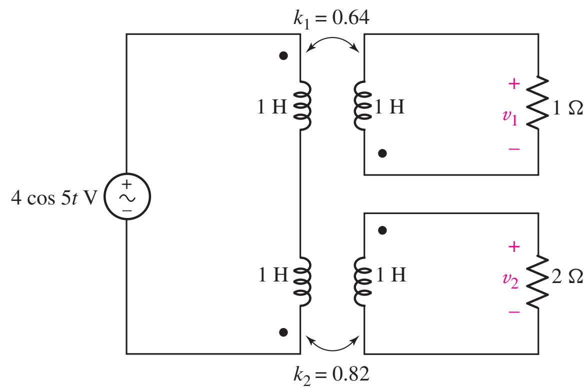
■ FIGURA 13.54

27. Conecte una carga $\mathbf{Z}_L = 5\underline{/33°}$ Ω a las terminales del lado derecho de la figura 13.53. Deduzca una expresión para la impedancia de entrada en $f = 100$ Hz, vista desde las terminales del lado izquierdo, si $L_1 = 1.5$ mH, $L_2 = 3$ mH y $k = 0.55$.
28. Considere el circuito representado en la figura 13.55. El coeficiente de acoplamiento $k = 0.75$. Si $i_s = 5 \cos 200t$ mA, calcule la energía total almacenada en $t = 0$ y $t = 5$ ms si (*a*) *ab* está en circuito abierto (como se muestra); (*b*) *ab* está en cortocircuito.



■ **FIGURA 13.55**

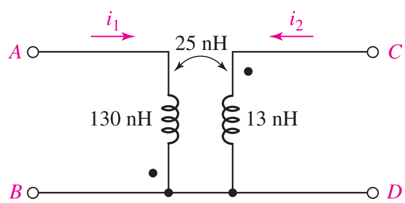
29. Calcule v_1, v_2 y la potencia promedio suministrada a cada resistencia en el circuito de la figura 13.56.



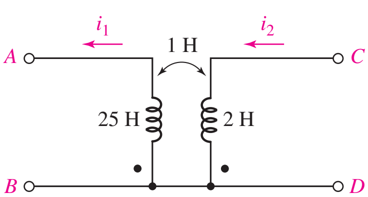
■ **FIGURA 13.56**

13.3 El transformador lineal

30. Suponga los siguientes valores para el circuito representado esquemáticamente en la figura 13.16: $R_1 = 10$ Ω, $R_2 = 1$ Ω, $L_1 = 2$ μH, $L_2 = 1$ μH y $M = 500$ nH. Calcule la impedancia de entrada para $\omega = 10$ rad/s si $\mathbf{Z}_L$ es igual a (*a*) 1 Ω; (*b*) *j*Ω; (*c*) −*j*Ω; (*d*) $5\underline{/33°}$ Ω.
31. Determine el equivalente T del transformador lineal representado en la figura 13.57 (dibuje e identifique adecuadamente el diagrama adecuado).



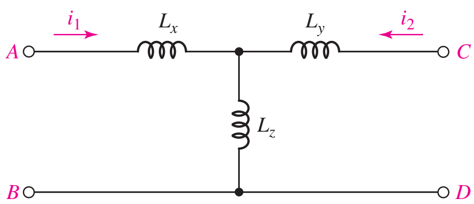
■ **FIGURA 13.57**



■ **FIGURA 13.58**

32. (*a*) Dibuje e identifique adecuadamente el diagrama de la red equivalente T para el transformador lineal que se muestra en la figura 13.58. (*b*) Verifique que los dos son equivalentes conectando una tensión $v_{AB} = 5$ sen $45t$ V y calculando la tensión a circuito abierto v_{CD}.

33. Represente la red que se muestra en la figura 13.59 y un transformador lineal equivalente si (*a*) $L_x = 1$ H, $L_y = 2$ H y $L_z = 4$ H; (*b*) $L_x = 10$ mH, $L_y = 50$ mH y $L_z = 22$ H.

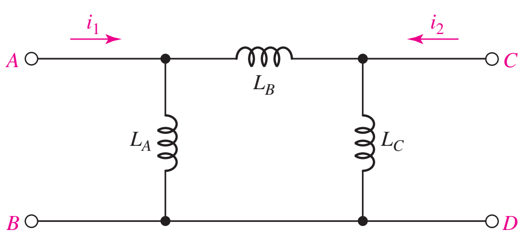


■ **FIGURA 13.59**

34. Suponiendo corriente inicial cero, obtenga una red Π equivalente del transformador representado en la figura 13.57.

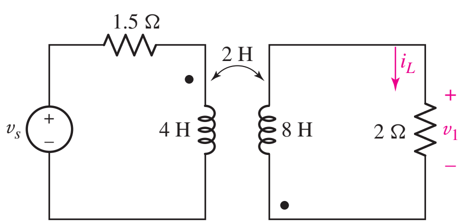
35. (*a*) Dibuje e identifique adecuadamente una red Π equivalente del transformador lineal que se muestra en la figura 13.58, suponiendo cero corriente inicial. (*b*) Verifique su equivalencia con una simulación adecuada.

36. Represente la red Π de la figura 13.60 como un transformador lineal equivalente con corriente inicial cero si (*a*) $L_A = 1$ H, $L_B = 2$ H y $L_C = 4$ H; (*b*) $L_A = 10$ mH, $L_B = 50$ mH y $L_C = 22$ mH.



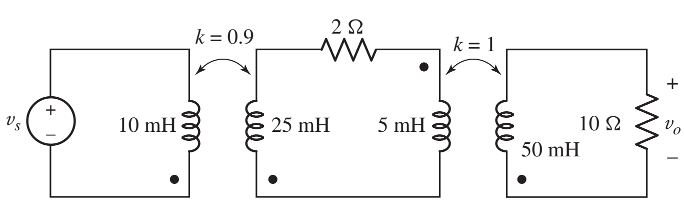
■ **FIGURA 13.60**

37. Para el circuito de la figura 13.61, determine una expresión para (*a*) $\mathbf{I}_L/\mathbf{V}_s$; (*b*) $\mathbf{V}_1/\mathbf{V}_s$.

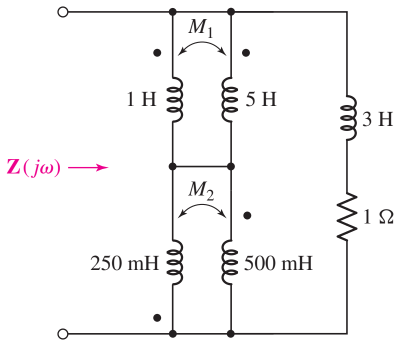


■ **FIGURA 13.61**

38. (*a*) Para el circuito de la figura 13.62, si $v_s = 8 \cos 1\,000t$ V, calcule v_o. (*b*) Verifique su solución mediante una simulación adecuada en PSpice.



■ **FIGURA 13.62**

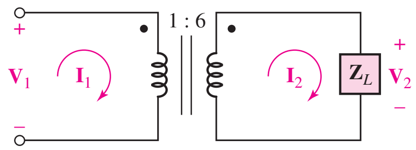


■ **FIGURA 13.63**

39. Respecto a la red que se muestra en la figura 13.63, deduzca una expresión para $\mathbf{Z}(j\omega)$ si M_1 y M_2 se ajustan a sus valores máximos respectivos.

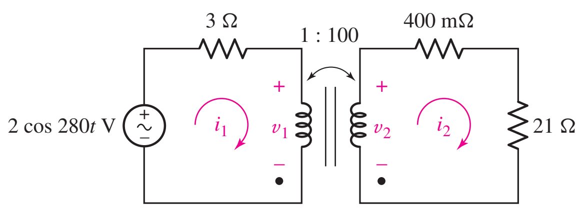
13.4 El transformador ideal

40. Calcule $\mathbf{I}_2$ y $\mathbf{V}_2$ para el circuito de transformador ideal de la figura 13.64 si (*a*) $\mathbf{V}_1 = 4\underline{/32°}$ V y $\mathbf{Z}_L = 1 - j\Omega$; (*b*) $\mathbf{V}_1 = 4\underline{/32°}$ V y $\mathbf{Z}_L = 0$; (*c*) $\mathbf{V}_1 = 2\underline{/118°}$ V y $\mathbf{Z}_L = 1.5\underline{/10°}\ \Omega$.



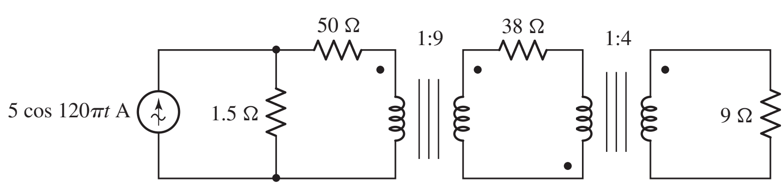
■ **FIGURA 13.64**

41. Respecto al circuito de transformador ideal representado en la figura 13.64, calcule $\mathbf{I}_2$ y $\mathbf{V}_2$ si (*a*) $\mathbf{I}_1 = 244\underline{/0°}$ mA y $\mathbf{Z}_L = 5 - j2\ \Omega$; (*b*) $\mathbf{I}_1 = 100\underline{/10°}$ mA y $\mathbf{Z}_L = j2\ \Omega$.
42. Calcule la potencia promedio suministrada a las resistencias de 400 mΩ y 21 Ω, respectivamente, en el circuito de la figura 13.65.



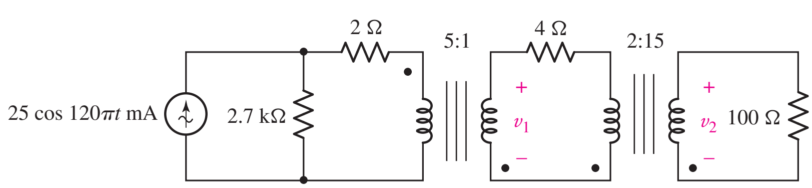
■ **FIGURA 13.65**

43. Respecto al circuito ideal de transformador representado en la figura 13.65, determine un circuito equivalente en el que (*a*) el transformador y el circuito primario se reemplazan, de modo que $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$ permanezcan sin cambio; (*b*) el transformador y el circuito secundario se reemplazan de modo que $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_1$ permanezcan sin cambio.
44. Calcule la potencia promedio suministrada a cada resistencia que se muestra en la figura 13.66.



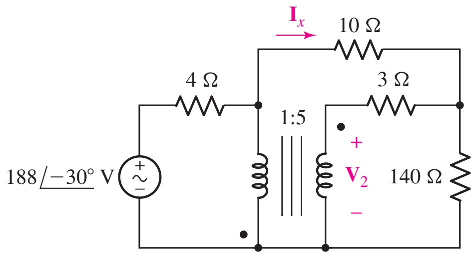
■ **FIGURA 13.66**

45. Respecto al circuito representado en la figura 13.67, calcule (*a*) las tensiones v_1 y v_2; (*b*) la potencia promedio suministrada a cada resistencia.



■ **FIGURA 13.67**

46. Calcule $\mathbf{I}_x$ y $\mathbf{V}_2$ marcados en la figura 13.68.

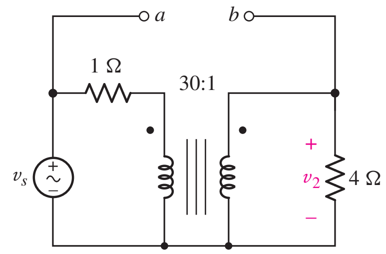


■ **FIGURA 13.68**

47. Se quita el transformador ideal del circuito de la figura 13.68, se gira por su eje vertical y se reconecta de tal manera que las mismas terminales permanecen conectadas a la terminal negativa de la fuente. (*a*) Calcule $\mathbf{I}_x$ y $\mathbf{V}_2$. (*b*) Repita el inciso (*a*) si ambos puntos están colocados en las terminales inferiores del transformador.

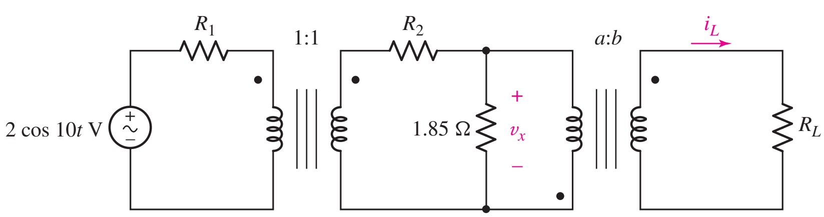
48. Para el circuito de la figura 13.69, $v_s = 117$ sen $500t$ V. Calcule v_2 si las terminales marcadas *a* y *b* (*a*) se dejan en circuito abierto; (*b*) se ponen en cortocircuito; (*c*) se puentean con una resistencia de 2 Ω.

49. La relación de vueltas del transformador ideal en la figura 13.69 se cambia de 30:1 a 1:3. Tome $v_s = 720 \cos 120\pi t$ V, y calcule v_2 si las terminales *a* y *b* (*a*) se ponen en cortocircuito; (*b*) se puentean con una resistencia de 10 Ω; (*c*) se puentean con una resistencia de 1 MΩ.



■ **FIGURA 13.69**

DP 50. Para el circuito de la figura 13.70, $R_1 = 1$ Ω, $R_2 = 4$ Ω y $R_L = 1$ Ω. Seleccione *a* y *b* para lograr una tensión pico de 200 V de magnitud entre las terminales de R_L.



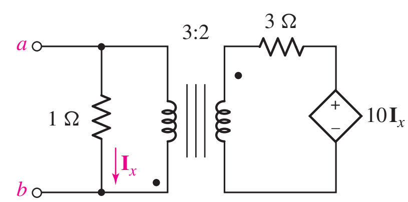
■ **FIGURA 13.70**

51. Calcule v_x para el circuito de la figura 13.70 si $a = 0.01b = 1$, $R_1 = 300$ Ω, $R_2 = 14$ Ω y $R_L = 1$ kΩ.

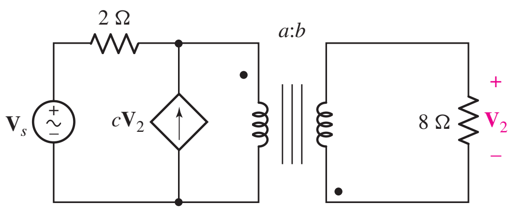
52. (*a*) Con referencia al circuito de transformador ideal en la figura 13.70, determine la corriente de la carga i_L si $b = 0.25a = 1$, $R_1 = 2.2$ Ω, $R_2 = 3.1$ Ω y $R_L = 200$ Ω. (*b*) Verifique su solución mediante una simulación adecuada en PSpice.

53. Determine el equivalente de Thévenin de la red de la figura 13.71 visto desde las terminales *a* y *b*.

54. Calcule $\mathbf{V}_2$ y la potencia promedio suministrada a la resistencia de 8 Ω de la figura 13.72 si $\mathbf{V}_s = 10\underline{/15°}$ V y el parámetro de control *c* es igual a (*a*) 0; (*b*) 1 mS.



■ **FIGURA 13.71**



■ **FIGURA 13.72**

55. (*a*) Para el circuito de la figura 13.72, tome $c = -2.5$ mS y seleccione valores de *a* y *b* de manera que se suministre una potencia promedio de 100 W a la carga de 8 Ω cuando $\mathbf{V}_s = 5\underline{/-35^\circ}$ V, (*b*) verifique su solución con una simulación adecuada en PSpice.

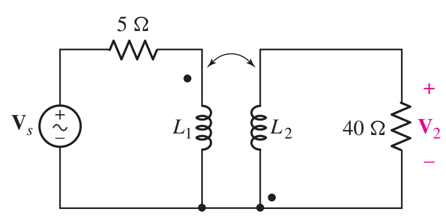
Ejercicios de integración del capítulo

56. Un transformador cuya placa indica 2 300/230 V, 25 kVA opera con voltajes primario y secundario de 2 300 V y 230 V rms, respectivamente, y puede suministrar 25 kVA desde su devanado secundario. Si este transformador se alimenta con 2 300 V rms y se conecta a cargas secundarias que necesitan 8 kW con factor de potencia (PF) igual a 1 y 15 kVA con PF 0.8 en retraso, (*a*) ¿cuál es la corriente primaria?, (*b*) ¿cuántos kilowatts puede todavía suministrar el transformador a una carga que opera a PF 0.95 en retraso? (*c*) Verifique sus respuestas con PSpice.

57. Un amigo trae un sistema de estéreo de colección a su regreso de un viaje reciente a Warnemünde, sin saber que estaba diseñado para operar con el doble de la tensión (240 Vca) de suministro disponible en los tomacorrientes estadounidenses. Diseñe un circuito que permita a su amigo escuchar el estéreo en Estados Unidos, suponiendo que se puede despreciar la diferencia en la frecuencia de operación (50 Hz en Alemania, 60 Hz en Estados Unidos).

58. El amigo al que se refiere el ejercicio 57 intenta justificar la suposición errónea que hizo con respecto al estéreo señalando que el tomacorriente de pared en el baño tenía un socket para su rasuradora eléctrica de Estados Unidos, claramente marcado 120 Vca. No observó que el pequeño letrero debajo del tomacorriente decía claramente "Sólo rasuradoras". Con el conocimiento de que todas las líneas de potencia que entraban al cuarto operaban en 240 Vca, dibuje el probable circuito construido en el interior del tomacorriente del baño y explique por qué está limitado a "sólo rasuradoras".

59. Obtenga una expresión para $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_s$ en el circuito de la figura 13.73 si (*a*) $L_1 = 100$ mH, $L_2 = 500$ mH y M es su valor máximo posible; (*b*) $L_1 = 5L_2 = 1.4$ H y $k = 87\%$ de su valor máximo posible; (*c*) las dos bobinas se pueden tratar como un transformador ideal, en el que la bobina del lado izquierdo tiene 500 vueltas y la bobina del lado derecho tiene 10 000 vueltas.



■ **FIGURA 13.73**

60. Usted observa que su vecino ha instalado una gran bobina de alambre muy próxima a la línea de potencia que entra a la casa de usted. (No hay cables subterráneos en su barrio.) (*a*) ¿Cuál es la probable intención de su vecino? (*b*) ¿Es probable que su plan tenga éxito? *Explique*. (*c*) Al preguntarle, su vecino simplemente se encogió de hombros y explicó que de ninguna manera le puede costar a usted nada, de cualquier modo, ya que no hay nada de él que esté tocando la propiedad de usted. ¿Cierto o falso? *Explique*.

CAPÍTULO 14

Frecuencia compleja y transformada de Laplace



CONCEPTOS CLAVE

- Frecuencia compleja
- Transformada de Laplace
- Transformada inversa
- Uso de tablas de transformadas
- Método de los residuos
- Utilización de MATLAB para manipular polinomios
- Utilización de MATLAB para determinar residuos de fracciones racionales
- Teorema del valor inicial
- Teorema del valor final

INTRODUCCIÓN

Cuando tenemos fuentes que varían con el tiempo, o un circuito con interruptores, hay diversas opciones respecto al método de análisis. Los capítulos 7 a 9 detallan el análisis directo basado en ecuaciones diferenciales, que es especialmente útil para examinar transitorios en el encendido y el apagado. En contraste, los capítulos 10 a 13 describen situaciones de análisis en los que se supone excitación sinusoidal y en los que los transitorios son poco o nada interesantes. Desafortunadamente, no todas las fuentes son senoidales, y hay ocasiones en que es necesario hallar las reacciones del circuito tanto transitorias como de estado estable. En tales casos, la transformada de Laplace resulta ser una herramienta de alto valor.

Muchos libros de texto simplemente entran de lleno a la integral de la transformada de Laplace; pero este procedimiento no aporta ningún entendimiento intuitivo. Por esta razón, hemos elegido introducir primero lo que al lector le puede parecer inicialmente un concepto algo raro: la noción de la frecuencia "compleja". La frecuencia compleja, que es simplemente un artificio matemático, nos permite manipular cantidades cambiantes con el tiempo, tanto periódicas como no periódicas, en paralelo; esto simplifica notablemente el análisis. Después de entender la idea general de la técnica básica, la desarrollamos como herramienta específica de análisis de circuitos en el capítulo 15.

14.1 FRECUENCIA COMPLEJA

Presentamos la noción de ***frecuencia compleja*** considerando una función senoidal amortiguada exponencialmente (completamente real), tal como la tensión

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \qquad [1]$$



donde σ (sigma) es una cantidad real y casi siempre negativa. Aunque hacemos referencia a menudo a esta función como “amortiguada”, tal vez la amplitud senoidal puede aumentar, lo cual ocurre si $\sigma > 0$; sin embargo, el caso más práctico es el de la función amortiguada. El estudio de la respuesta natural de un circuito *RLC* también indica que σ es el negativo del coeficiente de amortiguamiento exponencial.

Podríamos construir una tensión constante a partir de la ecuación [1] si $\sigma = \omega = 0$:

$$v(t) = V_m \cos\theta = V_0 \tag{2}$$

Si sólo igualamos σ a cero, obtenemos una tensión senoidal general

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \tag{3}$$

y si $\omega = 0$, tenemos la tensión exponencial

$$v(t) = V_m \cos\theta \, e^{\sigma t} = V_0 e^{\sigma t} \tag{4}$$

Por lo tanto, la senoide amortiguada de la ecuación [1] incluye como casos especiales la función de cd de la ecuación [2], la senoidal de la ecuación [3] y la exponencial de la ecuación [4].

Se logra un conocimiento adicional de la importancia de σ al comparar la función exponencial de la función [4] con la representación compleja de la función senoidal con un ángulo de fase de cero grados:

$$v(t) = V_0 e^{j\omega t} \tag{5}$$

El neper se nombró de esa manera en honor del filósofo y matemático escocés John Napier (1550-1617) y de su sistema logarítmico; la ortografía de su nombre es históricamente incierta (vea, por ejemplo, H.A. Wheeler, *IRE Transactions on Circuit Theory* 2, 1955, p. 219).

Resulta evidente que ambas funciones, ecuaciones [4] y [5], tienen mucho en común. La única diferencia es que el exponente de la ecuación [4] es real y el de la ecuación [5] imaginario. La similitud entre las dos funciones se remarca al describir a σ como una “frecuencia”, lo cual es una elección de terminología que se explicará en detalle en las secciones siguientes, aunque por ahora sólo necesitamos señalar que σ se denomina de manera específica la *parte real* de la frecuencia compleja; sin embargo, no debe denominarse “frecuencia real”, pues es un término más adecuado para f (o, con menor rigor, para ω). Haremos referencia también a σ como la ***frecuencia neperiana***, nombre que resulta de la unidad dimensional del exponente de e. De tal manera, dada e^{7t} las dimensiones de $7t$ son ***nepers*** (Np), y 7 es la frecuencia neperiana en nepers por segundo.

Forma general

La respuesta forzada de una red a una función forzada general con la forma de la ecuación [1] se obtiene de manera muy simple a través de un método casi idéntico al que se utiliza en el análisis basado en fasores. Una vez que podemos determinar la respuesta forzada a esta senoide amortiguada, debemos reconocer que también se requiere obtener la respuesta forzada ante una tensión de cd, una tensión exponencial y una tensión senoidal. Veremos ahora cómo es posible considerar σ y ω como las partes real e imaginaria respectivamente de una frecuencia compleja.

Sugerimos que cualquier función que pudiera escribirse en la forma

$$f(t) = \mathbf{K}e^{\mathbf{s}t} \tag{6}$$

donde $\mathbf{K}$ y $\mathbf{s}$ son constantes complejas (independientes del tiempo) se caracterice por la frecuencia compleja $\mathbf{s}$; por lo tanto, ésta simplemente es el factor que multiplica t en dicha representación exponencial compleja. Hasta que podamos determinar por

inspección la frecuencia compleja de una función dada, se requiere escribir la función en la forma de la ecuación [6].

El caso de cd

Podríamos aplicar, primero, esta definición a las funciones forzadas más familiares. Por ejemplo, una tensión constante

$$v(t) = V_0$$

se debería escribir en la forma

$$v(t) = V_0 e^{(0)t}$$

En consecuencia, concluimos que la frecuencia compleja de una corriente o de una tensión de cd es cero (es decir, $\mathbf{s} = 0$).

El caso exponencial

El siguiente caso sencillo es la función exponencial

$$v(t) = V_0 e^{\sigma t}$$

que ya está en la forma requerida. La frecuencia compleja de dicha tensión es entonces σ (esto es, $\mathbf{s} = \sigma + j0$).

El caso senoidal

Consideraremos ahora una tensión senoidal que quizá nos dé una ligera sorpresa. Dada

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

deseamos encontrar una expresión equivalente en términos de la exponencial compleja. De acuerdo con nuestra experiencia anterior, usamos la fórmula que dedujimos de la identidad de Euler,

$$\cos(\omega t + \theta) = \tfrac{1}{2}[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}]$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} v(t) &= \tfrac{1}{2} V_m [e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}] \\ &= \left(\tfrac{1}{2} V_m e^{j\theta}\right) e^{j\omega t} + \left(\tfrac{1}{2} V_m e^{-j\theta}\right) e^{-j\omega t} \end{aligned}$$

o

$$v(t) = \mathbf{K}_1 e^{\mathbf{s}_1 t} + \mathbf{K}_2 e^{\mathbf{s}_2 t}$$

Tenemos la *suma* de dos exponenciales complejas, y por ello están presentes *dos* frecuencias complejas: una para cada término. La frecuencia compleja del primer término es $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 = j\omega$ y la del segundo $\mathbf{s} = \mathbf{s}_2 = -j\omega$. Estos dos valores de $\mathbf{s}$ son ***conjugados***, o sea $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1^*$; así que los dos valores de $\mathbf{K}$ también son conjugados $\mathbf{K}_1 = \frac{1}{2} V_m e^{j\theta}$ y $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1^* = \frac{1}{2} V_m e^{-j\theta}$. El primero y el segundo términos completos son entonces conjugados, lo que pudimos haber esperado en vista de que su suma debe ser una cantidad real, $v(t)$.

El conjugado complejo de cualquier número se obtiene sustituyendo simplemente todas las "j" con "$-j$." El concepto se origina en la elección arbitraria de $j = +\sqrt{-1}$. Sin embargo, la raíz negativa es igualmente válida, lo cual lleva a la definición de un conjugado complejo.

El caso senoidal amortiguado exponencialmente

Por último, determinaremos la frecuencia compleja o frecuencias asociadas con la función senoidal amortiguada en forma exponencial, ecuación [1]. En este caso utilizamos también la fórmula de Euler para obtener una representación exponencial compleja:

$$v(t) = V_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$$
$$= \tfrac{1}{2}V_m e^{\sigma t}[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}]$$

y, por lo tanto,

$$v(t) = \tfrac{1}{2}V_m e^{j\theta} e^{j(\sigma + j\omega)t} + \tfrac{1}{2}V_m e^{-j\theta} e^{j(\sigma - j\omega)t}$$

Descubrimos que también se necesita un par complejo conjugado de frecuencias, $\mathbf{s}_1 = \sigma + j\omega$ y $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1^* = \sigma - j\omega$, para describir la senoide amortiguada exponencialmente. En general, ni σ ni ω son iguales a cero, de modo que la forma de onda senoidal que varía de manera exponencial constituye el caso general; las formas de onda constante, senoidal y exponencial son casos especiales.

La relación de s con la realidad

Un valor real positivo de **s**, por ejemplo $\mathbf{s} = 5 + j0$, identifica una función que crece en forma exponencial $\mathbf{K}e^{+5t}$ donde **K** debe ser real si la función va a ser física. Un valor real negativo de **s**, como $\mathbf{s} = -5 + j0$, se refiere a una función $\mathbf{K}e^{-5t}$ que decrece de modo exponencial.

Un valor puramente imaginario de **s** como $j10$, nunca puede asociarse con una cantidad que sólo es real. La forma funcional es $\mathbf{K}e^{j10t}$, que también se escribe como $\mathbf{K}(\cos 10t + j \text{ sen } 10t)$; resulta evidente que ésta posee una parte real y una imaginaria y que cada una es senoidal. Para construir una función real se necesita considerar los valores conjugados de **s**, tales como $\mathbf{s}_{1,2} = \pm j10$, con los que deben asociarse valores conjugados de **K**. Sin embargo, en términos generales identificamos cualquiera de las frecuencias complejas $\mathbf{s}_1 = +j10$ o $\mathbf{s}_2 = -j10$, con una tensión senoidal a la frecuencia angular de 10 rad/s; se entiende la presencia de la frecuencia compleja conjugada. La amplitud y el ángulo de fase de la tensión senoidal dependerán de la elección de **K** para cada una de las dos frecuencias. De tal modo, al elegir $\mathbf{s}_1 = j10$ y $\mathbf{K}_1 = 6 - j8$ donde

Observe que $|6 - j8| = 10$, por lo que $V_m = 2|\mathbf{K}| = 20$. Asimismo *ang* $(6 - j8) = -53.13°$.

$$v(t) = \mathbf{K}_1 e^{\mathbf{s}_1 t} + \mathbf{K}_2 e^{\mathbf{s}_2 t} \qquad \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1^* \qquad \text{y} \qquad \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1^*$$

obtenemos la senoide real $20\cos(10t - 53.1°)$.

De manera similar, un valor general de **s**, como $3 - j5$, se asocia con una cantidad real sólo si lo acompaña su conjugado, $3 + j5$. De nuevo en términos generales, podríamos considerar a cualquiera de las dos frecuencias complejas conjugadas como si describieran una función senoidal que crece de manera exponencial, $e^{3t}\cos 5t$, la amplitud específica y el ángulo de fase dependerán también en este caso de los valores específicos de las **K** complejas conjugadas.

Por ahora ya deberíamos tener cierta apreciación de la naturaleza física de la frecuencia compleja **s**; en general, describe una senoide que varía de manera exponencial. La parte real de **s** se asocia con la variación exponencial; si es negativa, la función disminuye a medida que t aumenta; si es positiva, la función crece; y si es cero, la amplitud senoidal es constante. Cuanto mayor sea la *magnitud* de la parte real de **s**, mayor resultará la tasa de incremento o reducción exponencial. La parte imaginaria de **s** describe la variación senoidal y corresponde de manera específica a la frecuencia en radianes. Una magnitud grande de la parte imaginaria de **s** indica una función del tiempo que cambia con mayor rapidez.

Las magnitudes grandes de la parte real de **s**, de la parte imaginaria de **s** o de la magnitud de **s** indican una función que varía con rapidez.

Se suele utilizar la letra σ para designar la parte real de **s**, y ω (*no* $j\omega$) para expresar la parte imaginaria:

$$\mathbf{s} = \sigma + j\omega \qquad [7]$$

Algunas veces la frecuencia en radianes se conoce como "frecuencia real", aunque esta terminología es muy confusa cuando descubrimos que debemos decir en ese caso que ¡"la frecuencia real" es la parte imaginaria de "la frecuencia compleja"! Cuando necesitemos especificar, denominaremos a **s** la frecuencia compleja, a σ la frecuencia neperiana, a ω la frecuencia radián y a $f = \omega/2\pi$ la frecuencia cíclica; cuando no haya posibilidad de confusión, se podría utilizar "frecuencia" para hacer referencia a cualquiera de estas cuatro cantidades. La *frecuencia neperiana* se mide en nepers por segundo, la *frecuencia radián* en radianes por segundo y la *frecuencia compleja* **s**, en unidades que se denominan de forma indistinta nepers complejos por segundo o radianes complejos por segundo.

PRÁCTICA

14.1 Identifique todas las frecuencias complejas presentes en las funciones en tiempo real siguientes: (*a*) $(2e^{-100t} + e^{-200t})$ sen $2\,000\,t$; (*b*) $(2 - e^{-10t})\cos(4t - \phi)$; (*c*) e^{-10t} cos $10t$ sen $40t$.

14.2 Utilice las constantes reales A, B, C, ϕ, etc., para construir la forma general de la función real de tiempo, correspondiente a una corriente que tiene componentes en estas frecuencias: (*a*) 0, 10, -10 s^{-1}; (*b*) -5, $j8$, $-5 - j8$ s^{-1}; (*c*) -20, 20, $-20 + j20$, $20 - j20$ s^{-1}.

Respuestas: 14.1: $-100 + j2\,000$, $-100 - j2\,000$, $-200 + j2\,000$, $-200 - j2\,000$ s^{-1}; $j4$, $-j4$, $-10 + j4$, $-10 - j4$ s^{-1}; -10, $+j30$, $-10 - j30$, $-10 + j50$, $-10 - j50$ s^{-1}; 14.2: $A + Be^{10t} + Ce^{-10t}$; $Ae^{-5t} + B\cos(8t + \phi_1) + Ce^{-5t} \times \cos(8t + \phi_2)$; $Ae^{-20t} + Be^{20t} + Ce^{-20t}\cos(20t + \phi_1) + De^{20t}\cos(20t + \phi_2)$.

14.2 FUNCIÓN FORZADA SENOIDAL AMORTIGUADA

Es tiempo de poner a trabajar este concepto de frecuencia compleja.

La senoide general que varía exponencialmente, que podemos representar con la función de tensión

$$v(t) = V_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta) \qquad [8]$$

se expresa en términos de la frecuencia compleja **s**, mediante la identidad de Euler como antes:

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \theta)}\} \qquad [9]$$

o

$$v(t) + \text{Re}\{V_m e^{\sigma t} e^{j(-\omega t - \theta)}\} \qquad [10]$$

Cualquier representación es apropiada, así que ambas expresiones nos recuerdan que un *par* de frecuencias complejas conjugadas se asocia con una senoide o con una senoide amortiguada en forma exponencial. La ecuación [9] se relaciona en forma más

directa con la senoide amortiguada dada, de modo que trataremos fundamentalmente con ella. Agrupando factores, se sustituye luego $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$ en:

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega)t}\}$$

y obtenemos

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{\mathbf{s}t}\} \qquad [11]$$

Antes de aplicar una función forzada de esta forma a cualquier circuito, debemos observar la semejanza de esta última representación de la senoide amortiguada con la representación correspondiente a una senoide *no amortiguada*, la cual se estudió en el capítulo 10:

$$\text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{j\omega t}\}$$

La única diferencia es que ahora tenemos **s** donde antes se tuvo $j\omega$. En lugar de restringir las funciones forzadas senoidales y sus frecuencias en radianes, en este caso ampliamos la notación para incluir la función forzada senoidal amortiguada a una frecuencia compleja. No es sorpresa en lo absoluto ver cómo más adelante en esta sección formularemos una descripción *en el dominio de la frecuencia* de la senoide amortiguada de modo exponencial exactamente de la misma manera en que hicimos con la senoide. Sólo omitiremos la notación Re{ } y se suprimirá $e^{\mathbf{s}t}$.

Ahora ya podemos aplicar la senoide amortiguada exponencialmente, según se indica mediante las ecuaciones [8], [9], [10] u [11], a una red eléctrica, donde la respuesta forzada —quizá una corriente en alguna rama de la red— es la respuesta que se desea. Dado que la respuesta forzada tiene la forma de la función forzada, así como su integral y sus derivadas, se podría suponer que la respuesta es

$$i(t) = I_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$

o

$$i(t) = \text{Re}\{I_m e^{j\phi} e^{\mathbf{s}t}\}$$

donde la frecuencia compleja tanto de la fuente como de la respuesta deben ser idénticas.

Si recordamos en este momento que la parte *real* de la función forzada compleja produce la parte *real* de la respuesta, en tanto que la parte *imaginaria* origina la parte *imaginaria* de la respuesta, entonces nos estamos dirigiendo también en este caso a la aplicación de una función forzada *compleja* en la red y obtenemos una respuesta compleja cuya parte real es la respuesta real deseada. En realidad, trabajaremos con la notación Re{ } omitida, aunque es necesario percatarse de que quizá se reinserte en cualquier tiempo y de que *es necesario* hacerlo, siempre que deseemos la respuesta en el dominio del tiempo. De tal modo, dada la función forzada real

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{\mathbf{s}t}\}$$

aplicamos la función forzada compleja $V_m e^{j\theta}\, e^{\mathbf{s}t}$; la respuesta forzada resultante $I_m e^{j\phi}$ $e^{\mathbf{s}t}$ es compleja, y ésta debe tener como su parte real la respuesta forzada en el dominio del tiempo que se desea:

$$i(t) = \text{Re}\{I_m e^{j\phi} e^{\mathbf{s}t}\}$$

La solución a nuestro problema de análisis de circuitos consiste en determinar la amplitud I_m y el ángulo de fase ϕ correspondientes a la respuesta desconocida.

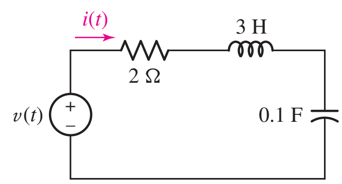
Antes de llevar a cabo en realidad los detalles del análisis de un problema y ver cómo el procedimiento se asemeja al del análisis senoidal, vale la pena describir los pasos del método básico.

1. Primero definimos las características del circuito con un conjunto de ecuaciones integrodiferenciales de lazo o nodales.
2. Luego las funciones forzadas dadas y las respuestas forzadas supuestas, todas en forma compleja, se sustituyen en las ecuaciones y se efectúan las integraciones y las diferenciaciones indicadas.
3. Todos los términos de todas las ecuaciones contendrán en ese caso el mismo factor e^{st}. Por lo tanto, dividimos todo entre este factor, o "eliminamos e^{st}", entendiendo que éste debe reinsertarse si se desea la descripción en el dominio del tiempo de cualquier función de respuesta.

Con la notación Re{ } y el factor e^{st} eliminados, convertimos todas las tensiones y las corrientes del *dominio del tiempo* al *dominio de la frecuencia*. Las ecuaciones integrodiferenciales se convierten en ecuaciones algebraicas y su solución se obtiene con tanta facilidad como en el estado senoidal permanente. Ilustremos el método básico mediante un ejemplo numérico.

EJEMPLO 14.1

Aplique la función forzada $v(t) = 60e^{-2t}\cos(4t + 10°)$ V al circuito *RLC* en serie de la figura 14.1 y especifique la respuesta forzada determinando los valores de I_m y ϕ en la expresión $i(t) = I_m e^{-2t}\cos(4t + \phi)$ en el dominio del tiempo.



■ **FIGURA 14.1** Circuito *RLC* en serie al que se aplica una función forzada senoidal amortiguada. Se desea una solución en el dominio de la frecuencia de *i*(*t*).

Expresamos primero la función forzada en la notación Re{ }:

$$v(t) = 60e^{-2t}\cos(4t + 10°) = \text{Re}\{60e^{-2t}e^{j(4t+10°)}\}$$

$$= \text{Re}\{60e^{j10°}e^{(-2+j4)t}\}$$

o

$$v(t) = \text{Re}\{\mathbf{V}e^{\mathbf{s}t}\}$$

donde

$$\mathbf{V} = 60\underline{/10°} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{s} = -2 + j4$$

Luego de eliminar Re{ }, nos queda la función forzada compleja

$$60\underline{/10°}e^{\mathbf{s}t}$$

De modo similar representamos la respuesta reconocida mediante la cantidad compleja $\mathbf{I}e^{\mathbf{s}t}$, donde $\mathbf{I} = I_m\underline{/\phi}$.

El siguiente paso debe ser la ecuación integrodiferencial del circuito. A partir de la ley de tensiones de Kirchhoff, obtenemos

$$v(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = 2i + 3\frac{di}{dt} + 10\int i\,dt$$

(*continúa*)

Si la notación que aquí se presenta parece desconocida, tal vez quiera el lector hacer una pausa y leer el apéndice 5, especialmente la sección 4, que trata la forma polar de representación de números complejos.

así que sustituimos la función forzada compleja dada y la respuesta forzada compleja supuesta en esta ecuación:

$$60\underline{/10^\circ}e^{\mathbf{s}t} = 2\mathbf{I}e^{\mathbf{s}t} + 3\mathbf{s}\mathbf{I}e^{\mathbf{s}t} + \frac{10}{\mathbf{s}}\mathbf{I}e^{\mathbf{s}t}$$

A continuación se suprime el factor común $e^{\mathbf{s}t}$:

$$60\underline{/10^\circ} = 2\mathbf{I} + 3\mathbf{s}\mathbf{I} + \frac{10}{\mathbf{s}}\mathbf{I}$$

y entonces

$$\mathbf{I} = \frac{60\underline{/10^\circ}}{2 + 3\mathbf{s} + 10/\mathbf{s}}$$

Tenemos ahora $\mathbf{s} = -2 + j4$ y resolvemos para la corriente compleja $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{I} = \frac{60\underline{/10^\circ}}{2 + 3(-2 + j4) + 10/(-2 + j4)}$$

Después de manipular los números complejos, tenemos

$$\mathbf{I} = 5.37\underline{/-106.6^\circ}$$

Por lo tanto, I_m es 5.37 A, ϕ corresponde a -106.6° y la respuesta forzada puede escribirse directamente (recuerde que $\mathbf{s} = -2 + j4$) como

$$i(t) = 5.37e^{-2t}\cos(4t - 106.6^\circ) \text{ A}$$

De este modo hemos resuelto el problema reduciendo una expresión basada en el *cálculo* a una expresión *algebraica*. Esto es sólo una pequeña indicación del poder de la técnica que estamos a punto de estudiar.

PRÁCTICA

14.3 Identifique todas las frecuencias complejas presentes en las funciones en tiempo real siguientes: (*a*) 24 sen$(90t + 60^\circ)$ A; (*b*) $24e^{-10t}\cos(90t + 60^\circ)$ A; (*c*) $24e^{-10t}\cos 60^\circ \times \cos 90t$ A. Si $\mathbf{V} = 12\underline{/35^\circ}$ V, determine: $v(t)$ para $\mathbf{s}$ igual a (*d*) 0; (*e*) $-20\ \text{s}^{-1}$; (*f*) $-20 + j5\ \text{s}^{-1}$.

Respuestas: $24\underline{/-30^\circ}$ A; $24\underline{/60^\circ}$ A; $12\underline{/0^\circ}$ A; 9.83 V; $9.83e^{-20t}$ V; $12e^{-20t}\cos(5t + 35^\circ)$ V.

14.3 DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Nuestra meta constante ha sido el análisis: dada alguna función forzada en algún punto de un circuito lineal, determinar la respuesta en algún otro punto. En varios de los primeros capítulos jugamos sólo con funciones forzadas de cd y respuestas de la forma V_0e^0. Sin embargo, luego de la introducción de la inductancia y de la capacitancia, la excitación repentina en cd en los circuitos simples *RL* y *RC* produjo respuestas que variaban de manera exponencial con el tiempo: $V_0e^{\sigma t}$. Cuando consideramos el circuito *RLC*, las respuestas tomaron la forma de la senoide variable exponencialmente, $V_0e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$. Todo este trabajo se llevó a cabo en el dominio del tiempo, por lo que la función forzada de cd fue la única que tomamos en cuenta.

A medida que avanzamos en el uso de la función forzada senoidal, el tedio y la complejidad de resolver las ecuaciones integrodiferenciales nos orillaron a tratar de

encontrar una manera más fácil de resolver los problemas. El resultado: la transformada fasorial, así que podríamos recordar que transitamos a través de la consideración de una función forzada compleja de la forma $V_0 e^{j\theta} e^{j\omega t}$. Tan pronto como concluimos que no era necesario el factor que contenía a t, sólo nos quedó el fasor $V_0 e^{j\theta}$; habíamos llegado al *dominio de la frecuencia*.

Después de esto, una flexión menor de la corteza cerebral originó que aplicáramos una función forzada de la forma $V_0 e^{j\theta} e^{(\sigma+j\omega)t}$, lo que condujo a la invención de la frecuencia compleja **s** y, por ello, a relegar todas las formas funcionales anteriores a casos especiales: cd ($\mathbf{s} = 0$), exponencial ($\mathbf{s} = \sigma$), senoidal ($\mathbf{s} = j\omega$) y la senoide exponencial ($\mathbf{s} = \sigma + j\omega$). Por analogía con la experiencia previa con fasores, vimos que en estos casos podríamos omitir el factor que contenía a t y obtuvimos de nuevo una solución al trabajar en el dominio de la frecuencia.

La transformada bilateral de Laplace

Sabemos que las funciones forzadas senoidales propician respuestas senoidales y que además las funciones forzadas exponenciales dan como resultado respuestas exponenciales. Sin embargo, como ingenieros pragmáticos debemos enfrentar con muchas formas de onda que no son senoidales ni exponenciales, como las ondas cuadradas, las formas de onda de diente de sierra y los pulsos que se inician en instantes arbitrarios. Cuando tales funciones forzadas se aplican a un circuito lineal, veremos que la respuesta no es similar a la forma de la onda de excitación, ni tampoco es exponencial. Como consecuencia, no podemos eliminar los términos que contienen t para formar una respuesta en el dominio de la frecuencia, lo cual es bastante desafortunado, pues trabajar en él demostró ser mucho más agradable.

Sin embargo, existe una solución que aprovecha una técnica que permitirá desarrollar cualquier función a una *suma* de formas de onda exponenciales, cada una con su propia frecuencia compleja. Dado que estamos considerando circuitos lineales, sabemos que la respuesta total del circuito se obtiene simplemente mediante la suma de la respuesta individual a cada forma de onda exponencial. Y, al tratar cada forma de onda exponencial, ignoraríamos de nuevo todo término que contenga a t y trabajaríamos en cambio en el dominio de la *frecuencia*. Desafortunadamente, se requiere un número infinito de términos exponenciales para representar con precisión una función general del tiempo, por lo que optar por un método de fuerza bruta y aplicar la superposición a las series exponenciales podría ser poco conveniente. Mejor sumaremos estos términos efectuando una integración, lo que tendrá como resultado una función en el dominio de la frecuencia.

Formalizaremos este método utilizando lo que se conoce como la ***transformada de Laplace***, definida para una función general $f(t)$ como

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t)\, dt \qquad [12]$$

La deducción matemática de esta operación integral requiere la comprensión de las series y de la transformada de Fourier, que se explican en el capítulo 18. Sin embargo, el concepto fundamental detrás de la transformada de Laplace se entiende con base en el análisis de la frecuencia compleja y en la experiencia previa con fasores y con la conversión en ambos sentidos entre los dominios del tiempo y de la frecuencia. En realidad, esto es precisamente lo que hace la transformada de Laplace: convierte la función general $f(t)$ en el dominio del tiempo en una representación correspondiente, $\mathbf{F}(\mathbf{s})$, en el dominio de la frecuencia.

La transformada inversa bilateral de Laplace

La ecuación [12] define la transformada de *dos lados*, o *bilateral*, de Laplace de $f(t)$. El término *dos lados* o *bilateral* se usa para subrayar el hecho de que tanto los valores

positivos como los negativos de t se incluyen en el intervalo de integración. La operación inversa, conocida a menudo como ***transformada inversa de Laplace***, también se define como la expresión integral[1]

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{\mathbf{s}t} \mathbf{F}(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \tag{13}$$

donde la constante real σ_0 se incluye en los límites para garantizar la convergencia de la integral impropia; las dos ecuaciones [12] y [13] constituyen el par de transformadas bilaterales de Laplace. La buena noticia es que nunca se necesita recurrir a la ecuación [13] en el estudio del análisis de circuitos: hay una alternativa rápida y fácil que más adelante se aprenderá.

La transformada unilateral de Laplace

En muchos de los problemas de análisis de circuitos, las funciones forzada y de respuesta no existen para siempre en el tiempo, sino que aparecen en algún instante específico que casi siempre se elige como $t = 0$. De tal modo, en funciones de tiempo que no existen para $t < 0$ o en aquellas funciones de tiempo cuyo comportamiento de $t < 0$ no es de interés, la descripción en el dominio del tiempo se considera como $v(t)u(t)$. La integral de definición de la transformada de Laplace se toma con el límite inferior en $t = 0^-$ a fin de incluir el efecto de cualquier discontinuidad en $t = 0$, tal como un impulso o una singularidad de orden superior. La transformada de Laplace correspondiente es entonces

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t) u(t)\, dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t)\, dt$$

Esta igualdad define la transformada de Laplace *unilateral* de $f(t)$, o simplemente la *transformada de Laplace* de $f(t)$, dándose por entendido el término unilateral. La expresión de la transformada inversa permanece constante, pero cuando se evalúa, se entiende que es válida sólo para $t > 0$. Aquí radica entonces la definición del par de transformadas de Laplace que utilizaremos en lo sucesivo:

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t)\, dt \tag{14}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{\mathbf{s}t} \mathbf{F}(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \tag{15}$$

$$f(t) \Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{s})$$

La cursiva $\mathscr{L}$ también se usaría para indicar la operación de la transformada directa o inversa de Laplace:

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathscr{L}\{f(t)\} \qquad \text{y} \qquad f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\}$$

[1] Si pasamos por alto el factor confuso de $1/2\pi j$ y vemos la integral como una sumatoria sobre todas las frecuencias, de modo que $f(t) \propto \Sigma\, [\mathbf{F}(\mathbf{s})\, d\mathbf{s}] e^{\mathbf{s}t}$, se refuerza la noción de que $f(t)$ es en realidad una suma de términos de frecuencia compleja que tienen una magnitud proporcional a $\mathbf{F}(\mathbf{s})$.

EJEMPLO **14.2**

Encuentre la transformada de Laplace de la función $f(t) = 2u(t - 3)$.

Para determinar la transformada unilateral de Laplace de $f(t) = 2u\,(t - 3)$, debemos evaluar la integral

$$\begin{aligned}\mathbf{F(s)} &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t)\,dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} 2u(t-3)\,dt \\ &= 2\int_{3}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\,dt\end{aligned}$$

Simplificando, encontramos

$$\mathbf{F(s)} = \frac{-2}{\mathbf{s}} e^{-\mathbf{s}t}\Big|_3^{\infty} = \frac{-2}{\mathbf{s}}(0 - e^{-3\mathbf{s}}) = \frac{2}{\mathbf{s}} e^{-3\mathbf{s}}$$

PRÁCTICA

14.4 Sea $f(t) = -6e^{-2t}\,[u\,(t + 3) - u\,(t - 2)]$. Determine: (*a*) la $\mathbf{F(s)}$ bilateral; (*b*) la $\mathbf{F(s)}$ unilateral.

Respuestas: $\frac{6}{2+\mathbf{s}}[e^{-4-2\mathbf{s}} - e^{6+3\mathbf{s}}]$; $\frac{6}{2+\mathbf{s}}[e^{-4-2\mathbf{s}} - 1]$.

14.4 TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE FUNCIONES DE TIEMPO SIMPLES

En esta sección empezaremos a integrar un catálogo de transformadas de Laplace de las funciones de tiempo que se presentan con mayor frecuencia en el análisis de circuitos; por ahora supondremos que la función de interés es una tensión, aunque una elección de este tipo es estrictamente arbitraria. Crearemos este catálogo, al menos al principio, utilizando la definición

$$\mathbf{V(s)} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} v(t)\,dt = \mathscr{L}\{v(t)\}$$

la cual, junto con la expresión de la transformada inversa

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{\mathbf{s}t}\mathbf{V(s)}\,d\mathbf{s} = \mathscr{L}^{-1}\{\mathbf{V(s)}\}$$

establece una correspondencia uno a uno entre $v(t)$ y $\mathbf{V(s)}$. Esto es, para toda $v(t)$ para la que exista $\mathbf{V(s)}$ hay una $\mathbf{V(s)}$ única. En este punto quizá veamos con cierta angustia la más bien siniestra forma de la transformada inversa. ¡No hay razón para asustarse! Como veremos dentro de poco, *un estudio introductorio de la teoría de la transformada de Laplace no requiere la evaluación real de esta integral*. Al ir del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia y al aprovechar la unicidad que acaba de mencionarse, podremos ser capaces de generar un catálogo de pares de transformadas que ya contienen la función de tiempo correspondiente para casi toda transformada que deseemos invertir.

Sin embargo, antes de seguir es necesario hacer una pausa para considerar si existe alguna posibilidad de que la transformada incluso quizá no exista para alguna $v(t)$ que nos interese. Un conjunto de condiciones suficiente para garantizar la convergencia absoluta de la integral de Laplace de $\text{Re}\{\mathbf{s}\} > \sigma_0$ es:

1. La función $v(t)$ es integrable en todo intervalo finito $t_1 < t < t_2$, donde $0 \le t_1 < t_2 < \infty$.
2. $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\sigma_0 t}|v(t)|$ existe para algún valor de σ_0.

El analista de circuitos rara vez estudia las funciones de tiempo que no satisfacen estas condiciones.[2]

Función escalón unitario $u(t)$

Consideremos ahora algunas transformadas específicas. Examinamos primero la transformada de Laplace de la función escalón unitario $u(t)$. Tomando en cuenta la ecuación definida, escribiríamos

$$\mathscr{L}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}u(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\,dt$$
$$= -\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-\mathbf{s}t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\mathbf{s}}$$

para $\text{Re}\{\mathbf{s}\} > 0$, satisfaciendo la condición 2. Por lo tanto,

La notación de doble flecha se suele usar para indicar pares de transformadas de Laplace.

$$u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}} \qquad [16]$$

y nuestro primer par de transformadas de Laplace se estableció con gran facilidad.

Función impulso unitario $\delta(t - t_0)$

Otra función de singularidad cuya transformada reviste un considerable interés es la función impulso unitario $\delta(t - t_0)$ la cual, tal como se grafica en la figura 14.2, parece bastante extraña en un principio, aunque es muy útil en la práctica. La función impulso unitario se define para tener un área unitaria, por lo que

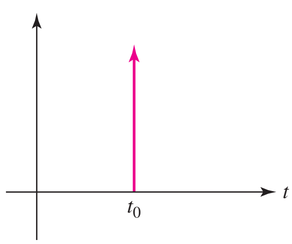


FIGURA 14.2 La función de impulso unitario $\delta(t - t_0)$ se usa a menudo para aproximar un impulso de señal cuya duración es muy corta, en comparación con las constantes de tiempo del circuito.

$$\delta(t - t_0) = 0 \qquad t \neq t_0$$
$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t - t_0)\,dt = 1$$

donde ε es una constante pequeña. Así, esta "función" (un término al que muchos puristas matemáticos hacen reverencia) tiene un valor distinto de cero sólo en el punto t_0. Por lo tanto, para $t_0 > 0^-$, se encuentra que la transformada de Laplace es

$$\mathscr{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\delta(t - t_0)\,dt = e^{-\mathbf{s}t_0}$$
$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-\mathbf{s}t_0} \qquad [17]$$

En particular, observe que se obtiene

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1 \qquad [18]$$

para $t_0 = 0$.

[2] Ejemplos de tales funciones son e^{t^2} y e^{e^t}, pero no t^n o n^t. Para una explicación un poco más detallada de la transformada de Laplace y sus aplicaciones, consulte la obra de Clare D. McGillem y George R. Cooper, *Continuous and Discrete Signal and System Analysis*, 3a. ed., Oxford University Press, North Carolina, 1991, capítulo 5.

Otra característica interesante de la función impulso unitario se conoce como ***propiedad de filtrado***. Considere la integral de la función impulso multiplicada por una función arbitraria $f(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt$$

Puesto que la función $\delta(t-t_0)$ es cero en todos lados, excepto en $t = t_0$, el valor de la integral es simplemente $f(t_0)$. La propiedad resulta ser *muy* útil para simplificar las expresiones integrales que contienen la función impulso unitario.

Función exponencial $e^{-\alpha t}$

Recordando nuestro previo interés en la función exponencial, examinamos su transformada:

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-\mathbf{s}t}\,dt$$
$$= -\frac{1}{\mathbf{s}+\alpha}e^{-(\mathbf{s}+\alpha)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\mathbf{s}+\alpha}$$

y, por lo tanto,

$$e^{-\alpha t}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}+\alpha} \qquad [19]$$

Se entiende que $\text{Re}\{\mathbf{s}\} > -\alpha$.

Función rampa $tu(t)$

Como un ejemplo final, por el momento consideraremos la función rampa $tu(t)$. Obtenemos

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} te^{-\mathbf{s}t}\,dt = \frac{1}{\mathbf{s}^2}$$
$$tu(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}^2} \qquad [20]$$

ya sea mediante integración directa por partes o a partir de una tabla de integrales.

¿Y qué hay respecto de la función $te^{-\alpha t}u(t)$? Dejamos para el lector demostrar que

$$te^{-\alpha t}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)^2} \qquad [21]$$

Por supuesto, existen muchas funciones en el dominio del tiempo adicionales que valen la pena considerar, pero sería mejor si hiciéramos una pausa por un momento para tener en cuenta el proceso inverso —la transformada inversa de Laplace— antes de agregar más funciones a la lista.

PRÁCTICA

14.5 Determine $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ si $v(t)$ es igual a (*a*) $4\delta(t) - 3u(t)$; (*b*) $4\delta(t-2) - 3tu(t)$; (*c*) $[u(t)][u(t-2)]$.

14.6 Determine $v(t)$ si $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ es igual a (*a*) 10; (*b*) $10/\mathbf{s}$; (*c*) $10/\mathbf{s}^2$; (*d*) $10/[\mathbf{s}(\mathbf{s}+10)]$; (*e*) $10\mathbf{s}/(\mathbf{s}+10)$.

Respuestas: 14.5: $(4\mathbf{s}-3)/\mathbf{s}$; $4e^{-2\mathbf{s}} - (3/\mathbf{s}^2)$; $e^{-2\mathbf{s}}/\mathbf{s}$. 14.6: $10\delta(t)$; $10u(t)$; $10tu(t)$; $u(t) - e^{-10t}u(t)$; $10\delta(t) - 100e^{-10t}u(t)$.

14.5 TÉCNICAS DE LA TRANSFORMADA INVERSA

Teorema de linealidad

Dijimos que una expresión integral (ecuación [13]) se puede aplicar para convertir una expresión en el dominio **s** al dominio del tiempo. Asimismo, hicimos referencia al hecho de que dicho método podría evitarse si se explota la característica de unicidad de cualquier par de transformadas de Laplace. Con la finalidad de capitalizar completamente este hecho, debemos presentar en primera instancia uno de los teoremas de la transformada de Laplace más famosos y de mayor utilidad: el ***teorema de linealidad***, el cual establece que la transformada de Laplace de la suma de dos o más funciones del tiempo es igual a la suma de las transformadas de las funciones de tiempo individuales. En el caso de dos funciones de tiempo, tenemos que

Ésta se conoce como la "propiedad aditiva" de la transformada de Laplace.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}[f_1(t)+f_2(t)]\,dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f_1(t)\,dt + \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f_2(t)\,dt \\ &= \mathbf{F}_1(\mathbf{s}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{s})\end{aligned}$$

Como un ejemplo del uso de este teorema, suponga que tenemos una transformada de Laplace $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ y que deseamos conocer la función de tiempo correspondiente $v(t)$. Muchas veces se podrá descomponer $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ en la suma de dos o más funciones, digamos, $\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$ y $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$, cuyas transformadas inversas, $v_1(t)$ y $v_2(t)$, ya están tabuladas. En ese caso se vuelve un asunto simple aplicar el teorema de linealidad y escribir

$$\begin{aligned}v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}(\mathbf{s})\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s}) + \mathbf{V}_2(\mathbf{s})\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s})\} + \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_2(\mathbf{s})\} = v_1(t) + v_2(t)\end{aligned}$$

Otra consecuencia importante del teorema de linealidad resulta evidente al estudiar la definición de la transformada de Laplace. En razón de que trabajamos simplemente con una integral, *la transformada de Laplace de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la transformada de Laplace de la función.* En otras palabras,

$$\mathcal{L}\{kv(t)\} = k\mathcal{L}\{v(t)\}$$

o

$$kv(t) \Leftrightarrow k\mathbf{V}(\mathbf{s}) \qquad [22]$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Este resultado es en extremo útil en muchas situaciones que se presentan en el análisis de circuitos, como estamos a punto de comprobar.

Ésta se conoce como la "propiedad de homogeneidad" de la transformada de Laplace.

EJEMPLO 14.3

Dada una función $\mathbf{G}(\mathbf{s}) = (7/\mathbf{s}) - 31/(\mathbf{s}+17)$, encuentre $g(t)$.

Esta función en el dominio **s** se compone de la suma de dos términos, $7/\mathbf{s}$ y $-31/(\mathbf{s}+17)$. A través del teorema de linealidad sabemos que $g(t)$ estará también

compuesto por dos términos, cada uno de los cuales será la transformada inversa de Laplace de uno de los dos términos en el dominio **s**:

$$g(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{7}{\mathbf{s}}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{31}{\mathbf{s}+17}\right\}$$

Comencemos con el primer término. La propiedad de homogeneidad de la transformada de Laplace nos permite escribir que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{7}{\mathbf{s}}\right\} = 7\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\mathbf{s}}\right\} = 7u(t)$$

Así, hemos utilizado el par de transformadas conocido como $u(t) \Leftrightarrow 1/\mathbf{s}$ y la propiedad de homogeneidad para encontrar este primer componente de $g(t)$.

De una manera muy similar, podemos ver que $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{31}{\mathbf{s}+17}\right\} = 31e^{-17t}u(t)$.

Colocando estos dos términos juntos tenemos que

$$g(t) = [7 - 31e^{-17t}]u(t)$$

PRÁCTICA

14.7 Dada la función $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \dfrac{2}{\mathbf{s}} - \dfrac{4}{\mathbf{s}^2} + \dfrac{3.5}{(\mathbf{s}+10)(\mathbf{s}+10)}$, encuentre $h(t)$.

Respuesta: $h(t) = [2 - 4t + 3.5te^{-10t}]u(t)$.

Técnicas de la transformada inversa de funciones racionales

Al analizar circuitos con elementos múltiples de almacenamiento de energía, muchas veces encontramos expresiones en el dominio **s** que son razones de polinomios **s**. Por ello, esperamos encontrar de manera rutinaria expresiones de la forma

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{\mathbf{D}(\mathbf{s})}$$

donde $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ y $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ son polinomios en **s**. Los valores de **s** que originan a $\mathbf{N}(\mathbf{s}) = 0$ se conocen como ***ceros*** de $\mathbf{V}(\mathbf{s})$, y los valores de **s** que dan lugar a $\mathbf{D}(\mathbf{s}) = 0$ como ***polos*** de $\mathbf{V}(\mathbf{s})$.

En vez de arremangarnos la camisa y apelar a la ecuación [13] cada vez que sea necesario encontrar una transformada inversa, en muchas ocasiones estas expresiones se pueden descomponer utilizando el método de residuos en términos más simples, cuyas transformadas inversas ya se conocen. El criterio para lo anterior es que $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ debe ser una ***función racional***, para la cual el grado del numerador $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ debe ser menor que el del denominador $\mathbf{D}(\mathbf{s})$. Si no lo es, primero debemos llevar a cabo una simple división, como se muestra en el ejemplo siguiente. El resultado incluirá una función impulso (suponiendo que el grado del numerador sea el mismo que el del denominador) y una función racional. La transformada inversa de la primera es sencilla; la aplicación directa del método de los residuos se aplicará a la función racional si su transformada inversa no se conoce todavía.

En la práctica, rara vez se necesita recurrir en todo momento a la ecuación [13] para funciones que se encuentran en el análisis de circuitos, siempre y cuando seamos astutos y utilicemos las diversas técnicas presentadas en este capítulo.

EJEMPLO **14.4**

Encuentre la transformada inversa de $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = 2\frac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}}$.

Como el grado del numerador es igual al grado del denominador, $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ *no* es una función racional, por lo que comenzamos realizando la división larga:

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}\overline{)2\mathbf{s}+4}\quad\begin{array}{l} 2 \\ \underline{2\mathbf{s}} \\ 4 \end{array}$$

por lo que $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = 2 + (4/\mathbf{s})$. De acuerdo con el teorema de linealidad,

$$\mathscr{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\} = \mathscr{L}^{-1}\{2\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{\mathbf{s}}\right\} = 2\delta(t) + 4u(t)$$

(Se debe observar que esta función particular puede simplificarse sin utilizar el proceso de la división larga; se seleccionó dicho procedimiento a fin de proporcionar un ejemplo del proceso básico.)

PRÁCTICA

14.8 Dada la función $\mathbf{Q}(\mathbf{s}) = \frac{3\mathbf{s}^2 - 4}{\mathbf{s}^2}$, encuentre $q(t)$.

Respuesta: $q(t) = 3\delta(t) - 4\,tu(t)$.

Al emplear el método de residuos, efectuando en esencia un desarrollo en fracciones parciales de $\mathbf{V}(\mathbf{s})$, centramos la atención en las raíces del denominador. De tal manera, se requiere factorizar el polinomio en función de $\mathbf{s}$ que abarca a $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ en un producto de términos binomiales. Las raíces de $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ podrían ser cualquier combinación de raíces distintas o repetidas y tal vez sean reales o complejas. Vale la pena señalar, sin embargo, que las raíces complejas siempre aparecen como pares conjugados, siempre que sean reales los coeficientes de $\mathbf{D}(\mathbf{s})$.

Polos distintos y el método de los residuos

Como un ejemplo específico, determinemos la transformada inversa de Laplace de

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)(\mathbf{s}+\beta)}$$

El denominador se factorizó en dos raíces distintas, $-\alpha$ y $-\beta$. Aunque es posible sustituir esta expresión en la ecuación de definición de la transformada inversa, resulta más fácil utilizar el teorema de linealidad. Mediante el uso del desarrollo en fracciones parciales, dividimos la transformada particular entre la suma de dos transformadas más simples:

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{A}{\mathbf{s}+\alpha} + \frac{B}{\mathbf{s}+\beta}$$

donde A y B se determinan mediante cualquiera de los diversos métodos. Tal vez la solución más rápida se obtenga al reconocer que

En esta ecuación se emplea la versión de una sola fracción (es decir, no desarrollada) de $\mathbf{V}(\mathbf{s})$.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\mathbf{s}\to-\alpha}\left[(\mathbf{s}+\alpha)\mathbf{V}(\mathbf{s}) - \frac{(\mathbf{s}+\alpha)}{(\mathbf{s}+\beta)}B\right] \\ &= \lim_{\mathbf{s}\to-\alpha}\left[\frac{1}{\mathbf{s}+\beta} - 0\right] = \frac{1}{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Si se acepta que el segundo término es siempre cero, en la práctica siempre se escribirá

$$A = (\mathbf{s} + \alpha)\mathbf{V}(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=-\alpha}$$

De la misma manera,

$$B = (\mathbf{s} + \beta)\mathbf{V}(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=-\beta} = \frac{1}{\alpha - \beta}$$

y, por lo tanto,

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{1/(\beta - \alpha)}{\mathbf{s} + \alpha} + \frac{1/(\alpha - \beta)}{\mathbf{s} + \beta}$$

Ya evaluamos las transformadas inversas de esta forma, por lo que

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t} u(t) + \frac{1}{\alpha - \beta} e^{-\beta t} u(t) \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) u(t) \end{aligned}$$

Si deseáramos se podría incluir ahora lo anterior como una nueva entrada en el catálogo de pares de Laplace:

$$\frac{1}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(\mathbf{s} + \alpha)(\mathbf{s} + \beta)}$$

Este método se extiende sin ninguna dificultad a funciones cuyos denominadores son polinomios función de **s** de orden superior, si bien tal vez las operaciones se vuelvan un poco tediosas. Debe advertirse que no especificamos que las constantes A y B deben ser reales. Sin embargo, en situaciones en las que α y β son complejas, encontraremos que éstas también son conjugados complejos (lo anterior no se requiere matemáticamente, aunque sí en circuitos físicos). En casos de ese tipo, encontraremos también que $A = B^*$; en otras palabras, los coeficientes también serán conjugados complejos.

EJEMPLO 14.5

Encuentre la transformada inversa de

$$\mathbf{P}(\mathbf{s}) = \frac{7\mathbf{s} + 5}{\mathbf{s}^2 + \mathbf{s}}$$

Podemos observar que $\mathbf{P}(\mathbf{s})$ es una función racional (el grado del numerador es *uno*, mientras que el grado del denominador es *dos*), por lo que comenzamos por factorizar el denominador y escribir

$$\mathbf{P}(\mathbf{s}) = \frac{7\mathbf{s} + 5}{\mathbf{s}(\mathbf{s} + 1)} = \frac{a}{\mathbf{s}} + \frac{b}{\mathbf{s} + 1}$$

donde nuestro paso siguiente es determinar los valores de a y b. Aplicando el método de los residuos,

$$a = \left.\frac{7\mathbf{s} + 5}{\mathbf{s} + 1}\right|_{\mathbf{s}=0} = 5 \qquad \text{y} \qquad b = \left.\frac{7\mathbf{s} + 5}{\mathbf{s}}\right|_{\mathbf{s}=-1} = 2$$

(*continúa*)

Entonces podemos escribir $\mathbf{P}(\mathbf{s})$ como

$$\mathbf{P}(\mathbf{s}) = \frac{5}{\mathbf{s}} + \frac{2}{\mathbf{s}+1}$$

cuya transformada inversa es simplemente $p(t) = [5 + 2e^{-t}]u(t)$.

PRÁCTICA

14.9 Dada la función $\mathbf{Q}(\mathbf{s}) = \dfrac{11\mathbf{s}+30}{\mathbf{s}^2+3\mathbf{s}}$, encuentre $q(t)$.

Respuesta: $q(t) = [10 + e^{-3t}]u(t)$.

Polos repetidos

La situación que falta es la de polos repetidos. Considere la función

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{(\mathbf{s}-p)^n}$$

que se desarrolla de la siguiente forma:

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{a_n}{(\mathbf{s}-p)^n} + \frac{a_{n-1}}{(\mathbf{s}-p)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{(\mathbf{s}-p)}$$

Para determinar cada constante, multiplicamos primero la versión no desarrollada de $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ por $(\mathbf{s} - p)^n$. La constante a_n se determina evaluando simplemente la expresión que resulta en $\mathbf{s} = p$. Las constantes restantes se obtienen al diferenciar la expresión $(\mathbf{s} - p)^n\mathbf{V}(\mathbf{s})$ el número apropiado de veces, antes de evaluar en $\mathbf{s} = p$, y dividir entre un término factorial. El procedimiento de diferenciación elimina las constantes que se encontraron antes, y la evaluación en $\mathbf{s} = p$ elimina las constantes que quedan.

Por ejemplo, a_{n-2} se determina al evaluar

$$\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\mathbf{s}^2}[(\mathbf{s}-p)^n\mathbf{V}(\mathbf{s})]_{\mathbf{s}=p}$$

y el término a_{n-k} se obtiene evaluando

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\mathbf{s}^k}[(\mathbf{s}-p)^n\mathbf{V}(\mathbf{s})]_{\mathbf{s}=p}$$

Para ilustrar el procedimiento básico, determinemos la transformada inversa de Laplace de una función que tiene una combinación de ambas situaciones: un polo en $\mathbf{s} = 0$ y dos polos en $\mathbf{s} = -6$.

EJEMPLO 14.6

Determine la transformada inversa de la función

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{2}{\mathbf{s}^3 + 12\mathbf{s}^2 + 36\mathbf{s}}$$

Observamos que el denominador, que se factoriza sin dificultad, origina

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+6)(\mathbf{s}+6)} = \frac{2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+6)^2}$$

Como prometimos, hay en realidad tres polos, uno en $\mathbf{s} = 0$ y dos en $\mathbf{s} = -6$. A continuación, desarrollamos la función hasta

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{a_1}{(\mathbf{s}+6)^2} + \frac{a_2}{(\mathbf{s}+6)} + \frac{a_3}{\mathbf{s}}$$

y aplicamos el nuevo procedimiento para obtener las constantes desconocidas a_1 y a_2; encontraremos a_3 mediante el procedimiento anterior. Por lo tanto,

$$a_1 = \left[(\mathbf{s}+6)^2 \frac{2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+6)^2}\right]_{\mathbf{s}=-6} = \left.\frac{2}{\mathbf{s}}\right|_{\mathbf{s}=-6} = -\frac{1}{3}$$

y

$$a_2 = \frac{d}{d\mathbf{s}}\left[(\mathbf{s}+6)^2 \frac{2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+6)^2}\right]_{\mathbf{s}=-6} = \left.\frac{d}{d\mathbf{s}}\left(\frac{2}{\mathbf{s}}\right)\right|_{\mathbf{s}=-6} = \left.-\frac{2}{\mathbf{s}^2}\right|_{\mathbf{s}=-6} = -\frac{1}{18}$$

La constante restante a_3 se obtiene utilizando el procedimiento para polos distintos:

$$a_3 = \left.\mathbf{s}\frac{2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+6)^2}\right|_{\mathbf{s}=0} = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

En consecuencia, escribiríamos ahora $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ como

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{-\frac{1}{3}}{(\mathbf{s}+6)^2} + \frac{-\frac{1}{18}}{(\mathbf{s}+6)} + \frac{\frac{1}{18}}{\mathbf{s}}$$

Utilizando el teorema de linealidad, la transformada inversa de $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ se obtiene ahora mediante la determinación de la transformada inversa de cada uno de estos tres términos. Observamos que el primer término de la derecha es de la forma

$$\frac{K}{(\mathbf{s}+\alpha)^2}$$

y utilizando la ecuación [21] encontramos que su transformada inversa corresponde a $-\frac{1}{3}te^{-6t}u(t)$. De manera similar, descubrimos que la transformada inversa del segundo término es $-\frac{1}{18}e^{-6t}u(t)$, y que el tercer término es simplemente $\frac{1}{18}u(t)$. Así:

$$v(t) = -\tfrac{1}{3}te^{-6t}u(t) - \tfrac{1}{18}e^{-6t}u(t) + \tfrac{1}{18}u(t)$$

o, de forma más compacta,

$$v(t) = \tfrac{1}{18}[1 - (1+6t)e^{-6t}]u(t)$$

PRÁCTICA

14.10 Determine $g(t)$ si $\mathbf{G}(\mathbf{s}) = \dfrac{3}{\mathbf{s}^3 + 5\mathbf{s}^2 + 8\mathbf{s} + 4}$.

Respuesta: $g(t) = 3[e^{-t} - te^{-2t} - e^{-2t}]u(t)$.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

MATLAB, un paquete de análisis numérico muy poderoso, se utiliza para apoyar de diferentes maneras en la solución de ecuaciones que surgen del análisis de circuitos con excitación variable en el tiempo. La técnica más directa emplea las rutinas de

solución de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE, *ordinary differential equation*) *ode*23() y *ode*45(). Ambas se fundamentan en métodos numéricos de solución de ecuaciones diferenciales, y de ellas *ode*45() tiene la mayor exactitud. Sin embargo, la solución se determina sólo en puntos discretos y, en consecuencia, no se conoce para todos los valores del tiempo. En muchas aplicaciones esto resulta adecuado, siempre que se use una densidad de puntos suficiente.

La técnica de la transformada de Laplace ofrece medios para obtener una expresión exacta de la solución de ecuaciones diferenciales, y como tal tiene muchas ventajas respecto al uso de las técnicas de solución numérica ODE. Otra ventaja importante de la técnica de la transformada de Laplace se volverá patente en los capítulos siguientes, cuando se estudie la importancia de la forma de las expresiones en el dominio **s**, en particular luego de que se factoricen los polinomios del denominador.

Como ya observamos, las tablas de búsqueda son muy útiles cuando se trabaja con transformadas de Laplace, si bien en métodos de residuos quizá sea un método tedioso para funciones con polinomios de orden superior en sus denominadores. En estas situaciones MATLAB también puede ser de ayuda, pues contiene varias funciones útiles para manipular expresiones de polinomios.

En MATLAB, el polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

se almacena como el vector $[a_n a_{n-1} \ldots a_1\ a_0]$. En consecuencia, para definir los polinomios $\mathbf{N}(\mathbf{s}) = 2$ y $\mathbf{D}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^3 + 12\mathbf{s}^2 + 36\mathbf{s}$ escribimos

```
EDU» N = [2];
EDU» D = [1 12 36 0];
```

Se obtienen las raíces de cualquier polinomio recurriendo a la función *roots*(**p**), donde **p** es un vector que contiene los coeficientes del polinomio. Por ejemplo,

```
EDU» q = [1 8 16];
EDU» roots(q)
```

produce:

```
ans =
   – 4
   – 4
```

MATLAB también nos permite determinar los residuos de la función racional **N(s)/D(s)** utilizando la función *residue*(). Por ejemplo,

```
EDU» [r p y] = residue(N, D);
```

da como resultado tres vectores: **r**, **p** y **y**, tales que:

$$\frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{\mathbf{D}(\mathbf{s})} = \frac{r_1}{x - p_1} + \frac{r_2}{x - p_2} + \cdots + \frac{r_n}{x - p_n} + \mathbf{y}(\mathbf{s})$$

en el caso de polos no múltiples, y en el de n polos multiples

$$\frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{\mathbf{D}(\mathbf{s})} = \frac{r_1}{(x - p)} + \frac{r_2}{(x - p)^2} + \cdots + \frac{r_n}{(x - p)^n} + \mathbf{y}(\mathbf{s})$$

Observe que en la medida en que el orden del polinomio del numerador sea menor que el del polinomio del denominador, el vector **y**(**s**) siempre será nulo.

Ejecutando el comando sin utilizar punto y coma (;) se obtiene la salida

```
r =
  -0.0556
  -0.3333
   0.0556

p =
  -6
  -6
   0

y =
  [ ]
```

que concuerda con la respuesta que se encontró en el ejemplo 14.6.

14.6 TEOREMAS FUNDAMENTALES PARA LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ahora podemos considerar dos teoremas que podrían verse en forma colectiva como la *raison d'être (la razón de ser)* de las transformadas de Laplace en el análisis de circuitos: los teoremas de diferenciación e integración respecto del tiempo. Ambos nos ayudan a transformar las derivadas e integrales que aparecen en las ecuaciones de circuito en el dominio del tiempo.

Teorema de diferenciación respecto del tiempo

Estudiaremos primero la diferenciación en el tiempo al considerar una función de tiempo $v(t)$ cuya transformada de Laplace $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ se sabe que existe. Deseamos la transformada de la primera derivada de $v(t)$,

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\frac{dv}{dt}\,dt$$

Lo anterior puede integrarse por partes:

$$U = e^{-\mathbf{s}t} \qquad dV = \frac{dv}{dt}dt$$

y el resultado es

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = v(t)e^{-\mathbf{s}t}\Big|_{0^-}^{\infty} + \mathbf{s}\int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}v(t)\,dt$$

El primer término de la derecha debe tender a cero, a medida que t aumenta sin límite; en otro caso, $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ no existiría. Por consiguiente,

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = 0 - v(0^-) + \mathbf{s}\mathbf{V}(\mathbf{s})$$

y

$$\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \mathbf{s}\mathbf{V}(\mathbf{s}) - v(0^-) \qquad [23]$$

Se desarrollarían relaciones similares para las derivadas de orden superior:

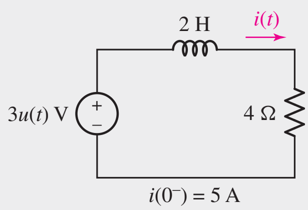
$$\frac{d^2 v}{dt^2} \Leftrightarrow \mathbf{s}^2\mathbf{V}(\mathbf{s}) - \mathbf{s}v(0^-) - v'(0^-) \qquad [24]$$

$$\frac{d^3 v}{dt^3} \Leftrightarrow \mathbf{s}^3\mathbf{V}(\mathbf{s}) - \mathbf{s}^2 v(0^-) - \mathbf{s}v'(0^-) - v''(0^-) \qquad [25]$$

donde $v'(0^-)$ es el valor de la primera derivada de $v(t)$ evaluada en $t = 0^-$, $v''(0^-)$ corresponde al valor inicial de la segunda derivada de $v(t)$, etc. Cuando todas las condiciones iniciales son cero, diferenciar una vez con respecto a t en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación por $\mathbf{s}$ en el dominio de la frecuencia; diferenciar dos veces en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación por $\mathbf{s}^2$ en el dominio de la frecuencia, etc. Por lo tanto, *la diferenciación en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación en el dominio de la frecuencia*. ¡Ésta es una simplificación sustantiva! Debemos empezar también a ver que, cuando las condiciones iniciales no son cero, su presencia se sigue considerando.

EJEMPLO 14.7

Dado el circuito *RL* en serie de la figura 14.3, determine la corriente que circula por la resistencia de 4 Ω.



■ **FIGURA 14.3** Circuito que se analiza transformando la ecuación diferencial $2\,di/dt + 4i = 3u(t)$ en $2[\mathbf{sI}(\mathbf{s}) - i(0^-)] + 4\mathbf{I}(\mathbf{s}) = 3/\mathbf{s}$.

▶ ***Identifique el objetivo del problema.***
Necesitamos encontrar la expresión de la corriente denominada $i(t)$.

▶ ***Recopile la información conocida.***
Una tensión de escalón activa la red, así que se tiene un valor inicial de la corriente (en $t = 0^-$) de 5 A.

▶ ***Elabore un plan.***
Si se aplica la LVK a este circuito, se obtendrá una ecuación diferencial con $i(t)$ como la incógnita. Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación la convertirá al dominio de $\mathbf{s}$. Despejando $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ de la ecuación algebraica resultante, la transformada inversa de Laplace dará $i(t)$.

▶ ***Construya un conjunto de ecuaciones apropiado.***
Mediante la LVK se expresa la ecuación de un solo lazo en el dominio del tiempo, así que se encuentra

$$2\frac{di}{dt} + 4i = 3u(t)$$

Ahora calculamos la transformada de Laplace de cada término, por lo que

$$2[\mathbf{sI}(\mathbf{s}) - i(0^-)] + 4\mathbf{I}(\mathbf{s}) + \frac{3}{\mathbf{s}}$$

▶ ***Determine, si se requiere, información adicional.***
Tenemos una ecuación que se resolvería para la representación $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ en el dominio de la frecuencia de nuestro objetivo, $i(t)$.

▶ ***Busque la solución.***
A continuación despejamos $\mathbf{I}(\mathbf{s})$, sustituyendo $i(0^-) = 5$:

$$(2\mathbf{s} + 4)\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{3}{\mathbf{s}} + 10$$

e

$$\mathbf{I(s)} = \frac{1.5}{\mathbf{s(s+2)}} + \frac{5}{\mathbf{s}+2}$$

Aplicando el método de los residuos al primer término,

$$\left.\frac{1.5}{\mathbf{s}+2}\right|_{\mathbf{s}=0} = 0.75 \quad \text{y} \quad \left.\frac{1.5}{\mathbf{s}}\right|_{\mathbf{s}=-2} = -0.75$$

por lo que

$$\mathbf{I(s)} = \frac{0.75}{\mathbf{s}} + \frac{4.25}{\mathbf{s}+2}$$

Utilizamos después los pares conocidos de transformadas para invertir

$$\begin{aligned} i(t) &= 0.75u(t) + 4.25e^{-2t}u(t) \\ &= (0.75 + 4.25e^{-2t})u(t) \text{ A} \end{aligned}$$

▶ ***Verifique la solución. ¿Es razonable o la esperada?***

Con base en nuestra experiencia previa con este tipo de circuito, esperamos una respuesta forzada de cd, más una respuesta natural que decae en forma exponencial. En $t = 0$ obtenemos $i(0) = 5$ A, como se requería, y a medida que $t \to \infty$, $i(t) \to \frac{3}{4}$ A como se esperaba.

Por lo tanto, nuestra solución de $i(t)$ está completa. Tanto la respuesta forzada $0.75u(t)$ como la natural $4.25e^{-2t}u(t)$ están presentes, así como las condiciones iniciales fueron incorporadas de manera automática a la solución. El método ilustra una forma muy cómoda de obtener la solución completa de muchas ecuaciones diferenciales.

PRÁCTICA

14.11 Aplique los métodos de la transformada de Laplace para determinar $i(t)$ en el circuito de la figura 14.4.

Respuesta: $(0.25 + 4.75e^{-20t})u(t)$ A.

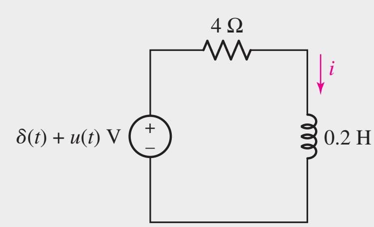


FIGURA 14.4

Teorema de integración en el tiempo

Se lleva a cabo el mismo tipo de simplificación cuando debemos resolver la operación de integración con respecto al tiempo en las ecuaciones de circuito. Determinemos la transformada de Laplace de la función de tiempo descrita por $\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx$

$$\mathscr{L}\left\{\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\left[\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right] dt$$

Al integrar por partes, establecemos

$$u = \int_{0^-}^{t} v(x)\,dx \qquad dv = e^{-\mathbf{s}t}\,dt$$

$$du = v(t)\,dt \qquad v = -\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-\mathbf{s}t}$$

Entonces,

$$\mathscr{L}\left\{\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right\} = \left\{\left[\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right]\left[-\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-\mathbf{s}t}\right]\right\}_{t=0^-}^{t=\infty} - \int_{0^-}^{\infty} -\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-\mathbf{s}t}v(t)\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-\mathbf{s}t}\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right]_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{\mathbf{s}}\mathbf{V}(\mathbf{s})$$

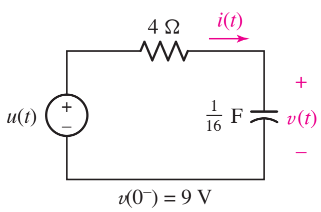
Pero, dado que $e^{-st} \to 0$ a medida que $t \to \infty$, el primer término a la derecha se anula en el límite superior, y conforme $t \to 0^-$, la integral en este término se anula de manera similar. Lo anterior deja sólo el término $\mathbf{V}(\mathbf{s})/\mathbf{s}$, por lo que

$$\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx \Leftrightarrow \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{\mathbf{s}} \qquad [26]$$

y de esa manera *la integración en el dominio del tiempo corresponde a la división entre* **s** *en el dominio de la frecuencia*. Una vez más, una operación de cálculo relativamente complicada en el dominio del tiempo se simplifica a una operación algebraica en el dominio de la frecuencia.

EJEMPLO 14.8

Determine $i(t)$ para $t > 0$ en el circuito RC en serie que se presenta en la figura 14.5.



■ **FIGURA 14.5** Circuito que ilustra el uso del par de transformadas de Laplace $\int_{0^-}^{t} i(t')\,dt' \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}}\mathbf{I}(\mathbf{s})$.

Escribimos primero la ecuación de un lazo

$$u(t) = 4i(t) + 16\int_{-\infty}^{t} i(t')\,dt'$$

Para aplicar el teorema de integración en el tiempo, debemos efectuar un arreglo de manera que el límite inferior de integración sea 0^-. De tal modo, fijamos

$$16\int_{-\infty}^{t} i(t')\,dt' = 16\int_{-\infty}^{0^-} i(t')\,dt' + 16\int_{0^-}^{t} i(t')\,dt'$$

$$= v(0^-) + 16\int_{0^-}^{t} i(t')\,dt'$$

Por lo tanto

$$u(t) = 4i(t) = v(0^-) + 16\int_{0^-}^{t} i(t')\,dt'$$

A continuación calculamos la transformada de Laplace en ambos lados de esta ecuación. Puesto que estamos utilizando la transformada unilateral, $\mathscr{L}\{v(0^-)\}$ es simplemente $\mathscr{L}\{v(0^-)u(t)\}$, y por ello

$$\frac{1}{\mathbf{s}} = 4\mathbf{I}(\mathbf{s}) + \frac{9}{\mathbf{s}} + \frac{16}{\mathbf{s}}\mathbf{I}(\mathbf{s})$$

Al despejar $\mathbf{I}(\mathbf{s})$,

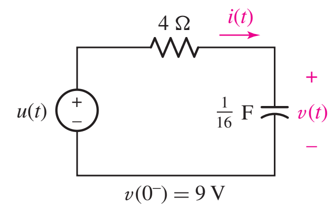
$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = -\frac{2}{\mathbf{s}+4}$$

el resultado deseado se obtiene de inmediato

$$i(t) = -2e^{-4t}u(t)\ \text{A}$$

EJEMPLO 14.9

Determine $v(t)$ para el mismo circuito, repetido en la figura 14.6, por conveniencia.



■ **FIGURA 14.6** Circuito de la figura 14.5 repetido, en el que se busca la tensión $v(t)$.

Esta vez simplemente escribimos la ecuación nodal

$$\frac{v(t)-u(t)}{4}+\frac{1}{16}\frac{dv}{dt}=0$$

Tomando la transformada de Laplace, obtenemos:

$$\frac{\mathbf{V(s)}}{4}-\frac{1}{4\mathbf{s}}+\frac{1}{16}\mathbf{sV(s)}-\frac{v(0^-)}{16}=0$$

o

$$\mathbf{V(s)}\left(1+\frac{\mathbf{s}}{4}\right)=\frac{1}{\mathbf{s}}+\frac{9}{4}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{V(s)}=\frac{4}{\mathbf{s(s}+4)}+\frac{9}{\mathbf{s}+4}$$
$$=\frac{1}{\mathbf{s}}-\frac{1}{\mathbf{s}+4}+\frac{9}{\mathbf{s}+4}$$
$$=\frac{1}{\mathbf{s}}+\frac{8}{\mathbf{s}+4}$$

y tomando la transformada inversa,

$$v(t)=(1+8e^{-4t})u(t)\text{ V}$$

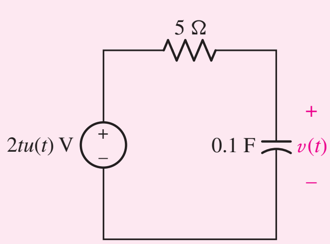
Para confirmar este resultado, observamos que $(\frac{1}{16})dv/dt$ producirá la expresión anterior de $i(t)$. Para $t>0$,

$$\frac{1}{16}\frac{dv}{dt}=\frac{1}{16}(-32)e^{-4t}=-2e^{-4t}$$

lo cual concuerda con lo que se encontró en el ejemplo 14.8.

PRÁCTICA

14.12 Determine $v(t)$ en $t = 800$ ms para el circuito de la figura 14.7.



■ **FIGURA 14.7**

Respuesta: 802 mV.

Transformadas de Laplace de senoides

A fin de ilustrar el uso del teorema de linealidad y del teorema de diferenciación en el tiempo, sin mencionar la adición de un par más importante a la tabla de transformadas de Laplace que se presentará un poco más adelante, estableceremos la transformada de Laplace de sen $\omega t\, u(t)$. Podríamos usar la expresión integral de definición con la integración por partes, pero esto es innecesariamente difícil. En su lugar, utilizaremos la relación

$$\text{sen}\, \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

La transformada de la suma de estos dos términos es exactamente la suma de las transformadas, y cada término es una función exponencial para la cual ya tenemos la transformada. Escribiríamos de inmediato

$$\mathscr{L}\{\text{sen}\, \omega t\, u(t)\} = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{\mathbf{s} - j\omega} - \frac{1}{\mathbf{s} + j\omega}\right) = \frac{\omega}{\mathbf{s}^2 + \omega^2}$$

$$\text{sen}\, \omega t\, u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{\mathbf{s}^2 + \omega^2} \qquad [27]$$

A continuación empleamos el teorema de diferenciación en el tiempo para determinar la transformada de cos $\omega t\, u(t)$, que es proporcional a la derivada de sen ωt. Esto es,

Observe que se ha aprovechado el hecho de que sen $\omega t|_{t=0} = 0$.

$$\mathscr{L}\{\cos \omega t\, u(t)\} = \mathscr{L}\left\{\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}[\,\text{sen}\, \omega t\, u(t)\,]\right\} = \frac{1}{\omega}\mathbf{s}\frac{\omega}{\mathbf{s}^2 + \omega^2}$$

$$\cos \omega t\, u(t) \Leftrightarrow \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 + \omega^2} \qquad [28]$$

Teorema de desplazamiento en el tiempo

Como observamos en algunos de los problemas transitorios anteriores, no todas las funciones forzadas empiezan en $t = 0$. ¿Qué ocurre con la transformada en una función de tiempo si esa función simplemente se desplaza cierta cantidad en el tiempo? En particular, si la transformada de $f(t)\, u(t)$ es la función conocida $\mathbf{F(s)}$, entonces ¿cuál es la transformada de $f(t - a)u(t - a)$, la función de tiempo original retrasada por a segundos (y que no existe para $t < a$)? Si se trabaja directamente con la definición de la transformada de Laplace, obtenemos

$$\mathscr{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t-a)u(t-a)\, dt$$
$$= \int_{a^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t-a)\, dt$$

para $t \geq a^-$. Al elegir una nueva variable de integración, $\tau = t - a$, obtenemos

$$\mathscr{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}(\tau+a)} f(\tau)\, d\tau = e^{-a\mathbf{s}}\mathbf{F(s)}$$

Por lo tanto,

$$f(t-a)u(t-a) \Leftrightarrow e^{-a\mathbf{s}}\mathbf{F(s)} \qquad (a \geq 0) \qquad [29]$$

Este resultado, que se conoce como *teorema de desplazamiento en el tiempo*, establece simplemente que si una función de tiempo se retrasa por un tiempo a en el dominio del tiempo, el resultado en el dominio de la frecuencia es una multiplicación por $e^{-a\mathbf{s}}$.

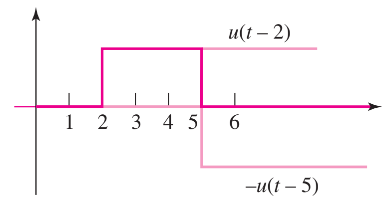
EJEMPLO 14.10

Determine la transformada del impulso rectangular $v(t) = u(t - 2) - u(t - 5)$.

Este impulso, cuya gráfica se muestra en la figura 14.8, tiene como valor unitario para el intervalo de tiempo $2 < t < 5$, y como valor nulo en cualquier otro lado. Sabemos que la transformada de $u(t)$ es exactamente $1/\mathbf{s}$, y dado que $u(t - 2)$ es $u(t)$ retrasada en 2 s, la transformada de esta función retrasada es $e^{-2\mathbf{s}}/\mathbf{s}$. De manera similar, la transformada de $u(t - 5)$ es $e^{-5\mathbf{s}}/\mathbf{s}$. Se concluye entonces que la transformada deseada es

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{e^{-2\mathbf{s}}}{\mathbf{s}} - \frac{e^{-5\mathbf{s}}}{\mathbf{s}} = \frac{e^{-2\mathbf{s}} - e^{-5\mathbf{s}}}{\mathbf{s}}$$

No fue necesario invertir la definición de la transformada de Laplace para determinar $\mathbf{V}(\mathbf{s})$.

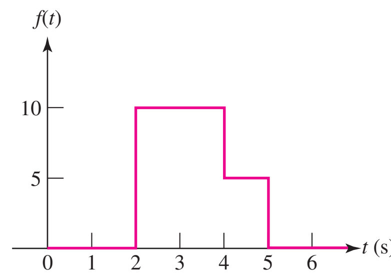


■ **FIGURA 14.8** Gráfica de $u(t - 2) - u(t - 5)$.

PRÁCTICA

14.13 Obtenga la transformada de Laplace de la función de tiempo que se muestra en la figura 14.9.

Respuesta: $(5/\mathbf{s})(2e^{-2\mathbf{s}} - e^{-4\mathbf{s}} - e^{-5\mathbf{s}})$.



■ **FIGURA 14.9**

Hasta este momento hemos obtenido varias entradas para el catálogo de pares de transformadas de Laplace que acordamos construir después. Están incluidas las transformadas de la *función impulso*, la *función escalón*, la *función exponencial*, la *función rampa*, las *funciones seno* y *coseno* y la suma de dos exponenciales. Además, hemos observado las consecuencias en el dominio de las operaciones de adición, multiplicación por una constante, diferenciación e integración en el dominio del tiempo. Todos estos resultados se recopilan en las tablas 14.1 y 14.2; se incluyen también varias funciones más que se deducen en el apéndice 7.

TABLA 14.1 Pares de transformadas de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\}$	$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\}$	$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$\delta(t)$	1	$\frac{1}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})u(t)$	$\frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)(\mathbf{s}+\beta)}$
$u(t)$	$\frac{1}{\mathbf{s}}$	$\text{sen}\ \omega t\ u(t)$	$\frac{\omega}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$
$tu(t)$	$\frac{1}{\mathbf{s}^2}$	$\cos\omega t\ u(t)$	$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t),\ n = 1, 2,\ldots$	$\frac{1}{\mathbf{s}^n}$	$\text{sen}\ (\omega t + \theta)u(t)$	$\frac{\mathbf{s}\ \text{sen}\ \theta + \omega\cos\theta}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{\mathbf{s}+\alpha}$	$\cos(\omega t + \theta)\,u(t)$	$\frac{\mathbf{s}\cos\theta - \omega\ \text{sen}\ \theta}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$
$te^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)^2}$	$e^{-\alpha t}\ \text{sen}\ \omega t\ u(t)$	$\frac{\omega}{(\mathbf{s}+\alpha)^2+\omega^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t),\ n = 1, 2,\ldots$	$\frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)^n}$	$e^{-\alpha t}\cos\omega t\ u(t)$	$\frac{\mathbf{s}+\alpha}{(\mathbf{s}+\alpha)^2+\omega^2}$

APLICACIÓN PRÁCTICA

Estabilidad de un sistema

Hace muchos años (o así parece), uno de los autores iba por una carretera a través del campo e intentaba utilizar el control electrónico de velocidad ("control de crucero") de su automóvil. Después de encender el sistema y fijar en forma manual la velocidad del vehículo al límite permitido,[3] el botón "fijar" se liberó y el pedal del acelerador se desactivó; a estas alturas se esperaba que el sistema mantuviera la velocidad fijada y se regulara el flujo de combustible a medida que fuera necesario.



© Donovan Reese/Getty Images

Desafortunadamente, sucedió algo diferente a lo que se esperaba. La velocidad del vehículo descendió 10% de forma inmediata, a lo que el equipo electrónico de control de la velocidad de crucero respondió con el aumento del flujo de combustible. Los dos eventos no coincidieron muy bien, por lo que algunos momentos después la velocidad del vehículo superó el valor que se había fijado y se produjo una disminución repentina (y significativa) del flujo de combustible, lo cual generó una reducción de la velocidad del vehículo. El ciclo continuó para consternación del conductor, quien de un momento a otro se dio por vencido y apagó el sistema.

Es evidente que la respuesta del sistema no estaba optimizada, es decir, el sistema era *inestable*. La estabilidad de sistemas es un aspecto muy importante en la ingeniería en una gran cantidad de problemas (controles de crucero, reguladores de temperatura y sistemas de rastreo, sólo por nombrar unos cuantos), y las técnicas desarrolladas en este capítulo son de un valor incalculable en el análisis de la estabilidad de un sistema en particular.

Uno de los aspectos más importantes al trabajar en el dominio **s** como lo permite la transformada de Laplace es que, en lugar de describir la respuesta de un sistema en particular a través de una ecuación integrodiferencial, podemos obtener una función de transferencia del sistema representada por el cociente de dos polinomios en el dominio **s**. El problema de la estabilidad se maneja fácilmente mediante el estudio del denominador de la función de transferencia: *ningún polo deberá tener una componente real positiva*.

Existen muchas técnicas que pueden aplicarse al problema de la determinación de la estabilidad de un sistema en particular. La ***prueba de Routh*** es una de las más sencillas que se conocen. Considérese la función del sistema en el dominio **s** (un concepto que se desarrollará más adelante en el capítulo 15)

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{\mathbf{D}(\mathbf{s})}$$

El polinomio función de **s** representado por $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ puede escribirse como $a_n\mathbf{s}^n + a_{n-1}\mathbf{s}^{n-1} + \cdots + a_1\mathbf{s} + a_0$. No se puede determinar gran cosa de un vistazo sin factorizar el polinomio. Si todos los coeficientes $a_n \cdots a_0$ son positivos y diferentes de cero, el procedimiento de Routh lo arregla con el patrón siguiente:

$$\begin{matrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \end{matrix}$$

A continuación generamos una tercera fila multiplicando en forma de cruz las dos filas:

$$\frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

y una cuarta fila multiplicando en forma de cruz la segunda y tercera filas. Este proceso continúa hasta que tengamos $n + 1$ filas de valores numéricos. Lo que queda es identificar los cambios de signo en la columna ubicada a la izquierda. El número de cambios de signo indica el número de polos que tiene una componente real positiva; cualquier cambio de signo indica que el sistema es inestable.

Por ejemplo, supongamos que el sistema automático de control de crucero detrás del enojo del autor tiene una función de transferencia del sistema con un denominador

$$\mathbf{D}(\mathbf{s}) = 7\mathbf{s}^4 + 4\mathbf{s}^3 + \mathbf{s}^2 + 13\mathbf{s} + 2$$

Todos los coeficientes de este polinomio función de **s** de cuarto orden son positivos y diferentes de cero, por lo que se construye la tabla de Routh correspondiente:

$$\begin{matrix} 7 & 1 & 2 \\ 4 & 13 & 0 \\ -21.75 & 2 & \\ 13.37 & & \\ 2 & & \end{matrix}$$

a partir de la cual podemos observar dos cambios de signo en la columna ubicada más a la izquierda. Por ende, el sistema es inestable (lo que explica la razón de la falla) ya que dos de sus polos tienen componentes reales positivas.

[3] Puesto que no había cámaras instaladas, nadie puede comprobar lo contrario.

TABLA 14.2 Operaciones de la transformada de Laplace

Operación	f(t)	F(s)
Adición	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$\mathbf{F_1(s)} \pm \mathbf{F_2(s)}$
Multiplicación escalar	$kf(t)$	$k\mathbf{F(s)}$
Diferenciación en el tiempo	$\frac{df}{dt}$	$\mathbf{sF(s)} - f(0^-)$
	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$\mathbf{s}^2\mathbf{F(s)} - \mathbf{s}f(0^-) - f'(0^-)$
	$\frac{d^3f}{dt^3}$	$\mathbf{s}^3\mathbf{F(s)} - \mathbf{s}^2f(0^-) - \mathbf{s}f'(0^-) - f''(0^-)$
Integración en el tiempo	$\int_{0^-}^{t} f(t)\,dt$	$\frac{1}{\mathbf{s}}\mathbf{F(s)}$
	$\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt$	$\frac{1}{\mathbf{s}}\mathbf{F(s)} + \frac{1}{\mathbf{s}}\int_{-\infty}^{0^-} f(t)\,dt$
Convolución	$f_1(t) * f_2(t)$	$\mathbf{F}_1\mathbf{(s)}\mathbf{F}_2\mathbf{(s)}$
Corrimiento en el tiempo	$f(t-a)u(t-a),\ a \geq 0$	$e^{-a\mathbf{s}}\mathbf{F(s)}$
Corrimiento en la frecuencia	$f(t)e^{-at}$	$\mathbf{F(s} + a)$
Diferenciación en la frecuencia	$tf(t)$	$-\frac{d\mathbf{F(s)}}{d\mathbf{s}}$
Integración en la frecuencia	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_{\mathbf{s}}^{\infty} \mathbf{F(s)}\,d\mathbf{s}$
Escalamiento	$f(at),\ a \geq 0$	$\frac{1}{a}\mathbf{F}\left(\frac{\mathbf{s}}{a}\right)$
Valor inicial	$f(0^+)$	$\lim_{\mathbf{s}\to\infty} \mathbf{sF(s)}$
Valor final	$f(\infty)$	$\lim_{\mathbf{s}\to 0} \mathbf{sF(s)}$, todos los polos de $\mathbf{sF(s)}$ en LHP
Periodicidad en el tiempo	$f(t) = f(t + nT)$, $n = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{1 - e^{-T\mathbf{s}}}\mathbf{F}_1\mathbf{(s)}$, donde $\mathbf{F}_1\mathbf{(s)} = \int_{0^-}^{T} f(t)e^{-\mathbf{s}t}\,dt$

14.7 TEOREMAS DEL VALOR INICIAL Y DEL VALOR FINAL

Los dos últimos teoremas fundamentales que explicaremos se conocen como teoremas del valor inicial y del valor final, los cuales permiten evaluar $f(0^+)$ y $f(\infty)$ examinando los valores límite de $\mathbf{sF(s)}$. Dicha característica puede ser de un valor incalculable; si solamente se necesitaran los valores inicial y final para una función de interés en particular, no habría necesidad de dedicar tiempo para llevar a cabo una operación de transformada inversa.

Teorema del valor inicial

Para deducir el teorema del valor inicial, consideramos de nuevo la transformada de Laplace de la derivada

$$\mathscr{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \mathbf{sF(s)} - f(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\frac{df}{dt}\,dt$$

Permitimos ahora que **s** tienda a infinito. Descomponiendo la integral en dos partes, tenemos

$$\lim_{\mathbf{s}\to\infty}[\mathbf{sF(s)} - f(0^-)] = \lim_{\mathbf{s}\to\infty}\left(\int_{0^-}^{0^+} e^0 \frac{df}{dt}\,dt + \int_{0^+}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\frac{df}{dt}dt\right)$$

Observamos que la segunda integral debe aproximarse a cero en el límite, puesto que el integrando mismo tiende a cero. Además, $f(0^-)$ no es una función de **s**, así que podría eliminarse del límite de la izquierda:

$$\begin{aligned}-f(0^-) + \lim_{\mathbf{s}\to\infty}[\mathbf{sF(s)}] &= \lim_{\mathbf{s}\to\infty}\int_{0^-}^{0^+} df = \lim_{\mathbf{s}\to\infty}[f(0^+) - f(0^-)]\\ &= f(0^+) - f(0^-)\end{aligned}$$

y por último,

$$f(0^+) = \lim_{\mathbf{s}\to\infty}[\mathbf{sF(s)}]$$

o

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{\mathbf{s}\to\infty}[\mathbf{sF(s)}] \qquad [30]$$

Este enunciado matemático del ***teorema del valor inicial*** establece que el valor inicial de la función de tiempo $f(t)$ se obtiene multiplicando primero su transformada de Laplace $\mathbf{F(s)}$ por **s** y luego dejando que **s** tienda a infinito. Observe que el valor inicial de $f(t)$ que se obtiene es el límite de la derecha.

El teorema del valor inicial, junto con el teorema del valor final, que analizaremos en un momento, es útil para verificar los resultados de una transformación o de una transformación inversa. Por ejemplo, cuando calculamos la transformada de $\cos(\omega_0 t)\,u(t)$, obtuvimos $\mathbf{s}/(\mathbf{s}^2 + \omega_0^2)$. Después de observar que $f(0^+) = 1$, tenemos la posibilidad de efectuar una revisión parcial de la validez de este resultado aplicando el teorema del valor inicial:

$$\lim_{\mathbf{s}\to\infty}\left(\mathbf{s}\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 + \omega_0^2}\right) = 1$$

y se completa la verificación.

Teorema del valor final

Este ***teorema del valor final*** no es tan útil como el del valor inicial, pues sólo se usa con cierta clase de transformadas. Para determinar si una transformada entra en esta clase, se requiere evaluar el denominador de $\mathbf{F(s)}$ a fin de determinar todos los valores de **s** para los cuales éste es cero; dichos valores son muy importantes y se conocen como ***polos*** de $\mathbf{F(s)}$. Sólo aquellas transformadas $\mathbf{F(s)}$ cuyos polos se encuentran por completo dentro de la mitad izquierda del plano **s** (es decir, $\sigma < 0$), salvo para el polo simple en $\mathbf{s} = 0$, son adecuadas para utilizarse con el teorema del valor final. Consideramos de nuevo la transformada de Laplace para df/dt,

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\frac{df}{dt}\,dt = \mathbf{sF(s)} - f(0^-)$$

esta vez en el límite cuando **s** tiende a cero,

$$\lim_{\mathbf{s}\to 0}\int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\frac{df}{dt}\,dt = \lim_{\mathbf{s}\to 0}[\mathbf{sF(s)} - f(0^-)] = \int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}\,dt$$

Suponemos que tanto $f(t)$ como su primera derivada son transformables. Ahora bien, el último término de esta ecuación se expresa sin dificultad como el límite

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} dt = \lim_{t\to\infty} \int_{0^-}^{t} \frac{df}{dt} dt$$
$$= \lim_{t\to\infty} [f(t) - f(0^-)]$$

Al reconocer que $f(0^-)$ es una constante, una comparación de las últimas dos ecuaciones nos muestra que

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{\mathbf{s}\to 0}[\mathbf{sF(s)}] \qquad [31]$$

que es el ***teorema del valor final***. Al aplicar este último, se requiere saber que $f(\infty)$, el límite de $f(t)$ cuando t se vuelve infinito, existe o, lo que equivale a la misma cosa, que todos los polos de **F**(**s**) se encuentran *dentro* de la mitad izquierda del plano **s**, con excepción (posiblemente) de un polo simple en el origen. El producto **sF**(**s**) tiene todos sus polos dentro del semiplano izquierdo.

EJEMPLO 14.11

Utilice el teorema del valor final para determinar $f(\infty)$ de la función $(1 - e^{-at})u(t)$ donde $a > 0$.

Sin utilizar siquiera el teorema del valor final, observamos de inmediato que $f(\infty) = 1$. La transformada de $f(t)$ es

$$\mathbf{F(s)} = \frac{1}{\mathbf{s}} - \frac{1}{\mathbf{s}+a}$$
$$= \frac{a}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+a)}$$

Los polos de **F**(**s**) son $\mathbf{s} = 0$ y $\mathbf{s} = -a$. Así, el polo de **F**(**s**) distinto de cero está en el plano izquierdo **s**, pues podemos asegurar que $a > 0$. Vemos que podría aplicarse en realidad el teorema del valor final a esta función. Al multiplicar por **s** y dejar que tienda a cero, obtenemos

$$\lim_{\mathbf{s}\to 0}[\mathbf{sF(s)}] = \lim_{\mathbf{s}\to 0} \frac{a}{\mathbf{s}+a} = 1$$

lo cual concuerda con $f(\infty)$.

Sin embargo, si $f(t)$ es una senoide, de manera que **F**(**s**) tiene polos en el eje $j\omega$, entonces el uso irrestricto del teorema del valor final podría llevar a concluir que el valor final es cero. No obstante, sabemos que el valor final de sen $\omega_0 t$ o de cos $\omega_0 t$ es indeterminado. Así, ¡cuidado con los polos del eje $j\omega$!

PRÁCTICA

14.14 Sin determinar primero $f(t)$ obtenga $f(0^+)$ y $f(\infty)$ para cada una de las siguientes transformadas: (*a*) $4e^{-2\mathbf{s}}(\mathbf{s} + 50)/\mathbf{s}$; (*b*) $(\mathbf{s}^2 + 6)/(\mathbf{s}^2 + 7)$; (*c*) $(5\mathbf{s}^2 + 10)/[2\mathbf{s}(\mathbf{s}^2 + 3\mathbf{s} + 5)]$.

Respuestas: 0, 200; ∞, indeterminado (los polos se ubican en el eje $j\omega$); 2.5, 1.

RESUMEN Y REPASO

El tema principal de este capítulo fue la transformada de Laplace, una herramienta matemática para convertir las funciones del dominio del tiempo en expresiones en el dominio de la frecuencia. Antes de introducir la transformada, consideramos primero la noción de frecuencia compleja, designada como **s**. Este conveniente término tiene tanto un componente real (σ) como uno imaginario (ω), de modo que podemos escribir como $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$. En realidad, ésta es una forma abreviada para expresar una sinusoide exponencialmente amortiguada, y observamos que varias funciones comunes son realmente casos especiales de esta función. Se puede realizar análisis limitado de circuitos con esta función generalizada, pero el objetivo real fue simplemente familiarizar al lector con la idea de la así llamada frecuencia compleja.

Una de las cosas más sorprendentes es que ¡el análisis de circuitos de la vida diaria no necesita la implementación directa ni de la integrada de transformada de Laplace ni de su correspondiente integral inversa! En vez de esto, se usan rutinariamente tablas de consulta, y los polinomios en **s** que se obtienen al analizar circuitos en el dominio de **s** se factorizan en expresiones más pequeñas, fácilmente reconocibles. Esto funciona bien porque cada par de transformadas de Laplace es único. Sin embargo, hay diversos teoremas asociados con las transformadas de Laplace que sí se encuentran en el uso diario. Esto incluye el teorema de la linealidad, el teorema de la diferenciación con respecto al tiempo y el teorema de la integración en el tiempo. También se usan comúnmente el teorema del desplazamiento en el tiempo, así como el del valor inicial y el del valor final.

La técnica de Laplace no se restringe al análisis de circuitos, ni siquiera a la ingeniería eléctrica. Cualquier sistema que se describa por ecuaciones integrodiferenciales puede usar los conceptos que se estudian en este capítulo. En esta etapa, sin embargo, lo mejor es probablemente repasar los conceptos clave que ya se han explicado, destacando los ejemplos adecuados.

- El concepto de frecuencia compleja permite considerar de manera simultánea las componentes amortiguada exponencialmente y oscilatoria de una función. (Ejemplo 14.1)
- La frecuencia compleja $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$ es el caso general; las funciones cd ($\mathbf{s} = 0$), exponencial ($\omega = 0$) y senoidal ($\sigma = 0$) son casos especiales.
- El análisis de los circuitos en el dominio **s** da lugar a la conversión de las ecuaciones *integrodiferenciales* en el dominio del tiempo a ecuaciones algebraicas en el dominio de la frecuencia. (Ejemplo 14.1)
- En problemas de análisis de circuitos, convertimos las funciones en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia mediante la transformada unilateral de Laplace: $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t)\, dt$. (Ejemplo 14.2)
- La transformada inversa de Laplace convierte las expresiones en el dominio de la frecuencia al dominio del tiempo. Sin embargo, rara vez se necesita lo anterior, debido a la existencia de tablas que presentan los pares de transformadas de Laplace. (Ejemplo 14.3)
- La función de impulso unitario es una aproximación común a impulsos con amplitudes muy pequeñas, en comparación con las constantes de tiempo del circuito. Es distinta de cero sólo en un punto y tiene área unitaria.
- $\mathscr{L}\{f_1(t)\} + f_2(t)\} = \mathscr{L}\{f_1(t)\} + \mathscr{L}\{f_2(t)\}$ (*propiedad aditiva*)
- $\mathscr{L}\{kf(t)\} = k\mathscr{L}\{f(t)\}$, $k =$ constante (*propiedad de homogeneidad*)
- Por lo general, las transformadas inversas se obtienen utilizando una combinación de técnicas de desarrollo en fracciones parciales y en diversas operaciones (tabla 14.2) para simplificar las cantidades en el dominio **s** en expresiones que pueden

buscarse en tablas de transformadas (como la tabla 14.1). (Ejemplos 14.4, 14.5, 14.6, 14.10)

- Los teoremas de diferenciación e integración permiten convertir ecuaciones integrodiferenciales en el dominio del tiempo en simples ecuaciones algebraicas en el dominio de la frecuencia. (Ejemplos 14.7, 14.8, 14.9)
- Los teoremas del valor inicial y del valor final son útiles cuando sólo se desean los valores específicos $f(t = 0^+)$ o $f(t \to \infty)$. (Ejemplo 14.11)

LECTURAS ADICIONALES

Un desarrollo de fácil lectura acerca de la transformada de Laplace y algunas de sus propiedades clave se puede encontrar en el capítulo 4 de

A. Pinkus y S. Zafrany, *Fourier Series and Integral Transforms*, Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 1997.

Un tratamiento mucho más detallado de las transformadas integrales y su aplicación a los problemas de ciencia e ingeniería puede encontrarse en

B. Davies, *Integral Transforms and Their Applications*, 3a. ed., Nueva York: Springer-Verlag, 2002.

La estabilidad y la prueba de Routh se estudian en el capítulo 5 de

K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 4a. ed., Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 2002.

EJERCICIOS

14.1 Frecuencia compleja

1. Determine el conjugado complejo de cada una de las siguientes expresiones: (*a*) $8 - j$; (*b*) $8e^{-9t}$; (*c*) 22.5; (*d*) $4e^{j9}$; (*e*) $j2e^{-j11}$.
2. Calcule el conjugado complejo de cada una de las siguientes expresiones: (*a*) -1; (*b*) $\dfrac{-j}{5\angle 20^\circ}$; (*c*) $5e^{-j5} + 2e^{j3}$; (*d*) $(2 + j)(8\angle 30^\circ)e^{j2t}$.
3. Se escriben varias tensiones reales en una hoja de papel, pero se derrama café a lo largo de la mitad de cada uno. Complete las expresiones de tensión si la parte legible es (*a*) $5e^{-j50t}$; (*b*) $(2 + j)e^{j9t}$; (*c*) $(1 - j)e^{j78t}$; (*d*) $-je^{-5t}$. Suponga que las unidades de cada tensión son volts (V).
4. Exprese la frecuencia compleja o las frecuencias complejas correspondientes a cada función: (*a*) $f(t) = \text{sen } 100t$; (*b*) $f(t) = 10$; (*c*) $g(t) = 5e^{-7t}\cos 80t$; (*d*) $f(t) = 5e^{8t}$; (*e*) $g(t) = (4e^{-2t} - e^{-t})\cos(4t - 95^\circ)$.
5. Para cada una de las siguientes funciones, determine tanto la frecuencia compleja **s** como **s***: (*a*) $7e^{-9t}\text{sen}(100t + 9^\circ)$; (*b*) $\cos 9t$; (*c*) $2 \text{ sen } 45t$; (*d*) $e^{7t}\cos 7t$.
6. Use constantes reales A, B, θ, ϕ, etc. para construir la forma general de una función real del tiempo caracterizada por los siguientes componentes de frecuencia: (*a*) $10 - j3 \text{ s}^{-1}$; (*b*) 0.25 s^{-1}; (*c*) $0, 1, -j, 1 + j$ (todas s^{-1}).
7. Las siguientes fuentes de tensión $Ae^{Bt}\cos(Ct + \theta)$ se conectan (una cada vez) a una resistencia de 280 Ω. Calcule la corriente que resulta en $t = 0$, 0.1 y 0.5 s, observando la convención del signo pasivo: (*a*) $A = 1$ V, $B = 0.2$ Hz, $C = 0$, $\theta = 45^\circ$; (*b*) $A = 285$ mV, $B = -1$ Hz, $C = 2$ rad/s, $\theta = -45^\circ$.
8. El teléfono móvil de su vecino interfiere con el sistema de bocinas de la laptop de usted cada vez que el teléfono se está conectando a la red local. Al conectar un osciloscopio a la clavija de su computadora, usted observa una forma de tensión que se puede describir por una frecuencia compleja $\mathbf{s} = -1 + j200\pi \text{ s}^{-1}$. (*a*) ¿Qué puede usted deducir acerca de los movimientos de su vecino? (*b*) La parte imaginaria de la frecuencia compleja comienza a disminuir repentinamente. Modifique su deducción según corresponda.

9. Calcule la parte real de cada una de las siguientes funciones complejas: (*a*) $\mathbf{v}(t) = 9e^{-j4t}$ V; (*b*) $\mathbf{v}(t) = 12 - j9$ V; (*c*) $5 \cos 100t - j43 \text{ sen } 100t$ V; (*d*) $(2 + j)e^{j3t}$ V.

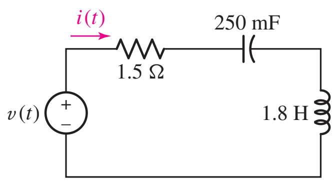
10. Su nuevo asistente ha medido la señal que proviene de un equipo de prueba y ha escrito $v(t) = \mathbf{V}_x e^{(-2+j60)t}$, donde $\mathbf{V}_x = 8 - j100$ V. (*a*) Hay un término faltante. ¿Cuál es y cómo puede usted saber que está faltando? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia compleja de la señal? (*c*) ¿Cuál es la importancia del hecho de que $\text{Im}\{\mathbf{V}_x\} > \text{Re}\{\mathbf{V}_x\}$? (*d*) ¿Cuál es la importancia de que $|\text{Re}\{\mathbf{s}\}| < |\text{Im}\{\mathbf{s}\}|$?

14.2 Función forzada senoidal amortiguada

11. Exprese la tensión en el dominio del tiempo $v(t)$ que corresponde a la tensión $\mathbf{V} = 19\underline{/84°}$ V si $\mathbf{s}$ es igual a (*a*) 5 s^{-1}; (*b*) 0; (*c*) $-4 + j$ s^{-1}.

12. Para el circuito de la figura 14.10, la fuente de tensión se elige de tal manera que se puede representar por la función en el dominio de la frecuencia compleja $\mathbf{V}e^{\mathbf{s}t}$, con $\mathbf{V} = 2.5\underline{/-20°}$ V y $\mathbf{s} = -1 + j100$ s^{-1}. Calcule (*a*) $\mathbf{s}^*$; (*b*) $v(t)$, la representación de la fuente de tensión en el dominio del tiempo; (*c*) la corriente $i(t)$.

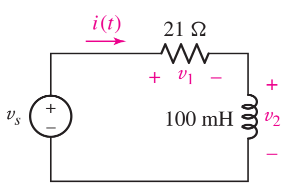
13. Respecto al circuito representado en la figura 14.10, determine la tensión en el dominio del tiempo $v(t)$ que corresponde a una corriente en el dominio de la frecuencia $\mathbf{i}(t) = 5\underline{/30°}$ A para una frecuencia compleja de (*a*) $\mathbf{s} = -2 + j2$ s^{-1}, (*b*) $\mathbf{s} = -3 + j$ s^{-1}.



■ FIGURA 14.10

14. Para el circuito representado en la figura 14.11, considere $\mathbf{s} = -200 + j150$ s^{-1}. Determine la relación de las tensiones en el dominio de la frecuencia $\mathbf{V}_2$ y $\mathbf{V}_1$ que corresponden a $v_2(t)$ y $v_1(t)$, respectivamente.

15. Si la frecuencia compleja que describe el circuito de la figura 14.11 es $\mathbf{s} = -150 + j100$ s^{-1}, determine la tensión en el dominio del tiempo que corresponde a una tensión en el dominio de la frecuencia $\mathbf{V}_2 = 5\underline{/-25°}$ V.

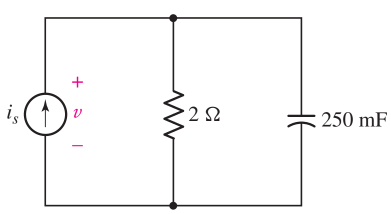


■ FIGURA 14.11

16. Calcule la tensión en el dominio del tiempo v en el circuito de la figura 14.12 si la representación en el dominio de la frecuencia de la fuente de corriente es $2.3\underline{/5°}$ A a una frecuencia compleja de $\mathbf{s} = -1 + j2$ s^{-1}.

17. El circuito de la figura 14.12 funciona durante un largo periodo sin interrupción. La tensión en el dominio de la frecuencia que se presenta entre las terminales de los tres elementos se puede representar por $1.8\underline{/75°}$ V a una frecuencia compleja de $\mathbf{s} = -2 + j1.5$ s^{-1}. Determine la corriente en el dominio del tiempo i_s.

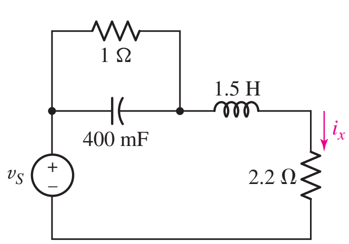
18. El circuito de la figura 14.13 está accionado por $v_S(t) = 10 \cos 5t$ V. (*a*) Determine la frecuencia compleja de la fuente. (*b*) Determine la representación de la fuente en el dominio de la frecuencia: (*c*) Calcule la representación en el dominio de la frecuencia de i_x. (*d*) Obtenga la expresión en el dominio del tiempo para i_x.



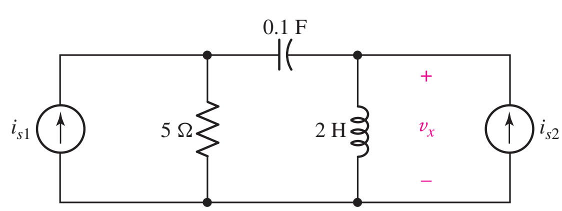
■ FIGURA 14.12

19. La corriente en el dominio de la frecuencia $\mathbf{I}_x$ que fluye a través de la resistencia de 2.2 Ω de la figura 14.13 se puede representar como $2\underline{/10°}$ A con una frecuencia compleja de $\mathbf{s} = -1 + j0.5$ s^{-1}. Determine la tensión en el dominio del tiempo v_s.

20. Sea $i_{s1} = 20e^{-3t} \cos 4t$ A e $i_{s2} = 30e^{-3t} \text{ sen } 4t$ A en el circuito de la figura 14.14. (*a*) Trabaje en el dominio de la frecuencia para determinar $\mathbf{V}_x$. (*b*) Calcule $v_x(t)$.



■ FIGURA 14.13



■ FIGURA 14.14

14.3 Definición de la transformada de Laplace

21. Calcule, con la ayuda de la ecuación [14] (y mostrando los pasos intermedios), la transformada de Laplace de las siguientes expresiones: (*a*) $2.1u(t)$; (*b*) $2u(t-1)$; (*c*) $5u(t-2) - 2u(t)$; (*d*) $3u(t-b)$, donde $b > 0$.

22. Utilice la integral de la transformada de Laplace unilateral (incluyendo explícitamente los pasos intermedios) para calcular las expresiones en el dominio de **s** que correspondan a las siguientes expresiones: (*a*) $5u(t-6)$; (*b*) $2e^{-t}u(t)$; (*c*) $2e^{-t}u(t-1)$; (*d*) e^{-2t} sen $5t\,u(t)$.

23. Con la ayuda de la ecuación [14], y mostrando los pasos intermedios adecuados, calcule la transformada de Laplace unilateral de las siguientes expresiones:
(*a*) $(t-1)u(t-1)$; (*b*) $t2u(t)$; (*c*) sen $2tu(t)$; (*d*) cos $100t\,u(t)$.

24. La transformada de Laplace de $tf(t)$ considerando $\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathbf{F}(\mathbf{s})$, está dada por $-\dfrac{d}{d\mathbf{s}}\mathbf{F}(\mathbf{s})$.
Pruebe esto comparando el resultado predicho con el hallado usando directamente la ecuación [14] para (*a*) $tu(t)$; (*b*) $t^2u(t)$; (*c*) $t^3u(t)$; (*d*) $te^{-t}u(t)$.

14.4 Transformadas de Laplace de funciones de tiempo simples

25. Para las siguientes funciones, especifique el rango de σ_0 para el que existe la transformada de Laplace unilateral: (*a*) $t + 4$; (*b*) $(t+1)(t-2)$; (*c*) $e^{-t/2}u(t)$; (*d*) sen $10t\,u(t+1)$.

26. Demuestre, con ayuda de la ecuación [14], que $\mathscr{L}\{f(t) + g(t) + h(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\} + \mathscr{L}\{g(t)\} + \mathscr{L}\{h(t)\}$.

27. Determine $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ si $f(t)$ es igual a (*a*) $3u(t-2)$; (*b*) $3e^{-2t}u(t) + 5u(t)$; (*c*) $\delta(t) + u(t) - tu(t)$; (*d*) $5\delta(t)$.

28. Obtenga una expresión para $\mathbf{G}(\mathbf{s})$ si $g(t)$ está dada por (*a*) $[5u(t)]^2 - u(t)$; (*b*) $2u(t) - 2u(t-2)$; (*c*) $tu(2t)$; (*d*) $2e^{-t}u(t) + 3u(t)$.

29. Sin recurrir a la ecuación [15], obtenga una expresión para $f(t)$ si $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ está dada por
(*a*) $\dfrac{1}{\mathbf{s}}$; (*b*) $1.55 - \dfrac{2}{\mathbf{s}}$; (*c*) $\dfrac{1}{\mathbf{s}+1.5}$; (*d*) $\dfrac{5}{\mathbf{s}^2} + \dfrac{5}{\mathbf{s}} + 5$. (Dé una breve explicación de su proceso de solución.)

30. Obtenga una expresión para $g(t)$ sin emplear la integral inversa de la transformada de Laplace, si se sabe que $\mathbf{G}(\mathbf{s})$ es (*a*) $\dfrac{1.5}{(\mathbf{s}+9)^2}$; (*b*) $\dfrac{2}{\mathbf{s}} - 0$; (*c*) π; (*d*) $\dfrac{a}{(\mathbf{s}+1)^2} - a$, $a > 0$.
(Dé una breve explicación de su proceso de solución para cada expresión.)

31. Evalúe lo siguiente: (*a*) $\delta(t)$ en $t = 1$; (*b*) $5\delta(t+1) + u(t+1)$ en $t = 0$; (*c*) $\int_{-1}^{2}\delta(t)\,dt$; (*d*) $3 - \int_{-1}^{2} 2\delta(t)\,dt$.

32. Evalúe lo siguiente: (*a*) $[\delta(2t)]^2$ en $t = 1$; (*b*) $2\delta(t-1) + u(-t+1)$ en $t = 0$;
(*c*) $\frac{1}{3}\int_{-0.001}^{0.003}\delta(t)\,dt$; (*d*) $\dfrac{1}{\left[\frac{1}{2}\int_0^2 \delta(t-1)\,dt|\right]^2}$.

33. Evalúe las siguientes expresiones en $t = 0$:
(*a*) $\int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta(t-1)\,dt$; (*b*) $\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t+1)\,dt}{u(t+1)}$; (*c*) $\dfrac{\sqrt{3\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-2)\,dt}}{[u(1-t)]^3} - \sqrt{u(t+2)}$;
(*d*) $\left[\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-1)\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t+1)\,dt}\Bigg|\right]^2$.

34. Evalúe lo siguiente:
(*a*) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-100}\delta\left(t - \dfrac{1}{5}\right)dt$; (*b*) $\int_{-\infty}^{+\infty} 4t\delta(t-2)\,dt$; (*c*) $\int_{-\infty}^{+\infty} 4t^2\delta(t-1.5)\,dt$;
(*d*) $\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty}(4-t)\delta(t-1)\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}(4-t)\delta(t+1)\,dt}$.

14.5 Técnicas de la transformada inversa

35. Determine la transformada inversa de $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ igual a (*a*) $5 + \frac{5}{\mathbf{s}^2} - \frac{5}{(\mathbf{s}+1)}$;

 (*b*) $\frac{1}{\mathbf{s}} + \frac{5}{(0.1\mathbf{s}+4)} - 3$; (*c*) $-\frac{1}{2\mathbf{s}} + \frac{1}{(0.5\mathbf{s})^2} + \frac{4}{(\mathbf{s}+5)(\mathbf{s}+5)} + 2$;

 (*d*) $\frac{4}{(\mathbf{s}+5)(\mathbf{s}+5)} + \frac{2}{\mathbf{s}+1} + \frac{1}{\mathbf{s}+3}$.

36. Obtenga una expresión para $g(t)$ si $\mathbf{G}(\mathbf{s})$ está dada por (*a*) $\frac{3(\mathbf{s}+1)}{(\mathbf{s}+1)^2} + \frac{2\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2} - \frac{1}{(\mathbf{s}+2)^2}$;

 (*b*) $-\frac{10}{(\mathbf{s}+3)^3}$; (*c*) $19 - \frac{8}{(\mathbf{s}+3)^2} + \frac{18}{\mathbf{s}^2+6\mathbf{s}+9}$.

37. Reconstruya la función en el dominio del tiempo si su transformada es (*a*) $\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+2)}$; (*b*) 1;

 (*c*) $3\frac{\mathbf{s}+2}{(\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+4)}$; (*d*) $4\frac{\mathbf{s}}{2\mathbf{s}+3}$.

38. Determine la transformada inversa de $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ igual a (*a*) $\frac{\mathbf{s}^2+2}{\mathbf{s}} + 1$;

 (*b*) $\frac{\mathbf{s}+8}{\mathbf{s}} + \frac{2}{\mathbf{s}^2}$; (*c*) $\frac{\mathbf{s}+1}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+2)} + \frac{2\mathbf{s}^2-1}{\mathbf{s}^2}$; (*d*) $\frac{\mathbf{s}^2+4\mathbf{s}+4}{\mathbf{s}}$.

39. Obtenga la expresión en el dominio del tiempo que corresponda a cada una de las siguientes funciones en el dominio de **s**: (*a*) $2\frac{3\mathbf{s}+\frac{1}{2}}{\mathbf{s}^2+3\mathbf{s}}$; (*b*) $7 - \frac{\mathbf{s}+\frac{1}{\mathbf{s}}}{\mathbf{s}^2+3\mathbf{s}+1}$;

 (*c*) $\frac{2}{\mathbf{s}^2} + \frac{1}{\mathbf{s}} + \frac{\mathbf{s}+2}{\left(\frac{\mathbf{s}}{2}\right)^2+4\mathbf{s}+6}$; (*d*) $\frac{2}{(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+1)}$; (*e*) $\frac{14}{(\mathbf{s}+1)^2(\mathbf{s}+4)(\mathbf{s}+5)}$.

40. Encuentre la transformada inversa de Laplace de lo siguiente: (*a*) $\frac{1}{\mathbf{s}^2+9\mathbf{s}+20}$;

 (*b*) $\frac{4}{\mathbf{s}^3+18\mathbf{s}^2+17\mathbf{s}} + \frac{1}{\mathbf{s}}$; (*c*) $(0.25)\frac{1}{\left(\frac{\mathbf{s}}{2}\right)^2+1.75\mathbf{s}+2.5}$;

 (*d*) $\frac{3}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+4)(\mathbf{s}+5)(\mathbf{s}+2)}$. (*e*) Verifique sus respuestas con MATLAB.

41. Determine la transformada inversa de Laplace de cada una de las siguientes expresiones en el dominio de **s**: (*a*) $\frac{1}{(\mathbf{s}+2)^2(\mathbf{s}+1)}$; (*b*) $\frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s}^2+4\mathbf{s}+4)(\mathbf{s}+2)}$; (*c*) $\frac{8}{\mathbf{s}^3+8\mathbf{s}^2+21\mathbf{s}+18}$.

 (*d*) Verifique sus respuestas con MATLAB.

42. Dadas las siguientes expresiones en el dominio de **s**, determine las funciones correspondientes en el dominio del tiempo: (*a*) $\frac{1}{3\mathbf{s}} - \frac{1}{2\mathbf{s}+1} + \frac{3}{\mathbf{s}^3+8\mathbf{s}^2+16\mathbf{s}} - 1$;

 (*b*) $\frac{1}{3\mathbf{s}+5} + \frac{3}{\mathbf{s}^3/8+0.25\mathbf{s}^2}$; (*c*) $\frac{2\mathbf{s}}{(\mathbf{s}+a)^2}$.

43. Calcule $\mathscr{L}^{-1}\{\mathbf{G}(\mathbf{s})\}$ si $\mathbf{G}(\mathbf{s})$ está dada por (*a*) $\frac{3\mathbf{s}}{(\mathbf{s}/2+2)^2(\mathbf{s}+2)}$;

 (*b*) $3 - 3\frac{\mathbf{s}}{(2\mathbf{s}^2+24\mathbf{s}+70)(\mathbf{s}+5)}$; (*c*) $2 - \frac{1}{\mathbf{s}+100} + \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+100}$; (*d*) $\mathscr{L}\{tu(2t)\}$.

44. Obtenga la expresión en el dominio del tiempo que corresponda a las siguientes funciones en el dominio de **s**: (*a*) $\frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s}+2)^3}$; (*b*) $\frac{4}{(\mathbf{s}+1)^4(\mathbf{s}+1)^2}$; (*c*) $\frac{1}{\mathbf{s}^2(\mathbf{s}+4)^2(\mathbf{s}+6)^3} - \frac{2\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}} + 9$.

 (*d*) Verifique sus soluciones con MATLAB.

14.6 Teoremas fundamentales de la transformada de Laplace

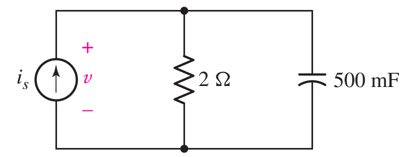
45. Efectúe la transformada de Laplace de las siguientes ecuaciones:

 (*a*) $5\,di/dt - 7\,d^2i/dt^2 + 9i = 4$; (*b*) $m\frac{d^2p}{dt^2} + \mu_f\frac{dp}{dt} + kp(t) = 0$,

 la ecuación que describe la respuesta “sin fuerza” de un sistema absorbedor de choques simple;

(*c*) $\frac{d\Delta n_p}{dt} = -\frac{\Delta n_p}{\tau} + G_L$, con τ = constante, la cual describe la tasa de recombinación de electrones en exceso (Δn_p) en silicio tipo p, bajo iluminación óptica (G_L es una constante proporcional a la intensidad de la luz).

46. Respecto al circuito representado en la figura 14.15, la tensión inicial entre las terminales del capacitor es $v(0^-) = 1.5$ V, y la fuente de corriente es $\mathbf{I}_s = 700\, u(t)$ mA. (*a*) Escriba la ecuación diferencial que resulta de la LCK, en términos de la tensión de nodo $v(t)$. (*b*) Tome la transformada de Laplace de la ecuación diferencial. (*c*) Determine la representación en el dominio de la frecuencia de la tensión de nodo. (*d*) Despeje la tensión en el dominio del tiempo $v(t)$.



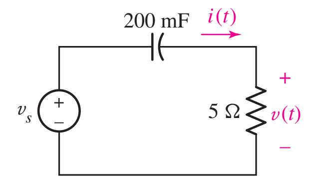
■ FIGURA 14.15

47. Para el circuito de la figura 14.15, si $\mathbf{I}_s = \frac{2}{\mathbf{s}+1}$ mA, (*a*) escriba la ecuación de nodo en el dominio del tiempo en términos de $v(t)$; (*b*) despeje $\mathbf{V(s)}$; (*c*) determine la tensión en el dominio del tiempo $v(t)$.

48. La fuente de tensión en el circuito de la figura 14.4 se reemplaza por la fuente cuyo equivalente en el dominio de **s** es $\frac{2}{\mathbf{s}} - \frac{1}{\mathbf{s}+1}$V. La condición inicial no cambia. (*a*) Escriba la ecuación LVK en el dominio de **s** en términos de $\mathbf{I(s)}$. (*b*) Despeje $i(t)$.

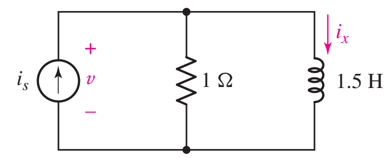
49. Para el circuito de la figura 14.16, $v_s(t) = 2u(t)$ V y el capacitor inicialmente almacena energía cero. Escriba la ecuación en el dominio del tiempo del lazo en términos de la corriente $i(t)$. (*b*) Obtenga la representación en el dominio de **s** de esta ecuación integral. (*c*) Despeje $i(t)$.

50. La representación en el dominio de **s** de la fuente de tensión en la figura 14.16 es $\mathbf{V}_s(\mathbf{s}) = \frac{2}{\mathbf{s}+1}$V. La tensión inicial entre las terminales del capacitor, definido usando la convención del signo pasivo en términos de la corriente *i*, es de 4.5 V. (*a*) Escriba la ecuación integral en el dominio del tiempo que resulta de la aplicación de la LVK. (*b*) Despejando primero $\mathbf{I(s)}$, determine la corriente en el dominio del tiempo $i(t)$.



■ FIGURA 14.16

51. Si la fuente de corriente de la figura 14.17 está dada por 450 $u(t)$ mA e $i_x(0) = 150$ mA, trabaje inicialmente en el dominio de **s** para obtener una expresión para $v(t)$ que sea válida para $t > 0$.



■ FIGURA 14.17

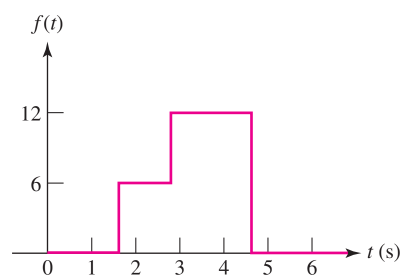
52. Obtenga, de manera formal, una expresión en el dominio de **s** que corresponda a la forma de onda graficada en la figura 14.18.

53. Aplique la prueba de Routh a las funciones de sistema siguientes y establezca si el sistema es *estable* o *inestable*:

$$(a)\ \mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{s} - 500}{\mathbf{s}^3 + 13\mathbf{s}^2 + 47\mathbf{s} + 35};\ (b)\ \mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{s} - 500}{\mathbf{s}^3 + 13\mathbf{s}^2 + \mathbf{s} + 35}.$$

54. Aplique la prueba de Routh a las funciones de sistema siguientes y establezca si el sistema es *estable* o *inestable*, después factorice cada denominador para identificar los polos de $\mathbf{H(s)}$ y verifique la exactitud de la prueba de Routh de estas funciones:

$$(a)\ \mathbf{H(s)} = \frac{4\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 + 3\mathbf{s} + 8};\ (b)\ \mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{s} - 9}{\mathbf{s}^2 + 2\mathbf{s} + 1}.$$



■ FIGURA 14.18

14.7 Teoremas del valor inicial y del valor final

55. Utilice el teorema del valor inicial para determinar el valor inicial de cada una de las siguientes funciones en el dominio del tiempo: (*a*) $2u(t)$; (*b*) $2e^{-t}\,u(t)$; (*c*) $u(t-6)$; (*d*) $\cos 5t\, u(t)$.

56. Utilice el teorema del valor inicial para determinar el valor inicial de cada una de las siguientes funciones en el dominio del tiempo: (*a*) $u(t-3)$; (*b*) $2e^{-(t-2)}u(t-2)$;

$$(c)\ \frac{u(t-2) + [u(t)]^2}{2};\ (d)\ \text{sen}\, 5t\, e^{-2t}u(t).$$

57. Use el teorema del valor final (si es adecuado) para determinar $f(\infty)$ para

$$(a)\ \frac{1}{\mathbf{s}+2} - \frac{2}{\mathbf{s}};\ (b)\ \frac{2\mathbf{s}}{(\mathbf{s}+2)(\mathbf{s}+1)};\ (c)\ \frac{1}{(\mathbf{s}+2)(\mathbf{s}+4)} + \frac{2}{\mathbf{s}};$$

$$(d)\ \frac{1}{(\mathbf{s}^2 + \mathbf{s} - 6)(\mathbf{s}+9)}.$$

58. Sin recurrir a $f(t)$, determine $f(0^+)$ y $f(\infty)$ (o demuestre que no existen) para cada una de las siguientes expresiones en el dominio de **s**: *a*) $\frac{1}{\mathbf{s}+18}$; (*b*) $10\left(\frac{1}{\mathbf{s}^2}+\frac{3}{\mathbf{s}}\right)$; (*c*) $\frac{\mathbf{s}^2-4}{\mathbf{s}^3+8\mathbf{s}^2+4\mathbf{s}}$; (*d*) $\frac{\mathbf{s}^2+2}{\mathbf{s}^3+3\mathbf{s}^2+5\mathbf{s}}$.

59. Aplique el teorema del valor inicial o el teorema del valor final, según sea adecuado, para determinar $f(0^+)$ y $f(\infty)$ para las siguiente funciones:
(*a*) $\frac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}^2+8\mathbf{s}+4}$; (*b*) $\frac{1}{\mathbf{s}^2(\mathbf{s}+4)^2(\mathbf{s}+6)^3}-\frac{2\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}}+9$; (*c*) $\frac{4\mathbf{s}^2+1}{(\mathbf{s}+1)^2(\mathbf{s}+2)^2}$.

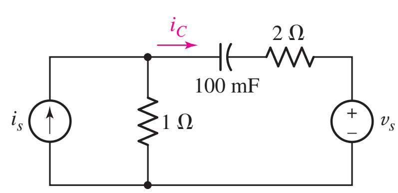
60. Determine cuáles de las siguientes funciones son adecuadas para aplicar el teorema del valor final:
(*a*) $\frac{1}{(\mathbf{s}-1)}$; (*b*) $\frac{10}{\mathbf{s}^2-4\mathbf{s}+4}$; (*c*) $\frac{13}{\mathbf{s}^3-5\mathbf{s}^2+8\mathbf{s}-6}$;
(*d*) $\frac{3}{2\mathbf{s}^3-10\mathbf{s}^2+16\mathbf{s}-12}$.

Ejercicios de integración del capítulo

61. La tensión $v(t) = 8e^{-2t}u(t)$ V se aplica a un dispositivo de dos terminales no identificado. Su asistente le entiende mal y sólo registra la corriente en el dominio de **s** que resulta. Determine qué tipo de elemento es, y su valor, si $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ es igual a (*a*) $\frac{1}{\mathbf{s}+2}$ A; (*b*) $\frac{4}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+2)}$ A.

62. (*a*) Cree una función en el dominio de **s**, $\mathbf{F}(\mathbf{s})$, que corresponda a un valor inicial $f(0^-) = 16$ pero tiene un valor final indeterminado. (*b*) Obtenga una expresión para $f(t)$. (*c*) Si esta forma de onda representa la tensión entre las terminales de un capacitor de 2 F, determine la corriente que fluye a través del dispositivo (adopte la convención del signo pasivo).

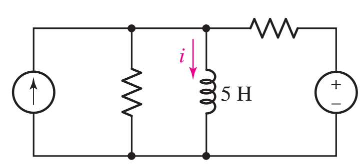
63. Para el circuito de la figura 14.19, sea $i_s(t) = 5u(t)$ A y $v_s(t) = e^{-4t}u(t+1)$ V. Trabajando inicialmente en el dominio de **s**, obtenga una expresión para $i_C(t)$ que sea válida para $t > 0$.



■ **FIGURA 14.19**

64. Con referencia al circuito representado en la figura 14.19 y trabajando en el dominio de **s** para desarrollar una expresión para $\mathbf{I}_C(\mathbf{s})$, determine $i_C(t)$ para $t > 0$ si $i_s(t) = 2u(t+2)$ A y $v_s(t)$ es igual a (*a*) $2u(t)$ V; (*b*) $te^{-t}u(t)$ V.

65. Para el circuito de la figura 14.20, $\mathbf{I}(\mathbf{s}) = 5\frac{\mathbf{s}+1}{(\mathbf{s}+1)^2+10^4}$ A. (*a*) Determine el valor inicial de la corriente en el inductor. (*b*) Determine el valor final de la tensión en el inductor, suponiendo que está definido de acuerdo con la convención del signo pasivo.



■ **FIGURA 14.20**



CAPÍTULO 15

Análisis de circuitos en el dominio s



CONCEPTOS CLAVE

- Extender el concepto de impedancia al dominio **s**
- Modelado de condiciones iniciales con fuentes ideales
- Aplicación del análisis nodal, de malla, de superposición y de transformación de fuente en el dominio **s**
- Teoremas de Thévenin y Norton aplicados a circuitos en el dominio **s**
- Manipulación de expresiones algebraicas en el dominio **s** con MATLAB
- Identificación de polos y ceros en las funciones de transferencias de circuitos
- Respuesta al impulso de un circuito
- Uso de la convolución para determinar la respuesta de un sistema
- Respuesta en función de σ y ω
- Utilización de gráficas de polos-ceros para predecir la respuesta natural de un circuito
- Síntesis de las funciones de transferencia de tensión específicas utilizando amp ops



INTRODUCCIÓN

Ya que se nos ha introducido al concepto de frecuencia compleja y a la técnica de la transformada de Laplace, estamos ahora preparados para ver los detalles de cómo funciona realmente el análisis de circuitos en el dominio **s**. Como el lector podría sospechar, especialmente si ya se ha estudiado el capítulo 10, de hecho se aplican de manera rutinaria diversos atajos. El primero de éstos es crear una nueva manera de visualizar los capacitores y los inductores, de modo que las ecuaciones nodales y de malla en el dominio **s** se puedan escribir directamente. Como parte de este método, aprenderemos ahora a tener cuidado para tomar en cuenta las condiciones iniciales. Otro "atajo" es el concepto de la función de transferencia del circuito. Esta función general se puede aprovechar para predecir la respuesta de un circuito a varias entradas, su estabilidad e incluso su respuesta selectiva a la frecuencia.

15.1 Z(s) y Y(s)

El concepto clave que hace que los fasores resulten tan útiles en el análisis de circuitos de estado senoidal permanente es la transformación de resistencias, capacitores e inductores en *impedancias*. El análisis de circuitos continúa luego con el uso de técnicas básicas de análisis nodal o de malla, superposición y transformación de fuente, así como el equivalente de Thévenin o el de Norton. Este concepto se extiende al dominio **s**, pues el estado senoidal permanente es sólo un caso especial (donde $\sigma = 0$).

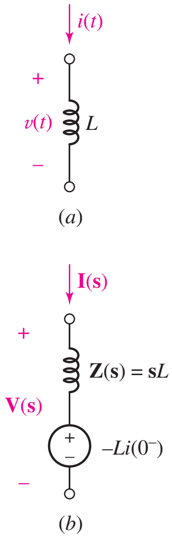
Resistencias en el dominio de la frecuencia

Se empezará con la situación más simple: la de una resistencia conectada a una fuente de tensión $v(t)$. La ley de Ohm especifica que

$$v(t) = Ri(t)$$

Tomando la transformada de Laplace en ambos lados,

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = R\mathbf{I}(\mathbf{s})$$



■ **FIGURA 15.1** (*a*) Inductor en el dominio del tiempo. (*b*) Modelo completo de un inductor en el dominio de la frecuencia, compuesto por una impedancia sL y una fuente de tensión $-Li(0^-)$ que incorpora el efecto de condiciones iniciales distintas de cero en el elemento.

Se encuentra que la relación (o razón) que representa a la tensión y la corriente en el dominio de la frecuencia es sencillamente la resistencia, R. Puesto que se está trabajando en el dominio de la frecuencia, nos referimos a esta cantidad como una *impedancia,* en bien de la claridad, aunque se le siguen asignando las unidades de ohm (Ω):

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{\mathbf{I}(\mathbf{s})} = R \qquad [1]$$

Del mismo modo en que se explicó al trabajar con fasores en el estado senoidal permanente, la impedancia de una resistencia no depende de la frecuencia. La *admitancia* $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ de una resistencia, definida como la razón de $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ entre $\mathbf{V}(\mathbf{s})$, es simplemente $1/R$; la unidad de admitancia es el siemen (S).

Inductores en el dominio de la frecuencia

A continuación, consideramos un inductor conectado a alguna fuente de tensión variable en el tiempo $v(t)$, como se indica en la figura 15.1*a*. Se sabe que

$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$

tomando la transformada de Laplace en ambos lados de esta ecuación, se encuentra que

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = L[\mathbf{s}\mathbf{I}(\mathbf{s}) - i(0^-)] \qquad [2]$$

Ahora tenemos dos términos: $\mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s})$ y $Li(0^-)$. En situaciones en las que la energía inicial almacenada en el inductor es nula (es decir, $i(0^-) = 0$), entonces

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s})$$

por lo que

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{\mathbf{I}(\mathbf{s})} = \mathbf{s}L \qquad [3]$$

La ecuación [3] se simplifica aún más si sólo estamos interesados en la respuesta senoidal de estado permanente. Se pueden ignorar las condiciones iniciales en tales casos, pues sólo afectan la naturaleza de la respuesta transitoria. De tal modo, sustituimos $\mathbf{s} = j\omega$ y encontramos

$$\mathbf{Z}(j\omega) = j\omega L$$

como se obtuvo antes en el capítulo 10.

Modelos de inductores en el dominio s

Aunque nos referimos a la cantidad de la ecuación [3] como la impedancia de un inductor, debemos recordar que se obtuvo bajo el supuesto de una corriente inicial cero. En la situación más general, donde la energía se almacena en el elemento en $t = 0^-$, tal cantidad no es suficiente para representar al inductor en el dominio de la frecuencia. Por fortuna, es posible incluir la condición inicial haciendo un modelo de un inductor como una impedancia en combinación con una fuente de tensión o con una de corriente. Para efectuar lo anterior, en primer lugar debemos reordenar nuevamente la ecuación [2] como

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s}) - Li(0^-) \qquad [4]$$

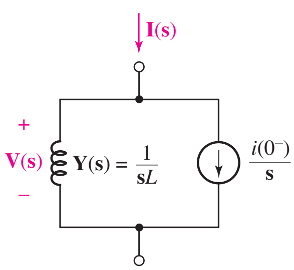
El segundo término a la derecha será una constante: la inductancia L en henrys multiplicada por la corriente inicial $i(0^-)$ en amperes. El resultado es un término que se resta

del término dependiente de la frecuencia $\mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s})$. Un pequeño destello de intuición en este punto permite reconocer que podemos hacer un modelo de un inductor sencillo L como un elemento de dos componentes en el dominio de la frecuencia, como se indica en la figura 15.1*b*.

El modelo de inductor en el dominio de la frecuencia que se presenta en la figura 15.1*b* consiste en una impedancia $\mathbf{s}L$ y una fuente de tension $Li(0^-)$. La tensión en la impedancia $\mathbf{s}L$ está dada por la ley de Ohm como $\mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s})$. Puesto que la combinación de los dos elementos de la figura 15.1*b* es lineal, toda técnica de análisis de circuitos explorada antes se aplica también en el dominio **s**. Por ejemplo, se puede efectuar una transformación de fuente sobre el modelo para obtener una impedancia $\mathbf{s}L$ en paralelo con una fuente de corriente $[-Li(0^-)]/\mathbf{s}L = -i(0^-)/\mathbf{s}$. Lo anterior se verifica analizando la ecuación [4] y despejando y despojando $\mathbf{I}(\mathbf{s})$:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}(\mathbf{s}) &= \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s}) + Li(0^-)}{\mathbf{s}L} \\ &= \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{\mathbf{s}L} + \frac{i(0^-)}{\mathbf{s}}\end{aligned} \qquad [5]$$

También en este caso nos quedamos con dos términos. El primero de la derecha es sólo una admitancia $1/\mathbf{s}L$ veces la tensión $\mathbf{V}(\mathbf{s})$. El segundo término de la derecha es la corriente, aunque tiene unidades de ampere · segundos. De tal modo, podemos hacer el modelo de esta ecuación con dos componentes independientes: una admitancia $1/\mathbf{s}L$ en paralelo con una fuente de corriente $i(0^-)/\mathbf{s}$; el modelo resultante se presenta en la figura 15.2. La elección de usar el modelo de la figura 15.1*b* o el de la figura 15.2 suele depender de cuál proporcionará las ecuaciones más simples. Observe que aunque la figura 15.2 presenta el símbolo del inductor marcado con una admitancia $\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = 1/\mathbf{s}L$, también se considera como una impedancia $\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}L$; asimismo, en este caso, la elección de cuál utilizar se basa a menudo en la preferencia personal y en la conveniencia.

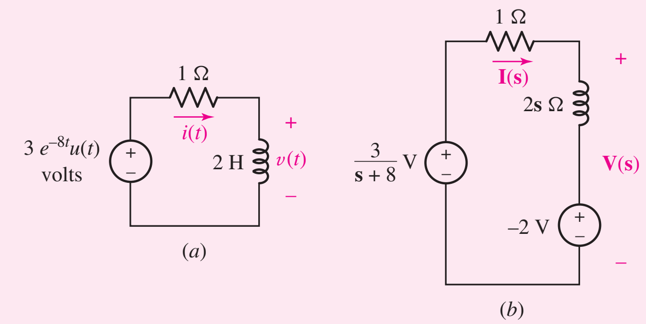


■ **FIGURA 15.2** Modelo alternativo en el dominio de la frecuencia del inductor, con una admitancia $1/\mathbf{s}L$ y una fuente de corriente $i(0^-)/\mathbf{s}$.

Vale la pena un breve comentario acerca de las unidades. Cuando calculamos la transformada de Laplace de una corriente $i(t)$, estamos integrando respecto del tiempo. Por lo tanto, las unidades de $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ técnicamente son amperes≈segundos; de modo similar, las unidades de $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ son volts·segundos. No obstante, por convención se ha decidido eliminar los segundos y asignar a $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ las unidades de amperes y medir $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ en volts. Dicha convención no presenta ningún problema hasta que se revisa una ecuación como la [5] y aparece un término similar a $i(0^-)/\mathbf{s}$ que se encuentra en aparente conflicto con las unidades de $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ del lado izquierdo. Si bien seguiremos midiendo las cantidades fasoriales en "amperes" y "volts", al verificar las unidades de una ecuación para revisar el álgebra, ¡es necesario recordar los segundos!

EJEMPLO 15.1

Calcule la tensión $v(t)$ de la figura 15.3*a*, dada una corriente inicial $i(0^-) = 1$ A.



■ **FIGURA 15.3** (*a*) Circuito simple de resistencia -inductor para el que se desea la tensión $v(t)$. (*b*) El circuito equivalente en el dominio de la frecuencia, que incluye la corriente inicial en el inductor mediante el uso de una fuente de tensión en serie $-Li(0^-)$.

Para comenzar debemos convertir el circuito de la figura 15.3*a* en su equivalente en el dominio de la frecuencia, que se muestra en la figura 15.3*b*; el inductor se sustituyó por un modelo de dos componentes: una impedancia $\mathbf{s}L = 2\mathbf{s}\ \Omega$, y una fuente de tensión independiente $-Li(0^-) = -2$V.

Buscamos la cantidad marcada $\mathbf{V(s)}$, pues su transformada inversa dará como resultado $v(t)$. Observe que $\mathbf{V(s)}$ aparece entre los extremos del modelo del inductor *completo*, y no sólo del componente de la impedancia.

Optando por la ruta directa, escribimos

$$\mathbf{I(s)} = \frac{\dfrac{3}{\mathbf{s}+8} + 2}{1 + 2\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{s} + 9.5}{(\mathbf{s}+8)(\mathbf{s}+0.5)}$$

y

$$\mathbf{V(s)} = 2\mathbf{s}\,\mathbf{I(s)} - 2$$

por lo que

$$\mathbf{V(s)} = \frac{2\mathbf{s}(\mathbf{s}+9.5)}{(\mathbf{s}+8)(\mathbf{s}+0.5)} - 2$$

Antes de aplicar la transformada inversa de Laplace de esta expresión, vale la pena dedicar tiempo y esfuerzo para simplificarla. Por lo tanto,

$$\mathbf{V(s)} = \frac{2\mathbf{s} - 8}{(\mathbf{s}+8)(\mathbf{s}+0.5)}$$

Recurriendo a la técnica de la expansión en fracciones parciales (a mano o con el auxilio de MATLAB), podemos ver que

$$\mathbf{V(s)} = \frac{3.2}{\mathbf{s}+8} - \frac{1.2}{\mathbf{s}+0.5}$$

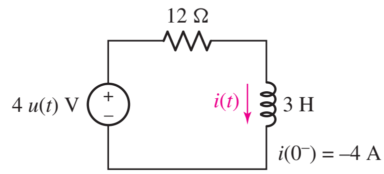
Mediante la consulta de la tabla 14.1, se sabe que la transformada inversa es

$$v(t) = [3.2e^{-8t} - 1.2e^{-0.5t}]u(t) \qquad \text{volts}$$

PRÁCTICA

15.1 Determine la corriente $i(t)$ del circuito de la figura 15.4.

Respuesta: $\frac{1}{3}[1 - 13e^{-4t}]u(t)$ A.

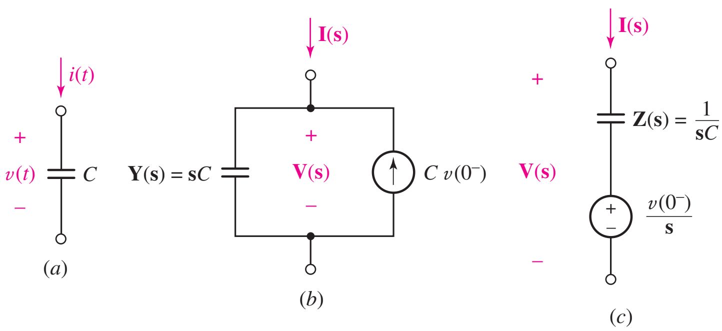


■ **FIGURA 15.4**

Modelo de capacitores en el dominio s

Los mismos conceptos se aplican también a los capacitores en el dominio **s**. De acuerdo con la convención de signos pasiva, como se ilustra en la figura 15.5*a*, la ecuación que gobierna al capacitor es

$$i = C\frac{dv}{dt}$$



■ **FIGURA 15.5** (*a*) Capacitor en el dominio del tiempo, en el que se indican $v(t)$ e $i(t)$. (*b*) Modelo en el dominio de la frecuencia de un capacitor con tensión inicial de $v(0^-)$. (*c*) Modelo equivalente obtenido a través de una transformación de fuente.

Al tomar la transformada de Laplace en ambos lados, tenemos

$$\mathbf{I(s)} = C[\mathbf{sV(s)} - v(0^-)]$$

o

$$\mathbf{I(s)} = \mathbf{s}C\mathbf{V(s)} - Cv(0^-) \qquad [6]$$

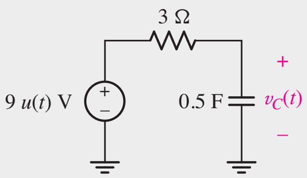
cuyo modelo puede ser una admitancia $\mathbf{s}C$ en paralelo con una fuente de corriente $Cv(0^-)$, como en la figura 15.5*b*. Al efectuar una transformación de fuente en este circuito (con cuidado en seguir la convención de signos pasiva), se produce un modelo equivalente del capacitor compuesto por una impedancia $1/\mathbf{s}C$ en serie con una fuente de tensión $v(0^-)/\mathbf{s}$, como se muestra en la figura 15.5*c*.

Al trabajar con estos equivalentes en el dominio **s** debemos cuidar de no confundirnos con las fuentes independientes que se utilizan para incluir las condiciones iniciales. La condición inicial de un inductor está dada como $i(0^-)$; dicho término quizá aparezca como parte de una fuente de tensión o de una de corriente, según el modelo que se elija. La condición inicial de un capacitor está dada como $v(0^-)$, en cuyo caso el término puede aparecer como parte de una fuente de tensión o de una de corriente.

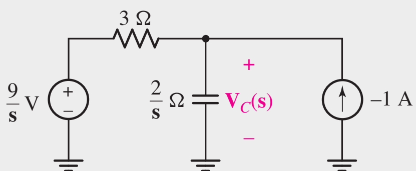
Un error muy común de los estudiantes que trabajan con el análisis en el dominio **s** por primera vez es usar siempre $v(0^-)$ para la componente de la fuente de tensión del modelo, aun cuando trabajen con un inductor.

EJEMPLO 15.2

Determine $v_C(t)$ en el circuito de la figura 15.6*a*, bajo el supuesto de una tensión inicial $v_C(0^-) = -2$ V.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 15.6 (*a*) Circuito para el que se requiere la corriente. (*b*) Circuito equivalente eb el dominio de la frecuencia, en el que se emplea el modelo basado en la fuente de corriente para tomar en cuenta la condición inicial del capacitor.

Identifique el objetivo del problema.

Se necesita la expresión de la tensión en el capacitor, $v_C(t)$.

Recopile la información conocida.

El problema especifica una tensión inicial en el capacitor de -2 V.

Elabore un plan.

El primer paso es dibujar el circuito equivalente en el dominio **s**; al hacerlo, debemos elegir entre los dos posibles modelos de capacitor. Sin ventaja clara de uno en comparación con el otro, seleccionamos el modelo basado en fuente de corriente como en la figura 15.6*b*.

Construya un conjunto de ecuaciones apropiado.

Continuaremos con el análisis escribiendo una sola ecuación nodal:

$$-1 = \frac{\mathbf{V}_C}{2/\mathbf{s}} + \frac{\mathbf{V}_C - 9/\mathbf{s}}{3}$$

Determine si se requiere información adicional.

Hay una ecuación con una incógnita: la representación en el dominio de la frecuencia de la tensión deseada en el capacitor.

Busque la solución.

Resolviendo para $\mathbf{V}_C$, observamos que:

$$\mathbf{V}_C = \frac{18/\mathbf{s} - 6}{3\mathbf{s} + 2} = -2\frac{(\mathbf{s} - 3)}{\mathbf{s}(\mathbf{s} + 2/3)}$$

El desarrollo en fracciones parciales produce

$$\mathbf{V}_C = \frac{9}{\mathbf{s}} - \frac{11}{\mathbf{s} + 2/3}$$

Obtenemos $v_C(t)$ tomando la transformada inversa de Laplace de esta expresión, lo que origina

$$v_C(t) = 9u(t) - 11e^{-2t/3}u(t) \qquad \text{V}$$

o, en forma más compacta:

$$v_C(t) = [9 - 11e^{-2t/3}]u(t) \qquad \text{V}$$

Verifique la solución. ¿Es razonable o la esperada?

Una verificación rápida de $t = 0$ da $v_C(t) = -2$V, pues se basa en el conocimiento de la condición inicial. Además, a medida que $t \to \infty$, $v_C(t) \to 9$ V como deberíamos esperar a partir de la figura 15.6*a* una vez que se haya extinguido (o desaparecido) el transitorio.

PRÁCTICA

15.2 Repita el ejemplo 15.2 utilizando el modelo de capacitor basado en la fuente de tensión.

Respuesta: $[9 - 11e^{-2t/3}]u(t)$ V.

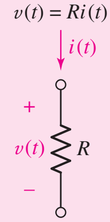
Los resultados de esta sección se resumen en la tabla 15.1. Observe que en cada caso suponemos la convención de signos pasiva.

TABLA 15.1 Resumen de representaciones de elementos en los dominios del tiempo y la frecuencia

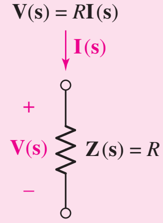
Dominio del tiempo | **Dominio de la frecuencia**

Resistencia

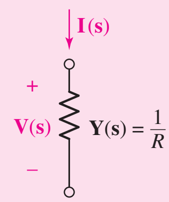
$v(t) = Ri(t)$



$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = R\mathbf{I}(\mathbf{s})$

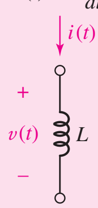


$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{1}{R}\mathbf{V}(\mathbf{s})$

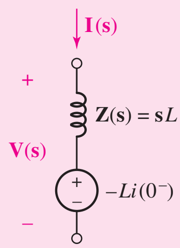


Inductor

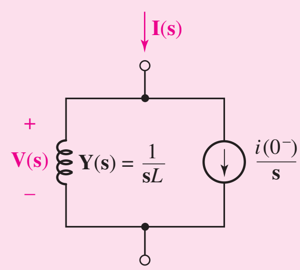
$v(t) = L\frac{di}{dt}$



$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s}) - Li(0^-)$

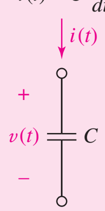


$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{\mathbf{s}L} + \frac{i(0^-)}{\mathbf{s}}$

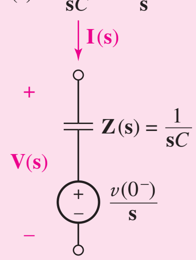


Capacitor

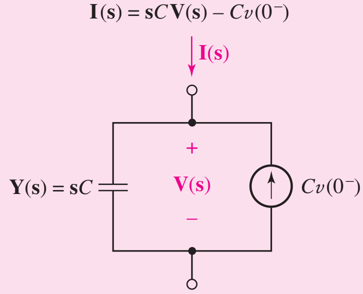
$i(t) = C\frac{dv}{dt}$



$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{I}(\mathbf{s})}{\mathbf{s}C} + \frac{v(0^-)}{\mathbf{s}}$



$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}C\mathbf{V}(\mathbf{s}) - Cv(0^-)$



15.2 ANÁLISIS NODAL Y DE MALLA EN EL DOMINIO S

En el capítulo 10 estudiamos la manera de transformar los circuitos en el dominio del tiempo activados por fuentes senoidales, en sus equivalentes en el dominio de la frecuencia. Los beneficios de esta transformación resultaron evidentes de inmediato, pues ya no fue necesario resolver ecuaciones integrodiferenciales. El análisis nodal y de malla de tales circuitos (restringido a determinar sólo la respuesta en estado permanente) produjo expresiones algebraicas en términos de $j\omega$, siendo ω la frecuencia angular de las fuentes.

Hemos visto ahora que se puede extender el concepto de impedancia al caso más general de frecuencia compleja ($\mathbf{s} = \sigma + j\omega$). Una vez que transformamos los circuitos del dominio del tiempo al de la frecuencia, la realización del análisis nodal o de malla tendrá como resultado, también en este caso, expresiones puramente algebraicas, pero esta vez en términos de la frecuencia compleja **s**. La solución de las ecuaciones resultantes requiere el uso de la sustitución de variables, la regla de Cramer o un programa de cómputo capaz de manipular el álgebra simbólica (por ejemplo, MATLAB). En esta sección presentamos dos ejemplos de razonable complejidad, a fin de que examinemos estos temas con mayor detalle. Sin embargo, primero haremos una breve pausa para ver la forma en que puede utilizarse MATLAB para apoyar en esta tarea.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

En el capítulo anterior se vio que se utiliza MATLAB para determinar los residuos de funciones racionales en el dominio **s**, lo cual hace que el proceso inverso de la transformada de Laplace sea mucho más sencillo. Sin embargo, este programa de cómputo es en realidad mucho más poderoso, pues dispone de numerosas rutinas incorporadas para la manipulación de las expresiones algebraicas. De hecho, como veremos en este ejemplo, MATLAB incluso puede efectuar de manera directa las transformadas inversas de Laplace a través de las funciones racionales que obtenemos gracias al análisis de circuitos.

Comencemos viendo cómo puede utilizarse MATLAB para trabajar con expresiones algebraicas, las cuales se almacenan como secuencias de caracteres, donde se utiliza el apóstrofe (‘) en la expresión de definición. Por ejemplo, se representó antes el polinomio $\mathbf{p}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^3 - 12\mathbf{s} + 6$ como un vector:

```
EDU» p = [1   0   −12   6];
```

Sin embargo, también representamos de manera simbólica:

```
EDU» p = ‘s^3 − 12*s + 6’;
```

Estas dos representaciones no son iguales en MATLAB, sino que son conceptos distintos. Cuando deseamos manipular *simbólicamente* una expresión algebraica, requerimos la segunda representación. Esta capacidad resulta en especial útil al trabajar con las ecuaciones simultáneas.

Considere el conjunto de ecuaciones

$$(3\mathbf{s} + 10)\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 = \frac{4}{\mathbf{s} + 2}$$

$$-10\mathbf{I}_1 + (4\mathbf{s} + 10)\mathbf{I}_2 = -\frac{2}{\mathbf{s} + 1}$$

Utilizando la notación simbólica de MATLAB, definimos dos variables de secuencia:

```
EDU» eqn1 = '(3*s+10)*I1 − 10*I2 = 4/(s+2)';
EDU» eqn2 = '−10*I1 + (4*s+10)*I2 = −2/(s+1)';
```

Observe que la ecuación completa se incluyó en cada secuencia; la meta consiste en resolver las dos ecuaciones de las variables I1 e I2. MATLAB proporciona una rutina especial, *solve*(), que manipula tales ecuaciones. Se aplica listando las ecuaciones separadas (definidas como secuencias), seguidas por una lista de incógnitas (definidas también como secuencias):

```
EDU» solución = solve(eqn1, eqn2, 'I1', 'I2');
```

La respuesta se almacena en la variable *solución,* aunque en una disposición un poco inesperada. MATLAB da como respuesta, en una forma que se denomina estructura, una construcción que resulta familiar para los programadores de C. En esta etapa, sin embargo, todo lo que necesitamos conocer es la forma de extraer la respuesta. Si tecleamos

```
EDU» I1 = solución.I1
```

obtenemos la respuesta

```
I1 =
2*(4*s+9)/(s+1)/(6*s^2+47*s+70)
```

que indica que se asignó una expresión del polinomio **s** a la variable I1; se utiliza una operación similar para la variable I2.

Ahora procedemos de manera directa para determinar la transformada inversa de Laplace utilizando la función *ilaplace*():

```
EDU» i1 = ilaplace(I1)
i1 =
10/29*exp(−t)−172/667*exp(−35/6*t)−2/23*exp(−2*t)
```

De esta manera, obtenemos con rapidez la solución de las ecuaciones simultáneas que resultan del análisis nodal o de malla, y determinamos también las transformadas inversas de Laplace. El comando *ezplot*(i1) permite ver la forma en que se observa la solución, si así lo deseamos. Debe observarse que las expresiones complicadas a veces quizá confundan a MATLAB; en tales situaciones, *ilaplace*() quizá no dé una respuesta útil.

Vale la pena mencionar unas cuantas funciones relacionadas, pues también se utilizarán para revisar de inmediato las respuestas calculadas de manera manual. La función *numden*() convierte una función racional en dos variables independientes: una que contiene el numerador y la otra el denominador. Por ejemplo,

```
EDU» [N, D] = numden(I1)
```

da como resultado dos expresiones algebraicas almacenadas en N y D, respectivamente:

```
N =
8*s+18
D =
(s+1)*(6*s^2+47*s+70)
```

(*continúa*)

Para aplicar nuestra experiencia anterior a la función *residue*(), necesitamos convertir cada expresión simbólica (secuencia) en un vector que contenga los coeficientes del polinomio. Lo anterior se logra con el comando *sym2poly*():

```
EDU» n = sym2poly(N);
```

y

```
EDU» d = sym2poly(D)
d =
6   53   117   70
```

después de lo cual determinamos los residuos

```
EDU» [r p y] = residue(n,d)
r =          p =          y =

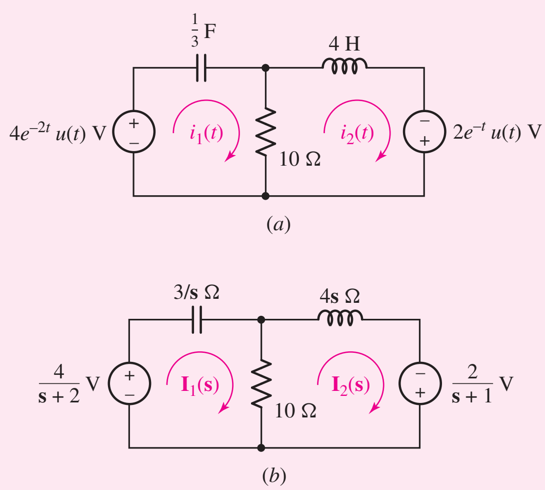
-0.2579     -5.8333      [ ]
-0.0870     -2.0000
 0.3448     -1.0000
```

lo cual concuerda con lo que obtuvimos mediante el empleo de *ilaplace*().

Con estas nuevas capacidades de MATLAB (o un deseo arraigado de intentar un método alternativo, como el de Cramer o la sustitución directa), estamos listos para proceder a analizar unos cuantos circuitos.

EJEMPLO 15.3

Determine las dos corrientes de malla i_1 e i_2 del circuito de la figura 15.7*a*. Al inicio, no hay energía almacenada en el circuito.



■ **FIGURA 15.7** (*a*) Circuito de dos mallas para el que se desean corrientes de malla individuales. (*b*) Circuito equivalente en el dominio de la frecuencia.

Como siempre, el primer paso consiste en dibujar el circuito equivalente apropiado en el dominio de la frecuencia. Puesto que no se tiene energía almacenada

en el circuito en $t = 0^-$, sustituimos el capacitor de $\frac{1}{3}$F por una impedancia de $3/\mathbf{s}$ Ω y el inductor de 4 H por una impedancia de $4\mathbf{s}$ Ω como en la figura 15.7*b*.

A continuación, escribimos dos ecuaciones de malla justo como hicimos antes:

$$-\frac{4}{\mathbf{s}+2} + \frac{3}{\mathbf{s}}\mathbf{I}_1 + 10\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 = 0$$

o

$$\left(\frac{3}{\mathbf{s}} + 10\right)\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 = \frac{4}{\mathbf{s}+2} \qquad \text{(malla 1)}$$

y

$$-\frac{2}{\mathbf{s}+1} + 10\mathbf{I}_2 - 10\mathbf{I}_1 + 4\mathbf{s}\mathbf{I}_2 = 0$$

o

$$-10\mathbf{I}_1 + (4\mathbf{s}+10)\mathbf{I}_2 = \frac{2}{\mathbf{s}+1} \qquad \text{(malla 2)}$$

Despejando $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, encontramos que

$$\mathbf{I}_1 = \frac{2\mathbf{s}(4\mathbf{s}^2 + 19\mathbf{s} + 20)}{(20\mathbf{s}^4 + 66\mathbf{s}^3 + 73\mathbf{s}^2 + 57\mathbf{s} + 30)} \quad \text{A}$$

e

$$\mathbf{I}_2 = \frac{30\mathbf{s}^2 + 43\mathbf{s} + 6}{(\mathbf{s}+2)(20\mathbf{s}^3 + 26\mathbf{s}^2 + 21\mathbf{s} + 15)} \quad \text{A}$$

Todo lo que resta es obtener la transformada inversa de Laplace de cada función, luego de lo cual tenemos

$$i_1(t) = -96.39e^{-2t} - 344.8e^{-t} + 841.2e^{-0.15t}\cos 0.8529t + 197.7e^{-0.15t}\,\text{sen}\,0.8529t \quad \text{mA}$$

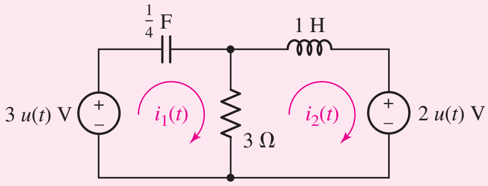
e

$$i_2(t) = -481.9e^{-2t} - 241.4e^{-t} + 723.3e^{-0.15t}\cos 0.8529t + 472.8e^{-0.15t}\,\text{sen}\,0.8529t \quad \text{mA}$$

Indicamos (de manera indirecta) que no fluye corriente a través del inductor en $t = 0^-$. Por lo tanto, $i_2(0^-) = 0$ y, en consecuencia, $i_2(0^+)$ debe ser también igual a 0. ¿Este resultado es válido para su respuesta?

PRÁCTICA

15.3 Determine las corrientes de malla i_1 e i_2 en el circuito de la figura 15.8. Podría usted suponer que no hay energía almacenada en el circuito en $t = 0^-$.

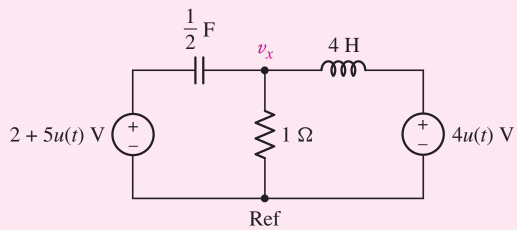


■ **FIGURA 15.8**

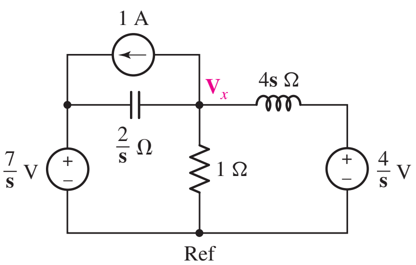
Respuestas: $i_1 = e^{-2t/3}\cos\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right) + \left(\sqrt{2}/8\right)e^{-2t/3}\,\text{sen}\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right)$ A; $i_2 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{-2t/3}\cos\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right) + \left(13\sqrt{2}/24\right)e^{-2t/3}\,\text{sen}\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right)$ A.

EJEMPLO 15.4

Calcule la tensión v_x en el circuito de la figura 15.9 utilizando las técnicas del análisis nodal.



■ **FIGURA 15.9** Circuito simple de cuatro nodos que contiene dos elementos de almacenamiento de energía.



■ **FIGURA 15.10** Circuito equivalente en el dominio **s** de la figura 15.9.

El primer paso consiste en dibujar el circuito correspondiente en el dominio **s**. Podemos observar que el capacitor $\frac{1}{2}$ F tiene una tensión inicial de 2 V en sus terminales en el tiempo $t = 0^-$, lo cual requiere que empleemos uno de los dos modelos de la figura 15.5. Puesto que utilizaremos el análisis nodal, quizá sea mejor usar el modelo de la figura 15.5*b*. El circuito resultante se muestra en la figura 15.10.

Una vez especificadas las dos o tres tensiones nodales, solamente nos queda una ecuación nodal por escribir:

$$-1 = \frac{\mathbf{V}_x - \frac{7}{\mathbf{s}}}{\frac{2}{\mathbf{s}}} + \mathbf{V}_x + \frac{\mathbf{V}_x - \frac{4}{\mathbf{s}}}{4\mathbf{s}}$$

por lo que

$$\mathbf{V}_x = \frac{10\mathbf{s}^2 + 4}{\mathbf{s}(2\mathbf{s}^2 + 4\mathbf{s} + 1)} = \frac{5\mathbf{s}^2 + 2}{\mathbf{s}\left(\mathbf{s} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\mathbf{s} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

La tensión nodal v_x se encuentra llevando a cabo la transformada inversa de Laplace, por medio de la cual podemos ver que

$$v_x = [4 + 6.864e^{-1.707t} - 5.864e^{-0.2929t}]u(t)$$

o

$$v_x = \left[4 - e^{-t}\left(9\sqrt{2}\,\mathrm{senh}\frac{\sqrt{2}}{2}t - \cosh\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right]u(t)$$

¿Es correcta su respuesta? Una forma de verificarla es evaluar la tensión en el capacitor en $t = 0$, ya que sabemos que será de 2 V. Por ende,

$$\mathbf{V}_C = \frac{7}{\mathbf{s}} - \mathbf{V}_x = \frac{4\mathbf{s}^2 + 28\mathbf{s} + 3}{\mathbf{s}(2\mathbf{s}^2 + 4\mathbf{s} + 1)}$$

Multiplicando $\mathbf{V}_C$ por **s** y calculando el límite de $\mathbf{s} \to \infty$, encontramos que

$$v_c(0^+) = \lim_{\mathbf{s}\to\infty}\left[\frac{4\mathbf{s}^2 + 28\mathbf{s} + 3}{2\mathbf{s}^2 + 4\mathbf{s} + 1}\right] = 2\text{ V}$$

como se esperaba.

PRÁCTICA

15.4 Aplique el análisis nodal para calcular $v_x(t)$ en el circuito de la figura 15.11.

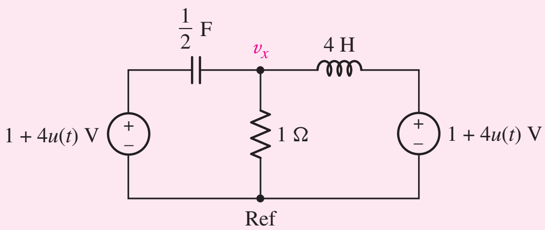


FIGURA 15.11 Para el problema de práctica 15.4.

Respuesta: $[5 + 5.657(e^{-1.707t} - e^{-0.2929t})]u(t)$.

EJEMPLO 15.5

Aplique el análisis nodal para determinar las tensiones v_1, v_2 y v_3 en el circuito de la figura 15.12*a*. No hay energía almacenada en el circuito en $t = 0^-$.

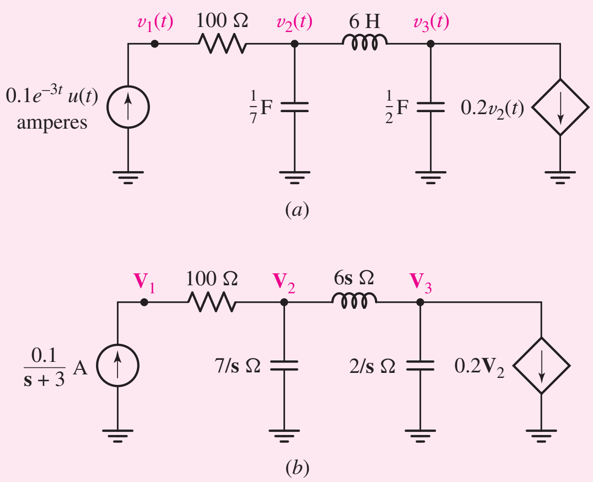


FIGURA 15.12 (*a*) Circuito de cuatro nodos que contiene dos capacitores y un inductor, ninguno de los cuales almacena energía en $t = 0^-$. (*b*) Circuito equivalente en el dominio de la frecuencia.

Dicho circuito consta de tres elementos de almacenamiento de energía separados, ninguno de los cuales almacena energía en $t = 0^-$. Por ello, cada uno se podría sustituir por su impedancia correspondiente, como se muestra en la figura 15.12*b*. Observamos también la presencia de una fuente de corriente dependiente controlada por la tensión nodal $v_2(t)$.

Empezando en el nodo 1, escribimos la siguiente ecuación:

$$\frac{0.1}{\mathbf{s} + 3} = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{100}$$

(continúa)

o

$$\frac{10}{\mathbf{s}+3} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 \qquad \text{(nodo 1)}$$

y en el nodo 2:

$$0 = \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{100} + \frac{\mathbf{V}_2}{7/\mathbf{s}} + \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3}{6\mathbf{s}}$$

o

$$-42\mathbf{s}\mathbf{V}_1 + (600\mathbf{s}^2 + 42\mathbf{s} + 700)\mathbf{V}_2 - 700\mathbf{V}_3 = 0$$

y, por último, en el nodo 3

$$-0.2\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2}{6\mathbf{s}} + \frac{\mathbf{V}_3}{2/\mathbf{s}}$$

o

$$(1.2\mathbf{s} - 1)\mathbf{V}_2 + (3\mathbf{s}^2 + 1)\mathbf{V}_3 = 0$$

Al resolver este conjunto de ecuaciones respecto de las tensiones nodales, obtenemos

$$\mathbf{V}_1 = 3\frac{100\mathbf{s}^3 + 7\mathbf{s}^2 + 150\mathbf{s} + 49}{(\mathbf{s}+3)(30\mathbf{s}^3 + 45\mathbf{s} + 14)}$$

$$\mathbf{V}_2 = 7\frac{3\mathbf{s}^2 + 1}{(\mathbf{s}+3)(30\mathbf{s}^3 + 45\mathbf{s} + 14)}$$

$$\mathbf{V}_3 = -1.4\frac{6\mathbf{s} - 5}{(\mathbf{s}+3)(30\mathbf{s}^3 + 45\mathbf{s} + 14)}$$

El único paso que queda es tomar la transformada inversa de Laplace de cada tensión, por lo que, para $t > 0$

$$v_1(t) = 9.789e^{-3t} + 0.06173e^{-0.2941t} + 0.1488e^{0.1471t}\cos(1.251t) + 0.05172e^{0.1471t}\operatorname{sen}(1.251t)\ \text{V}$$

$$v_2(t) = -0.2105e^{-3t} + 0.06173e^{-0.2941t} + 0.1488e^{0.1471t}\cos(1.251t) + 0.05172e^{0.1471t}\operatorname{sen}(1.251t)\ \text{V}$$

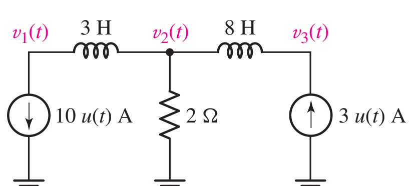
$$v_3(t) = -0.03459e^{-3t} + 0.06631e^{-0.2941t} - 0.03172e^{0.1471t}\cos(1.251t) - 0.06362e^{0.1471t}\operatorname{sen}(1.251t)\ \text{V}$$

Observe que la respuesta crece en forma exponencial como resultado de la acción de la fuente de corriente dependiente. En esencia, el circuito "se está disparando", lo que indica que en algún punto un componente se está fundiendo, explotando o falla de alguna manera similar. ¡Si bien resulta evidente que el análisis de los circuitos de este tipo implica una gran cantidad de trabajo, las ventajas relativas a las técnicas en el dominio **s** son claras una vez que consideramos que llevan a cabo el análisis en el dominio del tiempo!

PRÁCTICA

15.5 Emplee el análisis nodal para determinar las tensiones v_1, v_2 y v_3 en el circuito de la figura 15.13. Suponga que no hay energía almacenada en los inductores en $t = 0^-$.

Respuestas: $v_1(t) = -30\delta(t) - 14u(t)$ V; $v_2(t) = -14u(t)$ V; $v_3(t) = 24\delta(t) - 14u(t)$ V.



■ FIGURA 15.13

15.3 TÉCNICAS ADICIONALES DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS

Según sea la meta específica al analizar un circuito en particular, encontramos a menudo que simplificamos nuestra tarea si elegimos con cuidado la técnica de análisis. Por ejemplo, rara vez se desea aplicar la superposición a un circuito que contiene 215 fuentes independientes, pues un método de este tipo requiere el análisis de ¡215 circuitos independientes! Sin embargo, al pensar que los elementos pasivos, como los capacitores y los inductores, fueran impedancias, tenemos la libertad de aplicar cualquiera de las técnicas de análisis de circuito que se estudiaron en los capítulos 3, 4 y 5 para los circuitos que se han transformado en sus equivalentes en el dominio **s**.

De esta forma, tanto la superposición, las transformaciones de fuente como los teoremas de Thévenin y de Norton se aplican todos en el dominio **s**.

EJEMPLO 15.6

Simplifique el circuito de la figura 15.14*a* mediante las transformaciones de fuente y determine la expresión de la tensión *v*(*t*).

Sin corrientes o tensiones iniciales especificadas y una $u(t)$ que multiplica a la fuente de tensión, concluimos que, al inicio, no hay energía almacenada en el circuito. Por lo tanto, dibujamos el circuito en el dominio de la frecuencia como se muestra en la figura 15.14*b*.

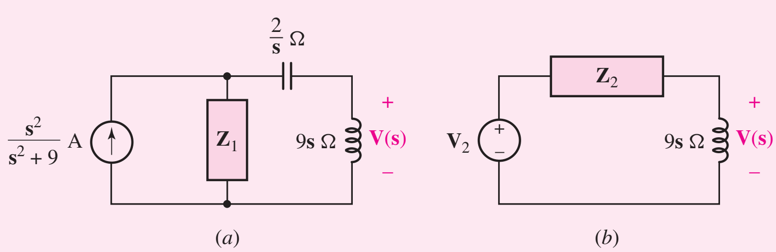
Nuestra estrategia consiste en efectuar varias transformaciones de fuente sucesivas para combinar las dos impedancias de $2/\mathbf{s}\ \Omega$ y la resistencia de 10 Ω; debemos dejar sola la impedancia de $9\mathbf{s}\ \Omega$ cuando la cantidad deseada $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ aparezca en sus terminales. Podríamos transformar ahora la fuente de tensión y la impedancia más a la izquierda de $2/\mathbf{s}\ \Omega$ en una fuente de corriente

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \left(\frac{2\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+9}\right)\left(\frac{\mathbf{s}}{2}\right) = \frac{\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}^2+9} \qquad \text{A}$$

en paralelo con una impedancia de $2/\mathbf{s}\ \Omega$.

Como se muestra en la figura 15.15*a*, después de dicha transformación tenemos, $\mathbf{Z}_1 \equiv (2/\mathbf{s})\|10 = 20/(10\mathbf{s}+2)\ \Omega$, que enfrenta a la fuente de corriente. Al efectuar otra transformación de fuente, tenemos una fuente de tensión $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ tal que

$$\mathbf{V}_2(\mathbf{s}) = \left(\frac{\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}^2+9}\right)\left(\frac{20}{10\mathbf{s}+2}\right)$$

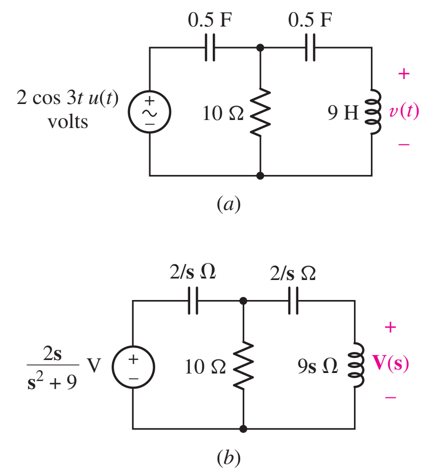


■ **FIGURA 15.15** (*a*) Circuito después de la primera transformación de fuente. (*b*) Circuito final en el que se analizará.

La fuente de tensión está en serie con $\mathbf{Z}_1$ y también con la impedancia que queda $2/\mathbf{s}$; la combinación de $\mathbf{Z}_1$ y $2/\mathbf{s}$ en una nueva impedancia $\mathbf{Z}_2$ produce

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{20}{10\mathbf{s}+2} + \frac{2}{\mathbf{s}} = \frac{40\mathbf{s}+4}{\mathbf{s}(10\mathbf{s}+2)} \qquad \Omega$$

(*continúa*)



■ **FIGURA 15.14** (*a*) Circuito que se va a simplificar mediante transformaciones de puente. (*b*) Representación en el dominio de la frecuencia.

El circuito que resulta se muestra en la figura 15.15*b*. En esta etapa estamos preparados para obtener la expresión de la tensión **V**(**s**) utilizando la división de tensión simple:

$$\mathbf{V(s)} = \left(\frac{\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}^2+9}\right)\left(\frac{20}{10\mathbf{s}+2}\right)\frac{9\mathbf{s}}{9\mathbf{s}+\left[\dfrac{40\mathbf{s}+4}{\mathbf{s}(10\mathbf{s}+2)}\right]}$$

$$= \frac{180\mathbf{s}^4}{(\mathbf{s}^2+9)(90\mathbf{s}^3+18\mathbf{s}^2+40\mathbf{s}+4)}$$

Ambos términos del denominador poseen raíces complejas. Al emplear MATLAB para factorizar el denominador y luego determinar los residuos,

```
EDU» d1 = 's^2 + 9';
EDU» d2 = '90*s^3 + 18*s^2 + 40*s + 4';
EDU» d = symmul(d1,d2);
EDU» denominador = expand(d);
EDU» den = sym2poli(denominador);
EDU» num = [180 0 0 0 0];
EDU» [r p y] = residuo(num, den);
```

encontramos que

$$\mathbf{V(s)} = \frac{1.047+j0.0716}{\mathbf{s}-j3} + \frac{1.047-j0.0716}{\mathbf{s}+j3} - \frac{0.0471+j0.0191}{\mathbf{s}+0.04885-j0.6573} - \frac{0.0471-j0.0191}{\mathbf{s}+0.04885+j0.6573} + \frac{5.590\times10^{-5}}{\mathbf{s}+0.1023}$$

Observe que cada término que tiene un polo complejo cuenta con un término acompañante que es su conjugado complejo. En cualquier sistema físico, los polos complejos siempre aparecerán en pares conjugados.

Tomando la transformada inversa de cada término y escribiendo $1.047 + j0.0716$ como $1.049e^{j3.912^\circ}$ y $0.0471 + j0.0191$ como $0.05083e^{j157.9^\circ}$ se tiene

$$\begin{aligned} v(t) = &1.049e^{j3.912^\circ}e^{j3t}u(t) + 1.049e^{-j3.912^\circ}e^{-j3t}u(t) \\ &+ 0.05083e^{-j157.9^\circ}e^{-0.04885t}e^{-j0.6573t}u(t) \\ &+ 0.05083e^{+j157.9^\circ}e^{-0.04885t}e^{+j0.6573t}u(t) \\ &+ 5.590\times10^{-5}e^{-0.1023t}u(t) \end{aligned}$$

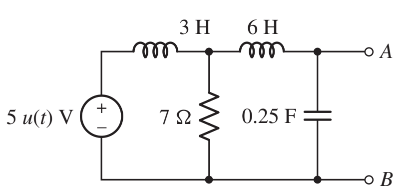
La conversión de las exponenciales complejas en senoides permite escribir una expresión ligeramente simplificada de la tensión:

$$\begin{aligned} v(t) = &[5.590\times10^{-5}e^{-0.1023t} + 2.098\cos(3t+3.912^\circ) \\ &+ 0.1017e^{-0.04885t}\cos(0.6573t+157.9^\circ)]u(t) \qquad \text{V} \end{aligned}$$

PRÁCTICA

15.6 Utilizando el método de la transformación de fuente, reduzca el circuito de la figura 15.16 a una fuente de corriente simple en el dominio en paralelo con una sola impedancia.

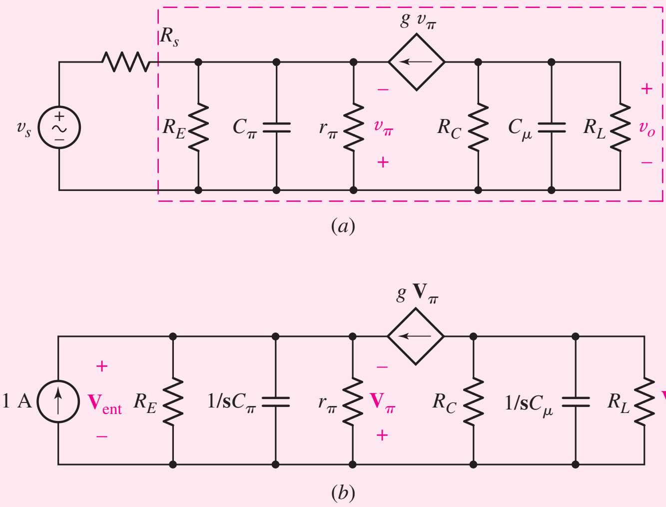
Respuesta: $\mathbf{I}_s = \dfrac{35}{\mathbf{s}^2(18\mathbf{s}+63)}$ A, $\quad \mathbf{Z}_s = \dfrac{72\mathbf{s}^2+252\mathbf{s}}{18\mathbf{s}^3+63\mathbf{s}^2+12\mathbf{s}+28}\ \Omega$.



■ **FIGURA 15.16**

EJEMPLO 15.7

Encuentre el equivalente de Thévenin en el dominio de la frecuencia de la red encerrada en un rectángulo de la figura 15.17*a*.



■ **FIGURA 15.17** (*a*) Circuito equivalente del amplificador transistorizado de "base común". (*b*) Circuito equivalente en el dominio de la frecuencia con una fuente de prueba de 1 A, sustituida por la fuente de entrada representada por v_s y R_s.

Este circuito en particular se conoce como modelo "híbrido π" de un tipo especial de circuito de un transistor simple conocido como amplificador de base común. Los dos capacitores C_π y C_μ, representan capacitancias internas del transistor y por lo común son del orden de unos cuantos pF. La resistencia R_L del circuito representa la resistencia equivalente de Thévenin del dispositivo de salida, que podría ser un altavoz o incluso un láser semiconductor. La fuente de tensión v_s y la resistencia R_s representan, en conjunto, el equivalente de Thévenin del dispositivo de entrada, que podría ser un micrófono, una resistencia sensible a la luz o tal vez una antena de radio.

Así, se nos pide determinar el equivalente de Thévenin del circuito conectado al dispositivo de entrada; esta cantidad se conoce a menudo como ***impedancia de entrada*** del circuito amplificador. Después de convertir el circuito en su equivalente en el dominio de la frecuencia, sustituimos el dispositivo de entrada (v_s y R_s) por una fuente "de prueba" de 1 A, como se ilustra en la figura 15.17*b*. La impedancia de entrada Z_{ent} equivale entonces a:

$$\mathbf{Z}_{ent} = \frac{\mathbf{V}_{ent}}{1}$$

o sencillamente $\mathbf{V}_{ent}$. Debemos determinar una expresión de esta cantidad en términos de la fuente de 1 A, de las resistencias y de los capacitores y/o el parámetro de fuente dependiente g.

Al escribir una sola ecuación nodal en la entrada, podemos ver que

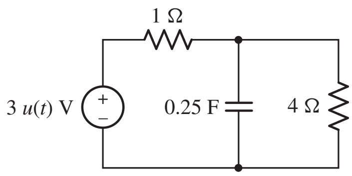
$$1 + g\mathbf{V}_\pi = \frac{\mathbf{V}_{ent}}{\mathbf{Z}_{eq}}$$

donde

$$\mathbf{Z}_{eq} \equiv R_E \left\| \frac{1}{\mathbf{s}C_\pi} \right\| r_\pi = \frac{R_E r_\pi}{r_\pi + R_E + \mathbf{s}R_E r_\pi C_\pi}$$

Dado que $\mathbf{V}_\pi = -\mathbf{V}_{ent}$, observamos que

$$\mathbf{Z}_{ent} = \mathbf{V}_{ent} = \frac{R_E r_\pi}{r_\pi + R_E + sR_E r_\pi C_\pi + gR_E r_\pi} \quad \Omega$$



■ **FIGURA 15.18**

PRÁCTICA

15.7 Trabajando en el dominio **s** determine el equivalente de Norton, visto desde la resistencia de 1 Ω para el circuito de la figura 15.18.

Respuestas: $\mathbf{I}_{sc} = 3(\mathbf{s}+1)/4\mathbf{s}$ A; $\mathbf{Z}_{th} = 4/(\mathbf{s}+1)\ \Omega$.

15.4 POLOS, CEROS Y FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

En esta sección repasamos la terminología que se presentó en el capítulo 14 por primera vez, es decir, *polos*, *ceros* y *funciones de transferencia*.

Considere el circuito simple de la figura 15.19*a*. El equivalente en el dominio **s** se ilustra en la figura 15.19*b* y el análisis nodal da como resultado:

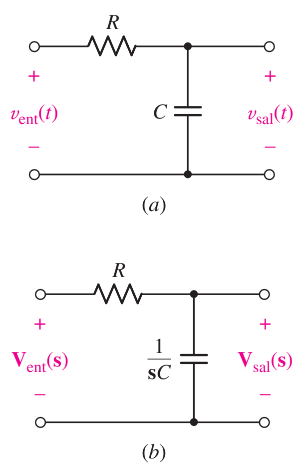
$$0 = \frac{\mathbf{V}_{sal}}{1/\mathbf{s}C} + \frac{\mathbf{V}_{sal} - \mathbf{V}_{ent}}{R}$$

Al reordenar y despejar $\mathbf{V}_{sal}$, observamos que

$$\mathbf{V}_{sal} = \frac{\mathbf{V}_{ent}}{1 + \mathbf{s}RC}$$

o

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_{ent}} = \frac{1}{1 + \mathbf{s}RC} \qquad [7]$$



■ **FIGURA 15.19** (*a*) Circuito simple de una resistencia y un capacitor, con una tensión de entrada y una tensión de salida especificada. (*b*) Circuito equivalente en el dominio **s**.

donde $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ es la ***función de transferencia*** del circuito, definida como la proporción (o razón) entre la salida y la entrada. Se podría especificar sin ningún problema una corriente particular como la cantidad de entrada o de salida, lo que implicaría una función de transferencia diferente del mismo circuito. Por lo general, los esquemas de circuito se leen de izquierda a derecha, debido a lo cual los diseñadores muchas veces ponen la entrada de un circuito a la izquierda del mismo esquema y las terminales de salida a su derecha, por lo menos en la medida de lo posible.

El concepto de función de transferencia es muy importante, tanto para el análisis de circuito como para otras áreas de la ingeniería. Son dos las razones. Primera, una vez que conocemos la función de transferencia de un circuito particular, encontramos con facilidad la salida que resulta de *cualquier* entrada; todo lo que necesitamos es multiplicar $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ por la cantidad de entrada y tomar la transformada inversa de la expresión que se produce. Segunda, la forma de la función de transferencia contiene una gran cantidad de información acerca del comportamiento que podríamos esperar de un circuito (o sistema) en particular.

Como se observó en la aplicación práctica del capítulo 14, para evaluar la estabilidad de un sistema se requiere determinar los polos y ceros de la función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s})$; analizaremos este punto con detalle más adelante. La ecuación [7] se escribiría como

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{1/RC}{\mathbf{s} + 1/RC} \qquad [8]$$

Cuando se calcula la magnitud, se suele considerar a $+\infty$ y $-\infty$ como si fueran el mismo punto. Sin embargo, el ángulo de fase de la respuesta en valores muy grandes positivos y negativos de ω no necesita ser el mismo.

La magnitud de esta función tiende a cero cuando $\mathbf{s} \to \infty$. De tal modo, podemos afirmar que $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ tiene un ***cero*** en $\mathbf{s} = \infty$. La función tiende a infinito en $\mathbf{s} = -1/RC$; por lo tanto, afirmamos que $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ tiene un ***polo*** en $\mathbf{s} = -1/RC$. Estas frecuencias se cono-

cen como ***frecuencias críticas*** y su identificación temprana simplifica la construcción de las curvas de respuesta que se desarrollarán en la sección 15.7.

15.5 CONVOLUCIÓN

Las técnicas en el dominio **s** que hemos desarrollado hasta el momento son muy útiles para determinar la respuesta de tensión y de corriente de un circuito particular. Sin embargo, en la práctica a menudo debemos enfrentar circuitos a los que se les pueden conectar fuentes arbitrarias y que requieren una forma eficiente de determinar la nueva salida cada vez. Esta tarea se hace fácilmente si podemos caracterizar el circuito básico mediante una función de transferencia llamada ***función del sistema***.

El análisis puede continuar tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia, aunque en general es de mayor utilidad trabajar en el dominio de la frecuencia. En tales situaciones, contamos con el proceso de cuatro pasos sencillos que se menciona a continuación:

1. Determine la función de sistema del circuito (si es que no se conoce todavía).
2. Obtenga la transformada de Laplace de la función forzada que se aplicará.
3. Multiplique esta transformada y la función del sistema entre sí, y finalmente
4. Obtenga la transformada inversa de Laplace del producto a fin de encontrar la respuesta de salida.

Por estos medios algunas expresiones integrales más o menos complejas se reducirán a funciones simples de **s**, por lo que las operaciones matemáticas de integración y de diferenciación se sustituirán por las operaciones más simples de multiplicación y división algebraicas.

Respuesta al impulso

Sea una red eléctrica lineal N, sin energía inicial almacenada, a la que se aplica la función forzada $x(t)$. En algún punto de este circuito está presente una función de respuesta $y(t)$. Mostramos lo anterior en forma de diagrama de bloques en la figura 15.20*a* junto con los dibujos de funciones de tiempo genéricas. Se demuestra que la función forzada existe únicamente en el intervalo $a < t < b$. Por lo tanto, $y(t)$ sólo existe para $t > a$.

La pregunta que deseamos responder ahora es: *"Si conocemos la forma de $x(t)$, ¿cómo se describe $y(t)$?"* Para responderla necesitamos conocer algo sobre N. Supóngase que el conocimiento de N radica en el conocimiento de su respuesta cuando la función forzada es un impulso unitario $\delta(t)$. Esto es, suponemos que conocemos $h(t)$, la función de respuesta que resulta cuando un impulso unitario se suministra como la función forzada en $t = 0$, como se muestra en la figura 15.20*b*. La función $h(t)$ suele recibir el nombre de función de respuesta al impulso unitario o ***respuesta al impulso***, y es una propiedad descriptiva muy importante de un circuito eléctrico.

Con base en el conocimiento de las transformadas de Laplace, consideramos a ésta desde una perspectiva un poco diferente. Al transformar $x(t)$ en $\mathbf{X}(\mathbf{s})$ y $y(t)$ en $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$, definimos la función de transferencia del sistema $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ como

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathbf{Y}(\mathbf{s})}{\mathbf{X}(\mathbf{s})}$$

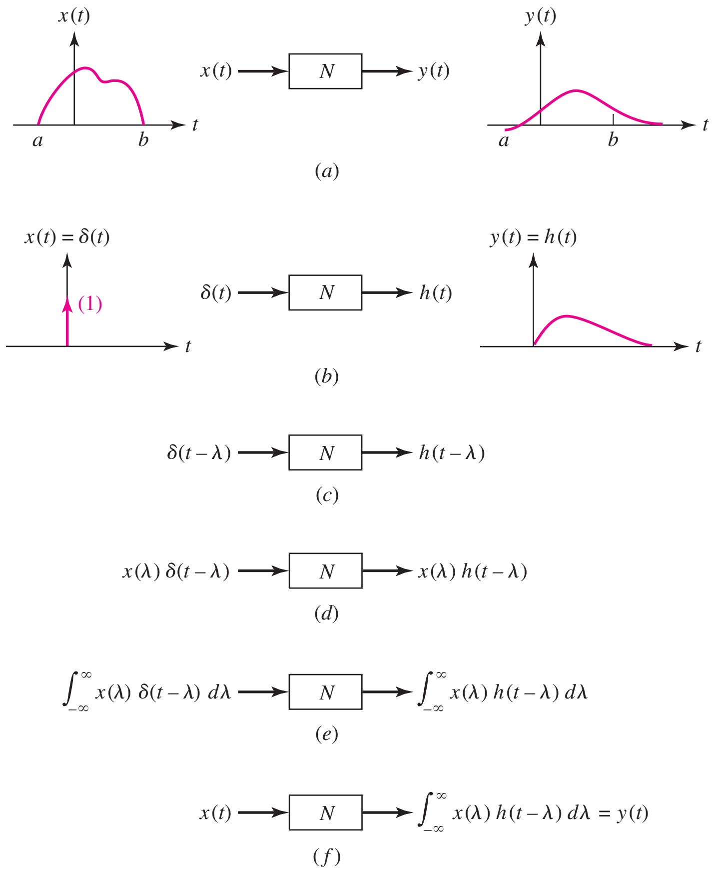


FIGURA 15.20 Desarrollo conceptual de la integral de convolución.

Si $x(t) = \delta(t)$ entonces, de acuerdo con la tabla 14.1, $\mathbf{X(s)} = 1$. Por lo tanto, $\mathbf{H(s)} = \mathbf{Y(s)}$, teniendo así, *en este caso,* $h(t) = y(t)$.

En vez de aplicar el impulso unitario en el tiempo $t = 0$, supongamos ahora que se aplica en el tiempo $t = \lambda$ (lambda). Podemos observar que el único cambio en la salida es el retardo de tiempo. Por lo tanto, la salida se vuelve $h(t - \lambda)$ cuando la entrada es $\delta(t - \lambda)$, como se ve en la figura 15.20*c*. A continuación, suponga que el impulso de entrada tiene una intensidad diferente de la unitaria. De manera específica, deje que la intensidad del impulso sea numéricamente igual al valor de $x(t)$ cuando $t = \lambda$. El valor $x(\lambda)$ es una constante; sabemos que multiplicar una función forzada en un circuito *lineal* por una constante ocasiona simplemente que la respuesta cambie de manera proporcional. Así, si la entrada cambia en $x(\lambda)\delta(t - \lambda)$, entonces la respuesta se vuelve $x(\lambda)h(t - \lambda)$, de acuerdo con la figura 15.20*d*.

Sumemos ahora esta última entrada sobre todos los valores posibles de λ y utilicemos el resultado como una función forzada de *N*. La linealidad establece que la salida debe ser igual a la suma de las respuestas que resultan del uso de todos los valores posibles de λ. En general, la integral de la entrada da como resultado la integral de la salida, lo cual se indica en la figura 15.20*e*. Sin embargo, ¿cuál es ahora la entrada? Dada la propiedad de filtrado[1] del impulso unitario, observamos que la entrada es sencillamente $x(t)$, la entrada original. Por lo tanto, la figura 15.20*e* puede representarse bajo la figura 15.20*f*.

[1] La propiedad de filtrado de la función impulso, descrita en la sección 14.5, establece que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\, dt = f(t_0)$.

Integral de convolución

Si la entrada del sistema N es la función forzada $x(t)$, sabemos que la salida deberá ser la función $y(t)$, como se muestra en la figura15.20*a*. Por ende, a partir de la figura 15.20*f* concluimos que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda \qquad [9]$$

donde $h(t)$ es la respuesta al impulso de N. Esta importante relación se conoce en todos lados como ***integral de convolución***. En otras palabras, esta última ecuación establece que *la salida es igual a la entrada convolucionada con la respuesta al impulso.* A menudo se abrevia por medio de

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

¡Tenga cuidado en no confundir esta nueva notación con la multiplicación!

donde el asterisco se lee "convoluciona con".

La ecuación [9] algunas veces aparece de una forma un poco diferente, pero equivalente. Si $z = t - \lambda$, entonces $d\lambda = -dz$, y la expresión para $y(t)$ se convierte en

$$y(t) = \int_{\infty}^{-\infty} -x(t-z)h(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-z)h(z)\,dz$$

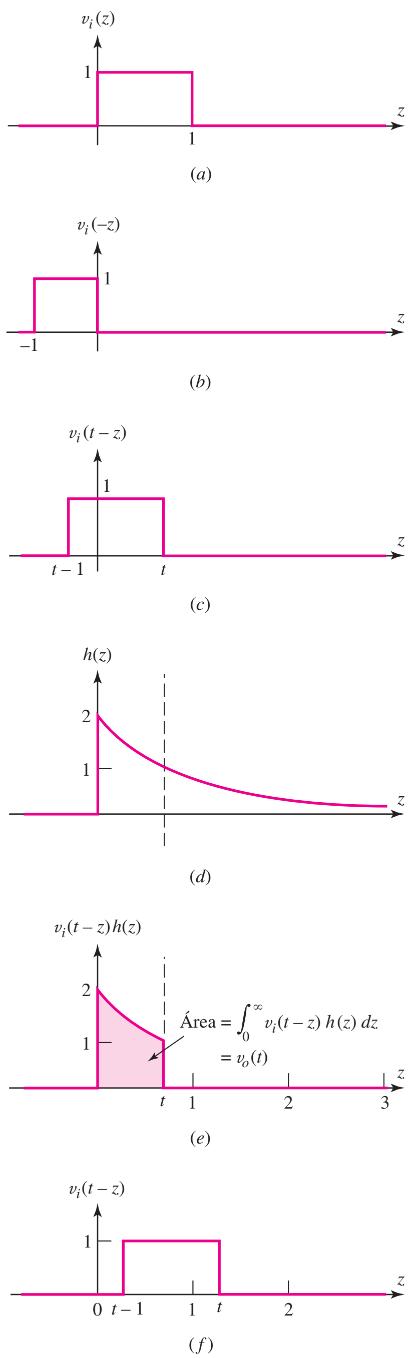
y puesto que el símbolo que estamos utilizando para la variable de integración no tiene importancia, podemos modificar la ecuación [9] para escribirla bajo la siguiente forma

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(z)h(t-z)\,dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-z)h(z)\,dz \end{aligned} \qquad [10]$$

Convolución y sistemas realizables

El resultado que obtenemos a partir de la ecuación [10] es muy general; se aplica a cualquier sistema lineal. Sin embargo, solemos estar interesados en sistemas ***físicamente realizables,*** es decir, aquellos que *existen* o *podrían existir,* pero esos sistemas tienen una propiedad que modifica ligeramente la integral de convolución. Esto es, *la respuesta del sistema no puede empezar antes de que se aplique la función forzada.* En particular, $h(t)$, es la respuesta del sistema que resulta de la aplicación de un impulso unitario en $t = 0$. Por lo tanto, $h(t)$, no puede existir para $t < 0$. Se desprende que, en la segunda integral de la ecuación [10], el integrando es cero cuando $z < 0$; en la primera integral, el integrando es cero cuando $(t - z)$ es negativo o cuando $z > t$. Por lo tanto, para sistemas *realizables* los límites de integración cambian en las integrales de convolución:

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{t} x(z)h(t-z)\,dz \\ &= \int_{0}^{\infty} x(t-z)h(z)\,dz \end{aligned} \qquad [11]$$



■ **FIGURA 15.21** Conceptos gráficos para evaluar una integral de convolución.

Tanto la ecuación [10] como la [11] son válidas, aunque la última es más específica cuando se habla de sistemas lineales *realizables,* por lo que vale la pena memorizarla.

Método gráfico de convolución

Antes de ahondar más en la importancia de la respuesta de impulso de un circuito, consideraremos un ejemplo numérico que nos proporcionará cierto conocimiento en cuanto a la forma en que se evalúa la integral de convolución. Si bien la expresión misma es muy simple, la evaluación a veces resulta problemática, sobre todo con respecto a los valores utilizados como límites de integración.

Suponga que la entrada es un impulso de tensión rectangular que empieza en $t = 0$, tiene una duración de 1 segundo y es de 1 V de amplitud:

$$x(t) = v_i(t) = u(t) - u(t-1)$$

Suponga también que este impulso de tensión se aplica a un circuito cuya respuesta al impulso se sabe que es una función exponencial de la forma

$$h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

Deseamos evaluar la tensión de salida $v_0(t)$. Podemos escribir la respuesta, de inmediato, en forma integral

$$y(t) = v_o(t) = v_i(t) * h(t) = \int_0^\infty v_i(t-z)h(z)\,dz$$
$$= \int_0^\infty [u(t-z) - u(t-z-1)][2e^{-z}u(z)]\,dz$$

Obtener esta expresión de $v_o(t)$ es muy simple, aunque la presencia de la gran cantidad de funciones de escalón unitario tiende a hacer confusa su evaluación e incluso quizá sea un poco molesta. Debe prestarse mucha atención a la determinación de las partes del intervalo de integración en el cual el integrando es cero.

Recurriremos a cierto auxilio gráfico que ayude a comprender lo que afirma la integral de convolución. Comenzamos dibujando varios ejes z alineados uno arriba del otro, como se muestra en la figura 15.21. Sabemos que $v_i(t)$ se ve de esa manera y por ello también sabemos que $v_i(z)$ se ve de forma similar y se grafica en la figura 15.21*a*. La función $v_i(-z)$ es simplemente $v_i(z)$, que corre en dirección contraria con respecto a z, o está girando alrededor del eje de ordenadas, como se ilustra en la figura 15.21*b*. Después deseamos representar $v_i(t - z)$, la cual es $v_i(-z)$ luego de que se ha corrido hacia la derecha por una cantidad $z = t$ como en la figura 15.21*c*. En el siguiente eje z, figura 15.21*d*, graficamos la respuesta de impulso $h(z) = 2e^{-z}\,v(z)$.

El paso siguiente es multiplicar las dos funciones $v_i(t - z)$ y $h(z)$, el resultado para un valor arbitrario de $t < 1$ se muestra en la figura 15.21*e*. Se busca un valor de la salida $v_o(t)$, el cual está dado por el *área* bajo la curva, resultado del producto de las dos funciones (la que se muestra sombreada en la figura).

Considere en primera instancia $t < 0$. En este caso, no existe traslape entre $v_i(t - z)$ y $h(z)$, por lo que $v_o = 0$. A medida que t aumenta, se desplaza el impulso que se muestra en la figura 15.21*c* a la derecha, lo que produce un traslape con $h(z)$ una vez que $t > 0$. El área bajo la curva correspondiente de la figura 15.21*e* continúa aumentando a medida que aumenta el valor de t hasta que se alcanza un valor de $t = 1$. A medida que t aumenta más allá de este valor, se abre una banda entre $z = 0$ y el filo delantero del impulso, como se muestra en la figura 15.21*f*. Como resultado, el traslape con $h(z)$ disminuye.

En otras palabras, para valores de t que se encuentran entre cero y la unidad, debemos integrar desde $z = 0$ hasta $z = t$; para valores que excedan la unidad, el rango de integración es $t - 1 < z < t$. Por ende, podemos escribir

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \displaystyle\int_0^t 2e^{-z}\,dz = 2(1 - e^{-t}) & 0 \le t \le 1 \\ \displaystyle\int_{t-1}^t 2e^{-z}\,dz = 2(e - 1)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

Esta función se presenta graficada en función de la variable de tiempo t en la figura 15.22, teniendo así la solución completada.

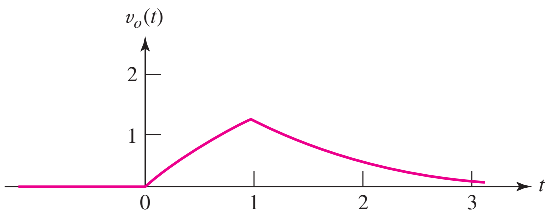


FIGURA 15.22 Función de salida v_o que se obtiene por medio de la convolución gráfica.

EJEMPLO 15.8

Aplique una función de escalón unitario, $x(t) = u(t)$, como la entrada a un sistema cuya respuesta al impulso es $h(t) = u(t) - 2u(t - 1) + u(t - 2)$ y determine la salida correspondiente $y(t) = x(t) * h(t)$.

El primer paso es graficar $x(t)$ y $h(t)$, según se indica en la figura 15.23.

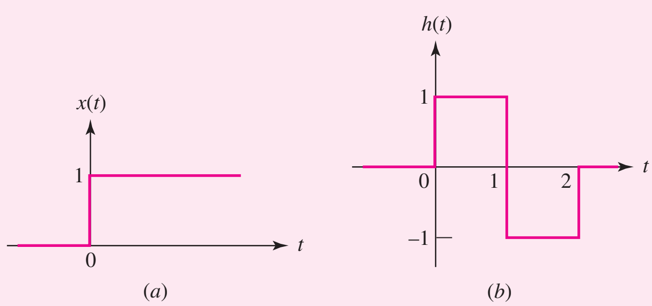


FIGURA 15.23 Dibujos de (a) la señal de entrada $x(t) = u(t)$ y (b) la respuesta al impulso unitario $h(t) = u(t) - 2\,u(t - 1) + u(t - 2)$, de un sistema lineal.

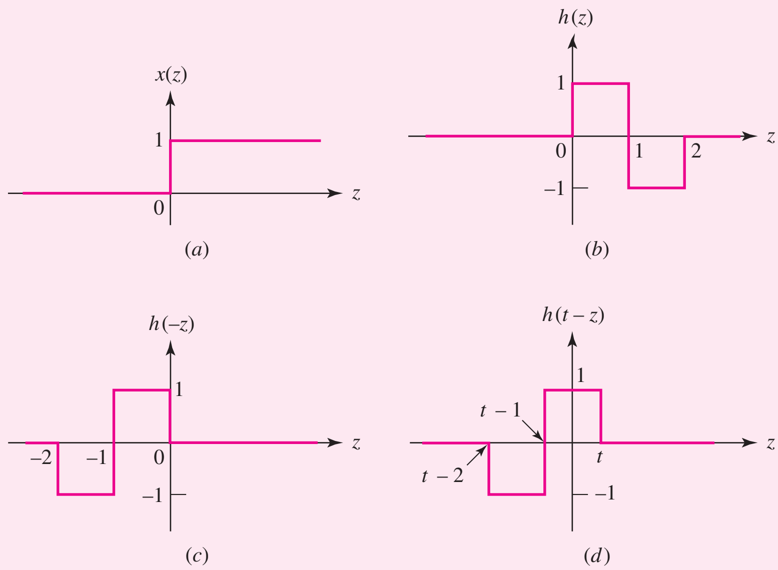
Elegimos de manera arbitraria evaluar la primera integral de la ecuación [11]:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(z)h(t - z)\,dz$$

y elaboramos una secuencia de dibujos que ayude a seleccionar los límites de integración correctos. La figura 15.24 presenta estas funciones en orden: la entrada $x(z)$ como una función de z; la respuesta al impulso $h(z)$; la curva $h(-z)$, la cual es

(*continúa*)

exactamente $h(z)$, girada alrededor del eje vertical; y $h(t - z)$, que se obtiene corriendo $h(-z)$, hacia la derecha t unidades. En este dibujo hemos elegido t en el intervalo $0 < t < 1$.



■ **FIGURA 15.24** (*a*) La señal de entrada y (*b*) la respuesta al impulso se grafican como funciones *z*. (*c*) la función $h(-z)$ se obtiene al girar $h(z)$ en torno al eje vertical, y (*d*) $h(t - z)$ se produce cuando $h(-z)$ se desplaza t unidades hacia la derecha.

En estas condiciones, es fácil visualizar el producto de la primera gráfica $x(z)$ y de la última, $h(t - z)$, para los diversos rangos de t. Cuando t es menor que cero, no hay traslape y

$$y(t) = 0 \qquad t < 0$$

Para el caso que se presenta en la figura 15.24*d*, $h(t - z)$ tiene un traslape diferente de cero con $x(z)$ desde $z = 0$ hasta $z = t$, y cada una es de valor unitario. Por lo tanto,

$$y(t) = \int_0^t (1 \times 1)\, dz = t \qquad 0 < t < 1$$

Cuando t se encuentra entre 1 y 2, $h(t - z)$ se ha desplazado lo suficientemente lejos hacia la derecha para llevar debajo de la función escalón esa parte de la onda cuadrada negativa que se extiende desde $z = 0$ hasta $z = t - 1$. Por lo tanto,

$$y(t) = \int_0^{t-1} [1 \times (-1)]\, dz + \int_{t-1}^{t} (1 \times 1)\, dz = -z\Big|_{z=0}^{z=t-1} + z\Big|_{z=t-1}^{z=t}$$

En consecuencia,

$$y(t) = -(t - 1) + t - (t - 1) = 2 - t, \quad 1 < t < 2$$

Por último, cuando t es mayor que 2, $h(t - z)$ se ha desplazado lo suficientemente lejos hacia la derecha, de modo que se encuentra por completo a la derecha de $z = 0$. La intersección con el escalón unitario es total y

$$y(t) = \int_{t-2}^{t-1} [1 \times (-1)]\, dz + \int_{t-1}^{t} (1 \times 1)\, dz = -z\Big|_{z=t-2}^{z=t-1} + z\Big|_{z=t-1}^{z=t}$$

o

$$y(t) = -(t - 1) + (t - 2) + t - (t - 1) = 0, \quad t > 2$$

Estos cuatro segmentos de $y(t)$ se reúnen como una curva continua en la figura 15.25.

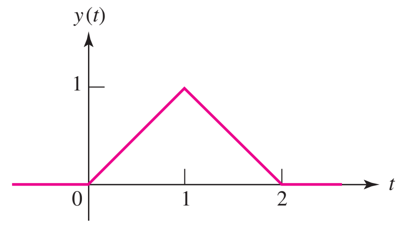


FIGURA 15.25 Resultado de la convolución de $x(t)$ y $h(t)$ que se muestra en la figura 15.23.

PRÁCTICA

15.8 Repita el ejemplo 15.8 utilizando la *segunda* integral de la ecuación [11].

15.9 La respuesta al impulso de una red está dada por $h(t) = 5u(t - 1)$. Si se aplica una señal de entrada $x(t) = 2[u(t) - u(t - 3)]$, determine la salida $y(t)$ en t igual a: (*a*) −0.5; (*b*) 0.5; (*c*) 2.5; (*d*) 3.5.

Respuestas: 15.9: 0, 0, 15, 25.

Convolución y la transformada de Laplace

La convolución tiene aplicaciones en una amplia gama de disciplinas más allá del análisis de circuitos, entre los que se incluyen el procesamiento de imágenes, las comunicaciones y la teoría del transporte con semiconductores. Por ende, es a menudo de utilidad contar con una intuición gráfica del proceso básico, aun si las expresiones integrales de las ecuaciones [10] y [11] no son siempre la mejor ruta de solución. Una alternativa aproximada, muy poderosa, utiliza las propiedades de la transformada de Laplace, de donde surge la introducción a la convolución en este capítulo.

Sean $\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$ y $\mathbf{F}_2(\mathbf{s})$ las transformadas de Laplace de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente, y considere la transformada de Laplace de $f_1(t) * f_2(t)$,

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t - \lambda)\, d\lambda\right\}$$

Por lo general, una de estas funciones de tiempo será la función forzada que se aplica en las terminales de entrada de un circuito lineal, y la otra corresponderá a la respuesta al impulso unitario del circuito.

Dado que ahora estamos trabajando con funciones de tiempo que no existen antes de $t = 0^-$ (la definición de la transformada de Laplace nos obliga a suponer lo anterior), el límite inferior de integración se cambia en 0^-. En ese caso, utilizando la definición de la transformada de Laplace, obtenemos

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\left[\int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t - \lambda)\, d\lambda\right] dt$$

Puesto que $e^{-\mathbf{s}t}$ no depende de λ, este factor lo podemos mover hacia el interior de la integral. Si efectuamos este paso e invertimos también el orden de integración, el resultado es

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f_1(\lambda) f_2(t - \lambda)\, dt\right] d\lambda$$

Utilizando este truco, observamos que $f_1(\lambda)$ no depende de t y por ello se saca de la integral:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)\left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f_2(t - \lambda)\, dt\right] d\lambda$$

Después efectuamos la sustitución de $x = t - \lambda$ en la integral entre corchetes (donde podríamos tratar a λ como una constante):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)\left[\int_{-\lambda}^{\infty} e^{-\mathbf{s}(x+\lambda)} f_2(x)\,dx\right] d\lambda \\ &= \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) e^{-\mathbf{s}\lambda}\left[\int_{-\lambda}^{\infty} e^{-\mathbf{s}x} f_2(x)\,dx\right] d\lambda \\ &= \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) e^{-\mathbf{s}\lambda}[\mathbf{F}_2(\mathbf{s})]\,d\lambda \\ &= \mathbf{F}_2(\mathbf{s}) \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) e^{-\mathbf{s}\lambda} d\lambda\end{aligned}$$

Puesto que la integral que queda es simplemente $\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$, vemos que

$$\boxed{\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathbf{F}_1(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{s})} \qquad [12]$$

Enunciado de manera un poco diferente, podríamos concluir que la transformada inversa del producto de dos transformadas es la convolución de las transformadas inversas individuales; tal resultado en ocasiones es útil al obtener transformadas inversas.

EJEMPLO 15.9

Aplique el teorema de convolución para determinar $v(t)$ si $\mathbf{V}(\mathbf{s}) = 1/[(\mathbf{s} + \alpha)(\mathbf{s} + \beta)]$.

Obtuvimos la transformada inversa de esta función particular en la sección 14.5 mediante un desarrollo en funciones parciales. Ahora identificamos a $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ como el producto de dos transformadas:

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{s}) = \frac{1}{(\mathbf{s} + \alpha)}$$

y

$$\mathbf{V}_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{(\mathbf{s} + \beta)}$$

donde

$$v_1(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

y

$$v_2(t) = e^{-\beta t} u(t)$$

La $v(t)$ que se desea se expresa de inmediato como

$$\begin{aligned}v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s})\mathbf{V}_2(\mathbf{s})\} = v_1(t) * v_2(t) = \int_{0^-}^{\infty} v_1(\lambda) v_2(t-\lambda)\,d\lambda \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha\lambda} u(\lambda) e^{-\beta(t-\lambda)} u(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{0^-}^{t} e^{-\alpha\lambda} e^{-\beta t} e^{\beta\lambda}\,d\lambda \\ &= e^{-\beta t}\int_{0^-}^{t} e^{(\beta-\alpha)\lambda}\,d\lambda = e^{-\beta t}\frac{e^{(\beta-\alpha)t} - 1}{\beta - \alpha} u(t)\end{aligned}$$

o, en forma más compacta,

$$v(t) = \frac{1}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})u(t)$$

que es el mismo resultado que se obtuvo antes, mediante el desarrollo en fracciones parciales. Observe que se requiere insertar el escalón unitario $u(t)$ en el resultado, debido a que todas las transformadas de Laplace (unilaterales) son válidas sólo para un tiempo no negativo.

¿El resultado se obtuvo con mayor facilidad mediante este método? ¡No, a menos que uno esté enamorado de las integrales de convolución! El método de desarrollo en fracciones parciales suele ser más simple, suponiendo que el propio desarrollo no sea demasiado problemático. Sin embargo, la operación de convolución es más sencilla de efectuar en el dominio **s** pues sólo requiere multiplicación.

PRÁCTICA

15.10 Repita el ejemplo 15.8, efectuando la convolución en el dominio **s**.

Comentarios adicionales sobre las funciones de transferencia

Como hemos señalado varias veces, la salida $v_o(t)$ en algún punto de un circuito lineal se logra convolucionando la entrada $v_i(t)$ con la respuesta al impulso unitario $h(t)$. Sin embargo, debemos recordar que la respuesta al impulso surge de la aplicación de un impulso unitario en $t = 0$ *con todas las condiciones iniciales iguales a cero.* En estas condiciones, la transformada de Laplace de $v_o(t)$ es

$$\mathcal{L}\{v_o(t)\} = \mathbf{V}_o(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{v_i(t) * h(t)\} = \mathbf{V}_i(\mathbf{s})[\mathcal{L}\{h(t)\}]$$

Por lo tanto, la proporción (o razón) $\mathbf{V}_o(\mathbf{s})/\mathbf{V}_i(\mathbf{s})$ es igual a la transformada de la respuesta al impulso, que denotaremos mediante $\mathbf{H}(\mathbf{s})$,

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_o(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_i(\mathbf{s})} \qquad [13]$$

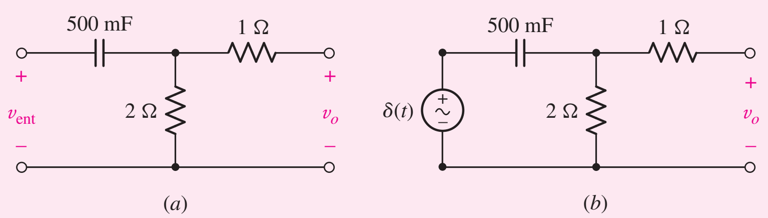
En la ecuación [13] se puede observar que la respuesta al impulso y la función de transferencia forman un par de transformadas de Laplace:

$$h(t) \Leftrightarrow \mathbf{H}(\mathbf{s})$$

Lo anterior es un hecho importante que estudiaremos después en la sección 15.7, una vez que nos hayamos familiarizado con el concepto de las gráficas polo-cero y el plano de frecuencia compleja. Sin embargo, a estas alturas, podemos aprovechar este nuevo concepto de convolución en el análisis de circuitos.

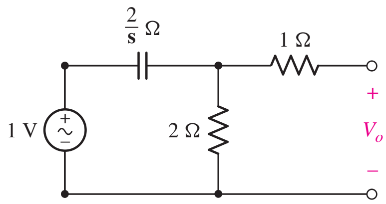
EJEMPLO 15.10

Determine la respuesta al impulso del circuito de la figura 15.26*a* y utilizar ésta para calcular la respuesta forzada $v_o(t)$ si la entrada $v_{ent}(t) = 6e^{-t}u(t)$ V.



■ **FIGURA 15.26** (*a*) Circuito simple al que se aplica una entrada exponencial en $t = 0$. (*b*) Circuito utilizado para determinar $h(t)$.

(*continúa*)



■ **FIGURA 15.27** Circuito utilizado para encontrar **H**(**s**).

En primera instancia alimentamos bajo un pulso de tensión $\delta(t)$ V al circuito como se muestra en la figura 15.26*b*. A pesar de que es posible trabajar tanto en el dominio del tiempo con $h(t)$ como en el de **s** con **H**(**s**), seleccionamos este último, por lo que consideramos a continuación la representación en el dominio **s** de la figura 15.26*b* como se muestra en la figura 15.27.

La respuesta al impulso **H**(**s**) está dada por

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_o}{1}$$

por lo que nuestro objetivo inmediato es encontrar $\mathbf{V}_o$ —tarea que se lleva a cabo fácilmente por medio de la división de tensión

$$\mathbf{V}_o\Big|_{v_{\text{ent}}=\partial(t)} = \frac{2}{\dfrac{2}{\mathbf{s}}+2} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}+1} = \mathbf{H}(\mathbf{s})$$

Ahora podemos encontrar $v_o(t)$ cuando $v_{\text{ent}} = 6e^{-t}u(t)$ utilizando la convolución, como

$$v_{\text{ent}} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_{\text{ent}}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{s})\}$$

Puesto que $\mathbf{V}_{\text{ent}}(\mathbf{s}) = 6/(\mathbf{s}+1)$,

$$\mathbf{V}_o = \frac{6\mathbf{s}}{(\mathbf{s}+1)^2} = \frac{6}{\mathbf{s}+1} - \frac{6}{(\mathbf{s}+1)^2}$$

Calculando la transformada inversa de Laplace, encontramos que

$$v_o(t) = 6e^{-t}(1-t)u(t) \qquad \text{V}$$

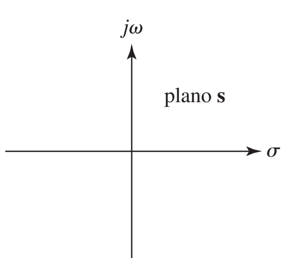
PRÁCTICA

15.11 Con relación al circuito de la figura 15.26*a*, utilice la convolución para obtener $v_o(t)$ si $v_{\text{ent}} = tu(t)$ V.

Respuesta: $v_o(t) = (1 - e^{-t})u(t)$ V.

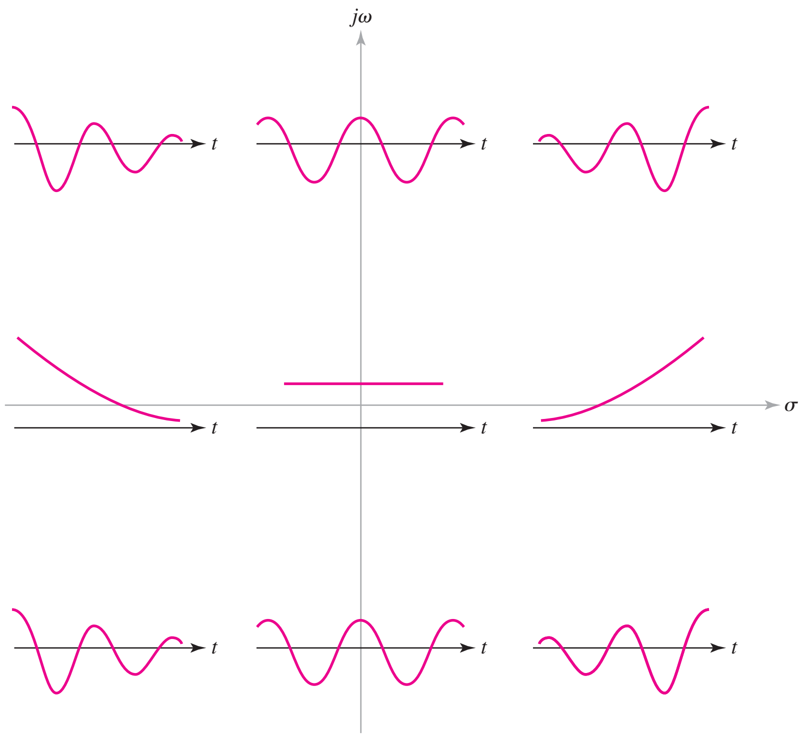
15.6 PLANO DE FRECUENCIA COMPLEJA

Como fue evidente en los ejemplos recientes, los circuitos, incluso con un número comparativamente reducido de elementos pueden llevar a expresiones del dominio **s** algo difíciles de manejar. En tales casos, una representación gráfica de la respuesta o la función de transferencia de un circuito dado puede proporcionar ideas útiles. En esta sección introducimos una técnica así, basada en la idea del plano de frecuencia compleja (figura 15.28). La frecuencia compleja tiene dos componentes (σ y ω), de modo que naturalmente se tiende a preferir representar las funciones usando un modelo tridimensional.



■ **FIGURA 15.28** El plano de frecuencia compleja, también llamado el plano **s**.

Como ω representa una función oscilatoria, no hay distinción física entre una frecuencia positiva y una negativa. En el caso de σ, sin embargo, que se puede identificar con un término exponencial, los valores positivos son crecientes en magnitud, mientras que los valores negativos son decrecientes. El origen del plano **s** corresponde a cd (sin variación en el tiempo). En la figura 15.29 se representa un resumen gráfico de estas ideas.



■ **FIGURA 15.29** Ilustración del significado físico de los valores positivos y negativos para σ y ω, como se representarían en el plano de frecuencia compleja. Cuando $\omega = 0$, una función no tendrá componente oscilatorio; cuando $\sigma = 0$, la función es puramente sinusoidal, salvo cuando ω también es cero.

Para construir una representación tridimensional adecuada de alguna función $\mathbf{F}(\mathbf{s})$, primero observamos que tenemos presente su magnitud, aunque la fase tendrá también una fuerte dependencia de la frecuencia compleja, y se puede graficar de manera parecida. Así, comenzaremos sustituyendo $\mathbf{s}$ por $\sigma + j\omega$ en la función $\mathbf{F}(\mathbf{s})$, y luego procedemos a determinar una expresión para $|\mathbf{F}(\mathbf{s})|$. En seguida dibujamos un eje perpendicular al plano $\mathbf{s}$, y usamos éste para graficar $|\mathbf{F}(\mathbf{s})|$ para cada valor de σ y ω. El proceso básico se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 15.11

Dibuje la admitancia de una combinación en serie de un inductor de 1 H con una resistencia de 3Ω como una función de ambos parámetros $j\omega$ y σ.

La admitancia de estos dos elementos en serie está dada por

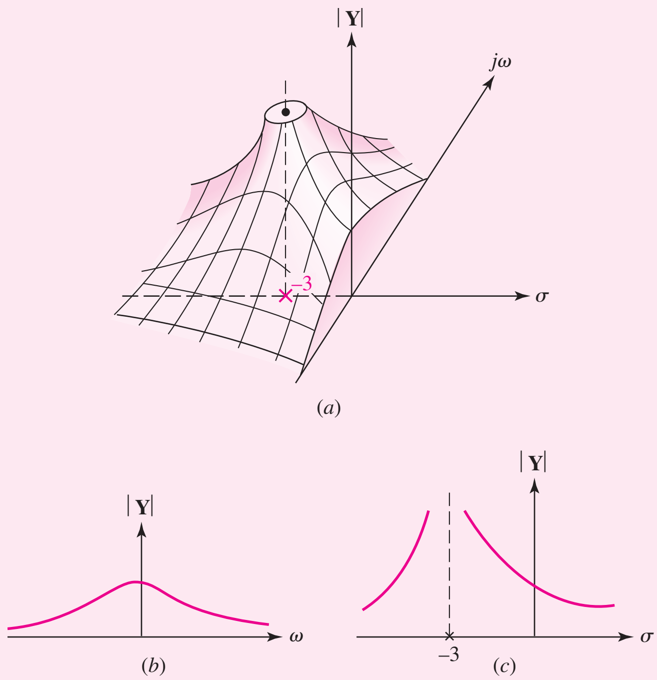
$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{s} + 3}$$

Al sustituir $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$, encontramos que la magnitud de la función es

$$|\mathbf{Y}(\mathbf{s})| = \frac{1}{\sqrt{(\sigma + 3)^2 + \omega^2}}$$

(*continúa*)

Cuando $\mathbf{s} = -3 + j0$, la magnitud de la respuesta es infinita; y cuando $\mathbf{s}$ es infinita, la magnitud de $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ es cero. Así, el modelo debe tener una altura infinita arriba del punto $(-3 + j0)$ y altura cero en todos los puntos infinitamente alejados del origen. Una vista de corte de tal modelo se presenta en la figura 15.30*a*.



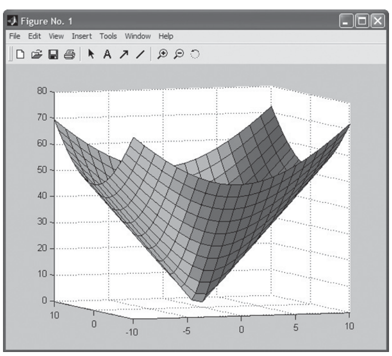
■ **FIGURA 15.30** (*a*) Lista de corte de un modelo de barro cuya superficie superior representa $|\mathbf{Y}(\mathbf{s})|$ de la combinación en serie de un inductor de 1 H y de una resistencia de 3 Ω. (*b*) $|\mathbf{Y}(\mathbf{s})|$ como una función de ω. (*c*) $|\mathbf{Y}(\mathbf{s})|$como una función de σ.

Una vez construido el modelo, resulta simple visualizar la variación de $|\mathbf{Y}|$ como una función de ω (con $\sigma = 0$) al intersecar el modelo con un plano perpendicular que contenga al eje $j\omega$. El modelo de la figura 15.30*a* se corta a lo largo de este plano y puede observarse la gráfica deseada de $|\mathbf{Y}|$ en función de ω; la curva se dibuja también en la figura 15.30*b*. De manera similar, un plano vertical que contenga al eje σ permite obtener $|\mathbf{Y}|$ en función de σ (con $\omega = 0$), como se observa en la figura 15.30*c*.

PRÁCTICA

15.12 Dibuje la magnitud de la impedancia como una función de $\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = 2 + 5\mathbf{s}$ como una función de σ y $j\omega$.

Respuesta: Vea la figura 15.31.



■ **FIGURA 15.31** Solución del problema de práctica 15.12 generada con el siguiente código:

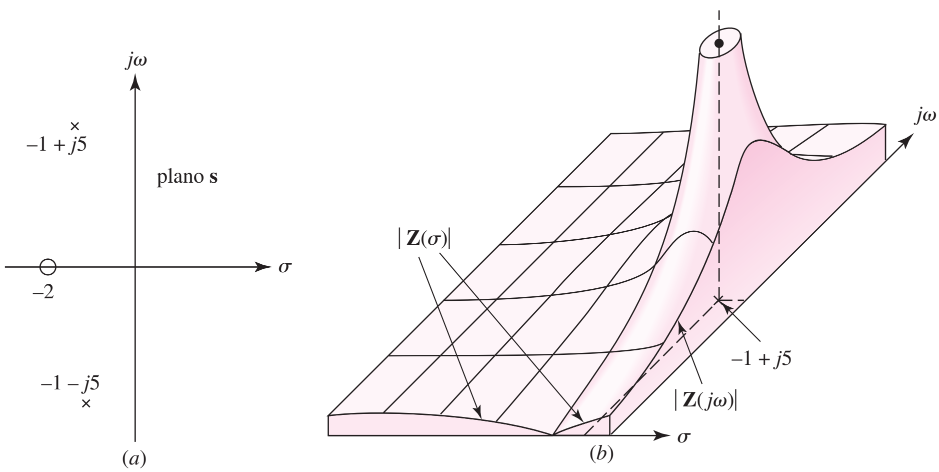
```
EDU» sigma = linspace(−10,10,21);
EDU» omega = linspace(−10,10,21);
EDU» [X, Y] = meshgrid(sigma, omega);
EDU» Z = abs(2 + 5*X + j*5*Y);
EDU» colormap(hsv);
EDU» s = [−5 3 8];
EDU» surfl(X, Y, Z, s);
EDU» view (−20, 5)
```

Constelaciones de polos ceros

Este método resulta adecuado para funciones relativamente simples, aunque en general se requiere un método más práctico. Consideremos el plano **s** de nuevo como el piso y después imaginemos una gran lámina elástica dispuesta sobre él. Dirigimos

ahora la atención hacia todos los polos y los ceros de la respuesta. En cada cero, la respuesta es cero, la altura de la lámina debe ser cero y, por lo tanto, se fija la lámina en el piso. En el valor de **s** correspondiente a cada polo, podríamos sostener la lámina con una delgada barra vertical. Los ceros y los polos en infinito deben analizarse mediante un anillo de sujeción de gran radio o una elevada cerca circular, respectivamente. Si utilizamos una lámina infinitamente grande, sin peso y perfectamente elástica, clavada con tachuelas pequeñísimas y sostenida con barras de diámetro cero e infinitamente largas, la lámina elástica tendrá una altura exactamente proporcional a la magnitud de la respuesta.

Se podrían ilustrar estos comentarios considerando la configuración de polos y ceros, que algunas veces se conoce como ***constelación de polos y ceros***, que localiza todas las frecuencias críticas de una cantidad en el dominio de la frecuencia; por ejemplo, una impedancia $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$. Una constelación de polos y ceros para una impedancia se muestra en la figura 15.32. En ese diagrama, los polos se denotan con cruces y los ceros con círculos. Si imaginamos un modelo de lámina elástica, clavada en $\mathbf{s} = -2 + j0$ y sostenida en $\mathbf{s} = -1 + j5$ y en $\mathbf{s} = -1 - j5$ debemos ver un terreno cuyas características distintivas son dos montañas y un cráter cónico o depresión. La parte del modelo de la mitad izquierda del plano (MIP) superior se ilustra en la figura 15.32*b*.



■ **FIGURA 15.32** (*a*) Constelación de polos y ceros de alguna impedancia **Z**(**s**). (*b*) Porción del modelo de la lámina elástica de la magnitud de **Z**(**s**).

Construyamos ahora la expresión de $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$ que conduce a esta configuración de polos y ceros. El cero requiere un factor de $(\mathbf{s} + 2)$ en el numerador y los dos polos necesitan los factores $(\mathbf{s} + 1 - j5)$ y $(\mathbf{s} + 1 + j5$ en el denominador. Excepto por una constante de multiplicación k, conocemos la forma de $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = k\frac{\mathbf{s}+2}{(\mathbf{s}+1-j5)(\mathbf{s}+1+j5)}$$

o

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = k\frac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+26} \qquad [14]$$

Con la finalidad de determinar k, requerimos un valor de $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$ en algunas $\mathbf{s}$ diferentes a la frecuencia crítica. Para esta función, supongamos que $\mathbf{Z}(0) = 1$. Por sustitución directa en la ecuación [14], encontramos que k es 13 y por lo tanto,

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = 13\frac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+26} \qquad [15]$$

Las gráficas de $|\mathbf{Z}(\sigma)|$ en función de σ y de $|\mathbf{Z}(j\omega)|$ en función de ω se obtienen de la ecuación [15], aunque la forma general de la función es patente a partir de la configuración de polos y ceros y de la analogía de la lámina elástica. Las porciones de estas dos curvas que aparecen a los lados del modelo se muestran en la figura 15.32*b*.

PRÁCTICA

15.13 La combinación en paralelo de 0.25 mH y 5 Ω está en serie con la combinación en paralelo de 40 μF y 5 Ω. (*a*) Determine $\mathbf{Z}_{\text{ent}}(\mathbf{s})$, la impedancia de entrada de la combinación en serie. (*b*) Especifique todos los ceros de $\mathbf{Z}_{\text{ent}}(\mathbf{s})$. (*c*) Determine todos los polos de $\mathbf{Z}_{\text{ent}}(\mathbf{s})$. (*d*) Dibuje la configuración de polos y ceros.

Respuestas: $5(\mathbf{s}^2 + 10\,000\mathbf{s} + 10^8)/(\mathbf{s}^2 + 25\,000\mathbf{s} + 10^8)$ Ω; $-5 \pm j8.66$ krad/s; -5, -20 krad/s.

15.7 RESPUESTA NATURAL Y EL PLANO S

Al comienzo de este capítulo estudiamos de qué forma el hecho de trabajar en el dominio de la frecuencia mediante la transformada de Laplace nos permite considerar una amplia gama de circuitos variantes en el tiempo, pues elimina la necesidad de trabajar con ecuaciones integrodiferenciales en razón de que sólo se procede de forma algebraica. Sin embargo, este método tan poderoso tiene la desventaja de no ser un proceso muy visual. En contraste con lo anterior, existe una cantidad *enorme* de información contenida en la gráfica polo-cero de una respuesta forzada. En esta sección consideramos la forma en que pueden utilizarse dichas gráficas para obtener la respuesta *completa* de un circuito —natural más forzada— siempre y cuando se conozcan las condiciones iniciales. La ventaja de dicho método es que establece una relación *intuitiva* entre la ubicación de las frecuencias críticas, fácilmente visualizable a través de la gráfica de polos-ceros y la respuesta deseada.

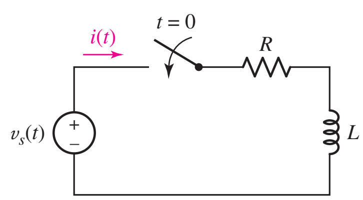


FIGURA 15.33 Ejemplo que ilustra la determinación de la respuesta completa a través del conocimiento de las frecuencias críticas de la impedancia que enfrenta la fuente.

Presentamos el método con base en el ejemplo más simple, un circuito *RL* en serie como el de la figura 15.33. Una fuente de tensión general $v_s(t)$ provoca que la corriente $i(t)$ fluya después del cierre del interruptor a $t = 0$. La respuesta completa $i(t)$ para $t > 0$ se compone de una respuesta natural y de una forzada:

$$i(t) = i_n(t) + i_f(t)$$

Podríamos determinar la respuesta forzada trabajando en el dominio de la frecuencia, bajo el supuesto, desde luego, de que $v_s(t)$ tiene una forma funcional que transforma el dominio de la frecuencia; si $v_s(t) = 1/(1 + t^2)$, por ejemplo, debemos proceder lo mejor que sea posible a partir de la ecuación diferencial básica del circuito. En el caso del circuito de la figura 15.33, tenemos

$$\mathbf{I}_f(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_s}{R + \mathbf{s}L}$$

o

$$\mathbf{I}_f(\mathbf{s}) = \frac{1}{L}\frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{s} + R/L} \qquad [16]$$

A continuación consideremos la respuesta natural. De la experiencia anterior, sabemos que la forma será una exponencial que decae con la constante de tiempo L/R, aunque supongamos que se está determinando por primera vez. La *forma* de la respuesta natural (sin fuente) es, por definición, independiente de la función forzada, la cual contribuye sólo a la *magnitud* de la respuesta natural. Para determinar la forma apropiada debemos suprimir todas las fuentes independientes; aquí, $v_s(t)$ se sustituye por un cortocircuito. A continuación, intentaremos obtener la respuesta natural como un caso límite de la respuesta forzada. De regreso a la expresión en el dominio de la frecuencia de la ecuación [16], de manera fiel establecemos $\mathbf{V}_s = 0$. Sobre la superficie, resulta claro que $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ debe ser cero, pero no es necesariamente cierto si estamos trabajando con una frecuencia compleja que es un polo simple de $\mathbf{I}(\mathbf{s})$. Esto es, el denominador y el numerador pueden ser *ambos* cero, por lo que no se requiere que $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ sea cero.

Inspeccionemos esta nueva idea a partir de una situación de ventaja un poco diferente. Fijaremos nuestra atención en la relación entre la respuesta forzada deseada y la función forzada. La designaremos como $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ y la definiremos como la función de transferencia del circuito. Entonces:

¿Qué significa "operar" a una frecuencia compleja? ¿Cómo podríamos llevar a cabo tal actividad en un laboratorio real? En este caso, para empezar resulta importante recordar cómo se inventó la frecuencia compleja: constituye un medio para describir una función senoidal de frecuencia ω multiplicada por una función exponencial $e^{\sigma t}$. Este tipo de señales es muy fácil de generar con un equipo de laboratorio real (es decir, no imaginario). Por lo tanto, sólo necesitaremos fijar el valor de σ y el de ω para "operar" en $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$.

$$\frac{\mathbf{I}_f(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_s} = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{1}{L(\mathbf{s} + R/L)}$$

En este ejemplo, la función de transferencia es la admitancia de entrada a la que se enfrenta $\mathbf{V}_s$. Buscamos la respuesta natural (sin fuente) si $\mathbf{V}_s = 0$. Sin embargo, $\mathbf{I}_f(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_s\mathbf{H}(\mathbf{s})$, y si $\mathbf{V}_s = 0$, un valor distinto de cero para la corriente se obtiene sólo al operar en un polo de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$. Por lo tanto, los polos de la función de transferencia adquieren un significado especial.

En este ejemplo en particular, podemos apreciar que el polo de la función de transferencia ocurre en $\mathbf{s} = -R/L + j0$, como se muestra en la figura 15.34. Si elegimos operar en esta frecuencia compleja particular, la única corriente *finita* que podría resultar debe ser una constante en el dominio $\mathbf{s}$ (es decir, independiente de la frecuencia). De este modo obtenemos la respuesta natural

$$\mathbf{I}\left(\mathbf{s} = -\frac{R}{L} + j0\right) = A$$

donde A es una constante desconocida. A continuación deseamos transformar esa respuesta natural al dominio del tiempo. La reacción irreflexiva podría consistir en aplicar las técnicas de la transformada inversa de Laplace en esta situación. No obstante, ya especificamos el valor de $\mathbf{s}$, por lo que un procedimiento de este tipo no es válido. Mejor enfocamos la atención en la parte real de la función general $e^{\mathbf{s}t}$, tal que:

$$i_n(t) = \text{Re}\{Ae^{\mathbf{s}t}\} = \text{Re}\{Ae^{-Rt/L}\}$$

En este caso, tenemos que

$$i_n(t) = Ae^{-Rt/L}$$

por lo que la respuesta natural es

$$i(t) = Ae^{-Rt/L} + i_f(t)$$



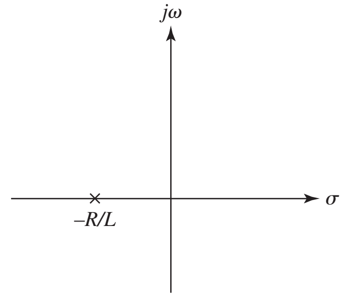


FIGURA 15.34 Constelación polo-cero de la función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ que muestra el único polo en $\mathbf{s} = -R/L$.

y A puede determinarse luego de que se especifican las condiciones iniciales de este circuito. La respuesta forzada $i_f(t)$ se obtiene cuando se encuentra la transformada inversa de Laplace de $\mathbf{I}_f(\mathbf{s})$.

Una perspectiva más general

La figura 15.35 ilustra fuentes individuales conectadas a redes que no contienen fuentes independientes. La respuesta deseada, que podría ser alguna corriente $\mathbf{I}_1(\mathbf{s})$ o alguna tensión $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$, se expresaría mediante una función de transferencia que exhiba todas las frecuencias críticas. Para ser específicos, elegimos la respuesta $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ de la figura 15.35*a*:

$$\frac{\mathbf{V}_2(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_s} = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = k\frac{(\mathbf{s}-\mathbf{s}_1)(\mathbf{s}-\mathbf{s}_3)\cdots}{(\mathbf{s}-\mathbf{s}_2)(\mathbf{s}-\mathbf{s}_4)\cdots} \qquad [17]$$

Los polos de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ ocurren en $\mathbf{s} = \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_4, \ldots$, y por ello una tensión finita $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ en cada una de estas frecuencias debe ser una forma funcional posible de la respuesta natural. Así, consideramos una fuente de cero volts (que es precisamente un cortocircuito) aplicada a las terminales de entrada; la respuesta natural que aparece cuando las terminales de entrada están en cortocircuito debe, en consecuencia, tener la forma

$$v_{2n}(t) = \mathbf{A}_2 e^{\mathbf{s}_2 t} + \mathbf{A}_4 e^{\mathbf{s}_4 t} + \cdots$$

donde cada $\mathbf{A}$ debe evaluarse en términos de las condiciones iniciales (lo que incluye el valor inicial de cualquier fuente de tensión aplicada en las terminales de entrada).

Para determinar la forma de la respuesta natural $i_{1n}(t)$ en la figura 15.35*a*, debemos especificar los polos de la función de transferencia, $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_1(\mathbf{s})/\mathbf{V}_s$. Las funciones de transferencia que se aplican en las situaciones descritas en la figura 15.35*b* serían $\mathbf{I}_1(\mathbf{s})/\mathbf{I}_s$ y $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})/\mathbf{I}_s$, y sus polos determinan entonces las respuestas naturales $i_{1n}(t)$ y $v_{2n}(t)$, respectivamente.

Si la respuesta natural se desea para una red que no contiene ninguna fuente independiente, entonces se podría insertar una fuente $\mathbf{V}_s$, o $\mathbf{I}_s$ en cualquier punto conveniente, restringido sólo por la condición de que la red original se obtenga cuando se suprima la fuente. Por lo tanto, la función de transferencia correspondiente se determina y sus polos especifican las frecuencias naturales. Observe que las mismas frecuencias deben obtenerse para cualquiera de las muchas localizaciones de fuente posible. Si la red ya contiene una fuente, esa misma debe igualarse a cero e insertarse otra fuente en un punto más conveniente.

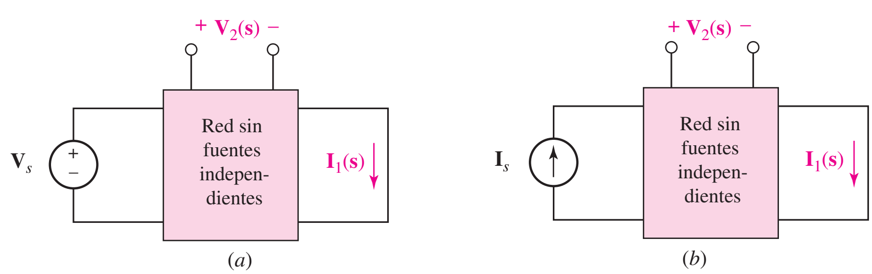


FIGURA 15.35 Los polos de la respuesta, $\mathbf{I}_1(\mathbf{s})$ o $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$, producida por: (*a*) una fuente de tensión $\mathbf{V}_s$ o (*b*) una fuente de corriente $\mathbf{I}_s$. Los polos determinan la forma de la respuesta natural, $i_{1n}(t)$ o $v_{2n}(t)$, que ocurre cuando $\mathbf{V}_s$ se sustituye por un cortocircuito, o $\mathbf{I}_s$ por un circuito abierto, y está disponible alguna energía inicial.

Un caso especial

Antes de que ilustremos este método con varios ejemplos, la integridad de la presentación requiere que se reconozca un caso especial que podría presentarse. Esto ocurre cuando la red de la figura 15.35*a* o 15.35*b* contiene dos o más partes que están aisladas entre sí. Por ejemplo, podríamos tener la combinación en paralelo de tres redes: R_1 en serie con C, R_2 en serie con L y un cortocircuito. Claramente, una fuente de tensión en serie con R_1 y C no puede producir ninguna corriente en R_2 y L; esa función de transferencia sería cero. Para encontrar la forma de la respuesta natural de la tensión en el inductor, por ejemplo, se requiere instalar la fuente de tensión en la red R_2L. Un caso de este tipo a menudo se reconoce inspeccionando la red antes de que se instale una fuente; pero si no es así, entonces se obtendrá una función de transferencia igual a cero. Cuando $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 0$, no obtenemos información acerca de las frecuencias que caracterizan la respuesta natural y debe emplearse una localización de la fuente más adecuada.

EJEMPLO 15.12

En el caso del circuito sin fuente de la figura 15.36, determine las expresiones de i_1 e i_2 correspondientes a $t > 0$, dadas las condiciones iniciales $i_1(0) = i_2(0) = 11$ amperes.

Instalamos una fuente de tensión $\mathbf{V}_s$ entre los puntos x y y y encontramos la función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_1(\mathbf{s})/\mathbf{V}_s$, lo cual resulta también ser la admitancia de entrada vista desde la fuente de tensión. Tenemos

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_s}{2\mathbf{s} + 1 + 6\mathbf{s}/(3\mathbf{s}+2)} = \frac{(3\mathbf{s}+2)\mathbf{V}_s}{6\mathbf{s}^2 + 13\mathbf{s} + 2}$$

o

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{I}_1(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_s} = \frac{\frac{1}{2}\left(\mathbf{s}+\frac{2}{3}\right)}{(\mathbf{s}+2)\left(\mathbf{s}+\frac{1}{6}\right)}$$

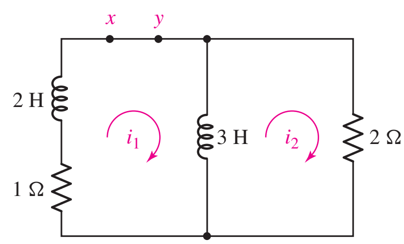


FIGURA 15.36 Circuito para el que se desean las respuestas naturales i_1 e i_2.

De acuerdo con la experiencia reciente, sabemos por inspección que i_1 debe tener la forma

$$i_1(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t/6}$$

La solución se completa utilizando las condiciones iniciales para establecer los valores de A y de B. Puesto que $i_1(0)$ se indica como 11 amperes:

$$11 = A + B$$

La ecuación adicional necesaria se obtiene escribiendo la ecuación de la LVK alrededor del perímetro del circuito:

$$1i_1 + 2\frac{di_1}{dt} + 2i_2 = 0$$

y resolviendo respecto de la derivada

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{1}{2}[2i_2(0) + 1i_1(0)] = -\frac{22+11}{2} = -2A - \frac{1}{6}B$$

(continúa)

De tal manera, $A = 8$ y $B = 3$, y por ello la solución que se desea es

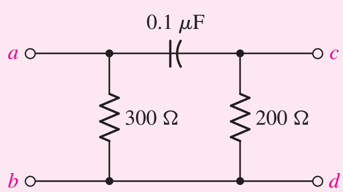
$$i_1(t) = 8e^{-2t} + 3e^{-t/6} \quad \text{amperes}$$

Las frecuencias naturales que constituyen i_2 son las mismas que las de i_1; asimismo, un procedimiento similar utilizado para evaluar las constantes arbitrarias conduce a

$$i_2(t) = 12e^{-2t} - e^{-t/6} \quad \text{amperes}$$

PRÁCTICA

15.14 Si una fuente de corriente $i_1(t) = u(t)$ A se presenta en a-b en la figura 15.37 con la flecha que entra en a, determine $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{cd}/\mathbf{I}_1$ y especifique las frecuencias naturales presentes en $v_{cd}(t)$.



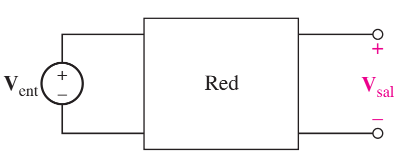
■ **FIGURA 15.37**

Respuesta: $120\mathbf{s}/(\mathbf{s} + 20\,000)$ Ω, $-20\,000$ $\mathbf{s}^{-1}$.

El proceso que debemos seguir para evaluar los coeficientes de la amplitud de la respuesta natural es detallado, excepto en aquellos casos en los que son obvios los valores iniciales de la respuesta deseada y sus derivadas. Sin embargo, no podemos perder de vista la facilidad y rapidez con la cual se obtiene la *forma* de la respuesta natural.

15.8 TÉCNICA PARA SINTETIZAR LA RAZÓN DE TENSIÓN $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$

Gran parte del análisis de este capítulo se ha relacionado con los polos y los ceros de una función de transferencia. Los ubicamos en el plano de la frecuencia compleja, los utilizamos para expresar funciones de transferencia como razones de factores o polinomios en $\mathbf{s}$, calculamos respuestas forzadas a partir de ellos y en la sección precedente usamos sus polos para establecer la forma de la respuesta natural.



■ **FIGURA 15.41** Dada $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$, buscamos una red que tenga una $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ específica.

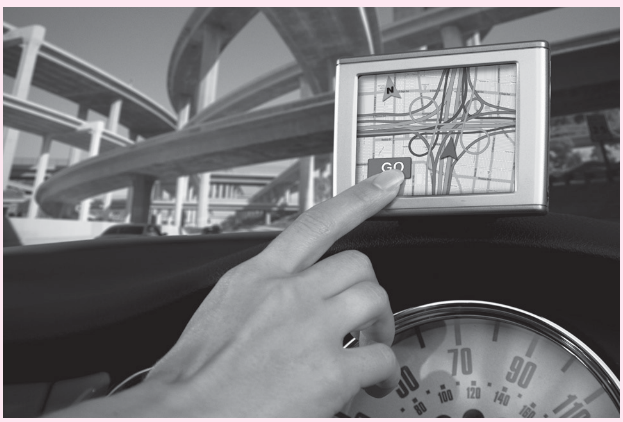
Veremos ahora la forma en que se podría determinar una red que puede proporcionar una función de transferencia deseada. Sólo consideraremos una parte pequeña del problema general, trabajando con la función de transferencia de la forma $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}(\mathbf{s})/\mathbf{V}_{ent}(\mathbf{s})$, como se indica en la figura 15.41. Por simplicidad, se restringe $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ a las frecuencias críticas sobre el eje σ negativo (incluyendo el origen). Así, consideremos funciones de transferencia tales que:

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{s}) = \frac{10(\mathbf{s}+2)}{\mathbf{s}+5}$$

APLICACIÓN PRÁCTICA

Diseño de circuitos de osciladores

En varios puntos a lo largo de este libro hemos investigado el comportamiento de varios circuitos que responden a una excitación senoidal. Sin embargo, la creación de la forma de ondas senoidales necesaria es un tema interesante en sí mismo. Por ejemplo, la generación de grandes tensiones y grandes corrientes senoidales es directa al utilizar imanes y bobinas de alambre rotatorias, aunque un método así no se reduce proporcionalmente con facilidad hasta formas de onda de magnitud más pequeña. En las aplicaciones de baja corriente, un mejor método consiste en explotar el concepto de ***retroalimentación positiva*** mediante un circuito conocido como ***oscilador***. Los circuitos osciladores son una parte integral de muchos productos de consumo, tales como los receptores de posicionamiento global por satélite (GPS) de la figura 15.38.

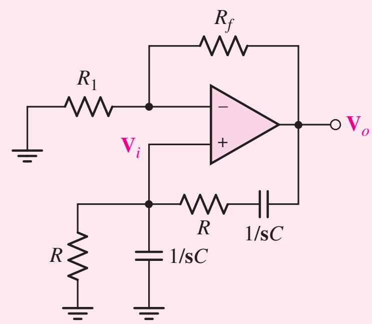


■ **FIGURA 15.38** Muchos productos electrónicos de consumo, como este receptor GPS, dependen de circuitos osciladores para proporcionar una frecuencia de referencia. © *Nick Koudis/Photodisc/Getty Images/RF.*

Un circuito oscilador sencillo, pero muy útil, que se conoce con el nombre de ***oscilador Wien,*** se muestra en la figura 15.39.

El circuito se asemeja a un circuito de amp op no inversor, con una resistencia R_1 conectado entre la pata (pin) de entrada inversora y la conexión a tierra, y una resistencia R_f conectada entre la salida y la pata (o pin) de entrada inversora. La resistencia R_f proporciona lo que se conoce como ***trayectoria de retroalimentación negativa***, puesto que conecta la salida de un amplificador a la entrada inversora. Cualquier aumento $\Delta\mathbf{V}_o$ en la salida causa una reducción de la entrada, la que a su vez da lugar a una salida más pequeña; este proceso incrementa la estabilidad de la tensión de salida $\mathbf{V}_o$. La ***ganancia*** del amp op, definida como la razón entre $\mathbf{V}_o$ y $\mathbf{V}_i$, se determina por los tamaños relativos de R_1 y R_f.

El lazo de retroalimentación *positiva* consiste en dos combinaciones independiente de resistencia $\mathbf{Z}_s = R + 1/$



■ **FIGURA 15.39** Circuito oscilador de puente de Wien.

$\mathbf{s}C$ y $\mathbf{Z}_p = R\|(1/\mathbf{s}C)$. Los valores que elegimos para R y C permiten diseñar un oscilador que tiene una frecuencia específica (*las capacitancias internas del amp op en sí mismas limitarán la frecuencia máxima que se obtiene*). Para determinar la relación entre R, C y la frecuencia de oscilación, buscamos la expresión de la ganancia del amplificador, $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$.

Si se recuerdan las dos reglas del amp op ideal que se explicaron en el capítulo 6 y se examina con cuidado el circuito de la figura 15.39, reconocemos que $\mathbf{Z}_p$ y $\mathbf{Z}_s$ forman un divisor de tensión tal que

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_o \frac{\mathbf{Z}_p}{\mathbf{Z}_p + \mathbf{Z}_s} \qquad [18]$$

Simplificando la expresión para $\mathbf{Z}_p = R\|(1/\mathbf{s}C) = R/(1 + \mathbf{s}RC)$ y $\mathbf{Z}_s = R + 1/\mathbf{s}C = (1 + \mathbf{s}RC)/\mathbf{s}C$, podemos observar que

$$\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_o} = \frac{\dfrac{R}{1+\mathbf{s}RC}}{\dfrac{1+\mathbf{s}RC}{\mathbf{s}C} + \dfrac{R}{1+\mathbf{s}RC}} = \frac{\mathbf{s}RC}{1 + 3\mathbf{s}RC + \mathbf{s}^2R^2C^2} \qquad [19]$$

Puesto que centramos el interés en la operación en estado senoidal permanente del amplificador, sustituimos $\mathbf{s}$ por $j\omega$, por lo que

$$\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_o} = \frac{j\omega RC}{1 + 3j\omega RC + (j\omega)^2R^2C^2} = \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2R^2C^2 + 3j\omega RC} \qquad [20]$$

Esta expresión de la ganancia es real sólo cuando $\omega = 1/RC$. Así, podemos diseñar un amplificador que opere a una frecuencia particular $f = \omega/2\pi = 1/2\pi\, RC$ eligiendo valores para R y para C.

(*continúa*)

Como ejemplo, diseñaremos un oscilador de puente de Wien para generar una señal senoidal a una frecuencia de 20 Hz, la más baja frecuencia comúnmente aceptada dentro del intervalo de audio. Requerimos una frecuencia $\omega = 2\pi f = (6.28)(20) = 125.6$ rad/s. Una vez que especificamos un valor para R, se conoce el valor necesario para C (y viceversa). Suponiendo que tenemos un capacitor de 1 μF a la mano, calculamos entonces una resistencia requerida de $R = 7\,962\ \Omega$. Puesto que no es un valor de resistencia estándar, probablemente será necesario usar varias resistencias combinadas en serie y/o en paralelo para obtener el valor necesario. Sin embargo, si se observa de nuevo la figura 15.39 como preparación para simular el circuito mediante PSpice, podemos ver que no se ha especificado ningún valor para R_f o R_1.

Si bien la ecuación [18] precisa de manera correcta la relación entre $\mathbf{V}_o$ y $\mathbf{V}_i$, también podríamos escribir otra ecuación que relacione tales cantidades:

$$0 = \frac{\mathbf{V}_i}{R_1} + \frac{\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_o}{R_f}$$

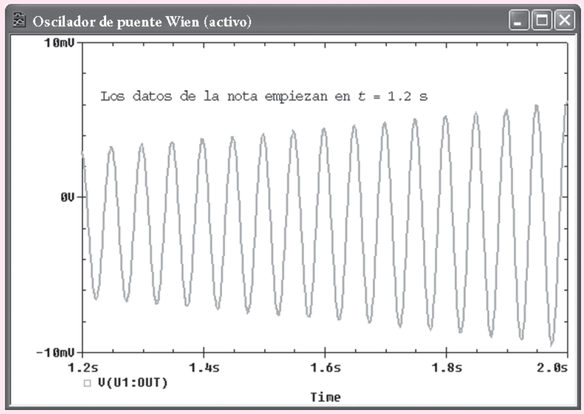
lo cual se reordena para obtener

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = 1 + \frac{R_f}{R_1} \qquad [21]$$

Si $\omega = 1/RC$ en la ecuación [20], se obtiene

$$\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_o} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, es necesario elegir valores de R_1 y R_f tales que $R_f/R_1 = 2$. Desafortunadamente, si procedemos a efectuar un análisis transitorio con PSpice en el circuito eligiendo $R_f = 2$ kΩ y $R_1 = 1$ kΩ, por ejemplo, es probable que nos desagrade el resultado. Para garantizar que el circuito sea en realidad inestable (*una condición necesaria a fin de que se inicien las oscilaciones*), se necesita tener R_f/R_1 un poco mayor que 2. La salida simulada de nuestro diseño final ($R = 7\,962\ \Omega$, $C = 1\ \mu$F, $R_f = 2.01$ kΩ y $R_1 = 1$ kΩ) se muestra en la figura 15.40. Observe que, en la gráfica, la magnitud de las oscilaciones crece; en la práctica, se requiere que los elementos de circuitos no lineales estabilicen la magnitud de la tensión del circuito oscilador.



■ **FIGURA 15.40** Salida simulada del oscilador de puente Wien diseñado para operar a 20 Hz.

o

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{s}) = \frac{-5\mathbf{s}}{(\mathbf{s}+8)^2}$$

o

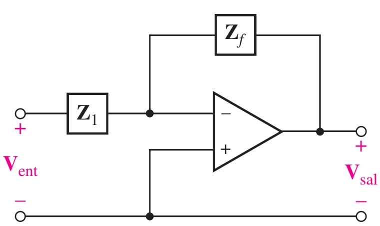
$$\mathbf{H}_3(\mathbf{s}) = 0.1\mathbf{s}(\mathbf{s}+2)$$

Comenzaremos determinando la ganancia de tensión de la red de la figura 15.42 que contiene un amp op ideal. La tensión entre las dos terminales de entrada del amp op es, en esencia, cero, y la impedancia de entrada del amp op es, en la práctica, infinita. Por lo tanto, podemos igualar a cero la suma de las corrientes que entran a la terminal de entrada inversora:

$$\frac{\mathbf{V}_{ent}}{\mathbf{Z}_1} + \frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{Z}_f} = 0$$

o

$$\frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_{ent}} = -\frac{\mathbf{Z}_f}{\mathbf{Z}_1}$$



■ **FIGURA 15.42** En un amp op ideal, $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent} = -\mathbf{Z}_f/\mathbf{Z}_1$.

Si $\mathbf{Z}_f$ y $\mathbf{Z}_1$ son resistencias, el circuito actúa como un amplificador inversor o quizás como un ***atenuador*** (si la razón es menor que la unidad). Sin embargo, nuestro interés en este momento radica en los casos en los que una de estas impedancias es una resistencia, mientras que la otra es una red RC.

En la figura 15.43a, sea $\mathbf{Z}_1 = R_1$ mientras que $\mathbf{Z}_f$ es la combinación en paralelo de R_f y C_f. Por lo tanto,

$$\mathbf{Z}_f = \frac{R_f/\mathbf{s}C_f}{R_f + (1/\mathbf{s}C_f)} = \frac{R_f}{1 + \mathbf{s}C_f R_f} = \frac{1/C_f}{\mathbf{s} + (1/R_f C_f)}$$

y

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_{ent}} = -\frac{\mathbf{Z}_f}{\mathbf{Z}_1} = -\frac{1/R_1 C_f}{\mathbf{s} + (1/R_f C_f)}$$

Tenemos una función de transferencia con una sola frecuencia crítica (finita), un polo en $\mathbf{s} = -1/R_f C_f$.

Al considerar ahora la figura 15.43b, dejamos que en este caso $\mathbf{Z}_f$ sea resistiva, en tanto que $\mathbf{Z}_1$ será una combinación en paralelo RC:

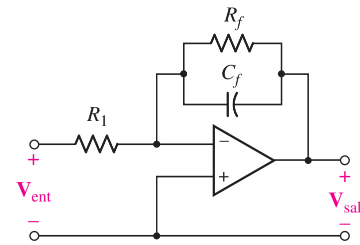
$$\mathbf{Z}_1 = \frac{1/C_1}{\mathbf{s} + (1/R_1 C_1)}$$

y

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_{ent}} = -\frac{\mathbf{Z}_f}{\mathbf{Z}_1} = -R_f C_1 \left(\mathbf{s} + \frac{1}{R_1 C_1}\right)$$

La única frecuencia crítica finita es cero en $\mathbf{s} = -1/R_1 C_1$.

Para nuestros amp op ideales, la impedancia de salida o de Thévenin es cero y, por lo tanto, $\mathbf{V}_{sal}$ y $\mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$ no son funciones de ninguna carga $\mathbf{Z}_L$ que pudiera ponerse a través de las terminales de salida. Esto también incluye la entrada a otro amp op y, por lo tanto, conectaríamos circuitos que tengan polos y ceros en localizaciones específicas en ***cascada***, donde la salida de un amp op se conecta de manera directa a la entrada del siguiente, y de esa manera genera cualquier función de transferencia que se desee.



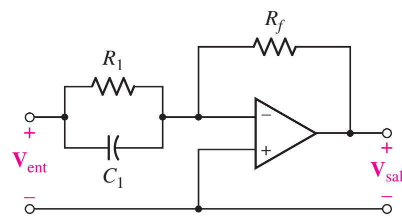


FIGURA 15.43 (a) La función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$ tiene un polo en $\mathbf{s} = -1/R_f C_f$. (b) Aquí hay un cero $\mathbf{s} = -1/R_1 C_1$.

EJEMPLO 15.13

Sintetice el circuito que producirá la función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent} = 10(\mathbf{s} + 2)/(\mathbf{s} + 5)$.

El polo en $\mathbf{s} = -5$ se obtiene mediante una red con la forma de la figura 15.43a. Si se nombra A a esta red, tenemos $1/R_{fA}C_{fA} = 5$. De manera arbitraria elegimos $R_{fA} = 100$ kΩ; por lo tanto, $C_{fA} = 2\ \mu$F. Para esta parte del circuito completo,

$$\mathbf{H}_A(\mathbf{s}) = -\frac{1/R_{1A}C_{fA}}{\mathbf{s} + (1/R_{fA}C_{fA})} = -\frac{5 \times 10^5/R_{1A}}{\mathbf{s} + 5}$$

A continuación, consideramos el cero en $\mathbf{s} = -2$. De la figura 15.43b, $1/R_{1B}C_{1B} = 2$, y con $R_{1B} = 100$ kΩ, se tiene que $C_{1B} = 5\ \mu$F. Por lo tanto,

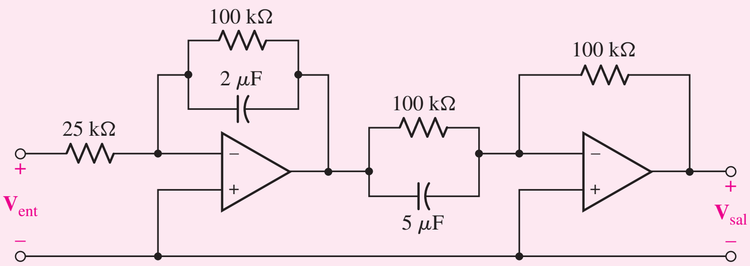
$$\mathbf{H}_B(\mathbf{s}) = -R_{fB}C_{1B}\left(\mathbf{s} + \frac{1}{R_{1B}C_{1B}}\right)$$
$$= -5 \times 10^{-6} R_{fB}(\mathbf{s} + 2)$$

(*continúa*)

y

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{H}_A(\mathbf{s})\mathbf{H}_B(\mathbf{s}) = 2.5\frac{R_{fB}}{R_{1A}}\frac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}+5}$$

Completamos el diseño $R_{fB} = 100$ kΩ y $R_{1A} = 25$ kΩ. El resultado se muestra en la figura 15.44. Los capacitores en este circuito son bastante grandes, aunque lo anterior es una consecuencia directa de las bajas frecuencias seleccionadas para el polo y para el cero de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$. Si $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ se cambiara a $10(\mathbf{s} + 2\,000)/(\mathbf{s} + 5\,000)$, podríamos utilizar valores de 2 y 5 nF.



■ **FIGURA 15.44** Esta red contiene dos amp op ideales y produce la función de transferencia de tensión $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent} = 10(\mathbf{s}+2)/(\mathbf{s}+5)$.

PRÁCTICA

15.17 Especifique los valores adecuados de elementos para $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_f$ en cada una de las tres etapas de cascada, a fin de realizar la función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = -20\mathbf{s}^2/(\mathbf{s} + 1\,000)$.

Respuestas: 1 μF‖∞, 1 MΩ; 1 μF‖∞, 1 MΩ; 100 kΩ‖10nF, 5MΩ.

RESUMEN Y REPASO

Después de entrar en contacto con el concepto de frecuencia compleja en el capítulo 14, aplicamos ese concepto al análisis de circuito en este capítulo. El primer tema fue la impedancia, quizá conocida para quienes ya han leído el capítulo 10. El concepto de impedancia (o el de admitancia) nos permite construir directamente ecuaciones en el dominio **s** que describen tensiones nodales, corrientes de malla, etc., sin tener que apoyarse en tomar la transformada de Laplace de cada término de una ecuación integrodiferencial. De manera algo sorprendente, encontramos que la impedancia de los inductores y los capacitores incluye la condición inicial de ese elemento. De ahí en adelante, se aplican todas las técnicas conocidas de análisis de circuito. La única dificultad que se encuentra es al factorizar polinomios de mayor orden para realizar una transformada inversa. También introdujimos la noción de una función de transferencia del sistema que permite cambiar fácilmente la entrada a una red y predecir la nueva salida. Trabajar en el dominio **s** resultó aquí muy natural, y vimos que se realiza fácilmente la convolución de dos funciones en el dominio del tiempo mediante la multiplicación de sus equivalentes en el dominio **s**.

El tercer tema principal del capítulo fue el plano de frecuencia compleja, que nos permite crear una representación gráfica de cualquier expresión en el dominio **s**. Especialmente ofrece un modo ordenado para identificar fácilmente polos y ceros. Como las fuentes conectadas a un circuito sólo determinan la magnitud de la respuesta transitoria y no la forma de dicha respuesta transitoria, encontramos que el análisis en el dominio **s** puede revelar detalles tanto acerca de la respuesta natural como acerca de la

respuesta forzada de una red. Concluimos el capítulo con una descripción de cómo se pueden usar los amps op para sintetizar una función de transferencia deseada, colocando los polos y los ceros donde se necesitan a través de etapas en cascada.

Este tema se tratará nuevamente en los estudios futuros de análisis de señales, y el concepto de convolución es especialmente aplicable a una amplia gama de aplicaciones. En esta etapa, sin embargo, quizá debamos hacer una pausa y permitir al lector enfocarse en temas clave e identificar ejemplos pertinentes como un inicio del repaso de lo que hemos explicado.

- Se pueden representar las resistencias en el dominio de la frecuencia por medio de una impedancia que tenga la misma magnitud. (Ejemplo 15.1)
- Los inductores pueden representarse en el dominio de la frecuencia mediante una impedancia $\mathbf{s}L$. Si la corriente inicial es diferente de cero, entonces la impedancia debe ponerse en serie con la fuente de tensión $-Li(0^-)$ o en paralelo con una fuente de corriente $i(0^-)/\mathbf{s}$. (Ejemplo 15.1)
- Resulta factible representar los capacitores en el dominio de la frecuencia por medio de una impedancia $1/\mathbf{s}C$. Si la tensión inicial es distinta de cero, entonces la impedancia debe ponerse en serie con la fuente de tensión $v(0^-)/\mathbf{s}$ o en paralelo con una fuente de corriente $Cv(0^-)$. (Ejemplo 15.2)
- El análisis nodal y de malla en el dominio **s** da como resultado ecuaciones simultáneas en términos de polinomios **s**. MATLAB es una herramienta muy útil para resolver tales sistemas de ecuaciones. (Ejemplos 15.3, 15.4, 15.5)
- La superposición, la transformación de fuente y los teoremas de Thévenin y de Norton son válidos en el dominio **s**. (Ejemplos 15.6, 15.7)
- Una función de transferencia de circuito $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ se define como la razón entre la salida y la entrada, ambas en el dominio **s**. Cualquier cantidad pudiese ser una tensión o una corriente. (Ejemplo 15.8)
- Los *ceros* de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ son los valores que propician una magnitud cero. Los *polos* de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ son los valores que originan la magnitud infinita.
- La convolución nos proporciona medios tanto analíticos como gráficos para determinar la salida de un circuito a partir de su respuesta al impulso $h(t)$. (Ejemplos 15.8, 15.9, 15.10)
- Existen varios métodos gráficos para representar expresiones en el dominio **s** en términos de polos y de ceros. Se utilizan estas gráficas para sintetizar un circuito y obtener una respuesta deseada. (Ejemplo 15.11)
- Se puede analizar un circuito sin fuentes usando técnicas del dominio **s** para determinar su respuesta transitoria.
- Se pueden usar etapas con un solo op amp para sintetizar funciones de transferencia que tengan ya sea un cero o un polo. Se pueden sintetizar funciones más complejas poniendo en cascada etapas múltiples.

En la tabla 15.1 se muestra un resumen de estos modelos.

LECTURAS ADICIONALES

Más detalles acerca del análisis de sistemas en el dominio **s**, el uso de la transformada de Laplace y las propiedades de las funciones de transferencia se pueden encontrar en

K. Ogata, *Modern Control Engineering,* 4a. ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 2002.

Un análisis muy completo acerca de los diferentes tipos de circuitos osciladores puede encontrarse en:

R. Mancini, *Op Amps for Everyone,* 2a. ed. Amsterdam: Newnes, 2003.

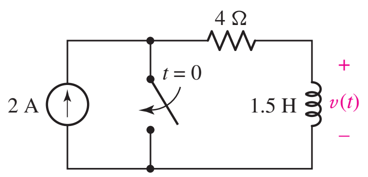
y

G. Clayton y S. Winder, *Operational Amplifiers,* 5a. ed. Amsterdam: Newnes, 2003.

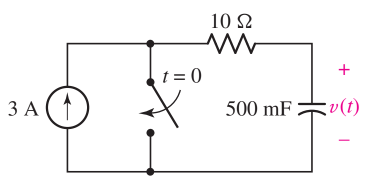
EJERCICIOS

15.1 Z(s) y Y(s)

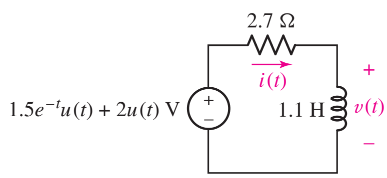
1. Dibuje un equivalente en el dominio **s** del circuito representado en la figura 15.45 si la única cantidad que interesa es $v(t)$. (*Pista:* Omita la fuente, pero no la ignore.)
2. Para el circuito de la figura 15.46, la única cantidad que interesa es la tensión $v(t)$. Dibuje un circuito equivalente adecuado en el dominio **s**. (*Pista:* Omita la fuente, pero no la ignore.)
3. Para el circuito representado en la figura 15.47, dibuje un equivalente en el dominio **s** y analícelo para obtener un valor para $i(t)$ si $i(0)$ es igual a (*a*) 0; (*b*) −2 A.



■ FIGURA 15.45

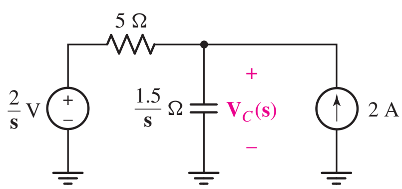


■ FIGURA 15.46

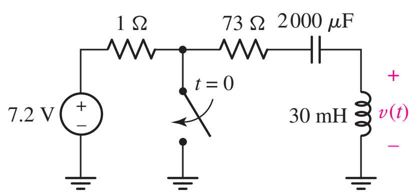


■ FIGURA 15.47

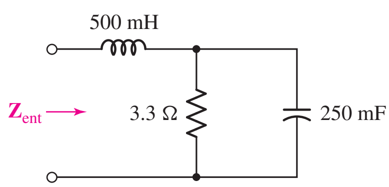
4. Para el circuito de la figura 15.47, dibuje un equivalente en el dominio **s** y analícelo para obtener un valor para $v(t)$ si $i(0)$ es igual a (*a*) 0; (*b*) 3 A.
5. Con referencia al circuito en el dominio **s** dibujado en la figura 15.48, (*a*) calcule $\mathbf{V}_C(\mathbf{s})$; (*b*) determine $v_C(t)$, $t > 0$; (*c*) dibuje la representación en el dominio de tiempo del circuito.
6. Dibuje todos los equivalentes en el dominio **s** posibles ($t > 0$) del circuito que se muestra en la figura 15.49.
7. Determine la impedancia de entrada $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s})$ vista desde las terminales de la red que se representa en la figura 15.50. Exprese su respuesta como la razón de dos polinomios de **s**.



■ FIGURA 15.48

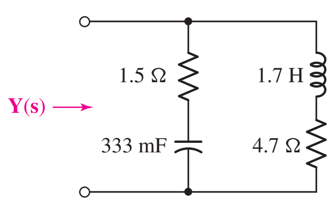


■ FIGURA 15.49

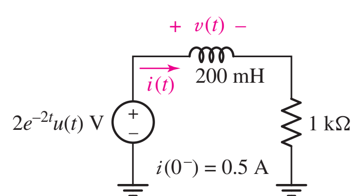


■ FIGURA 15.50

8. Con referencia a la red de la figura 15.51, obtenga una expresión para la admitancia de entrada $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ como está marcada. Exprese su respuesta como la razón de dos polinomios **s**.
9. Para el circuito de la figura 15.52, (*a*) dibuje ambos circuitos equivalentes en el dominio de **s**. (*b*) elija uno y solucione para $\mathbf{V}(\mathbf{s})$; (*c*) determine $v(t)$.



■ FIGURA 15.51

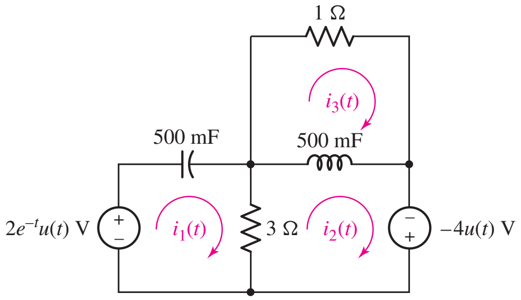


■ FIGURA 15.52

10. Determine la impedancia de entrada $1/\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ de la red representada en la figura 15.51 si la resistencia de 1.5 Ω se reemplaza por la combinación en paralelo de un capacitor de 100 mF y una resistencia de 1 Ω y la corriente inicial a través del inductor (definida como fluyendo hacia abajo) es de 540 mA.

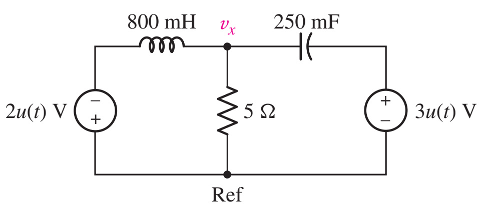
15.2 Análisis nodal y de malla en el dominio s

11. Para el circuito dado en la figura 15.53, (*a*) dibuje el equivalente en el dominio **s**; (*b*) escriba las tres ecuaciones de malla en el dominio **s**; (*c*) determine i_1, i_2 e i_3.



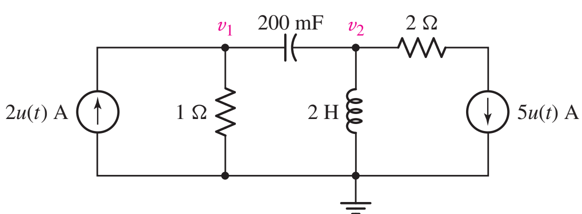
■ **FIGURA 15.53**

12. Reemplace la marca $-4u(t)$ en el circuito de la figura 15.53 por $4e^{-t}u(t)$ V. Calcule i_1, i_2 e i_3 si se sabe que la corriente inicial a través del inductor, $i_2 - i_3$, es igual a 50 mA.
13. Para el circuito que se muestra en la figura 15.54, (*a*) escriba una ecuación nodal en el dominio **s** para $\mathbf{V}_x(\mathbf{s})$; (*b*) resuelva para $v_x(t)$.



■ **FIGURA 15.54**

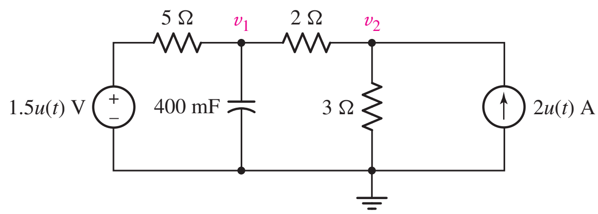
14. Determine v_1 y v_2 para el circuito de la figura 15.55 usando análisis nodal en el dominio **s**.



■ **FIGURA 15.55**

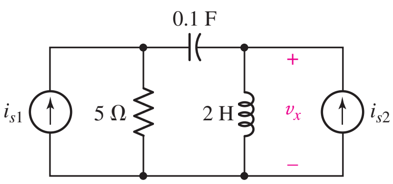
15. La fuente de $2u(t)$ A en la figura 15.55 se reemplaza por una fuente de $4e^{-t}u(t)$ A. Use análisis en el dominio **s** para determinar la potencia disipada por la resistencia de 1 Ω.

16. Calcule la potencia disipada en la resistencia de 3 Ω de la figura 15.56 si $v_1(0^-) = 2$ V.



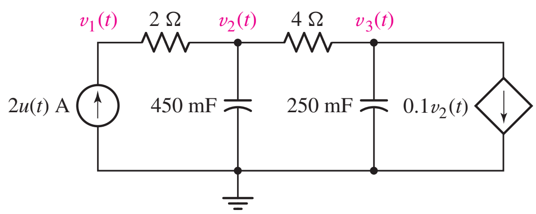
■ **FIGURA 15.56**

17. Para el circuito que se muestra en la figura 15.57, sea $i_{s1} = 3u(t)$ A e $i_{s2} = 5$ sen $2t$ A. Trabajando inicialmente en el dominio **s**, obtenga una expresión para $v_x(t)$.



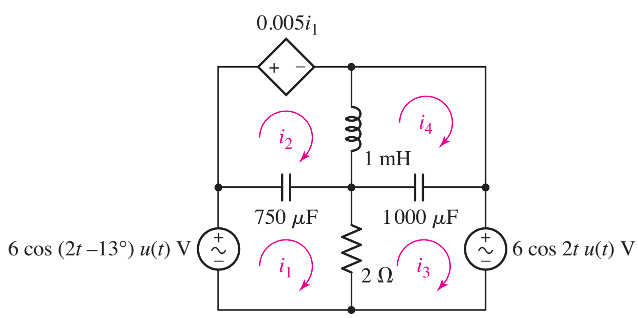
■ **FIGURA 15.57**

18. Para el circuito de la figura 15.58, (*a*) dibuje el circuito correspondiente en el dominio **s**; (*b*) resuelva para $v_1(t)$, $v_2(t)$ y $v_3(t)$; (*c*) verifique su solución mediante una simulación PSpice adecuada.



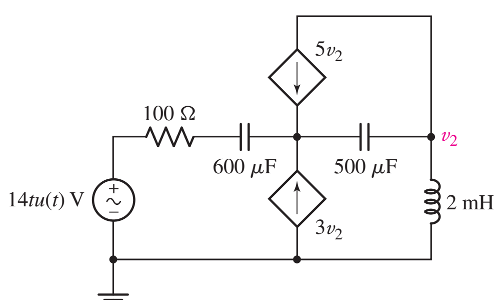
■ **FIGURA 15.58**

19. Determine las corrientes de malla $i_1(t)$ e $i_2(t)$ de la figura 15.59 si la corriente que pasa por el inductor de 1 mH ($i_2 - i_4$) es de 1 A en $t = 0^-$. Verifique que la respuesta se aproxime a la que se obtuvo mediante el análisis fasorial a medida que la respuesta del circuito alcanza, en el largo plazo, el estado permanente.



■ **FIGURA 15.59**

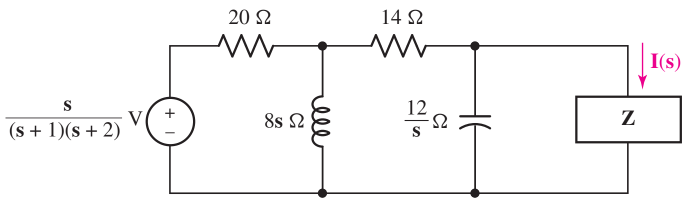
20. Bajo el supuesto de que no se almacena en un principio energía en el circuito de la figura 15.60, determine el valor de v_2 en $t =$: (*a*) 1 ms; (*b*) 100 ms; (*c*) 10 s.



■ **FIGURA 15.60**

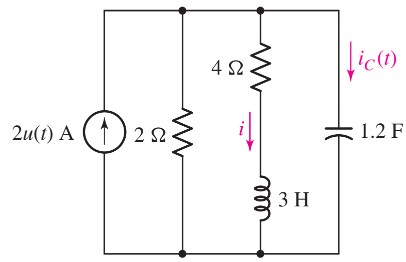
15.3 Técnicas adicionales de análisis de circuitos

21. Usando sucesivamente transformaciones de fuente, obtenga una expresión en el dominio **s** para el equivalente de Thévenin visto por el elemento marcado **Z** en el circuito de la figura 15.61.

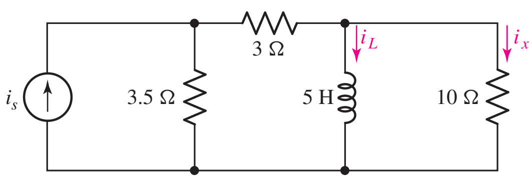


■ FIGURA 15.61

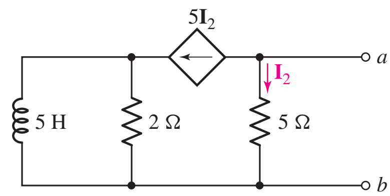
22. Calcule **I**(**s**) como está marcado en el circuito de la figura 15.61 si el elemento **Z** tiene una impedancia de (*a*) 2 Ω; (*b*) $\frac{1}{2\mathbf{s}}$; (*c*) $\mathbf{s} + \frac{1}{2\mathbf{s}} + 3\ \Omega$.
23. Para el circuito que se muestra en la figura 15.62, determine el equivalente Thévenin en el dominio **s** visto por (*a*) la resistencia de 2 Ω; (*b*) la resistencia de 4 Ω; (*c*) el capacitor de 1.2 F; (*d*) la fuente de corriente.
24. Calcule las dos corrientes marcadas en el circuito de la figura 15.62.
25. Para el circuito de la figura 15.63, tome $i_s(t) = 5u(t)$ A, y determine (*a*) la impedancia equivalente de Thévenin vista por la resistencia de 10 Ω; (*b*) la corriente a través del inductor $i_L(t)$.



■ FIGURA 15.62

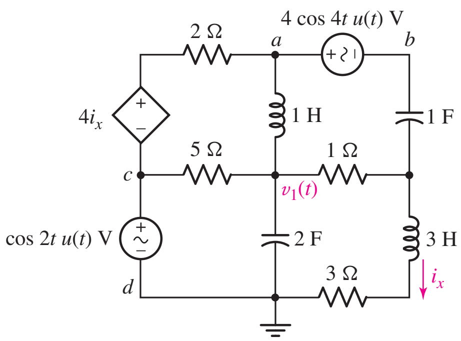


■ FIGURA 15.63



■ FIGURA 15.64

26. Si la fuente de corriente de la figura 15.63 es $1.5e^{-2t}u(t)$ A e $i_L(0^-) = 1$A, determine $i_x(t)$.
27. Para el circuito en el dominio **s** de la figura 15.64, determine el equivalente de Thévenin visto desde las terminales marcadas *a* y *b*.
28. (*a*) Use superposición en el dominio **s** para encontrar una expresión para $\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$ marcado en la figura 15.65. (*b*) Encuentre $v_1(t)$.

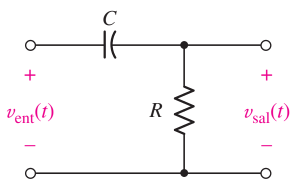


■ FIGURA 15.65

29. Si el circuito de la fuente de tensión de la parte superior derecha de la figura 15.65 se abre, determine el equivalente de Thévenin visto desde las terminales marcadas *a* y *b*.
30. Si el circuito de la fuente de tensión de la parte inferior izquierda de la figura 15.65 se abre, determine el equivalente de Thévenin visto desde las terminales marcadas *c* y *d*.

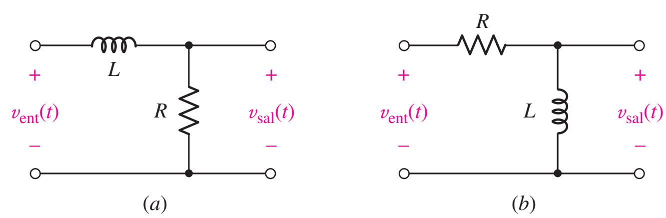
15.4 Polos, ceros y funciones de transferencia

31. Determine los polos y los ceros de las siguientes funciones en el dominio **s**:
(*a*) $\dfrac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}+12.5}$; (*b*) $\dfrac{\mathbf{s}(\mathbf{s}+1)}{(\mathbf{s}+5)(\mathbf{s}+3)}$; (*c*) $\dfrac{\mathbf{s}+4}{\mathbf{s}^2+8\mathbf{s}+7}$; (*d*) $\dfrac{\mathbf{s}^2-\mathbf{s}-2}{3\mathbf{s}^3+24\mathbf{s}^2+21\mathbf{s}}$.
32. Use medios adecuados para determinar los polos y los ceros de
(*a*) $\mathbf{s}+4$; (*b*) $\dfrac{2\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2-8\mathbf{s}+16}$; (*c*) $\dfrac{4}{\mathbf{s}^3+8\mathbf{s}+7}$; (*d*) $\dfrac{\mathbf{s}-5}{\mathbf{s}^3-7\mathbf{s}+6}$.
33. Considere las siguientes expresiones y determine las frecuencias críticas de cada una:
(*a*) $5+\mathbf{s}^{-1}$; (*b*) $\dfrac{\mathbf{s}(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+4)}{(\mathbf{s}+5)(\mathbf{s}+3)^2}$; (*c*) $\dfrac{1}{\mathbf{s}^2+4}$; (*d*) $\dfrac{0.5\mathbf{s}^2-18}{\mathbf{s}^2+1}$.
34. Para la red representada esquemáticamente en la figura 15.66, (*a*) escriba la función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s}) \equiv \mathbf{V}_{sal}(\mathbf{s})/\mathbf{V}_{ent}(\mathbf{s})$; (*b*) determine los polos y ceros de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$.



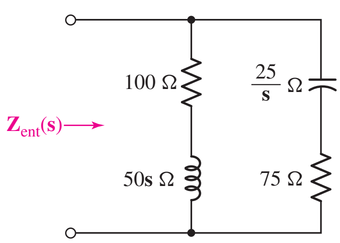
■ FIGURA 15.66

35. Para cada una de las dos redes representadas esquemáticamente en la figura 15.67, (*a*) escriba la función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s}) \equiv \mathbf{V}_{sal}(\mathbf{s})/\mathbf{V}_{ent}(\mathbf{s})$; (*b*) determine los polos y ceros de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$.



■ FIGURA 15.67

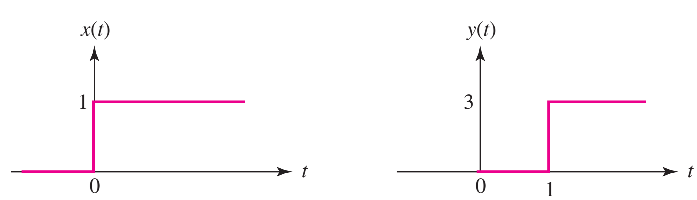
36. Determine las frecuencias críticas de $\mathbf{Z}_{ent}$ definida en la figura 15.50.
37. Especifique los polos y ceros de $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ definida por la figura 15.51.
38. Si se encuentra que una red tiene la función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \dfrac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+8\mathbf{s}+7}$,
determine la tensión de salida en el dominio **s** para $v_{ent}(t)$ igual a (*a*) $3u(t)$ V; (*b*) $25e^{-2t}u(t)$ V; (*c*) $4u(t+1)$ V; (*d*) 2 sen $5t\,u(t)$ V.
39. Se sabe que una red dada se caracteriza por la función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}+1/(\mathbf{s}^2+23\mathbf{s}+60)$. Determine las frecuencias críticas de la salida si la entrada es (*a*) $2u(t)+4\delta(t)$; (*b*) $-5e^{-t}u(t)$; (*c*) $4te^{-2t}u(t)$; (*d*) $5\sqrt{2}e^{-10t}\cos 5t\,u(t)$ V.
40. Para la red representada en la figura 15.68, determine las frecuencias críticas de $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s})$.



■ FIGURA 15.68

15.5 Convolución

41. Con referencia a la figura 15.69, use la ecuación [11] para obtener $x(t) * y(t)$.



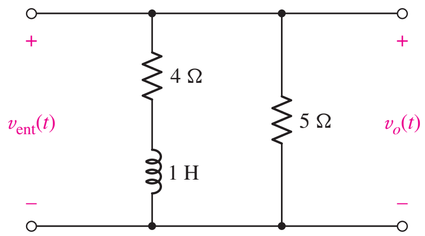
■ FIGURA 15.69

42. Con respecto a las funciones $x(t)$ y $y(t)$ como se grafican en la figura 15.69, use la ecuación [11] para obtener (*a*) $x(t) * x(t)$; (*b*) $y(t) * \delta(t)$.

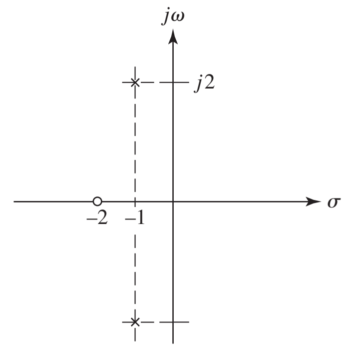
43. Use técnicas de convolución gráfica para determinar $f * g$ si $f(t) = 5u(t)$ y $g(t) = 2u(t) - 2u(t-2) + 2u(t-4) - 2u(t-6)$.

44. Sea $h(t) = 2e^{-3t}u(t)$ y $x(t) = u(t) - \delta(t)$. Encuentre $y(t) = h(t) * x(t)$ (*a*) usando convolución en el dominio del tiempo; (*b*) encontrando $\mathbf{H(s)}$ y $\mathbf{X(s)}$ y luego obteniendo $\mathscr{L}^{-1}\{\mathbf{H(s)X(s)}\}$.

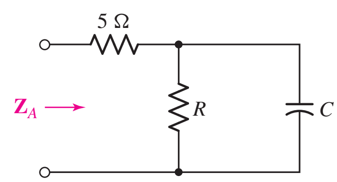
45. (*a*) Determine la respuesta al impulso $h(t)$ en la red que se muestra en la figura 15.70.
(*b*) Utilice la convolución para determinar $v_o(t)$ si $v_{ent}(t) = 8u(t)$ V.



■ **FIGURA 15.70**



■ **FIGURA 15.71**



■ **FIGURA 15.72**

15.6 Plano de frecuencia compleja

46. Una resistencia de 2 Ω se coloca en serie con un capacitor de 250 mF. Grafique la magnitud de la impedancia equivalente como función de (*a*) σ; (*b*) ω; (*c*) σ y ω, usando un procedimiento tipo hoja elástica. (*d*) Verifique sus soluciones usando MATLAB.

47. Grafique la magnitud de $\mathbf{Z(s)} = \mathbf{s}^2 + \mathbf{s}$ como función de (*a*) σ; (*b*) ω; (*c*) σ y ω, usando un procedimiento tipo hoja elástica. (*d*) Verifique sus soluciones usando MATLAB.

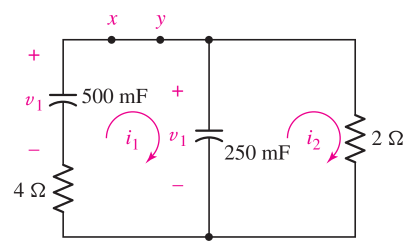
48. Grafique los polos y ceros de cada una de las siguientes expresiones:

$$(a)\ \frac{\mathbf{s}(\mathbf{s}+4)}{(\mathbf{s}+5)(\mathbf{s}+2)};\ (b)\ \frac{\mathbf{s}-1}{\mathbf{s}^2+8\mathbf{s}+7};\ (c)\ \frac{\mathbf{s}^2+1}{\mathbf{s}(\mathbf{s}^2+10\mathbf{s}+16)};\ (d)\ \frac{5}{\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+5}.$$

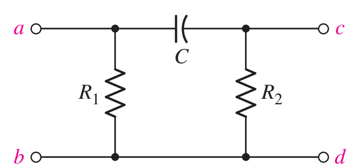
49. Los polos y ceros de una función de transferencia dada $\mathbf{H(s)}$ se muestra en la figura 15.71 parcialmente etiquetados. Obtenga una expresión para $\mathbf{H(s)}$ si $\mathbf{H}(0)$ es igual a (*a*) 1; (*b*) –5. (*c*) ¿Se espera que el sistema $\mathbf{H(s)}$ sea estable o inestable? *Explique*.

50. La red de tres elementos que se muestra en la figura 15.72 tiene una impedancia de entrada $\mathbf{Z}_A(\mathbf{s})$ que tiene un cero en $\mathbf{s} = -10 + j0$. Si se coloca una resistencia de 20 Ω en serie con la red, el cero de la nueva impedancia se corre a $\mathbf{s} = -3.6 + j0$. Calcule R y C.

51. Sea $\mathbf{H(s)} = 100(\mathbf{s}+2)/(\mathbf{s}^2 + 2\mathbf{s} + 5)$ y: (*a*) muestre la gráfica de polos y ceros correspondientes a $\mathbf{H(s)}$; (*b*) determine $\mathbf{H}(j\omega)$; (*c*) deduzca $|\mathbf{H}(j\omega)|$; (*d*) dibuje $|\mathbf{H}(j\omega)|$ contra ω; (*e*) encuentre $\omega_{máx}$, la frecuencia a la que $|\mathbf{H}(j\omega)|$ es máximo.



■ **FIGURA 15.73**



■ **FIGURA 15.74**

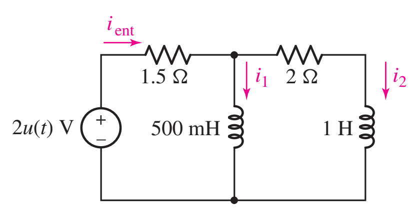
15.7 Respuesta natural y el plano s

52. Determine expresiones para $i_1(t)$ e $i_2(t)$ para el circuito de la figura 15.73, suponiendo $v_1(0^-) = 2$ V y $v_2(0^-) = 0$ V.

53. El capacitor de 250 mF en el circuito de la figura 15.73 se reemplaza por un inductor de 2 H. Si $v_1(t) = 0$ V y $i_1(0^-) - i_2(0^-) = 1$ A, obtenga una expresión para $i_2(t)$.

54. En la red de la figura 15.74, una fuente de corriente $i_x(t) = 2\,u(t)$ A se conecta entre las terminales c y d de manera que la flecha de la fuente señale hacia arriba. Determine las frecuencias naturales presentes en la tensión $v_{ab}(t)$ que resulta.

55. Con referencia al circuito que se muestra en la figura 15.75, sea $i_1(0^-) = 1$ A y $i_2(0^-) = 0$. (*a*) Determine los polos de $\mathbf{I}_{ent}(\mathbf{s})/\mathbf{V}_{ent}(\mathbf{s})$; (*b*) use esta información para obtener expresiones para $i_1(t)$ e $i_2(t)$.



■ **FIGURA 15.75**

15.8 Técnica para sintetizar la razón de tensión H(s) = V_{sal}/V_{ent}

DP 56. Diseñe un circuito que produzca la función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$ igual a

$$(a)\ 5(\mathbf{s}+1);\ (b)\ \frac{5}{(\mathbf{s}+1)};\ (c)\ 5\frac{\mathbf{s}+1}{\mathbf{s}+2}.$$

DP 57. Diseñe un circuito que produzca la función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$ igual a

$$(a)\ 2(\mathbf{s}+1)^2;\ (b)\ \frac{3}{(\mathbf{s}+500)(\mathbf{s}+100)}.$$

DP 58. Diseñe un circuito que produzca la función de transferencia

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_{ent}} = 5\frac{\mathbf{s}+10^4}{\mathbf{s}+2\times 10^5}.$$

DP 59. Diseñe un circuito que produzca la función de transferencia

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_{ent}} = 3\frac{\mathbf{s}+50}{(\mathbf{s}+75)^2}.$$

60. Determine $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$ como una razón de polinomios en **s** para el amp op de la figura 15.42 indicando los valores de impedancia (en Ω): (*a*) $\mathbf{Z}_1(\mathbf{s}) = 10^3 + (10^8/\mathbf{s})$, $\mathbf{Z}_f(\mathbf{s}) = 5\,000$; (*b*) $\mathbf{Z}_1(\mathbf{s}) = 5\,000$, $\mathbf{Z}_f(\mathbf{s}) = 10^3 + (10^8/\mathbf{s})$; (*c*) $\mathbf{Z}_1(\mathbf{s}) = 10^3 + (10^8/\mathbf{s})$, $\mathbf{Z}_f(\mathbf{s}) = 10^4 + (10^8/\mathbf{s})$.

Ejercicios de integración del capítulo

DP 61. Diseñe un circuito que dé una frecuencia de 16 Hz, la cual está cerca al límite inferior del rango de la audición humana. Verifique su diseño con una simulación adecuada.

DP 62. Diseñe un circuito que dé una señal de tono multifrecuencial de (DTMF) correspondiente al número 9, que es una salida de tensión compuesta de una señal de 1 477 Hz y una señal de 852 Hz.

DP 63. (*a*) Diseñe un circuito que dé una señal a 261.6 Hz, que es aproximadamente la del do mayor. Use sólo valores de resistencia estándar con tolerancia de 5%. (*b*) Estime la gama probable de frecuencia de su generador de señal, con base en la gama de valores posibles de las resistencias que se pueden usar en su construcción.

DP 64. (*a*) Muchas personas con pérdida parcial de la audición, especialmente las de edad avanzada, tienen dificultad para percibir los detectores estándar de humo. Una alternativa es bajar la frecuencia a aproximadamente 500 Hz. Diseñe un circuito que dé una señal así, usando sólo valores de resistencias y capacitores estándar con 10% de tolerancia. (*b*) Estime la gama real de frecuencias que se espera de su diseño si se fabrica con base en la gama posible de valores de los componentes.

DP 65. Diseñe un circuito que dé ya sea una señal de 200 Hz o una de 400 Hz cerrando los interruptores adecuados.



CAPÍTULO 16

Respuesta en frecuencia



CONCEPTOS CLAVE

- Frecuencia resonante de los circuitos con inductores y capacitores
- Factor de calidad
- Ancho de banda
- Escalamiento (o ajuste) de frecuencia y magnitud
- Técnicas de los diagramas de Bode
- Filtros pasabajas y pasaaltas
- Diseño de filtros pasabandas
- Filtros activos
- Diseño de filtros Butterworth

INTRODUCCIÓN

Ya hemos introducido el concepto de respuesta en frecuencia, que significa que el comportamiento del circuito puede cambiar drásticamente dependiendo de la frecuencia (o de las frecuencias) de operación: una diferencia radical con respecto a nuestras primeras experiencias con sencillos circuitos de cd. En este capítulo llevamos el tema a un nivel más refinado, ya que incluso circuitos sencillos diseñados para una respuesta en frecuencia específica pueden ser enormemente útiles en una amplia variedad de aplicaciones cotidianas. De hecho, a lo largo del día usamos circuitos selectivos de frecuencia, quizá sin darnos cuenta. Por ejemplo, al elegir en la radio la estación favorita, lo que hacemos es sintonizarla para que amplifique de manera selectiva una estrecha banda de frecuencias de señal; es posible calentar palomitas de maíz en el horno de microondas mientras se ve televisión o se habla por el teléfono móvil porque las frecuencias de cada dispositivo se pueden aislar una de otra. Además, el estudio de la respuesta en frecuencia puede ser especialmente agradable ya que proporciona una herramienta para ir más allá del análisis de circuitos existentes y poder diseñar, desde cero, circuitos complejos que cumplan, en ocasiones, estrictas especificaciones. Iniciaremos este viaje con una breve explicación de la *resonancia*, la *pérdida*, el *factor de calidad* y el *ancho de banda*, conceptos importantes para filtros y para cualquier circuito (o sistema) que contenga elementos de almacenamiento de energía.

16.1 RESONANCIA EN PARALELO

Suponga que se encuentra que cierta función forzada contiene *componentes* senoidales con frecuencias dentro del intervalo de 10 a 100 Hz. Imaginemos ahora que tal función forzada se aplica a una red que incluye la propiedad de que todas las tensiones senoidales con frecuencias desde 0 hasta 200 Hz aplicadas a las



terminales de entrada aparecen con su magnitud duplicada en las terminales de salida, sin cambio en el ángulo de fase. Por lo tanto, la función de salida es un facsímil sin distorsión de la función de entrada, pero con el doble de amplitud. No obstante, si la red tiene una respuesta en frecuencia tal que las magnitudes de las senoides de entrada de entre 10 y 50 Hz se multiplican por un factor diferente que aquellas entre 50 y 100 Hz, la salida en general estaría distorsionada; no sería ya una versión amplificada de la entrada. Dicha salida distorsionada podría resultar deseable en algunos casos e indeseable en otros. Es decir, quizá la respuesta en frecuencia de la red se eligiera *deliberadamente* para rechazar algunas componentes de frecuencia de la función forzada, o para acentuar otras.

Un comportamiento de este tipo es característico de los circuitos sintonizados o de los circuitos resonantes, como veremos en este capítulo. Al explicar la resonancia podremos aplicar todos los métodos discutidos cuando se presentó la respuesta en frecuencia.

Resonancia

En esta sección comenzaremos a estudiar un fenómeno muy importante que podría ocurrir en circuitos que contienen inductores y capacitores. El fenómeno recibe el nombre de ***resonancia*** y se describirá de manera aproximada como la condición que existe en todo sistema físico cuando una función forzada senoidal de amplitud fija produce una respuesta de amplitud máxima. Sin embargo, a menudo hablamos de la resonancia como si ocurriera, aun cuando la función forzada no sea senoidal. El sistema resonante puede ser eléctrico, mecánico, hidráulico, acústico o de otro tipo, aunque se restringiremos la atención, en la mayor parte de los casos, a los sistemas eléctricos.

La resonancia es un fenómeno familiar. Saltar sobre las defensas de un automóvil, por ejemplo, puede causar que el vehículo tenga un movimiento oscilatorio muy grande, si los brincos se repiten con la frecuencia apropiada (alrededor de uno por segundo) y si los amortiguadores están un poco viejos. Sin embargo, si la frecuencia de los brincos aumenta o disminuye, la respuesta vibratoria del automóvil será mucho menor que antes. Una ilustración adicional se presenta en el caso de una cantante de ópera que puede romper copas de cristal por medio de una nota perfectamente emitida a la frecuencia adecuada. En cada uno de estos ejemplos estamos considerando la frecuencia como si se ajustara hasta que ocurra la resonancia; también se puede ajustar el tamaño, la forma y el material del objeto mecánico que está vibrando, aunque no sea tan fácil de conseguir de manera física.

La condición de resonancia puede ser deseable o indeseable, según el propósito al que va a servir el sistema físico. En el ejemplo del automóvil, una gran amplitud de la vibración quizá ayude a separar las defensas atoradas, aunque sería una acción un poco desagradable a 65 mi/h (105 km/h).

Veremos ahora la resonancia con mayor cuidado. En una red eléctrica de dos terminales que contiene al menos un inductor y un capacitor, definimos la resonancia como la condición que existe cuando la impedancia en la entrada de la red es puramente resistiva. Por lo tanto,

> una red está en resonancia (o es resonante) cuando la tensión y la corriente en las terminales de entrada de la red están en fase.

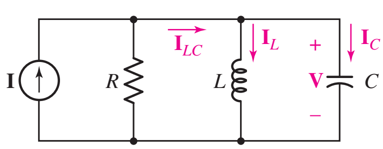


FIGURA 16.1 Combinación en paralelo de una resistencia, un inductor y un capacitor; a menudo conocida como *circuito resonante en paralelo*.

También descubriremos que se produce una respuesta de amplitud máxima en la red cuando se encuentra en la condición resonante.

En primera instancia aplicaremos la definición de resonancia a una red *RLC* en paralelo accionada por una fuente de corriente senoidal, como se indica en la figura 16.1. En muchas situaciones prácticas, el circuito es una muy buena aproximación al que

podríamos construir en el laboratorio conectando un inductor físico en paralelo con un capacitor físico, donde la combinación en paralelo se acciona mediante una fuente de energía que tiene una impedancia de salida muy alta. La admitancia de estado permanente ofrecida a la fuente de corriente ideal es

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \qquad [1]$$

La resonancia ocurre cuando la tensión y la corriente en las terminales de entrada están en fase, lo cual corresponde a una admitancia puramente real, de modo que la condición necesaria está dada por

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

La condición resonante quizá se consiga ajustando L, C u ω; analizaremos el caso donde ω es la variable. Por consiguiente, la frecuencia resonante está dada por ω_0

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{rad/s} \qquad [2]$$

o

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad \text{Hz} \qquad [3]$$

Esta frecuencia resonante ω_0 es idéntica a la frecuencia resonante definida en la ecuación [10] del capítulo 9.

La configuración de polos-ceros de la función de admitancia también se usa para obtener una considerable ventaja en este caso. Dada $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathbf{s}L} + \mathbf{s}C$$

o

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = C\frac{\mathbf{s}^2 + \mathbf{s}/RC + 1/LC}{\mathbf{s}} \qquad [4]$$

podríamos exhibir los ceros de $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ factorizando el numerador:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = C\frac{(\mathbf{s} + \alpha - j\omega_d)(\mathbf{s} + \alpha + j\omega_d)}{\mathbf{s}}$$

donde α y ω_d representan las mismas cantidades mencionadas cuando explicamos la respuesta natural del circuito *RLC* en paralelo en la sección 9.4. Esto es, α es el *coeficiente de amortiguamiento exponencial*

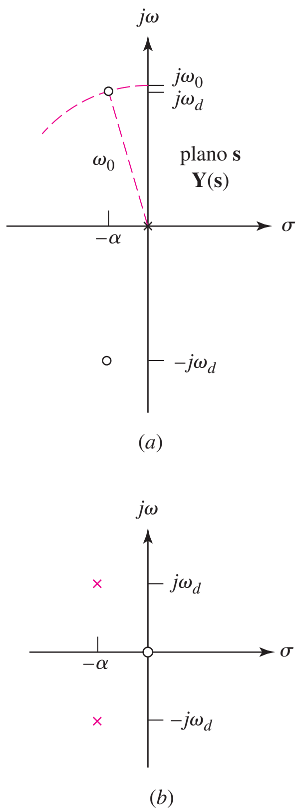
$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

y ω_d es la *frecuencia resonante natural* [(no la frecuencia resonante (ω_0)],

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

La constelación de polos-ceros de la figura 16.2*a* se deduce de manera directa en la forma factorizada.

Vista la relación entre α, ω_d y ω_0 resulta patente que la distancia desde el origen del plano **s** a uno de los ceros de la admitancia es numéricamente igual a ω_0. Por lo tanto, dada la configuración de polos-ceros, la frecuencia resonante se obtendría por medio de métodos puramente gráficos. Sólo trazaremos un arco utilizando el origen del plano **s** como centro, a través de uno de los ceros. La intersección del arco y el eje $j\omega$ positivo localiza el punto $\mathbf{s} = j\omega_0$. Evidentemente ω_0 es un poco mayor que la frecuencia resonante natural ω_d, aunque su proporción tiende a la unidad cuando aumenta la razón entre ω_d y α.



■ **FIGURA 16.2** (*a*) La constelación de polos-ceros de la admitancia de entrada de un circuito resonante en paralelo se muestra en el plano **s**; $\omega_0^2 = \alpha^2 = \omega_d^2$. (*b*) Constelación de polos-ceros de la impedancia de entrada.

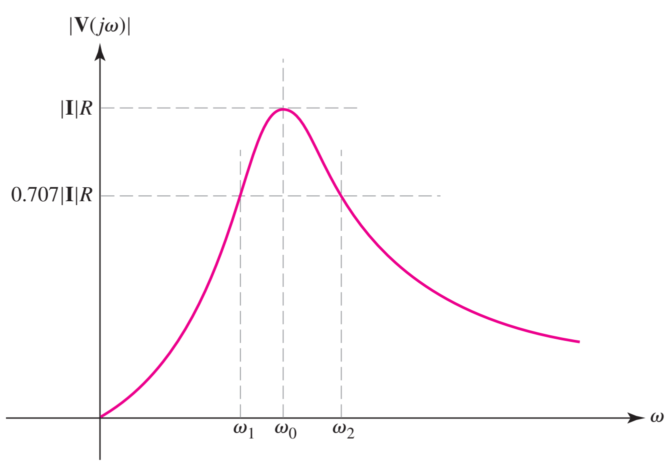
Resonancia y respuesta en tensión

Examinemos a continuación la magnitud de la respuesta, la tensión **V(s)** indicada en la figura 16.1, a medida que varía la frecuencia ω de la función forzada. Si suponemos una fuente de corriente senoidal de amplitud constante, la respuesta en tensión es proporcional a la impedancia de entrada. La respuesta se obtiene de la gráfica de los polos-ceros de la impedancia:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s}/C}{(\mathbf{s} + \alpha - j\omega_d)(\mathbf{s} + \alpha + j\omega_d)}$$

que se muestra en la figura 16.2*b*. La respuesta, desde luego, empieza en cero, alcanza un valor máximo en la cercanía de la frecuencia resonante natural y luego disminuye de nuevo hasta cero, a medida que ω se vuelve infinita. La respuesta en frecuencia se dibuja en la figura 16.3. Su valor máximo se indica como R veces la amplitud de la corriente de la fuente, lo que implica que la magnitud máxima de la impedancia del circuito es igual a R; además, se demuestra que la máxima respuesta ocurre exactamente a la frecuencia resonante correspondiente a la pulsación ω_0. También se identifican dos frecuencias adicionales, correspondientes a ω_1 y ω_2, que se usarán después como una medida del ancho de la curva de respuesta. Mostraremos primero que la magnitud de la impedancia máxima es R y que ocurre en la resonancia.

La admitancia, según especifica la ecuación [1], posee una conductancia constante y una susceptancia con una magnitud mínima (cero) en la resonancia. Por lo tanto, la magnitud de la admitancia mínima ocurre en la resonancia, y es $1/R$. Por consiguiente, la magnitud de la impedancia máxima es *R, la cual ocurre en la resonancia*.



■ **FIGURA 16.3** La magnitud de la respuesta en tensión de un circuito resonante en paralelo se muestra como una función de la frecuencia.

Por lo tanto, en el caso de la frecuencia resonante, la tensión en los extremos del circuito resonante paralelo de la figura 16.1 es simplemente $\mathbf{I}R$ y la corriente de fuente *total* $\mathbf{I}$ fluye por la resistencia. Sin embargo, la corriente también está presente en L y C. En el inductor, $\mathbf{I}_{L,0} = \mathbf{V}_{L,0}/j\omega_0 L = \mathbf{I}R/j\omega_0 L$, y la corriente del capacitor en la resonancia corresponde $\mathbf{I}_{C,0} = (j\omega_0 C)\mathbf{V}_{C,0} = j\omega_0 CR\mathbf{I}$. Puesto que $1/\omega_0\text{C} = \omega_0 L$ en la resonancia, encontramos que,

$$\mathbf{I}_{C,0} = -\mathbf{I}_{L,0} = j\omega_0 CR\mathbf{I} \qquad [5]$$

e

$$\mathbf{I}_{C,0} + \mathbf{I}_{L,0} = \mathbf{I}_{LC} = 0$$

Por lo tanto, la corriente *neta* que fluye dentro de la combinación LC es cero. El valor máximo de la magnitud de la respuesta y de la frecuencia a la que ésta ocurre no siempre se encuentra con facilidad. En circuitos resonantes menos comunes, tal vez sea necesario que expresemos la magnitud de la respuesta en forma analítica, casi siempre como la raíz cuadrada de la suma de la parte real al cuadrado y de la parte imaginaria al cuadrado; luego diferenciaremos esta expresión respecto de la frecuencia, igualaremos la derivada a cero, despejaremos la frecuencia de la respuesta máxima y, por último, sustituiremos esta frecuencia en la expresión de la magnitud para obtener la respuesta de amplitud máxima. Se podría efectuar el procedimiento para este caso simple, sólo como un ejercicio de corroboración; sin embargo, como hemos visto, no es necesario.

Factor de calidad

Debe subrayarse que, a pesar de que la *altura* de la curva de la respuesta de la figura 16.3 depende sólo del valor de R para la excitación de amplitud constante, el ancho de la curva o la inclinación de los lados depende también de los otros dos valores de los elementos. Un poco más adelante relacionaremos el "ancho de la curva de respuesta" con una cantidad definida con mayor cuidado, el *ancho de banda*, aunque resulta útil expresar esta relación en términos de un parámetro muy importante, el ***factor de calidad Q***.

Debemos tener mucho cuidado y no confundir el factor de calidad con la carga o potencia reactiva, pues todas ellas se representan mediante la letra Q.

Encontraremos que lo puntiagudo de la curva de respuesta de cualquier circuito resonante está determinado por la cantidad de energía máxima que se puede almacenar en el circuito, en comparación con la energía que se pierde durante un periodo completo de la respuesta.

Definimos Q como

$$Q = \text{factor de calidad} \equiv 2\pi \frac{\text{energía máxima almacenada}}{\text{energía total perdida por ciclo}} \qquad [6]$$

La constante de proporcionalidad 2π se incluye en la definición para simplificar las expresiones más útiles de Q que obtendremos ahora. Dado que la energía sólo se almacena en el inductor y en el capacitor, y se pierde únicamente en la resistencia, podemos expresar Q en términos de la energía instantánea asociada con cada uno de los elementos reactivos y con la potencia promedio P_R disipada en la resistencia:

$$Q = 2\pi \frac{[w_L(t) + w_C(t)]_{\text{máx}}}{P_R T}$$

donde T es el periodo de la frecuencia senoidal en el que se evalúa Q.

Apliquemos ahora esta definición en el circuito *RLC* en paralelo de la figura 16.1 y determinemos el valor de Q a la frecuencia resonante. Este valor de Q se denota mediante Q_0. Elegimos la función forzada de corriente

$$i(t) = \mathbf{I}_m \cos \omega_0 t$$

y obtenemos la respuesta en tensión correspondiente a la resonancia,

$$v(t) = Ri(t) = R\mathbf{I}_m \cos \omega_0 t$$

En consecuencia, la energía almacenada en el capacitor corresponde a

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{\mathbf{I}_m^2 R^2 C}{2} \cos^2 \omega_0 t$$

y la energía instantánea almacenada en el inductor está dada por

$$w_L(t) = \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{1}{L}\int v\,dt\right)^2 = \frac{1}{2L}\left[\frac{R\mathbf{I}_m}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0 t\right]^2$$

por lo que

$$w_L(t) = \frac{\mathbf{I}_m^2 R^2 C}{2} \operatorname{sen}^2 \omega_0 t$$

Por lo tanto, la energía total almacenada *instantánea* es constante:

$$w(t) = w_L(t) + w_C(t) = \frac{\mathbf{I}_m^2 R^2 C}{2}$$

y este valor constante también debe ser el valor máximo. Para obtener la energía perdida en la resistencia en un periodo, tomamos la potencia promedio absorbida por la resistencia (vea la sección 11.2),

$$P_R = \tfrac{1}{2}\mathbf{I}_m^2 R$$

y al multiplicarla por un periodo, obtenemos

$$P_R T = \frac{1}{2f_0}\mathbf{I}_m^2 R$$

De este modo encontramos el factor de calidad a la resonancia:

$$Q_0 = 2\pi \frac{\mathbf{I}_m^2 R^2 C/2}{\mathbf{I}_m^2 R/2f_0}$$

o

$$Q_0 = 2\pi f_0 RC = \omega_0 RC \qquad [7]$$

Esta ecuación (así como las expresiones de la ecuación [8]) se cumple sólo para el circuito simple *RLC* en paralelo de la figura 16.1. Se pueden obtener expresiones equivalentes de Q_0 que en muchas ocasiones resultan bastante útiles mediante la sustitución simple:

$$Q_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{|X_{C,0}|} = \frac{R}{|X_{L,0}|} \qquad [8]$$

Por lo que observamos que, en el caso de este circuito específico, al disminuir la resistencia disminuye Q_0; a medida que la resistencia es menor, es mayor la cantidad

de energía que se pierde en el elemento. Causa intriga que al aumentar la capacitancia *aumenta* Q_0, pero si aumenta la inductancia *disminuye* Q_0. Por supuesto, estas aseveraciones se aplican al funcionamiento del circuito a la frecuencia de resonancia.

Otras interpretaciones de Q

Otra interpretación útil de Q se obtiene cuando inspeccionamos las corrientes en el inductor y el capacitor a la resonancia, según se expresa en la ecuación [5],

$$\mathbf{I}_{C,0} = -\mathbf{I}_{L,0} = j\omega_0 CR\mathbf{I} = jQ_0\mathbf{I} \qquad [9]$$

Observe que cada una es Q_0 veces la corriente de la fuente en amplitud y que cada una está 180° fuera de fase respecto de la otra. De tal manera, si aplicamos 2 mA a la frecuencia resonante a un circuito resonante en paralelo, con una Q_0 de 50, tenemos 2 mA en la resistencia y 100 mA tanto en el inductor como en el capacitor. Por lo tanto, un circuito resonante en paralelo actúa como un amplificador de corriente, pero no, desde luego, como un amplificador de potencia, dado que es una red pasiva.

La resonancia, por definición, se asocia sobre todo con la respuesta forzada, dado que se define en términos de una impedancia de entrada (puramente resistiva), un concepto del estado senoidal permanente. Los dos parámetros más importantes de un circuito resonante son quizá la frecuencia resonante ω_0 y el factor de calidad Q_0. Tanto el coeficiente de amortiguamiento exponencial como la frecuencia resonante natural se expresan en términos de ω_0 y Q_0:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(Q_0/\omega_0 C)C}$$

o

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0} \qquad [10]$$

y

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

o

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \qquad [11]$$

Factor de amortiguamiento

Como referencia futura quizá resulte útil tomar en cuenta una relación adicional que involucre a ω_0 y Q_0. El factor cuadrático que aparece en el numerador de la ecuación [4]:

$$\mathbf{s}^2 + \frac{1}{RC}\mathbf{s} + \frac{1}{LC}$$

podría escribirse en términos de α y ω_0:

$$\mathbf{s}^2 + 2\alpha\mathbf{s} + \omega_0^2$$

En el campo de la teoría de sistemas o la teoría de control automático, se acostumbra escribir este factor en una forma un poco diferente, que utiliza el parámetro adimensional ζ (dzeta), denominado ***factor de amortiguamiento***:

$$\mathbf{s}^2 + 2\zeta\omega_0\mathbf{s} + \omega_0^2$$

La comparación de ambas expresiones nos permite relacionar ζ con otros parámetros:

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{2Q_0} \qquad [12]$$

EJEMPLO 16.1

Considere un circuito *RLC* en paralelo tal que $L = 2$ mH, $Q_0 = 5$ y $C = 10$ nF. Determine el valor de R y la magnitud de la admitancia en estado estable a $0.1\omega_0$, ω_0 y $1.1\omega_0$.

Se dedujeron varias expresiones para Q_0, un parámetro directamente relacionado con la pérdida de energía y, por lo tanto, con la resistencia en el circuito. Al reacomodar la expresión en la ecuación [8] se calcula

$$R = Q_0\sqrt{\frac{L}{C}} = 2.236\ \text{k}\Omega$$

En seguida calculamos ω_0, un término que se puede recordar del capítulo 9,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 223.6\ \text{krad/s}$$

o, alternativamente, podemos aprovechar la ecuación [7] y obtener la misma respuesta,

$$\omega_0 = \frac{Q_0}{RC} = 223.6\ \text{krad/s}$$

La admitancia de cualquier red *RLC* en paralelo es simplemente

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

y, por lo tanto,

$$|\mathbf{Y}| = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

evaluada a las tres frecuencias designadas, es igual a

$$|\mathbf{Y}(0.9\omega_0)| = 6.504 \times 10^{-4}\ \text{S} \qquad |\mathbf{Y}(\omega_0)| = 4.472 \times 10^{-4}\ \text{S}$$
$$|\mathbf{Y}(1.1\omega_0)| = 6.182 \times 10^{-4}\ \text{S}$$

Así obtenemos una impedancia mínima a la frecuencia de resonancia, o una *respuesta máxima de tensión* a una corriente de entrada dada. Si calculamos rápidamente la reactancia a estas tres frecuencias, encontramos

$$X(0.9\omega_0) = -4.72 \times 10^{-4}\ \text{S} \qquad X(1.1\omega_0) = 4.72 \times 10^{-4}\ \text{S}$$
$$X(\omega_0) = -1.36 \times 10^{-7}$$

Dejamos al lector la demostración de que el valor para $X(\omega_0)$ es diferente a cero sólo como resultado de error de redondeo.

PRÁCTICA

16.1 Un circuito resonante en paralelo está compuesto por los elementos $R = 8$ kΩ, $L = 50$ mH y $C = 80$ nF. Calcule: (*a*) ω_0; (*b*) Q_0; (*c*) ω_d; (*d*) α; (*e*) ζ.
16.2 Determine los valores de R, L y C en un circuito resonante en paralelo para el cual $\omega_0 = 1\,000$ rad/s, $\omega_0 = 998$ rad/s y $\mathbf{Y}_{\text{ent}} = 1$ mS en la resonancia.

Respuesta: 16.1: 15.811 krad/s; 10.12; 15.792 krad/s; 781 Np/s; 0.0494. 16.2: 1 000 Ω; 126.4 mH; 7.91 μF.

A continuación interpretaremos Q_0 en términos de las localizaciones de polos-ceros de la admitancia $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ del circuito RLC en paralelo. Mantendremos ω_0 constante, lo cual se efectuaría cambiando R mientras L y C se mantienen constantes. Al incrementarse Q_0, las relaciones que vinculan α, Q_0 y ω_0 indican que los dos ceros deben acercarse al eje $j\omega$. Tales relaciones indican también que los ceros deben alejarse de manera simultánea del eje σ. La naturaleza exacta del movimiento se aclara cuando se recuerda que el punto en el cual $\mathbf{s} = j\omega_0$ podría ubicarse sobre el eje $j\omega$ recorriendo un arco, centrado en el origen, por uno de los ceros y arriba del eje positivo $j\omega$ puesto que ω_0 debe ser constante, al igual que el radio y los ceros, por lo tanto, deben moverse a lo largo de este arco hacia el eje $j\omega$ positivo, conforme Q_0 aumenta.

Los dos ceros se indican en la figura 16.4 y las dos flechas muestran la trayectoria que siguen conforme crece R. Cuando R es infinita, Q_0 también lo es, y los dos ceros se encuentran en $\mathbf{s} = \pm j\omega_0$ sobre el eje $j\omega$. A medida que R se reduce, los ceros se mueven hacia el eje σ a lo largo del lugar geométrico circular, uniéndose para formar un doble cero sobre el eje σ en $\mathbf{s} = -\omega_0$ cuando $R = \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ o $Q_0 = \frac{1}{2}$. Esta condición puede recordarse como la de amortiguamiento crítico, por lo que $\omega_d = 0$ y $\alpha = \omega_0$. Los valores inferiores de R y de Q_0 ocasionan que los ceros se separen y se muevan en direcciones opuestas sobre el eje σ negativo, si bien estos valores menores de Q_0 no son en realidad característicos de los circuitos resonantes, por lo que ya no necesitamos buscarlos.

Después, utilizaremos el criterio $Q_0 \geq 5$ para describir un circuito de alta Q. Cuando $Q_0 = 5$ los ceros se ubican en $\mathbf{s} = -0.1\omega_0 \pm j0.995\omega_0$ y por lo tanto, ω_0 y ω_d difieren sólo por la mitad de 1%.

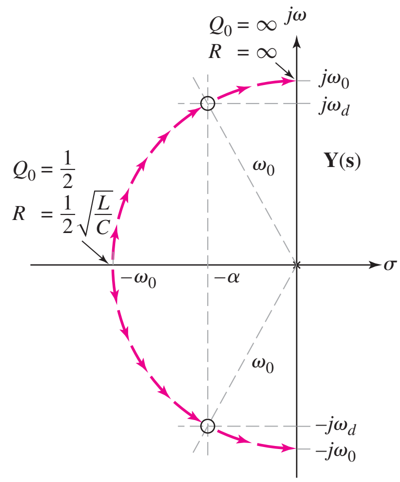


FIGURA 16.4 Los dos ceros de la admitancia $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$, loalizada en $\mathbf{s} = -\alpha \pm j\omega_d$, proporcionan un lugar geométrico semicircular, conforme R aumenta desde $\frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ hasta ∞.

16.2 ANCHO DE BANDA Y CIRCUITOS DE ALTA Q

Proseguimos con el análisis de la resonancia en paralelo mediante la definición de las frecuencias de media potencia y el ancho de banda; después haremos buen uso de estos nuevos conceptos al obtener datos de la respuesta aproximada para circuitos de alta Q. El "ancho" de la curva de la respuesta en resonancia, como el de la figura 16.3, quizá se defina ahora con mayor cuidado y se relacione con Q_0. En primer lugar definiremos las dos frecuencias de media potencia correspondientes a las pulsaciones ω_1 y ω_2 como las frecuencias a las que la magnitud de la admitancia de entrada de un circuito resonante en paralelo es mayor que la magnitud de la admitancia en resonancia en un factor de $\sqrt{2}$. En razón de que la curva de respuesta de la figura 16.3 presenta las tensiones producidas en el circuito en paralelo por una fuente de corriente senoidal como una función de la frecuencia, las frecuencias de media potencia se localizan también en aquellos puntos en los que la respuesta en tensión es $1/\sqrt{2}$, o 0.707, veces su valor máximo. También se cumple una relación similar para la magnitud de la impedancia. Designaremos a ω_1 como la ***frecuencia inferior de media potencia***, y a ω_2 como la ***frecuencia superior de media potencia***.

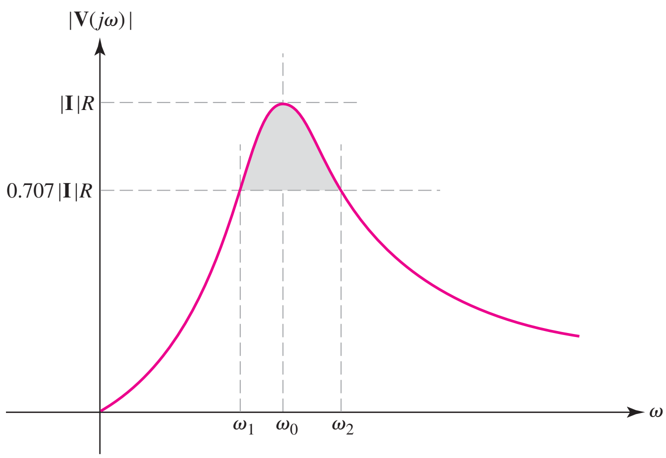
Estos nombres surgen del hecho de que una tensión que es $1/\sqrt{2}$ veces la tensión resonante, equivale a la tensión al cuadrado que corresponde a la mitad de la tensión al cuadrado de la resonancia. Así, en el caso de las frecuencias de media potencia, la resistencia absorbe la mitad de la potencia que absorbe en la resonancia.

Ancho de banda

El ***ancho de banda*** (de media potencia) de un circuito resonante se define como la diferencia de estas dos frecuencias de media potencia,

$$\mathcal{B} \equiv \omega_2 - \omega_1 \qquad [13]$$

Tendemos a considerar el ancho de banda como el "ancho" de la curva de respuesta, aun cuando la curva se extiende desde $\omega = 0$ hasta $\omega = \infty$. De manera más exacta, el ancho de banda de media potencia se mide por esa porción de la curva de respuesta que es igual o mayor que 70.7% del valor máximo, como se muestra en la figura 16.5.



■ **FIGURA 16.5** El ancho de banda de la respuesta del circuito se encuentra resaltada con gris; corresponde a la porción de la curva de respuesta mayor o igual a 70.7% del valor máximo.

Podemos expresar ahora el ancho de banda en términos de Q_0 y de la frecuencia resonante. Para hacerlo, obtengamos primero la admitancia del circuito *RLC* en paralelo:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R} = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

en términos de Q_0:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R} + j\frac{1}{R}\left(\frac{\omega\omega_0 C R}{\omega_0} - \frac{\omega_0 R}{\omega\omega_0 L}\right)$$

o

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R}\left[1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \qquad [14]$$

Observamos de nuevo que la magnitud de la admitancia en la resonancia es $1/R$, y después que una magnitud de la admitancia de $\sqrt{2}/R$ puede ocurrir sólo cuando se elige una frecuencia tal que la parte imaginaria de la cantidad entre corchetes tiene una magnitud unitaria. Por lo tanto,

Tenga presente que $\omega_2 > \omega_0$ mientras que $\omega_1 < \omega_0$.

$$Q_0\left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2}\right) = 1 \qquad \text{y} \qquad Q_0\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1}\right) = -1$$

Al resolver, tenemos

$$\omega_1 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} - \frac{1}{2Q_0} \right] \qquad [15]$$

$$\omega_2 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} + \frac{1}{2Q_0} \right] \qquad [16]$$

Si bien estas expresiones son difíciles de manejar, su diferencia proporciona una fórmula muy simple para determinar el ancho de banda:

$$\mathcal{B} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

Las ecuaciones [15] y [16] pueden multiplicarse entre sí para demostrar que ω_0 corresponde exactamente a la media geométrica de las frecuencias de media potencia:

$$\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2$$

o

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

Los circuitos que poseen una Q_0 más alta presentan un ancho de banda más estrecho, o una curva de respuesta más puntiaguda; tienen una ***selectividad de frecuencia*** mayor o una calidad (factor) superior.

Aproximaciones en circuitos de alta *Q*

Muchos circuitos resonantes se diseñan de manera deliberada para que tengan una Q_0 grande, a fin de aprovechar el ancho de banda y la selectividad de alta frecuencia que se asocia con tales circuitos. Cuando Q_0 es mayor a aproximadamente 5 se pueden efectuar algunas aproximaciones muy útiles en las expresiones de las frecuencias de media potencia, superior e inferior, y en las expresiones generales de la respuesta en la vecindad de la resonancia. Haremos referencia de manera arbitraria a un "circuito de alta Q" como uno en el que Q_0 es igual o mayor que 5. La configuración de polos-ceros de $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ de un circuito *RLC* en paralelo con una Q_0 de casi 5 se muestra en la figura 16.6. Dado que

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0}$$

entonces,

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\mathcal{B}$$

y las ubicaciones de los dos ceros $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ se podrían aproximar:

$$\mathbf{s}_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$
$$\approx -\tfrac{1}{2}\mathcal{B} \pm j\omega_0$$

Además, las ubicaciones de las dos frecuencias de media potencia (sobre el eje $j\omega$ positivo) también se determinarían en una forma aproximada y concisa:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right] \approx \omega_0 \left(1 \mp \frac{1}{2Q_0} \right)$$

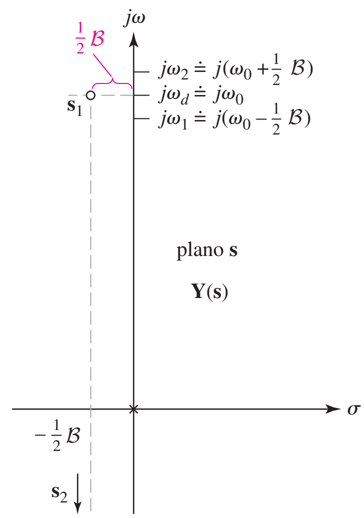


FIGURA 16.6 Constelación de polos-ceros de $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ de un circuito *RLC* en paralelo. Los dos ceros están exactamente $\frac{1}{2}\mathcal{B}$ Np/s (o rad/s) hacia la izquierda del eje $j\omega$, y aproximadamente a $j\omega_0$ rad/s (Np/s) del eje σ. Las frecuencias de media potencia superior e inferior están separadas exactamente por $\mathcal{B}$ rad/s, y cada una se ubica a $\frac{1}{2}\mathcal{B}$ rad/s de la frecuencia resonante y de la frecuencia resonante natural.

o

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \tfrac{1}{2}\mathcal{B} \qquad [17]$$

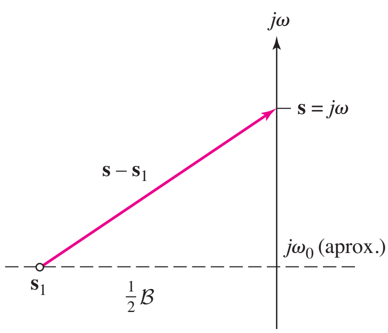
Por lo tanto, en un circuito de alta Q cada frecuencia de media potencia se ubica aproximadamente a la mitad del ancho de banda a partir de la frecuencia resonante, característica que se indica en la figura 16.6.

Las relaciones aproximadas de ω_1 y ω_2 en la ecuación [17] podrían ser sumadas entre sí para demostrar que ω_0 es casi igual a la media aritmética de ω_1 y ω_2 en circuitos de alta Q:

$$\omega_0 \approx \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

Imaginemos ahora un punto de prueba que está un poco arriba de $j\omega_0$ sobre el eje $j\omega$. Para determinar la admitancia que ofrece la red *RLC* en paralelo a esta frecuencia, construimos tres vectores a partir de las frecuencias críticas del punto de prueba. Si éste es cercano a $j\omega_0$, entonces el vector desde el polo es casi $j\omega_0$ y aquel desde el cero inferior es casi $j2\omega_0$. Por lo tanto, la admitancia está dada de manera aproximada por

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \approx C\frac{(j2\omega_0)(\mathbf{s}-\mathbf{s}_1)}{j\omega_0} \approx 2C(\mathbf{s}-\mathbf{s}_1) \qquad [18]$$



■ **FIGURA 16.7** Una sección aumentada de la constelación de polos y ceros correspondiente a $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ de un circuito *RLC* en paralelo de alta Q_0.

donde C es la capacitancia, como en la ecuación [4]. Con el fin de determinar una aproximación útil del vector $(\mathbf{s} - \mathbf{s}_1)$, consideremos una vista aumentada de esa porción del plano **s** en la cercanía del cero $\mathbf{s}_1$ (figura 16.7).

En términos de sus componentes cartesianos se observa que

$$\mathbf{s} - \mathbf{s}_1 \approx \tfrac{1}{2}\mathcal{B} + j(\omega - \omega_0)$$

donde esta expresión sería exacta si ω_0 se sustituyera por ω_d. Sustituimos ahora esta ecuación en una aproximación de $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$, ecuación [18], y dejamos como factor $\tfrac{1}{2}\mathcal{B}$:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \approx 2C\left(\frac{1}{2}\mathcal{B}\right)\left(1 + j\frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}\right)$$

o

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \approx \frac{1}{R}\left(1 + j\frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}\right)$$

La fracción $(\omega - \omega_0)/(\tfrac{1}{2}\mathcal{B})$ puede interpretarse como el "número de mitades del ancho de banda de resonancia" y se abrevia por medio de N. Por lo tanto,

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \approx \frac{1}{R}(1 + jN) \qquad [19]$$

donde

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}} \qquad [20]$$

En la frecuencia superior de media potencia, $\omega_2 \approx \omega_0 + \tfrac{1}{2}\mathcal{B}$, $N = +1$, y su localización es a medio ancho de banda por encima de la resonancia. En el caso de la frecuen-

cia inferior de media potencia, $\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{1}{2}\mathcal{B}$, de manera que $N = -1$, ubicándola a la mitad de un ancho de banda por debajo de la resonancia.

La ecuación [19] es mucho más fácil de usar que las relaciones exactas que se han conformado hasta ahora. Demuestra que la magnitud de la admitancia es

$$|\mathbf{Y}(j\omega)| \approx \frac{1}{R}\sqrt{1 + N^2}$$

mientras que el ángulo de $\mathbf{Y}$ $(j\omega)$ está dado por la tangente inversa de N:

$$\text{ang } \mathbf{Y}(j\omega) \approx \tan^{-1} N$$

EJEMPLO 16.2

Estime la ubicación de las dos frecuencias de media potencia de la respuesta de tensión de una red *RLC* en paralelo para la cual $R = 40$ kΩ, $L = 1$ H y $C = \frac{1}{64}$ μF, y determine el valor aproximado de la admitancia para una frecuencia de operación de 8 200 rad/s.

▶ ***Identificar el objetivo del problema.***

Buscamos las frecuencias de media potencia inferior y superior de la respuesta de tensión, así como $\mathbf{Y}(\omega_0)$. Como pudimos "estimar" y "aproximar", deducimos que se trata de un circuito de alta Q, una suposición que debemos verificar.

▶ ***Recopilar la información conocida.***

Dados R, L y C podemos calcular ω_0 y Q_0. Si $Q_0 \geq 5$ podemos aplicar expresiones aproximadas para frecuencias de media potencia y admitancia cercana a la resonancia; pero, de cualquier manera, se pueden calcular exactamente estas cantidades si así se requiere.

▶ ***Elaborar un plan.***

Para emplear la expresión aproximada de la admitancia debemos determinar primero Q_0, el factor de calidad en la resonancia, así como el ancho de banda.

La frecuencia resonante ω_0 está dada por la ecuación [2] como $1\sqrt{LC} =$ 8 krad/s. Por lo tanto, $Q_0 = \omega_0 RC = 5$, y el ancho de banda es $\omega_0/Q_0 = 1.6$ krad/s. El valor de Q_0 de este circuito es suficiente para emplear aproximaciones de "alta Q".

▶ ***Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.***

El ancho de banda es simplemente

$$\mathcal{B} = \frac{\omega_0}{Q_0} = 1\,600 \text{ rad/s}$$

y así

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\mathcal{B}}{2} = 7\,200 \text{ rad/s} \qquad \omega_1 \approx \omega_0 + \frac{\mathcal{B}}{2} = 8\,800 \text{ rad/s}$$

La ecuación [19] afirma que

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \approx \frac{1}{R}(1 + jN)$$

(*continúa*)

de modo que

$$|\mathbf{Y}(j\omega)| \approx \frac{1}{R}\sqrt{1+N^2} \qquad \text{y} \qquad \text{ang } \mathbf{Y}(j\omega) \approx \tan^{-1} N$$

Determinar si se requiere información adicional.

Aún necesitamos N, la cual nos indica el número de mitades de ancho de banda al que ω se encuentra de la frecuencia resonante ω_0.

$$N = (8.2 - 8)/0.8 = 0.25$$

Buscar la solución.

En esta etapa ya estamos listos para emplear las relaciones aproximadas de la magnitud y el ángulo de la admitancia de la red,

$$\text{ang } \mathbf{Y} \approx \tan^{-1} 0.25 = 14.04^\circ$$

y

$$|\mathbf{Y}| \approx 25\sqrt{1 + (0.25)^2} = 25.77\ \mu\text{S}$$

Verificar la solución. ¿Es razonable o la esperada?

El cálculo exacto de la admitancia mediante la ecuación [1] demuestra que

$$\mathbf{Y}(j8200) = 25.75\underline{/13.87^\circ}\ \mu\text{S}$$

Por lo tanto, el método aproximado origina valores de la magnitud y el ángulo de la admitancia que son razonablemente exactos (mejor que 2%) para esta frecuencia. Dejamos al lector juzgar la exactitud de la predicción para ω_1 y ω_2.

PRÁCTICA

16.3 Un circuito resonante en paralelo con una Q marginalmente alta tiene $f_0 = 440$ Hz con $Q_0 = 6$. Aplique las ecuaciones [15] y [16] para obtener valores exactos correspondientes a: (*a*) f_1; (*b*) f_2. Utilice luego la ecuación [17] para calcular valores aproximados de: (*c*) f_1; (*d*) f_2.

Respuestas: 404.9 Hz; 478.2 Hz; 403.3 Hz; 476.7 Hz.

Terminamos la cobertura del circuito resonante *paralelo* revisando algunas de las conclusiones clave a las que hemos llegado:

- La frecuencia resonante ω_0 es la frecuencia a la que la parte imaginaria de la admitancia de entrada se convierte en cero, o el ángulo de la admitancia se hace cero. En este circuito, $\omega_0 = 1\sqrt{LC}$.
- La cifra de mérito Q_0 del circuito se define como 2π veces la razón entre la energía máxima almacenada en el circuito y la energía que se pierde en cada periodo en el circuito. En este circuito, $Q_0 = \omega_0 RC$.
- Definimos las dos frecuencias de media potencia, ω_1 y ω_2 como las frecuencias a las que la magnitud de la admitancia es $\sqrt{2}$ veces la magnitud de la admitancia mínima. (También son las frecuencias a las cuales la respuesta en tensión es 70.7% de la respuesta máxima.)

- Las expresiones exactas de ω_1 y ω_2 son

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right]$$

- Las expresiones aproximadas (alta Q_0) de ω_1 y ω_2 son

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2}\mathcal{B}$$

- El ancho de banda de media potencia $\mathcal{B}$ está dado por

$$\mathcal{B} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

- La admitancia de entrada también puede expresarse en forma aproximada en circuitos con alta Q como:

$$\mathbf{Y} \approx \frac{1}{R}(1 + jN) = \frac{1}{R}\sqrt{1 + N^2}\underline{/\tan^{-1} N}$$

donde N se define como el número de mitades de ancho de banda fuera de la resonancia, o

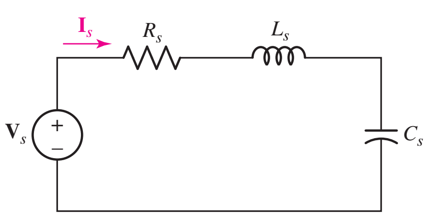
$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}$$

Esta aproximación es válida para $0.9\ \omega_0 \le \omega \le 1.1\ \omega_0$.

16.3 RESONANCIA EN SERIE

Aunque quizá observemos un menor uso del circuito *RLC* en serie, del que ocurre en el caso del *RLC* en paralelo, el primero sigue mereciendo que se le ponga atención. Consideraremos el circuito de la figura 16.8. Debe observarse que en este caso a los diversos elementos de circuito se les asigna el subíndice *s* (de serie), para evitar confusión con los elementos en paralelo, cuando los circuitos se comparen.

Nuestro análisis de la resonancia en paralelo ocupó dos secciones de amplitud considerable. Es posible darle ahora al circuito *RLC* en serie el mismo tipo de tratamiento, pero resulta más inteligente omitir tal repetición innecesaria y utilizar el concepto de



■ **FIGURA 16.8** Circuito resonante en serie.

De nuevo, este párrafo es el mismo que el último de la sección 16.2, pero con la frase *RLC* en paralelo convertida en *RLC* en serie gracias a la dualidad (de ahí las comillas).

dualidad. Por simplicidad, concentraremos el enfoque en las conclusiones que se presentan en el último párrafo de la sección anterior acerca de la resonancia en paralelo. Los resultados importantes están contenidos ahí y el uso del lenguaje dual permite transcribir este párrafo para presentar los resultados importantes correspondientes al circuito *RLC* en serie.

"Concluimos el estudio del circuito resonante *en serie* resumiendo las distintas conclusiones clave a las que hemos llegado:

- La frecuencia resonante ω_0 es aquella a la que la parte imaginaria de la impedancia de entrada se vuelve cero, o en la que el ángulo de la impedancia se hace cero. En este circuito, $\omega_0 = 1\sqrt{C_s L_s}$.
- La cifra de mérito del circuito Q_0 se define como 2π veces la proporción entre la entrega máxima almacenada en el circuito y la energía que se pierde en cada periodo en el circuito. En este circuito, $Q_0 = \text{w}_0 L_S/R_S$.
- Definimos las dos frecuencias de media potencia, ω_1 y ω_2, como las frecuencias a las cuales la magnitud de la impedancia es $\sqrt{2}$ veces la magnitud de la impedancia mínima. (Éstas son también las frecuencias a las que la respuesta en corriente es 70.7% de la respuesta máxima.)
- Las expresiones exactas de ω_1 y ω_2 son:

$$\omega_{1,2} = \omega_0\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0}\right]$$

- Las expresiones aproximadas (alta Q_0) de ω_1 y ω_2 son,

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2}\mathcal{B}$$

- El ancho de banda de media potencia $\mathcal{B}$ está dado por

$$\mathcal{B} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

- La impedancia de entrada de circuitos con alta Q también puede expresarse en forma aproximada como

$$\mathbf{Y} \approx \frac{1}{R}(1 + jN) = \frac{1}{R}\sqrt{1 + N^2}\,\underline{/\tan^{-1} N}$$

donde N se define como el número de mitades de ancho de banda fuera de resonancia, o

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}$$

Esta aproximación es válida para $0.9\ \omega_0 \leq \omega \leq 1.1\ \omega_0$.

A partir de este punto ya no identificaremos los circuitos resonantes en serie mediante el uso del subíndice *s,* a menos que se requiera para efectos de mayor claridad.

EJEMPLO 16.3

La tensión $v_s = 100 \cos \omega t$ mV se aplica a un circuito resonante en serie compuesto por una resistencia de 10 Ω, una capacitancia de 200 nF y una inductancia de 2 mH. Utilice los métodos tanto exacto como aproximado para calcular la amplitud de corriente, si $\omega = 48$ krad/s.

La frecuencia resonante del circuito está dada por

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(2 \times 10^{-3})(200 \times 10^{-9})}} = 50 \text{ krad/s}$$

Dado que operamos a $\omega = 48$ krad/s, la cual está dentro del 10% de la frecuencia resonante, resulta razonable aplicar las relaciones aproximadas para estimar la impedancia equivalente de la red, siempre y cuando sepamos que trabajamos con un circuito de alta Q:

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} \approx R\sqrt{1 + N^2}\underline{/\tan^{-1} N}$$

donde N se calcula una vez que se determina Q_0. Es un circuito en serie, por lo que

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{(50 \times 10^3)(2 \times 10^{-3})}{10} = 10$$

hace que sea un circuito de alta Q. Por lo tanto,

$$\mathcal{B} = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{50 \times 10^3}{10} = 5 \text{ krad/s}$$

Por lo tanto, el número de mitades de ancho de banda (N) fuera de la resonancia es

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\mathcal{B}/2} = \frac{48 - 50}{2.5} = -0.8$$

Por ende,

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} \approx \boldsymbol{R}\sqrt{1 + N^2}\underline{/\tan^{-1}\ N} = 12.81\underline{/-38.66^\circ}\ \Omega$$

Así, la magnitud de la corriente aproximada es

$$\frac{|\mathbf{V}_s|}{|\mathbf{Z}_{\text{eq}}|} = \frac{100}{12.81} = 7.806 \text{ mA}$$

Utilizando las expresiones exactas observamos que $\mathbf{I} = 7.746\underline{/39.24^\circ}$ mA y, por ende,

$$|\mathbf{I}| = 7.746 \text{ mA}$$

PRÁCTICA

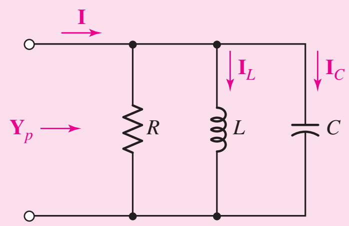
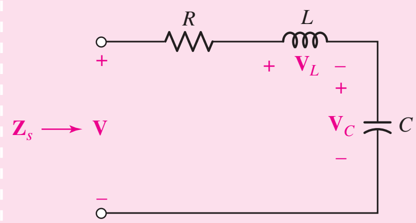
16.4 Un circuito resonante en serie de un ancho de banda de 100 Hz contiene una inductancia de 20 mH y una capacitancia de 2 μF. Determine: (*a*) f_0; (*b*) Q_0; (*c*) $\mathbf{Z}_{\text{ent}}$ en la resonancia; (*d*) f_2.

Respuestas: 796 Hz; 7.96; 12.57 + j0 Ω; 846 Hz (aproximadamente).

El circuito resonante en serie se caracteriza por una impedancia mínima en la resonancia, en tanto que el resonante en paralelo produce una impedancia resonante máxima. El último circuito proporciona corrientes de inductor y de capacitor en la resonancia que tienen amplitudes Q_0 veces mayores que la corriente de la fuente; el circuito resonante en serie proporciona tensiones en el inductor y en el capacitor que son mayores que la tensión en la fuente por el factor Q_{0s}. El circuito en serie debe proporcionar entonces una amplificación de tensión en la resonancia.

Una comparación de los resultados que obtuvimos para la resonancia en serie y la resonancia en paralelo, así como las expresiones exactas y aproximadas que se desarrollaron, aparecen en la tabla 16.1.

TABLA 16.1 Breve resumen de la resonancia

Resonancia en paralelo	Resonancia en serie
	
$Q_0 = \omega_0 RC \qquad \alpha = \dfrac{1}{2RC}$	$Q_0 = \dfrac{\omega_0 L}{R} \qquad \alpha = \dfrac{R}{2L}$
$\lvert \mathbf{I}_L(j\omega_0)\rvert = \lvert \mathbf{I}_C(j\omega_0)\rvert = Q_0\lvert \mathbf{I}(j\omega_0)\rvert$	$\lvert \mathbf{V}_L(j\omega_0)\rvert = \lvert \mathbf{V}_C(j\omega_0)\rvert = Q_0\lvert \mathbf{V}(j\omega_0)\rvert$
$\mathbf{Y}_p = \dfrac{1}{R}\left[1 + jQ_0\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$	$\mathbf{Z}_s = R\left[1 + jQ_0\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$

Expresiones exactas

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\omega_1\omega_2}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2}$$

$$\omega_{1,2} = \omega_0\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0}\right]$$

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}$$

$$\mathcal{B} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} = 2\alpha$$

Expresiones aproximadas

$$(Q_0 \ge 5 \qquad 0.9\omega_0 \le \omega \le 1.1\omega_0)$$

$$\omega_d \approx \omega_0$$

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \tfrac{1}{2}\mathcal{B}$$

$$\omega_0 \approx \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\mathbf{Y}_p \approx \frac{\sqrt{1+N^2}}{R}\underline{/\tan^{-1} N}$$

$$\mathbf{Z}_s \approx R\sqrt{1+N^2}\underline{/\tan^{-1} N}$$

16.4 OTRAS FORMAS RESONANTES

Los circuitos *RLC* en paralelo y en serie de las dos secciones anteriores representan circuitos resonantes *idealizados*. El grado de exactitud que el modelo idealizado logre respecto del circuito *real* depende del intervalo de la frecuencia de operación, la *Q* del circuito, los materiales presentes en los elementos físicos, los tamaños de los elementos y muchos otros factores. No estamos estudiando la técnica para determinar el modelo de un circuito físico particular, pues esto requiere cierto conocimiento de la teoría del campo electromagnético y de las propiedades de los materiales; sin embargo, nos interesa el problema de reducir un modelo más complicado a uno de los dos modelos más simples con los que estamos familiarizados.

La red de la figura 16.9*a* constituye un modelo razonablemente exacto de la combinación en paralelo, físicamente hablando, de un inductor, un capacitor y una resistencia. La resistencia marcada como R_1 es hipotética y se incluye para tomar en cuenta las pérdidas óhmicas del núcleo y las pérdidas por radiación de la bobina física. Las pérdidas en el dieléctrico dentro del capacitor físico, así como la resistencia física del circuito *RLC* particular, se toman en cuenta mediante la resistencia denominada R_2. En este modelo, *no hay forma* de combinar elementos y reproducir un modelo más simple equivalente al modelo original de *todas las frecuencias.* Sin embargo, demostraremos que se puede construir un equivalente más simple válido sobre una banda de frecuencias que suele ser lo suficientemente grande como para incluir todas las frecuencias de interés. El equivalente tomará la forma de la red que se muestra en la figura 16.9*b.*

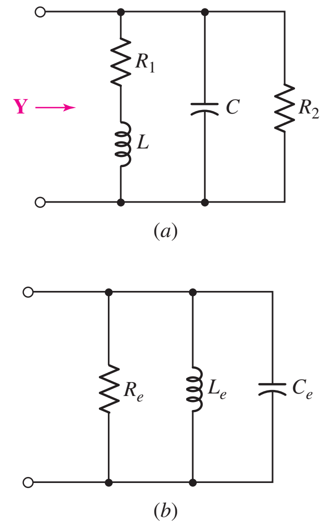


FIGURA 16.9 (*a*) Modelo útil de una red física que consta de un inductor, un capacitor y una resistencia presentes físicamente en paralelo. (*b*) Red que puede equivaler al inciso (*a*) en una banda estrecha de frecuencias.

Antes de aprender cómo crear tal circuito equivalente, consideremos primero el circuito que se muestra en la figura 16.9*a*. La frecuencia resonante en radianes de esta red *no* es $1/\sqrt{LC}$, aunque si R_1 es lo suficientemente pequeña podría aproximarse mucho a este valor. La definición de resonancia permanece invariable, y podríamos determinar la frecuencia resonante igualando a cero la parte imaginaria de la admitancia de entrada:

$$\text{Im}\{\mathbf{Y}(j\omega)\} = \text{Im}\left\{\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}\right\} = 0$$

o

$$\text{Im}\left\{\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}\frac{R_1 - j\omega L}{R_1 - j\omega L}\right\}$$

$$= \text{Im}\left\{\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}\right\} = 0$$

De tal manera, por la condición de resonancia tenemos

$$C = \frac{L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}$$

y, por ende,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_1}{L}\right)^2} \qquad [21]$$

Observamos que ω_0 es menor que $1/\sqrt{LC}$, si bien quizá los valores suficientemente pequeños de la proporción R_1/L produzcan una diferencia despreciable entre ω_0 y $1/\sqrt{LC}$.

La magnitud máxima de la impedancia de entrada también merece considerarse. No es R_2 y tampoco ocurre en ω_0 (o en $\omega = 1/\sqrt{LC}$). La prueba de estas afirmaciones

no se demostrará, debido a que las expresiones se vuelven de inmediato problemáticas desde la perspectiva algebraica; la teoría, sin embargo, es clara. Con un ejemplo numérico estaremos satisfechos.

EJEMPLO 16.4

Utilizando los valores $R_1 = 2\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 125$ mF y $R_2 = 3\ \Omega$ en la figura 16.9*a*, determine la frecuencia resonante y la impedancia en la resonancia.

Sustituyendo los valores apropiados en la ecuación [21] observamos que,

$$\omega_0 = \sqrt{8 - 2^2} = 2 \text{ rad/s}$$

lo cual permite calcular la admitancia de entrada:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{3} + j2\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2 + j(2)(1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 0.583 \text{ S}$$

y luego la impedancia de entrada en la resonancia:

$$\mathbf{Z}(j2) = \frac{1}{0.583} = 1.714\ \Omega$$

A la frecuencia que correspondería la frecuencia resonante si R_1 fuera cero,

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = 2.83 \text{ rad/s}$$

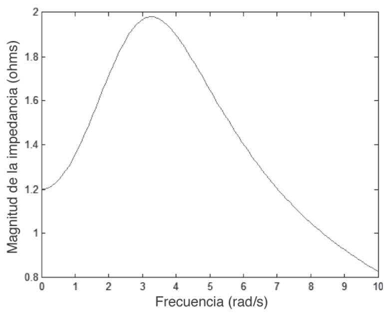
la impedancia de entrada sería

$$\mathbf{Z}(j2.83) = 1.947\underline{/-13.26^\circ}\ \Omega$$

Sin embargo, como podemos observar en la figura 16.10, se determina que la frecuencia a la que ocurre la magnitud *máxima* de la impedancia, indicada por ω_m, es $\omega_m = 3.26$ rad/s, y la magnitud *máxima* de la impedancia es

$$\mathbf{Z}(j3.26) = 1.980\underline{/-21.4^\circ}\ \Omega$$

La magnitud de la impedancia a la resonancia y a la magnitud máxima difiere en casi 16%. Si bien es cierto que un error de este tipo puede ignorarse a veces en la práctica, resulta demasiado grande como para ignorarlo en un examen. (En la última parte de esta sección mostraremos que la Q de la combinación inductor-resistencia a 2 rad/s es la unidad; este valor bajo explica la discrepancia de 16%.)



■ **FIGURA 16.10** Grafica de $|\mathbf{Z}|$ en función de ω, generada mediante la siguiente serie de instrucciones de MATLAB:

```
EDU» omega = linspace(0,10,100);
EDU» for =1:100)
Y(i) = 1/3 = j*omega(i)/8 + 1/(2 + j*omega(i));
Z(i) = 1/Y(i);
end
EDU» plot(omega,abs(Z));
EDU» xlabel('frecuency(rad/s)');
EDU» ylabel('impedance magnitud(ohms)');
```

PRÁCTICA

16.5 Con referencia al circuito de la figura 16.9*a*, sea $R_1 = 1$ kΩ y C = 2.533 pF. Determine la inductancia necesaria para seleccionar una frecuencia resonante de 1 MHz. (*Pista:* Recuerde que $\omega = 2\pi f$.)

Respuesta: 10 mH.

Combinaciones equivalentes en serie y en paralelo

Para transformar el circuito dado en la figura 16.9*a* en uno equivalente en la forma que se indica en la figura 16.9*b*, debemos analizar la Q de una combinación simple en serie o en paralelo de una resistencia y un reactor (inductor o capacitor). Consideramos en primera instancia el circuito en serie de la figura 16.11*a*. La Q de esta red se define de nuevo como 2π veces la proporción de la máxima energía almacenada y la energía que se pierde en cada periodo, aunque la Q se podría evaluar a cualquier frecuencia que se elija. En otras palabras, Q es una función de ω. Es cierto que elegiremos evaluarla a la frecuencia que tiene, o aparentemente tiene, la frecuencia resonante de alguna red de la cual forma parte la rama en serie. Esta frecuencia, sin embargo, no se conoce hasta que se dispone de un circuito más completo. Se sugiere al lector demostrar que la Q de esta rama en serie es $|X_s|/R_s$, en tanto que la Q de la red en paralelo de la figura 16.11*b* es $R_p/|X_p|$.

Llevaremos ahora a cabo los detalles necesarios para determinar los valores de R_p y X_p de modo que la red en paralelo de la figura 16.11*b* sea equivalente a la red en serie de la figura 16.11*a* a cierta frecuencia específica simple. Igualamos $\mathbf{Y}_s$ y $\mathbf{Y}_p$,

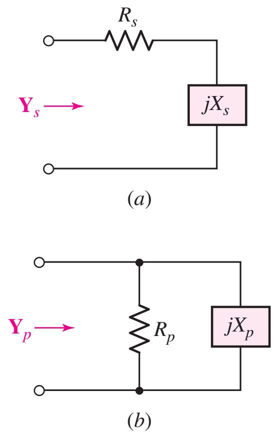


FIGURA 16.11 (*a*) Red en serie que consta de una resistencia R_s a una reactancia inductiva o capacitiva X_s que se podría transformar en (*b*) una red en paralelo tal que $\mathbf{Y}_s = \mathbf{Y}_p$ a una frecuencia específica. La transformación inversa también es posible.

$$\mathbf{Y}_s = \frac{1}{R_s + jX_s} = \frac{R_s - jX_s}{R_s^2 + X_s^2}$$

$$= \mathbf{Y}_p = \frac{1}{R_p} - j\frac{1}{X_p}$$

y obtenemos

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s}$$

$$X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s}$$

Al dividir estas dos expresiones, obtenemos

$$\frac{R_p}{X_p} = \frac{X_s}{R_s}$$

Se concluye que las Q de las redes en serie y en paralelo deben ser iguales:

$$Q_p = Q_s = Q$$

Por lo tanto, las ecuaciones de transformación pueden simplificarse:

$$R_p = R_s(1 + Q^2) \qquad [22]$$

$$X_p = X_s\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) \qquad [23]$$

R_s y X_s también se pueden encontrar si R_p y X_p son los valores dados; se efectúa la transformación en cualquier dirección.

Si $Q \geq 5$, se introduce un pequeño error al utilizar las relaciones aproximadas

$$R_p \approx Q^2 R_s \qquad [24]$$

$$X_p \approx X_s \qquad (C_p \approx C_s \quad \text{o} \quad L_p \approx L_s) \qquad [25]$$

EJEMPLO 16.5

Determine el equivalente en paralelo de la combinación en serie de un inductor de 100 mH y una resistencia de 5 Ω a una frecuencia de 1 000 rad/s. No se cuenta con los detalles de la red a la cual se conecta esta combinación en serie.

En $\omega = 1\,000$ rad/s, $X_s = 1\,000(100 \times 10^{-3}) = 100\ \Omega$. La Q de esta combinación en serie se determinará mediante

$$Q = \frac{X_s}{R_s} = \frac{100}{5} = 20$$

Dado que Q es suficientemente alta (20 es mucho mayor que 5), utilizamos las ecuaciones [24] y [25] para obtener

$$R_p \approx Q^2 R_s = 2000\ \Omega \qquad \text{y} \qquad L_p \approx L_s = 100 \text{ mH}$$

Nuestra afirmación aquí consiste en que un inductor de 100 mH en serie con una resistencia de 5 Ω proporciona *esencialmente la misma* impedancia de entrada que un inductor de 100 mH en paralelo con una resistencia de 2 000 Ω a la frecuencia de 1 000 rad/s.

Para verificar la exactitud de la equivalencia, evaluamos la impedancia de entrada de cada red a 1 000 rad/s. Encontramos que

$$\mathbf{Z}_s(j1000) = 5 + j100 = 100.1\underline{/87.1^\circ}\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_p(j1000) = \frac{2000(j100)}{2000 + j100} = 99.9\underline{/87.1^\circ}\ \Omega$$

y concluimos que la exactitud de la aproximación a la frecuencia de transformación es bastante impresionante. La exactitud a 900 rad/s también resulta razonablemente buena, debido a que

$$\mathbf{Z}_s(j900) = 90.1\underline{/86.8^\circ}\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_p(j900) = 89.9\underline{/87.4^\circ}\ \Omega$$

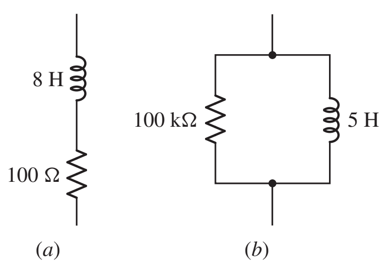


FIGURA 16.12 (*a*) Red en serie para la que se necesita una red equivalente en paralelo (en $\omega = 1\,000$ rad/s. (*b*) Red en paralelo para la que se necesita una red equivalente en serie (en $\omega = 1\,000$ rad/s).

PRÁCTICA

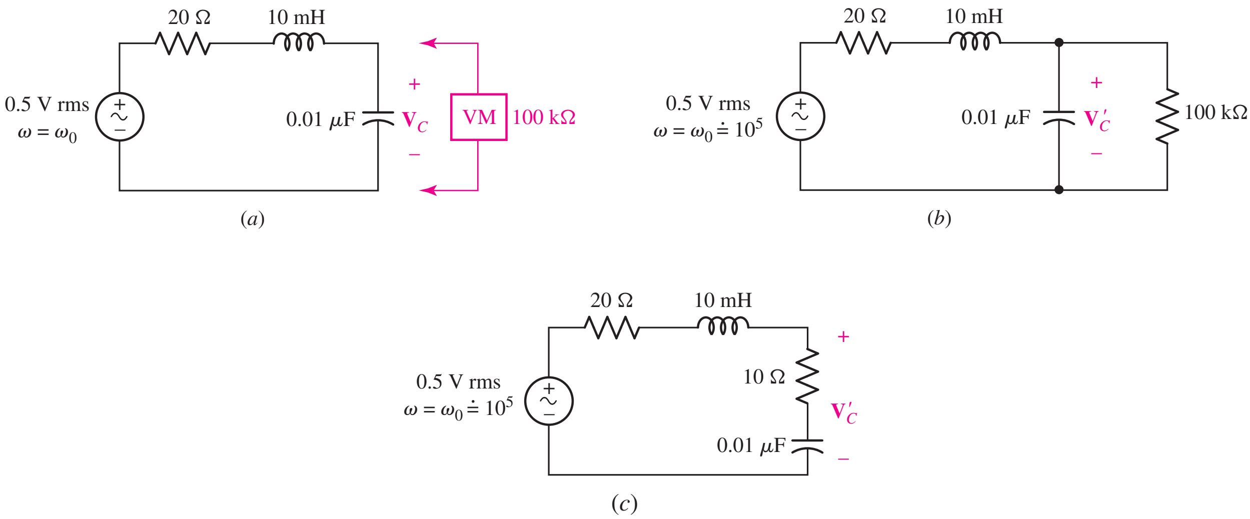
16.6 A $\omega = 1\,000$ rad/s, proporcione una red en paralelo equivalente a la combinación en serie de la figura 16.12*a*.

16.7 Encuentre un equivalente en serie de la red en paralelo que se muestra en la figura 16.12*b*, suponiendo que $\omega = 1\,000$ rad/s.

Respuestas: 16.6: 8 H, 640 k Ω; 16.7: 5 H, 250 Ω.

Como un ejemplo adicional de la sustitución de un circuito resonante más complicado por un circuito *RLC* equivalente en serie o en paralelo, consideremos un problema de instrumentación electrónica. La red *RLC* simple en serie de la figura 16.13*a* se excita mediante una fuente de tensión senoidal a la frecuencia resonante de la red. El valor eficaz (rms) de la tensión de la fuente es igual a 0.5 V; además, deseamos medir el valor eficaz de la tensión en el capacitor, con un voltímetro electrónico (VE) que tenga una resistencia interna de 100 000 Ω. Esto es, una representación equivalente de voltímetro dada por un voltímetro ideal en paralelo, con una resistencia de 100 kΩ.

Un medidor "ideal" es un instrumento que mide una cantidad particular sin perturbar el circuito que se prueba. Aunque esto es imposible, los instrumentos modernos se acercan mucho a ser ideales en este sentido.



■ **FIGURA 16.13** (*a*) Circuito resonante en serie en el que la tensión en el capacitor se va a medir mediante un voltímetro electrónico no ideal. (*b*) El efecto del voltímetro se incluye en el circuito; éste registra V'_C. (*c*) Se obtiene un circuito resonante en serie cuando la red *RC* en paralelo del inciso (*b*) se sustituye por la red *RC* en serie, que equivale a 10^5 rad/s.

Antes de que el voltímetro se conecte, calculamos que la frecuencia resonante sea de 10^5 rad/s, $Q_0 = 50$, la corriente de 25 mA y la tensión rms (o eficaz) en el capacitor de 25 V. (Como se indicó al final de la sección 16.3, esta tensión es Q_0 veces la aplicada.) De tal manera, si el voltímetro fuera ideal, leería 25 V al conectarse a los extremos del capacitor.

Sin embargo, cuando se conecta el voltímetro real, se produce el circuito de la figura 16.13*b*. Para obtener un circuito *RLC* en serie, se requiere en este caso sustituir la red *RC* en paralelo por una *RC* en serie. Supongamos que la Q de esta red es lo suficientemente alta, de modo que el capacitor equivalente en serie será el mismo que el capacitor dado en paralelo. Llevamos a cabo lo anterior para aproximar la frecuencia resonante del circuito final *RLC* en serie. Por lo tanto, si el circuito *RLC* en serie contiene también un capacitor de 0.01 μF, la frecuencia resonante permanece en 10^5 rad/s. Necesitamos conocer esta frecuencia resonante estimada, a fin de calcular la Q de la red *RC* en paralelo, la cual es,

$$Q = \frac{R_p}{|X_p|} = \omega R_p C_p = 10^5(10^5)(10^{-8}) = 100$$

Dado que este valor es mayor que 5 se justifica el círculo vicioso de supuestos que hicimos, por lo que la red equivalente *RC* en serie consiste en el capacitor $C_s = 0.01$ μF y la resistencia:

$$R_s \approx \frac{R_p}{Q^2} = 10\ \Omega$$

De esta forma, se obtiene el circuito equivalente de la figura 16.13*c*. La Q resonante del circuito es, en este caso, sólo de 33.3 y, por lo tanto, la tensión en el capacitor del circuito de la figura 16.13*c* es $16\frac{2}{3}$ V. No obstante, debemos determinar $|\mathbf{V}'_C|$, la tensión en la combinación *RC* en serie, que es

$$|\mathbf{V}'_C| = \frac{0.5}{30}|10 - j1\,000| = 16.67\ \text{V}$$

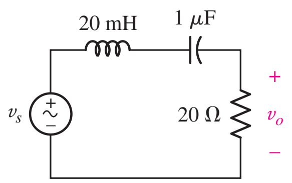
La tensión en el capacitor y $|\mathbf{V}'_C|$ son esencialmente iguales, pues la tensión en la resistencia de 10 Ω es demasiado pequeña.

La conclusión final debe ser que un voltímetro aparentemente bueno tal vez siga produciendo un efecto severo en la respuesta de un circuito resonante de alta Q. Podría ocurrir un efecto similar cuando se inserte en el circuito un amperímetro no ideal.

Damos fin a esta sección con una fábula técnica.

Había una vez un estudiante llamado Sean, que tenía un profesor identificado simplemente como el Dr. Abel.

Una tarde, en el laboratorio, el Dr. Abel le dio a Sean tres dispositivos de circuito prácticos: una resistencia, un inductor y un capacitor, con valores de elemento nominales de 20 Ω, 20 mH y 1 μF.



■ **FIGURA 16.14** Primer modelo de un inductor de 20 mH, un capacitor de 1 μF y una resistencia de 20 Ω en serie con un generador de tensión.

Se le pidió al estudiante que conectara una fuente de tensión de frecuencia variable a la combinación en serie de estos tres elementos, con el fin de medir la tensión resultante en la resistencia como una función de la frecuencia y calcular después los valores numéricos de la frecuencia resonante, la Q en la resonancia y el ancho de banda de media potencia. También se le pidió predecir los resultados del experimento antes de efectuar las mediciones.

Sean primero dibujó un circuito equivalente para este problema que se asemejaba al de la figura 16.14, y luego calculó:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{20\times 10^{-3}\times 10^{-6}}} = 1125 \text{ Hz}$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = 7.07$$

$$\mathcal{B} = \frac{f_0}{Q_0} = 159 \text{ Hz}$$

Luego, Sean efectuó las mediciones que el Dr. Abel le había pedido, las comparó con los valores predichos y sintió una intensa urgencia por cambiarse a una carrera administrativa. Los resultados fueron:

$$f_0 = 1\,000 \text{ Hz} \qquad Q_0 = 0.625 \qquad \mathcal{B} = 1\,600 \text{ Hz}$$

Sean sabía que las discrepancias de esta magnitud no podían considerarse como “dentro de la precisión de la ingeniería” o “debido a errores del medidor”. Desafortunadamente, entregó sus resultados al profesor.

Recordando muchos errores de juicio pasados, algunos de los cuales se debieron (quizá) a él mismo, el doctor Abel sonrió de manera benevolente y llamó la atención a Sean en cuanto al medidor Q (o puente de impedancia) que está presente en la mayor parte de los laboratorios bien equipados; le sugirió que podría utilizarse para averiguar cómo se comportan en la realidad estos elementos de circuitos prácticos a cierta frecuencia conveniente próxima a la resonancia: a 1 000 Hz, por ejemplo.

Al hacerlo de esta manera, Sean descubrió que la resistencia tenía un valor medido de 18 Ω y el inductor de 21.4 mH con una Q de 1.2, en tanto que la capacitancia del capacitor era de 1.41 μF y a un factor de disipación (el recíproco de Q) igual a 0.123.

Así, con la esperanza que brota eternamente en el corazón de todo estudiante de ingeniería, Sean razonó que un mejor modelo del inductor práctico correspondería a 21.4 mH en serie con $\omega L/Q = 112$ Ω, mientras que un modelo más apropiado del capacitor sería de 1.41 μF en serie con $1/\omega C Q = 13.9$ Ω. Con estos datos, Sean elaboró

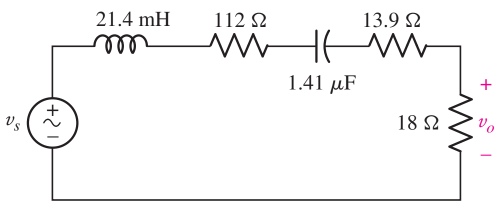


FIGURA 16.15 Modelo mejorado donde se usan valores más exactos y se reconocen las pérdidas en el inductor y en el capacitor.

el modelo de circuito modificado de la figura 16.15 y calculó un nuevo conjunto de valores predichos:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{21.4 \times 10^{-3} \times 1.41 \times 10^{-6}}} = 916 \text{ Hz}$$

$$Q_0 = \frac{2\pi \times 916 \times 21.4 \times 10^{-3}}{143.9} = 0.856$$

$$\mathcal{B} = 916/0.856 = 1\,070 \text{ Hz}$$

Puesto que los resultados se aproximaban mucho más a los valores medidos, Sean estaba satisfecho. El Dr. Abel, sin embargo, debido a que era muy riguroso en los detalles, ponderó las diferencias entre los valores predichos y los medidos tanto para Q_0 como para el ancho de banda. *"¿Ha considerado* —preguntó el Dr. Abel—, *la impedancia de salida de la fuente de tensión?," "Aún no"*, dijo Sean corriendo de regreso a la mesa del laboratorio.

Resultó que la impedancia de salida en cuestión fue de 50 Ω por lo cual Sean agregó este valor al diagrama de circuito, como se muestra en la figura 16.16. Con el nuevo valor de resistencia equivalente de 193.9 Ω se obtuvieron mejores valores de Q_0 y $\mathcal{B}$:

$$Q_0 = 0.635 \qquad \mathcal{B} = 1442 \text{ Hz}$$

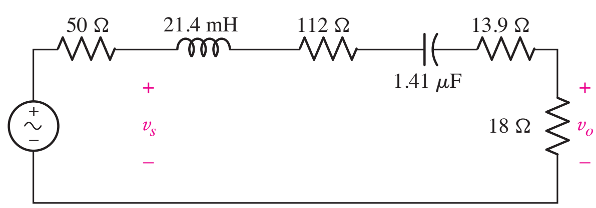


FIGURA 16.16 Modelo final que contiene también la resistencia de salida de la fuente de tensión.

En razón de que todos los valores teóricos experimentales concordaban ahora dentro del famoso 10%, Sean fue de nuevo un estudiante de ingeniería entusiasta y confiado, al que le motivaba iniciar antes el trabajo en casa y leer libros de texto antes de clase.[1] El Dr. Abel simplemente movió la cabeza de manera complaciente cuando dijo la moraleja siguiente:

Cuando se utilizan dispositivos reales,
observe los modelos que se eligen;
piense bien antes de calcular,
¡y preste atención a sus Z y Q!

[1] De acuerdo, esta última parte es excesiva. Nos disculpamos por ello.

PRÁCTICA

16.8 La combinación en serie de 10 Ω y 10 nF está en paralelo con la combinación a su vez en serie de 20 Ω y 10 mH. (*a*) Calcule la frecuencia resonante aproximada de la red en paralelo. (*b*) Determine la *Q* de la rama *RC*. (*c*) Calcule la *Q* de la rama *RL*. (*d*) Encuentre el equivalente de tres elementos de la red original.

Respuestas: 10^5 rad/s; 100; 50; 10 nF || 10 mH || 33.3 kΩ.

16.5 ESCALAMIENTO (O AJUSTE)

Algunos de los ejemplos que hemos resuelto implicaron circuitos con valores de elementos pasivos que varían alrededor de unos cuantos ohms, unos cuantos henrys y algunos faradios. Las frecuencias aplicadas correspondieron a unos cuantos radianes por segundo. Se usaron estos valores numéricos particulares debido no a que con frecuencia se encuentran en la práctica, sino en virtud de que las manipulaciones aritméticas resultan mucho más sencillas que en el caso de que fuera necesario manipular diversas potencias de 10 a lo largo de los cálculos. Los procedimientos de escalamiento (o ajuste) que se explicarán en esta sección permiten analizar redes compuestas por elementos de tamaño práctico, al ajustar el valor de los elementos para permitir cálculos numéricos más convenientes. Consideraremos tanto el ***escalamiento (o ajuste) en magnitud*** como el ***escalamiento (o ajuste) en frecuencia***.

Elegimos el circuito resonante en paralelo de la figura 16.17*a* como ejemplo. Los valores imprácticos de los elementos dan origen a la poca probable curva de respuesta que se dibuja en la figura 16.17*b*; la impedancia máxima es igual a 2.5 Ω, la frecuencia resonante corresponde a 1 rad/s, Q_0 es 5 y el ancho de banda equivale a 0.2 rad/s. Estos valores numéricos son mucho más parecidos a los análogos eléctricos de algún sistema mecánico que a los correspondientes a cualquier dispositivo básicamente eléctrico. Disponemos de números convenientes con los cuales efectuar los cálculos, pero tenemos un circuito impráctico difícil de construir.

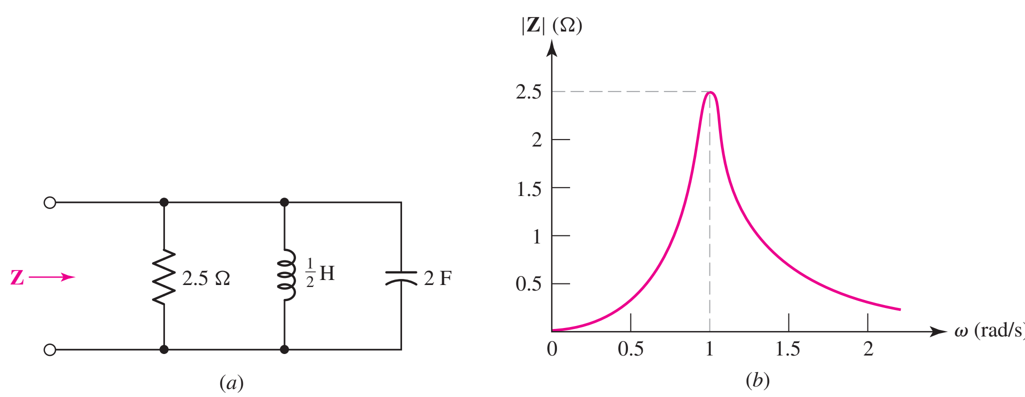


FIGURA 16.17 (*a*) Circuito resonante en paralelo que se usa como ejemplo para ilustrar el escalamiento (ajuste) en magnitud y en frecuencia. (*b*) La magnitud de la impedancia de entrada se muestra como una función de la frecuencia.

Recuerde que "ordenada" se refiere al eje vertical y "abscisa" al eje horizontal.

Nuestra meta es ajustar esta red, de manera que proporcione una impedancia máxima de 5 000 Ω a una frecuencia resonante de 5×10^6 rad/s, o 796 kHz. En otras palabras,

utilizaríamos la misma curva de respuesta de la figura 16.17*b* si todo número sobre la escala de las *ordenadas* se incrementa por un factor de 2 000 y cada número sobre la escala de las *abscisas* se aumenta por un factor de 5×10^6. Trataremos lo anterior como dos problemas: 1) escalamiento (o ajuste) en magnitud por un factor de 2 000 y 2) escalamiento (o ajuste) en frecuencia por un factor de 5×10^6.

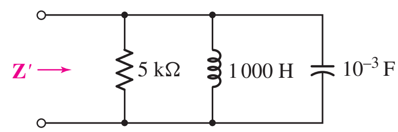
El escalamiento (o ajuste) en magnitud se define como el proceso mediante el cual la impedancia de una red de dos terminales se incrementa por un factor K_m, pero permanece constante la frecuencia. El factor K_m es real y positivo, y podría ser mayor o menor que la unidad. Entenderemos que la afirmación más breve *"la red se ajusta en magnitud por un factor de dos"* indica que la impedancia de la nueva red es el doble de la antigua, a cualquier frecuencia. Determinemos ahora cómo se debe ajustar cada tipo de elemento pasivo. Para incrementar la impedancia de entrada de una red por un factor K_m, basta aumentar la impedancia de cada elemento en la red por el mismo factor. Por lo tanto, una resistencia R debe sustituirse por una resistencia K_mR. Cada inductancia debe exhibir también una impedancia que sea K_m veces mayor, a cualquier frecuencia. Para incrementar una impedancia sL por un factor de K_m cuando $\mathbf{s}$ permanece constante, se debe sustituir la inductancia L por una inductancia K_mL. De manera similar, cada capacitancia C debe sustituirse por una capacitancia K_m. En resumen, estos cambios producirán una red que se ajusta en magnitud multiplicándola por un factor de K_m:

$$\left.\begin{aligned} R &\rightarrow K_m R \\ L &\rightarrow K_m L \\ C &\rightarrow \frac{C}{K_m} \end{aligned}\right\} \qquad \text{escalamiento o ajuste en magnitud}$$

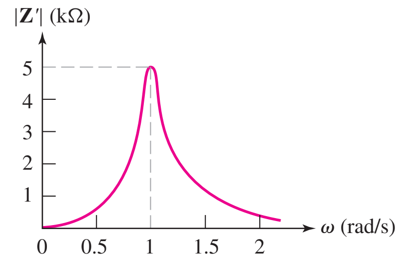
Cuando cada elemento de la red de la figura 16.17*a* se ajusta en magnitud por un factor de 2 000, se obtiene la red de la figura 16.18*a*. La curva de respuesta de la figura 16.18*b* indica que no es necesario efectuar ningún cambio en la curva de respuesta dibujada antes, aparte del cambio en la escala de las ordenadas.

Consideremos ahora esta nueva red y ajustémosla en frecuencia. Definimos el ajuste en frecuencia como el proceso mediante el cual la frecuencia a la que ocurre cualquier impedancia se incrementa por un factor de K_f. También en este caso, haremos uso de la expresión más breve *"la red se ajusta en frecuencia por un factor de dos"* para indicar que se obtiene ahora la misma impedancia a una frecuencia dos veces mayor. El ajuste en frecuencia se lleva a cabo ajustando en frecuencia cada elemento pasivo, y queda claro que no se afecta a ninguna resistencia. La impedancia de cualquier inductor es sL, y si esta misma impedancia se debe obtener a una frecuencia K_f veces más grande, entonces la inductancia L debe sustituirse por una inductancia de L/K_f. De manera similar, se debe sustituir una capacitancia C por una capacitancia C/K_f. Por lo tanto, si una red se va a ajustar en frecuencia por un factor de K_f, entonces los cambios necesarios en cada elemento pasivo son:

$$\left.\begin{aligned} R &\rightarrow R \\ L &\rightarrow \frac{L}{K_f} \\ C &\rightarrow \frac{C}{K_f} \end{aligned}\right\} \qquad \text{escalamiento o ajuste en magnitud}$$



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 16.18** (*a*) Red de la figura 16.17*a* después de ajustarse en magnitud $K_m = 2\,000$. (*b*) Curva de respuesta correspondiente.

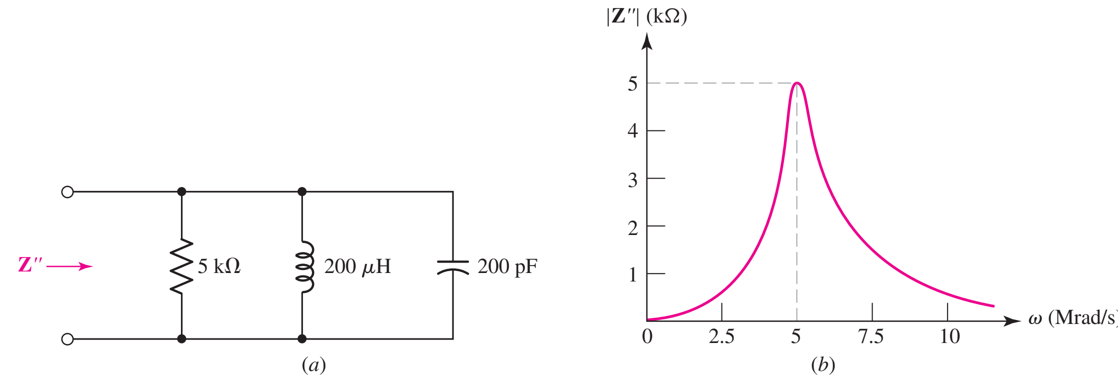


FIGURA 16.19 (*a*) Red de la figura 16.18*a* después de ajustarse en frecuencia por un factor de $K_f = 5 \times 10^6$. (*b*) Curva de respuesta correspondiente.

Cuando cada elemento de la red ajustada en magnitud de la figura 16.18*a* se ajusta en frecuencia por un factor de 5×10^6, se obtiene la red de la figura 16.19*a*. La curva de respuesta correspondiente se muestra en la figura 16.19*b*.

Los elementos de circuito en esta última red tienen valores que se obtienen con facilidad en los circuitos físicos; la red en verdad se construye y se prueba. Se concluye que si la red original de la figura 16.17*a* fuera en realidad un análogo de algún sistema resonante mecánico, se podría ajustar tanto en magnitud como en frecuencia para obtener una red que se podría construir en el laboratorio; las pruebas cuya aplicación resulta costosa o inconveniente en el sistema mecánico podrían efectuarse sobre el sistema eléctrico ajustado, pero los resultados deben “desajustarse” luego y convertirse en las unidades mecánicas para completar el análisis.

Una impedancia, que se indica como una función de **s** también podría ajustarse en magnitud o en frecuencia, y se podría efectuar lo anterior sin conocimiento de los elementos específicos, a partir de los cuales se compone la red de dos terminales. Para ajustar $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$ en magnitud, la definición de ajuste de magnitud muestra que sólo se requiere multiplicar $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$ por K_m para obtener la impedancia con magnitud ajustada. Así, la impedancia $\mathbf{Z}'(\mathbf{s})$ de la red ajustada en magnitud se determina mediante

$$\mathbf{Z}'(\mathbf{s}) = K_m \mathbf{Z}(\mathbf{s})$$

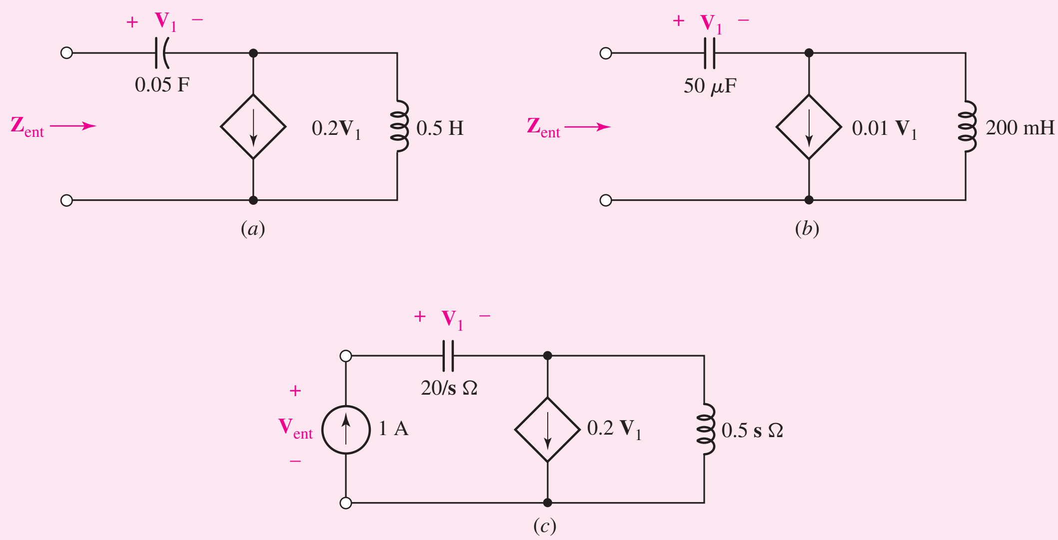
Si $\mathbf{Z}'(\mathbf{s})$ se debe ajustar ahora en frecuencia por un factor de 5×10^6, entonces $\mathbf{Z}''(\mathbf{s})$ y $\mathbf{Z}'(\mathbf{s})$ tienen que proporcionar valores idénticos de impedancia, si $\mathbf{Z}''(\mathbf{s})$ se evalúa a una frecuencia K_f veces igual a la que se evalúa $\mathbf{Z}'(\mathbf{s})$, o:

$$\mathbf{Z}''(\mathbf{s}) = \mathbf{Z}'\left(\frac{\mathbf{s}}{K_f}\right)$$

Aunque el ajuste es un proceso que se aplica por lo general a elementos pasivos, las fuentes dependientes también deben ajustarse en magnitud y en frecuencia. Suponemos que la salida de cualquier fuente está dada como $k_x v_x$ o $k_y i_y$, donde k_x tiene las dimensiones de una admitancia para una fuente de corriente dependiente y resulta adimensional para una fuente de tensión dependiente; en tanto que k_y tiene las dimensiones de ohms para una fuente de tensión dependiente y es adimensional en el caso de una fuente de corriente dependiente. Si la red que contiene la fuente dependiente se ajusta en magnitud por K_m, entonces sólo se requiere tratar a k_x o k_y como si fueran el tipo de elemento congruente con sus dimensiones. Esto es, si k_x (o k_y) es adimensional, se deja sin cambio; si es una admitancia, se divide entre K_m; y si es una impedancia, se multiplica por K_m. *El ajuste en frecuencia no afecta a las fuentes dependientes.*

EJEMPLO 16.6

Ajuste la red que se muestra en la figura 16.20 por $K_m = 20$ y $K_f = 50$, y después determine $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s})$ de la red ajustada.



■ **FIGURA 16.20** (*a*) Red que se va a ajustar en magnitud por un factor de 20, y en frecuencia por un factor de 50. (*b*) Red ajustada. (*c*) Se aplica una fuente de prueba de 1 A a las terminales de entrada para obtener la impedancia sin ajuste de la red del inciso (*a*).

El ajuste en magnitud del capacitor se consigue dividiendo 0.05 F entre el factor de ajuste $K_m = 20$, y el ajuste en frecuencia se lleva a cabo al dividir entre $K_f = 50$. Al efectuar de manera simultánea ambas operaciones, tenemos

$$C_{\text{ajustada}} = \frac{0.05}{(20)(50)} = 50\ \mu\text{F}$$

El inductor también se ajusta:

$$L_{\text{ajustada}} = \frac{(20)(0.5)}{50} = 200\ \text{mH}$$

Al ajustar la fuente dependiente, sólo es necesario considerar el ajuste en magnitud, pues el de la frecuencia no afecta a las fuentes dependientes. Ya que ésta es una fuente de *corriente* controlada por *tensión*, entonces la constante de multiplicación 0.2 tiene unidades deA/V, o S. Debido a que el factor tiene unidades de admitancia, dividimos entre K_m, por lo que el nuevo término es de $0.01\mathbf{V}_1$. La red obtenida (ya ajustada) se muestra en la figura 16.20*b*.

Para determinar la impedancia de la nueva red, necesitamos aplicar una fuente de prueba de 1 A en las terminales de entrada. Podríamos trabajar con cualquier circuito, pero primero procederemos a calcular la impedancia de la red *sin ajustar* que se muestra en la figura 16.20*a*, y luego ajustaremos el resultado.

Con referencia a la figura 16.20*c*,

$$\mathbf{V}_{ent} = \mathbf{V}_1 + 0.5\mathbf{s}(1 - 0.2\mathbf{V}_1)$$

(*continúa*)

Además,

$$\mathbf{V}_1 = \frac{20}{\mathbf{s}}(1)$$

Al hacer la sustitución indicada, seguida por un poco de manipulación algebraica, obtenemos

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{ent}}}{1} = \frac{\mathbf{s}^2 - 4\mathbf{s} + 40}{2\mathbf{s}}$$

Para ajustar esta cantidad de manera que corresponda al circuito de la figura 16.20*b* multiplicamos por $K_m = 20$ y sustituimos $\mathbf{s}$ por $\mathbf{s}/\mathbf{K}_f = \mathbf{s}/50$. De tal modo,

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}_{\text{ajustada}}} = \frac{0.2\mathbf{s}^2 - 40\mathbf{s} + 20\,000}{\mathbf{s}} \qquad \Omega$$

PRÁCTICA

16.9 Un circuito resonante en paralelo se define mediante $C = 0.01$ F, $\mathcal{B} = 2.5$ rad/s y $\omega_0 = 20$ rad/s. Proporcione los valores de R y L si la red se ajusta en: (*a*) magnitud por un factor de 800; (*b*) frecuencia por un factor de 10^4; (*c*) magnitud por un factor de 800 y frecuencia por un factor de 10^4.

Respuestas: 32 kΩ, 200 H; 40 Ω, 25 μH; 32 kΩ, 200 mH.

16.6 DIAGRAMAS DE BODE

En esta sección descubriremos un método rápido para obtener una imagen *aproximada* de la variación de amplitud y de fase de una función de transferencia dada como función de ω. Desde luego, las curvas exactas se pueden graficar después de calcular valores con una calculadora programable o una computadora, pero también se podrían obtener de manera directa en la computadora. Sin embargo, nuestro objetivo aquí es lograr una imagen de la respuesta superior a la que podría verse a partir de una gráfica de polos-ceros, sin tener que armar toda una ofensiva computacional.

La escala de decibeles (dB)

La curva de respuesta aproximada que se construirá se conoce como gráfica asintótica, ***gráfica de Bode***, o ***diagrama de Bode***, en honor a su creador, Hendrik W. Bode, ingeniero eléctrico y matemático de Bell Telephone Laboratories. Tanto las curvas de magnitud como de fase se muestran utilizando una escala de frecuencias logarítmicas para las abscisas y la propia magnitud se ilustra también en unidades logarítmicas llamadas ***decibeles*** (dB). Se define el valor de $|\mathbf{H}(j\omega)|$ en dB como sigue:

El decibel recibe ese nombre en honor a Alejandro Graham Bell.

$$H_{\text{dB}} = 20 \log |\mathbf{H}(j\omega)|$$

donde se emplea el logaritmo común (base 10). (*Se utiliza un multiplicador de 10, en lugar de uno de 20, para las funciones de transferencia de potencia, aunque aquí no será necesario*.) La operación inversa es:

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 10^{H_{\text{dB}}/20}$$

Antes de que comencemos en realidad un análisis detallado de la técnica para dibujar gráficas de Bode, resultará útil obtener cierta percepción del tamaño de la unidad del decibel, a fin de aprender unos cuantos de sus valores importantes y para recordar algunas de las propiedades del logaritmo. Dado que log 1 = 0, log 2 = 0.30103, log 10 = 1, observamos las correspondencias:

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow H_{\text{dB}} = 0$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 2 \Leftrightarrow H_{\text{dB}} \approx 6 \text{ dB}$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 10 \Leftrightarrow H_{\text{dB}} = 20 \text{ dB}$$

Un aumento de $|\mathbf{H}(j\omega)|$ por un factor de 10 corresponde a un incremento de H_{dB} por 20 dB. Además, $\log 10^n = n$, por ello $10^n \Leftrightarrow 20n$ dB, por lo que 1 000 corresponde a 60 dB, en tanto que 0.01 se representa como −40 dB. Utilizando sólo los valores que ya se indicaron, es posible también que $20 \log 5 = 20 \log \frac{10}{2} = 20 \log 10 - 20 \log 2 = 20 - 6 = 14$ dB, y por ello $5 \Leftrightarrow 14$ dB. Ademas, $\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$ y, en consecuencia $\sqrt{2} \Leftrightarrow 3$ dB y $1/\sqrt{2} \Leftrightarrow -3$ dB.[2]

Escribiremos las funciones de transferencia en términos de **s**, sustituyendo $\mathbf{s} = j\omega$ cuando estemos listos para determinar la magnitud o el ángulo de fase. Si se desea, la magnitud se podría escribir en términos de dB en ese punto.

PRÁCTICA

16.10 Calcule H_{dB} en $\omega = 146$ rad/s si $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ es igual a (*a*) $20/(\mathbf{s} + 100)$; (*b*) $20(\mathbf{s} + 100)$; (*c*) $20\mathbf{s}$. Calcule $|\mathbf{H}(j\omega)|$ si H_{dB} se iguala a (*d*) 29.2 dB; (*e*) −15.6 dB; (*f*) −0.318 dB.

Respuestas: −18.94 dB; 71.0 dB; 69.3 dB; 28.8; 0.1660; 0.964.

Determinación de las asíntotas

Nuestro siguiente paso consiste en factorizar $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ para mostrar sus polos y ceros. Consideramos primero un cero en $\mathbf{s} = -a$, escrito en una forma estandarizada como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1 + \frac{\mathbf{s}}{a} \qquad [26]$$

El diagrama de Bode de esta función consta de dos curvas asintóticas aproximadas de H_{dB} para valores muy grandes y muy pequeños de ω. De tal manera, comenzamos determinando

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \left|1 + \frac{j\omega}{a}\right| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

y, por ello,

$$H_{\text{dB}} = 20 \log \left|1 + \frac{j\omega}{a}\right| = 20 \log \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

[2] Obsérvese que se está siendo un poco deshonesto en este caso al utilizar 20 log = 6 dB en lugar de 6.02 dB. Sin embargo, es usual representar $\sqrt{2}$ como 3 dB. En razón de que la escala de dB es inherentemente logarítmica, rara vez es importante una pequeña inexactitud.

Cuando $\omega \ll a$:

$$H_{dB} \approx 20 \log 1 = 0 \qquad (\omega \ll a)$$

Esta asíntota simple se muestra en la figura 16.21 y se dibuja como una línea gruesa para representar $\omega < a$, y como una línea punteada para $\omega > a$.

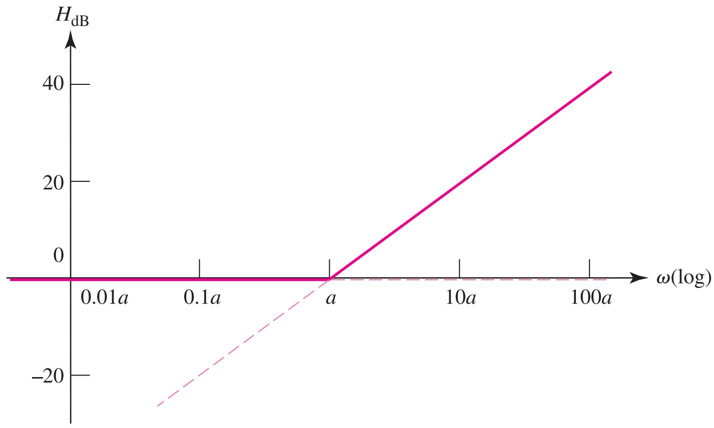


FIGURA 16.21 Diagrama de amplitud de Bode de $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1 + \mathbf{s}/a$ que consta de las asíntotas de frecuencia baja y alta, y se muestran como líneas punteadas. Se intersectan sobre la abscisa en la frecuencia angular de esquina. El diagrama de Bode representa la respuesta en términos de las dos asíntotas, las cuales son fáciles de dibujar.

Cuando $\omega \gg a$:

$$H_{dB} \approx 20 \log \frac{\omega}{a} \qquad (\omega \gg a)$$

Una ***década*** se refiere a un intervalo de frecuencia definido por un factor de 10, como el de 3 Hz a 30 Hz o el de 12.5 MHz a 125 MHz. Una ***octava*** se refiere a un intervalo de frecuencias definido por un factor de 2, como el de 7 a 14 GHz.

En $\omega = a$, $H_{dB} = 0$; en $\omega = 10a$, $H_{dB} = 20$ dB, y en $\omega = 100a$, $H_{dB} = 40$ dB. Por lo tanto, el valor de H_{dB} aumenta 20 dB por cada incremento de 10 veces en la frecuencia angular. Así, la asíntota tiene una pendiente de 20 dB/década. Puesto que H_{dB} aumenta 6 dB cuando ω se duplica, un valor alterno de la pendiente es 6 dB/octava. La asíntota de alta frecuencia se presenta también en la figura 16.21, una línea sólida para $\omega > a$ y una línea discontinua para $\omega < a$. Observe que las dos asíntotas se intersectan en $\omega = a$, la frecuecia del cero, la cual también se describe como ***frecuencia angular de esquina, de corte, de 3 dB*** o ***de media potencia***.

Emparejamiento de los diagramas de Bode

Ahora veremos el grado de error implícito en la curva de respuesta asintótica. A la frecuencia angular de esquina (o de ruptura) ($\omega = a$),

Observe que se sigue respetando la convención de considerar a $\sqrt{2}$ como correspondiente a 3 dB.

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2}} = 3 \text{ dB}$$

cuando se compara con el valor asintótico de 0 dB. En $\omega = 0.5a$, tenemos

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{1.25} \approx 1 \text{ dB}$$

De tal modo, la respuesta exacta se representa mediante una curva uniforme que se ubica 3 dB arriba de la respuesta asintótica en $\omega = a$, y a 1 dB sobre ella en $\omega = 0.5a$

(y también en $\omega = 2a$). Siempre se emplea esta información para emparejar la esquina, si se desea un resultado más exacto.

Términos múltiples

La mayor parte de las funciones de transferencia consisten en más de un cero simple (o polo simple). Sin embargo, esto se maneja fácilmente por el método del diagrama de Bode, puesto que de hecho estamos trabajando con logaritmos. Por ejemplo, considere la función

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = K\left(1 + \frac{\mathbf{s}}{s_1}\right)\left(1 + \frac{\mathbf{s}}{s_2}\right)$$

donde $K =$ constante, y $-s_1$ y $-s_2$ representan los dos ceros de la función $\mathbf{H}(\mathbf{s})$. Para esta función, H_{dB} puede escribirse como

$$H_{\text{dB}} = 20\log\left|K\left(1 + \frac{j\omega}{s_1}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{s_2}\right)\right|$$

$$= 20\log\left[K\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_1}\right)^2}\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_2}\right)^2}\right]$$

o

$$H_{\text{dB}} = 20\log K + 20\log\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_1}\right)^2} + 20\log\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_2}\right)^2}$$

lo cual es simplemente la suma de un término constante 20 log K (independiente de la frecuencia) y dos términos de cero simples de la forma considerada con anterioridad. En otras palabras, *podemos construir un esquema de H_{dB} simplemente sumando de manera gráfica los diagramas de los términos por separado.* En el ejemplo siguiente estudiamos este caso.

EJEMPLO 16.7

Obtenga el diagrama de Bode de la impedancia de entrada de la red que se muestra en la figura 16.22.

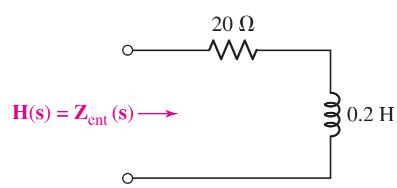
Tenemos la impedancia de entrada

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}}(\mathbf{s}) = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = 20 + 0.2\mathbf{s}$$

Expresando esta igualdad en su forma estándar, obtenemos

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 20\left(1 + \frac{\mathbf{s}}{100}\right)$$

Los dos factores que constituyen $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ son un cero en $\mathbf{s} = -100$, lo cual propicia una frecuencia angular de corte de $\omega = 100$ rad/s, y una constante equivalente a 20 log 20 = 26 dB. Ambas se dibujan claramente en la figura 16.23*a*. Dado que trabajamos con el logaritmo de $|\mathbf{H}(j\omega)|$, a continuación sumamos los diagramas de Bode correspondientes a los factores individuales. La gráfica de magnitud resultante



■ **FIGURA 16.22** Si $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ se selecciona como $\mathbf{Z}_{\text{ent}}(\mathbf{s})$ para esta red, entonces el diagrama de Bode para $\mathbf{H}_{dB}$ es como se indica en la figura 16.23*b*.

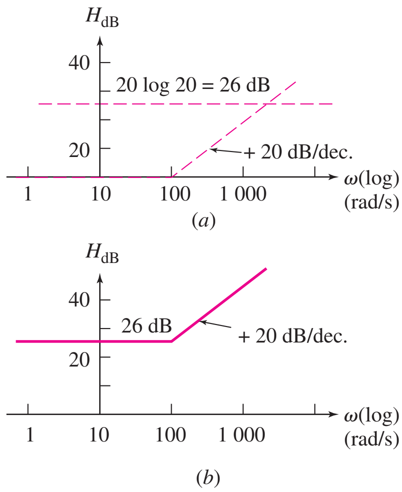


FIGURA 16.23 (a) Los diagramas de Bode para los factores de $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 20(1 + \mathbf{s}/100)$ se dibujan individualmente. (b) El diagrama de Bode compuesto se expresa como la suma de las gráficas del inciso (*a*).

aparece como la figura 16.23*b*. No se intentó emparejar la esquina con una corrección de +3 dB en $\omega = 100$ rad/s. Esto se deja al lector como un ejercicio rápido.

PRÁCTICA

16.11 Construya un diagrama de Bode en magnitud para $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 50 + \mathbf{s}$.

Respuestas: 34 dB, $\omega < 50$ rad/s; pendiente = + 20 dB/décadas $\omega > 50$ rad/s.

Respuesta en fase

De regreso a la función de transferencia de la ecuación [26] quisieramos determinar ahora la ***respuesta en fase*** para un cero simple,

$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = \text{ang}\left(1 + \frac{j\omega}{a}\right) = \tan^{-1}\frac{\omega}{a}$$

Esta expresión también se representa a través de sus asíntotas, aunque se requieren tres segmentos rectos. Para $\omega \ll a$, ang $\mathbf{H}$ $(j\omega) \approx 0°$, así que lo usamos como la asíntota cuando $\omega < 0.1a$:

$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = 0° \qquad (\omega < 0.1a)$$

En el extremo superior, $\omega \gg a$, tenemos el ángulo de $\mathbf{H}(j\omega) \approx 90°$ y lo utilizamos arriba de $\omega = 10a$:

$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = 90° \qquad (\omega > 10a)$$

Dado que el ángulo es 45° en $\omega = a$, construimos ahora la asíntota de la línea recta que se extiende desde 0° en $\omega = 0.1a$ pasando por 45° en $\omega = a$, hasta 90° en $\omega = 10a$. Esta línea recta tiene una pendiente de 45°/década. Se presenta como una curva de trazo continuo en la figura 16.24, mientras que la respuesta del ángulo exacto se ilustra como una línea punteada. Las diferencias máximas entre las respuestas asintótica y real son ±5.71° en $\omega = 0.1a$ y $10a$. Ocurren errores de ±5.29° en $\omega = 0.394a$ y $2.54a$; el error es cero en $\omega = 0.159a$ y $6.31a$. Por lo general, la gráfica del ángulo de fase se deja como una aproximación de línea recta, aunque también se dibujan curvas uniformes de una manera similar a la que se describe en la figura 16.24.

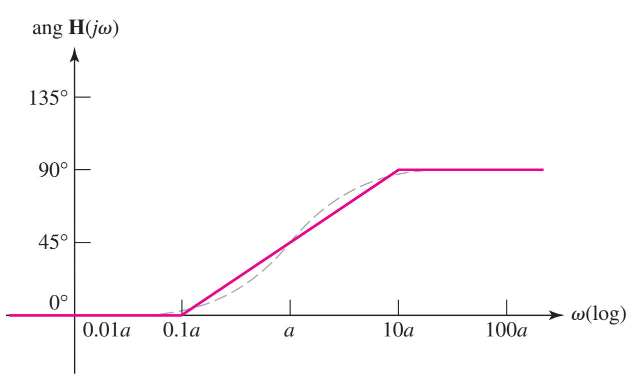


FIGURA 16.24 La respuesta del ángulo asintótico de $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1 + \mathbf{s}/a$ se muestra como los tres segmentos de línea recta continuas. Los puntos extremos de la rampa son 0° a $0.1a$ y 90° a $10a$. La línea punteada representa una respuesta más precisa (lisa).

Vale la pena hacer aquí una breve pausa para considerar lo que nos indica la gráfica de la fase. En el caso de un cero simple en $\mathbf{s} = a$, observamos que para frecuencias mucho menores que la frecuencia de esquina, la fase de la función de respuesta es 0°. Sin embargo, para frecuencias altas ($\omega \gg a$) la fase es de 90°. En la cercanía de la frecuencia de esquina, la fase de la función de transferencia varía con cierta rapidez. Por lo tanto, el ángulo de fase real que le corresponde a la respuesta se selecciona mediante el diseño del circuito (el cual determina a).

PRÁCTICA

16.12 Dibuje el diagrama de fase de Bode de la función de transferencia del ejemplo 16.7.

Respuestas: 0°, $\omega \leq 10$; 90°, $\omega \geq 1\,000$; 45°, $\omega = 100$; 45° pendiente/dec, $10 < \omega < 1\,000$ (ω en rad/s).

Consideraciones adicionales para la creación de las gráficas de Bode

Consideramos a continuación el polo simple

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{1}{1 + \mathbf{s}/a} \qquad [27]$$

Dado que lo anterior es el recíproco de un cero, la operación logarítmica resulta en un diagrama de Bode, que es el *negativo* del que se obtuvo antes. La amplitud es de 0 dB hasta $\omega = a$, y luego la pendiente corresponde a -20 dB/década para $\omega > a$. La gráfica del ángulo es 0° para $\omega < 0.1a$, $-90°$ para $\omega > 10a$, y $-45°$ en $\omega = a$, la cual tiene una pendiente de $-45°$/década cuando $0.1a < \omega < 10a$. Se invita al lector a que genere el diagrama de Bode de esta función trabajando directamente con la ecuación [27].

Otro término que puede aparecer en $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ es un factor de $\mathbf{s}$ en el numerador o el denominador. Si $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$, entonces

$$H_{\text{dB}} = 20 \log |\omega|$$

Así, se tiene una línea recta infinita que pasa por 0 dB en $\omega = 1$ y que tiene una pendiente en todas partes de 20 dB/década, lo cual se ilustra en la figura 16.25*a*. Si el factor $\mathbf{s}$ se encuentra en el denominador se obtiene una línea recta con una pendiente -20 dB/década y que pasa por 0 dB en $\omega = 1$, como se muestra en la figura 16.25*b*.

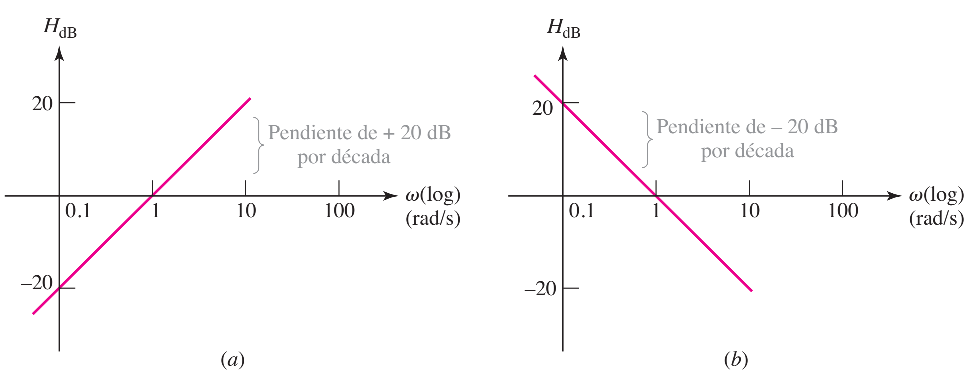
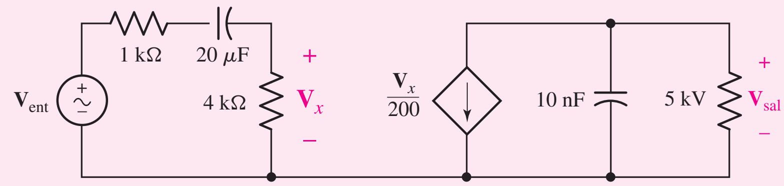


FIGURA 16.25 Se muestran los diagramas asintóticos de: (*a*) $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$ y (*b*) $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1/\mathbf{s}$. Ambas rectas infinitamente largas pasan por 0 dB en $\omega = 1$ y tienen pendientes de ± 20 dB/década.

Otro término simple que se encuentra en $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ es la constante de multiplicación K, la cual origina un diagrama de Bode que es una línea recta horizontal que se ubica en $20 \log |K|$ dB sobre la abscisa. En realidad estará por debajo de la abscisa si $|K| < 1$.

EJEMPLO 16.8

Dibuje el diagrama de Bode de la ganancia del circuito de la figura 16.26.



■ **FIGURA 16.26** Si $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$, el diagrama de amplitud de Bode de este amplificador se muestra en la figura 16.27*b*, y el diagrama de fase se presenta en la figura 16.28.

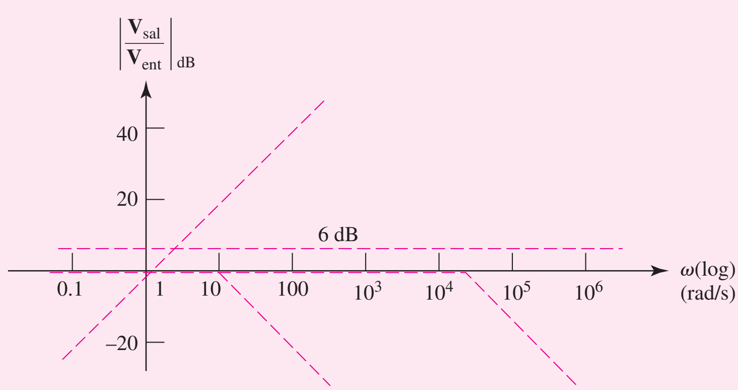
Trabajamos de izquierda a derecha a través del circuito y escribimos la expresión de la ganancia en tensión

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_{ent}} = \frac{4\,000}{5\,000 + 10^6/20\mathbf{s}}\left(-\frac{1}{200}\right)\frac{5\,000(10^8/\mathbf{s})}{5\,000 + 10^8/\mathbf{s}}$$

la que, simplificada (por fortuna), se transforma en

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{-2\mathbf{s}}{(1 + \mathbf{s}/10)(1 + \mathbf{s}/20\,000)} \qquad [28]$$

Observamos una constante $20 \log|-2| = 6$ dB, puntos de inflexión en $\omega = 10$ rad/s y $\omega = 20\,000$ rad/s, y un factor lineal $\mathbf{s}$. Cada uno de ellos se dibuja en la figura 16.27*a*; además, los cuatro dibujos se añaden para producir el diagrama de Bode en magnitud de la figura 16.27*b*.



(*a*)

(*continúa*)

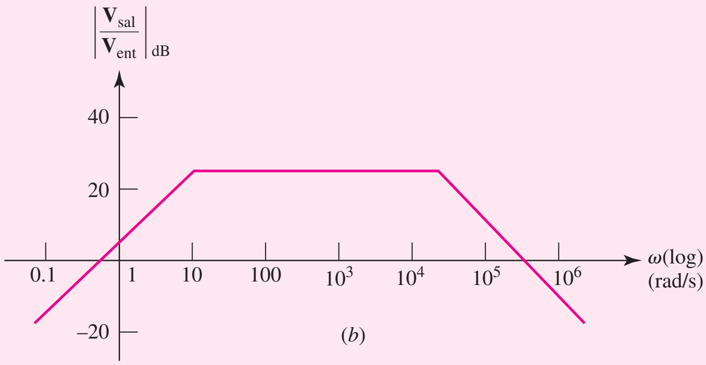


FIGURA 16.27 (*a*) Diagramas de magnitud de Bode individuales de los factores (−2), (**s**), $(1 + \mathbf{s}/10)^{-1}$ y $(1 + \mathbf{s}/20\,000)^{-1}$. (*b*) Se suman las cuatro gráficas separadas del inciso (*a*) para obtener los diagramas en magnitud de Bode del amplificador de la figura 16.26.

PRÁCTICA

16.13 Construya un diagrama de Bode en magnitud para $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ igual: (*a*) $50/(\mathbf{s} + 100)$; (*b*) $(\mathbf{s} + 10)/(\mathbf{s} + 100)$; (*c*) $(\mathbf{s} + 10)/\mathbf{s}$.

Respuestas: (*a*) −6 dB, $\omega < 100$; −20 dB/década, $\omega > 100$; (*b*) −20 dB, $\omega < 10$; +20 dB/década, $10 < \omega < 100$; 0 dB, $\omega > 100$; (*c*) 0 dB; $\omega > 10$; −20 dB/década, $\omega < 10$.

Antes de construir el diagrama de fase del amplificador de la figura 16.26 tomaremos un momento para investigar varios detalles del diagrama de magnitud.

Primero, resulta conveniente no confiar demasiado en la adición gráfica de los diagramas en magnitud individuales. Es mejor determinar con facilidad el valor exacto del diagrama de la magnitud combinada en los puntos elegidos al considerar el valor asintótico de cada factor de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ en el punto en cuestión. Por ejemplo, en la región plana de la figura 16.27*a* entre $\omega = 10$ y $\omega = 20\,000$, estamos debajo de la esquina en $\omega = 20\,000$, y por ello representamos $(1 + \mathbf{s}/20\,000)$ mediante 1; pero si nos ubicamos arriba de $\omega = 10$, entonces $(1 + \mathbf{s}/10)$ se representa como $\omega/10$. En consecuencia,

$$H_{dB} = 20 \log \left| \frac{-2\omega}{(\omega/10)(1)} \right|$$

$$= 20 \log 20 = 26 \text{ dB} \qquad (10 < \omega < 20\,000)$$

También podríamos conocer la frecuencia a la cual la respuesta asintótica cruza la abscisa en el extremo superior. Los dos factores se expresan aquí como $\omega/10$ y $\omega/20\,000$; de tal modo.

$$H_{dB} = 20 \log \left| \frac{-2\omega}{(\omega/10)(\omega/20\,000)} \right| = 20 \log \left| \frac{400\,000}{\omega} \right|$$

Dado que $H_{dB} = 0$ en el cruce de la abscisa, $400\,000/\omega = 1$ y, por lo tanto, $\omega = 400\,000$ rad/s.

Muchas veces no necesitamos un dibujo exacto del diagrama de Bode en papel semilogarítmico, pues basta con construir un eje de frecuencia aproximadamente logarítmico en un papel cuadriculado simple. Después de elegir el intervalo de una década —por decir, una distancia L que se extiende desde $\omega = \omega_1$ hasta $\omega = 10\omega_1$ (donde ω_1

a menudo es una potencia entera de 10)— sea x la que ubique la distancia a la que se encuentra ω a la derecha de ω_1 teniendo así $x/L = \log(\omega/\omega_1)$. De particular ayuda es el conocimiento de que $x = 0.3L$ cuando $\omega = 2\omega_1$, $x = 0.6L$ en $\omega = 4\omega_1$ y $x = 0.7L$ en $\omega = 5\omega_1$.

EJEMPLO 16.9

Dibuje el diagrama de fase de la función de transferencia dada por la ecuación [28], H(s) = −2s/[(1 + s/10)(1 + s/20 000)].

Empezamos inspeccionando $\mathbf{H}(j\omega)$:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{-j2\omega}{(1 + j\omega/10)(1 + j\omega/20\,000)} \qquad [29]$$

El ángulo del numerador es una constante, −90°.

Los factores restantes se representan como la suma de los ángulos acortados por los puntos de inflexión en $\omega = 10$ y $\omega = 20\,000$. Estos tres términos aparecen como curvas asintóticas de línea punteada en la figura 16.28 y su suma se presenta como una curva continua. Se obtiene una representación equivalente si la curva se corre hacia arriba de 360°.

También se obtienen valores exactos para la respuesta de fase asintótica. Por ejemplo, en $\omega = 10^4$ rad/s, el ángulo en la figura 16.28 se calcula a partir de los términos del numerador y del denominador en la ecuación [29]. El ángulo del numerador es −90°. El ángulo del polo en $\omega = 10$ es −90°, puesto que ω es más de 10 veces mayor que la frecuencia de esquina. Entre 0.1 y 10 veces la frecuencia de esquina, recordamos que la pendiente es −45° por década de un polo simple. Por lo tanto, en el caso del punto de inflexión en 20 000 rad/s, se calcula el ángulo, $-45° \log(\omega/0.1a) = -45° \log[10\,000/(0.1 \times 20\,000)] = -31.5°$.

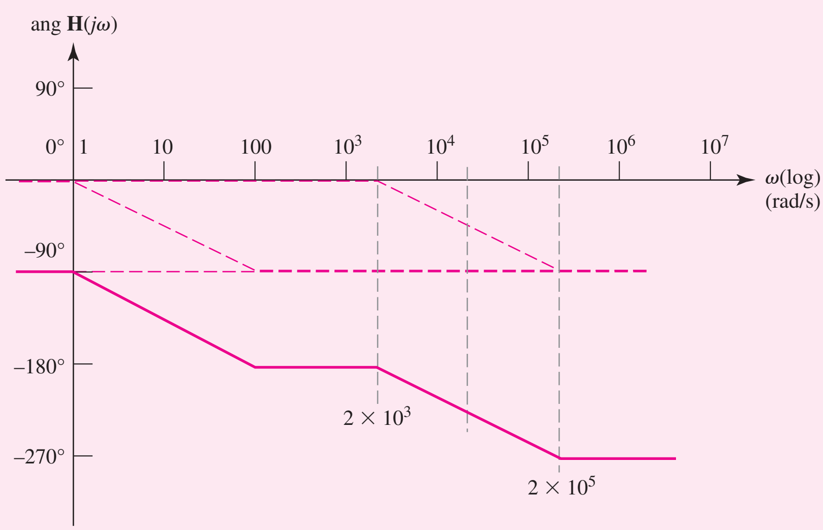


FIGURA 16.28 La curva continua exhibe la respuesta de fase asintótica del amplificador de la figura 16.26.

La suma algebraica de las tres contribuciones es −90° −90° −31.5° = −211.5°, un valor que parece ser moderadamente cercano a la curva de fase asintótica de la figura 16.28.

PRÁCTICA

16.14 Dibuje el diagrama de fase de Bode de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ igual a: (*a*) $50/(\mathbf{s}+100)$; (*b*) $(\mathbf{s}+10)/(\mathbf{s}+100)$; (*c*) $(\mathbf{s}+10)/\mathbf{s}$.

Respuesta: (*a*) $0°$, $\omega < 10$; $-45°$/década, $10 < \omega < 1\,000$; $-90°$, $\omega > 1\,000$; (*b*) $0°$, $\omega < 1$; $+45°$/década, $1 < \omega < 10$; $45°$, $10 < \omega < 100$; $-45°$/década, $100 < \omega < 1\,000$; $0°$, $\omega > 1\,000$; (*c*) $-90°$, $\omega < 1$; $+45°$/década, $1 < \omega < 100$; $0°$, $\omega > 100$.

Términos de orden superior

Hemos considerado los ceros y polos como términos de primer orden, tales como $\mathbf{s}^{\pm 1}$, $(1+0.2\mathbf{s})^{\pm 1}$, y así sucesivamente. Sin embargo, podríamos extender con mucha facilidad el análisis a polos y ceros de orden superior. Un término $\mathbf{s}^{\pm n}$ resulta en una respuesta en magnitud que pasa por $\omega = 1$ con una pendiente de $\pm 20n$ dB/década; la respuesta en fase es un ángulo constante $\pm 90n°$. Además, un cero múltiple, $(1+\mathbf{s}/a)^n$, debe representar la suma de n de las curvas de respuesta en magnitud, o n de las curvas de respuesta en fase del cero simple. Por lo tanto, obtenemos un diagrama en magnitud asintótica que es 0 dB para $\omega < a$ y que tiene una pendiente de $20n$ dB/década cuando $\omega > a$; el error es $-3n$ dB en $\omega = a$, y $-n$ dB en $\omega = 0.5a$ y $2a$. El diagrama de fase es $0°$ para $\omega < 0.1a$, $90n°$ para $\omega > 10a$, $45n°$ en $\omega = a$, y una línea recta con pendiente de $45n°$/década para $0.1a < \omega < 10a$, asimismo, presenta errores tan grandes como $\pm 5.71n°$ en las dos frecuencias.

Las curvas en magnitud y en fase asintóticas asociadas con un factor de $(1+\mathbf{s}/20)^{-3}$ se pueden dibujar sin ninguna dificultad, aunque los errores relativamente grandes asociados con las potencias superiores deben tenerse presentes.

Pares de complejos conjugados

El último tipo de factor que necesitamos considerar representa un par complejo conjugado de polos o ceros. Adoptamos la forma siguiente como la estándar de un par de ceros:

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1 + 2\zeta\left(\frac{\mathbf{s}}{\omega_0}\right) + \left(\frac{\mathbf{s}}{\omega_0}\right)^2$$

La cantidad ζ es el factor de amortiguamiento que se presentó en la sección 16.1, y veremos dentro de poco que ω_0 es la frecuencia de esquina de la respuesta asintótica.

Si $\zeta = 1$ observamos que $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1 + 2(\mathbf{s}/\omega_0) + (\mathbf{s}/\omega_0)^2 = (1+\mathbf{s}/\omega_0)^2$, un cero de segundo orden, como acabamos de considerar. Si $\zeta > 1$, entonces se factorizaría $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ para mostrar los ceros simples. De tal modo, si $\zeta = 1.25$, entonces $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1 + 2.5(\mathbf{s}/\omega_0) + (\mathbf{s}/\omega_0)^2 = (1+\mathbf{s}/2\omega_0)\,(1+\mathbf{s}/0.5\omega_0)$, y también en este caso tenemos una situación familiar.

Se presenta un nuevo caso cuando $0 \le \zeta \le 1$. No es necesario determinar valores para el complejo conjugado de raíces. Es mejor que determinemos los valores asintóticos de baja y alta frecuencias, tanto para la respuesta en magnitud como para la respuesta en fase y aplicamos luego una corrección que depende del valor de ζ.

Para la respuesta en magnitud, tenemos:

$$H_{\text{dB}} = 20\log|\mathbf{H}(j\omega)| = 20\log\left|1 + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right| \qquad [30]$$

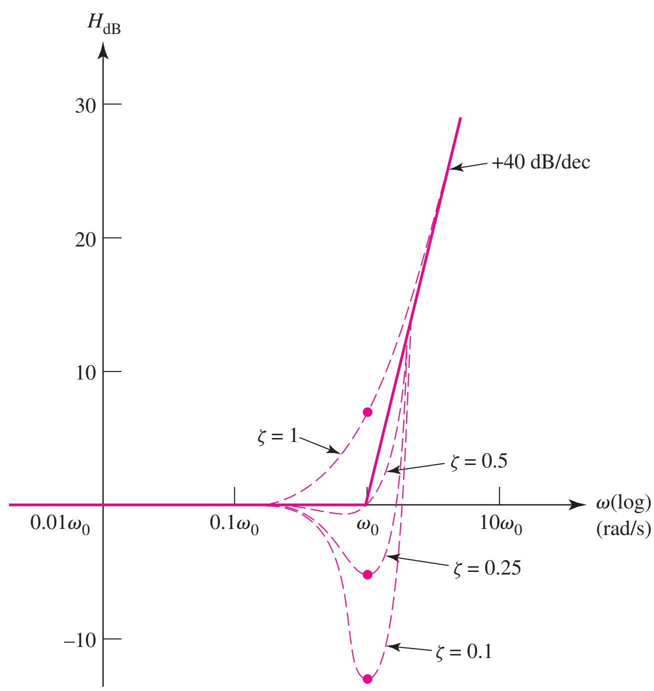
Cuando $\omega \ll \omega_0$, $\mathbf{H}_{\text{dB}} = 20\log|1| = 0$ dB, que es la asíntota de baja frecuencia. Luego, si $\omega \gg \omega_0$, sólo es importante el término al cuadrado, y $\mathbf{H}_{\text{dB}} = 20\log|-(\omega/\omega_0)^2| = 40$

$\log(\omega/\omega_0)$. Tenemos una pendiente de + 40 dB/década, que es la asíntota de alta frecuencia; además, las dos asíntotas se intersectan en 0 dB, $\omega = \omega_0$. La curva continua en la figura 16.29 muestra esta representación asintótica de la respuesta en magnitud. Sin embargo, se requiere aplicar una corrección en la cercanía de la frecuencia de esquina. Sea $\omega = \omega_0$ en la ecuación [30] y tenemos

$$H_{\text{dB}} = 20\log\left|j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right| = 20\log(2\zeta) \qquad [31]$$

Si $\zeta = 1$, un caso límite, la corrección es +6 dB; para $\zeta = 0.5$, no se requiere corrección; y si $\zeta = 0.1$, la corrección es −14 dB. Conocer este valor de corrección resulta muchas veces suficiente para dibujar una respuesta en magnitud asintótica satisfactoria. La figura 16.29 ilustra curvas más exactas de $\zeta = 1$, 0.5, 0.25 y 0.1, según se calcula a partir de la ecuación [30]. Por ejemplo, si $\zeta = 0.25$, entonces el valor exacto de H_{dB} en $\omega = 0.5\omega_0$ es:

$$H_{\text{dB}} = 20\log|1 + j0.25 - 0.25| = 20\log\sqrt{0.75^2 + 0.25^2} = -2.0 \text{ dB}$$



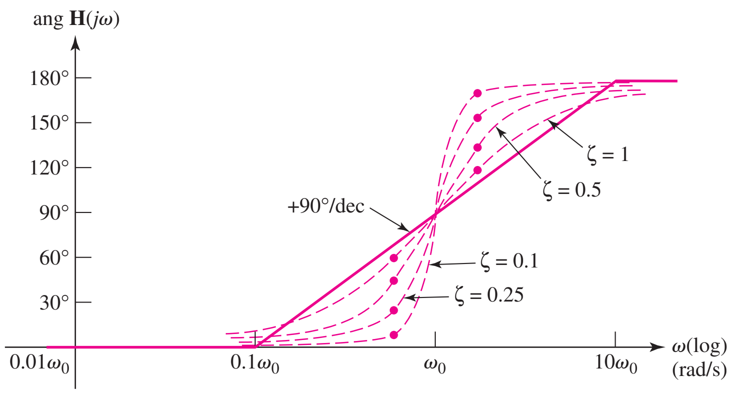
■ **FIGURA 16.29** Diagramas de amplitud de Bode de $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1 + 2\zeta(\mathbf{s}/\omega_0) + (\mathbf{s}/\omega_0)^2$ para diversos valores del factor de amortiguamiento ζ.

Los picos negativos no muestran un valor mínimo exactamente en $\omega = \omega_0$, como vemos mediante la curva de $\zeta = 0.5$. El valle se encuentra siempre a una frecuencia un poco inferior.

Si $\zeta = 0$, entonces $\mathbf{H}(j\omega_0) = 0$ y $H_{\text{dB}} = -\infty$. Los diagramas de Bode suelen no dibujarse en esta situación.

Nuestra última tarea consiste en dibujar la respuesta en fase asintótica correspondiente a $\mathbf{H}(j\omega) = 1 + j2\zeta(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2$. Debajo de $\omega = 0.1\omega_0$ dejamos que ang $\mathbf{H}(j\omega) = 0°$; arriba de $\omega = 10\omega_0$, tenemos ang $\mathbf{H}(j\omega) = \text{ang}\,[-(\omega/(\omega_0)^2] = 180°$. Para frecuencia de esquina, ang $\mathbf{H}(j\omega_0) = \text{ang}\,(j2\zeta) = 90°$. En el intervalo $0.1\omega_0 < \omega < 10\omega_0$ comenzamos con la línea recta que se muestra como una curva continua en la

figura 16.30, que se extiende desde ($0.1\omega_0$, 0°), hasta (ω_0, 90°) y termina en ($10\omega_0$, 180°); con una pendiente de 90°/década.



■ **FIGURA 16.30** La recta de aproximación a la característica de fase correspondiente a $\mathbf{H}(j\omega) = 1 + j2\zeta\,(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2$ se muestra como una curva continua, y la respuesta de fase verdadera se presenta para $\zeta = 1$, 0.5, 0.25 y 0.1 con líneas punteadas.

Ahora debemos proporcionar alguna corrección a esta curva básica para diversos valores de ζ. De acuerdo con la ecuación [30] tenemos

$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = \tan^{-1}\frac{2\zeta(\omega/\omega_0)}{1-(\omega/\omega_0)^2}$$

Un valor exacto por sobre y otro por debajo de $\omega = \omega_0$ quizá resulte suficiente para dar una forma aproximada a la curva. Si tomamos $\omega = 0.5\omega_0$, encontramos que ang $\mathbf{H}(j\,0.5\omega_0) = \tan^{-1}(4\zeta/3)$, en tanto que el ángulo es $180° - \tan^{-1}(4\zeta/3)$ en $\omega = 2\omega_0$. Las curvas de la fase se presentan como líneas punteadas en la figura 16.30 para $\zeta = 1$, 0.5, 0.25 y 0.1; los puntos gruesos identifican valores exactos en $\omega = 0.5\omega_0$ y $\omega = 2\omega_0$.

Si el factor cuadrático aparece en el denominador, las curvas tanto en magnitud como en fase son las *negativas* de las que se acaban de analizar. Concluimos con un ejemplo que contiene factores tanto lineales como cuadráticos.

EJEMPLO 16.10

Construya el diagrama de Bode de la función de transferencia $\mathbf{H}(s) = 100\,000\,s/[(s+1)(10\,000 + 20s + s^2)]$.

Consideremos primero el factor cuadrático y ordenémoslo de una forma que permita ver el valor de ζ. Comenzamos dividiendo el factor de segundo orden por su término constante, 10 000:

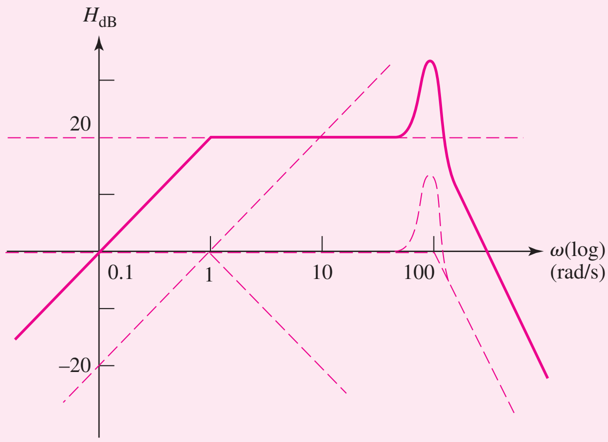
$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{10\mathbf{s}}{(1+\mathbf{s})(1+0.002\mathbf{s}+0.0001\mathbf{s}^2)}$$

Una inspección del término $\mathbf{s}^2$ muestra que $\omega_0 = \sqrt{1/0.0001} = 100$. Luego se escribe el término lineal de la cuadrática para mostrar el factor 2, el factor $(\mathbf{s}/\omega_0)$ y, por último, el factor ζ:

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{10\mathbf{s}}{(1+\mathbf{s})[1+(2)(0.1)(\mathbf{s}/100)+(\mathbf{s}/100)^2]}$$

Podemos ver que $\zeta = 0.1$.

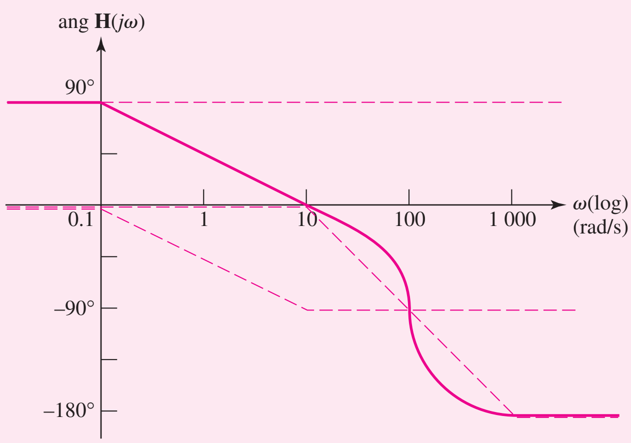
Las asíntotas de la curva de respuesta en magnitud se dibujan en líneas delgadas en la figura 16.31: 20 dB para el factor de 10, una línea recta infinita a través de $\omega = 1$ con una pendiente de +20 dB/década para el factor **s**, una esquina en $\omega = 1$ para el polo simple y una esquina en $\omega = 100$ con una pendiente de −40 dB/década para el término de segundo orden en el denominador. Sumando estas cuatro curvas y proporcionando una corrección de +14 dB para el factor cuadrático, se obtiene la curva con trace continuo de la figura 16.31.



■ **FIGURA 16.31** Diagrama de Bode de la función de transferencia

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{100\,000\mathbf{s}}{(\mathbf{s}+1)(10\,000+20\mathbf{s}+\mathbf{s}^2)}.$$

La respuesta en fase contiene tres componentes: + 90° para el factor **s**; 0° para $\omega < 0.1$, −90° para $\omega > 10$, y −45°/década para el polo simple; y 0° para $\omega < 10$, −180° para $\omega > 1\,000$, y −90° década para el factor cuadrático. La adición de estas tres asíntotas, más cierta cantidad de mejora para $\zeta = 0.1$ se presentan como una curva continua en la figura 16.32.



■ **FIGURA 16.32** Diagrama de fase de Bode de la función de transferencia

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{100\,000\,\mathbf{s}}{(\mathbf{s}+1)(10\,000+20\mathbf{s}+\mathbf{s}^2)}.$$

PRÁCTICA

16.15 Si $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1\,000\mathbf{s}^2/(\mathbf{s}^2 + 5\mathbf{s} + 100)$, dibuje el diagrama de amplitud de Bode y calcule el valor de: (*a*) ω cuando $H_{\text{dB}} = 0$; (*b*) H_{dB} en $\omega = 1$; (*c*) H_{dB} a medida que $\omega \to \infty$.

Respuestas: 0.316 rad/s; 20 dB; 60 dB.

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

La técnica para generar diagramas de Bode es valiosa. Existen muchas situaciones en las que se necesita con rapidez un diagrama aproximado (por ejemplo en los exámenes o cuando se evalúa una topología de circuito particular para una aplicación específica), y sólo resulta adecuado conocer simplemente la forma general de la respuesta. Además, los diagramas de Bode son invaluables cuando se diseñan filtros, ya que nos permiten que se seleccionen los factores y los valores de los coeficientes.

En situaciones en las que se requieren las curvas de respuesta *exactas* (como cuando se verifica un diseño de circuito final), el ingeniero dispone de varias opciones asistidas por computadora. La primera técnica que consideraremos es el uso de MATLAB para generar una curva de respuesta en frecuencia. A fin de conseguirlo, el circuito debe analizarse primero para obtener la función de transferencia correcta. Sin embargo, no es necesario factorizar o simplificar la expresión.

Considere el circuito de la figura 16.26. Anteriormente determinamos que la función de transferencia de este circuito puede expresarse como

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{-2\mathbf{s}}{(1 + \mathbf{s}/10)(1 + \mathbf{s}/20\,000)}$$

Buscamos una gráfica detallada de esta función sobre el intervalo de frecuencia 100 mrad/s a 1 Mrad/s. Dado que la gráfica final se dibujará en una escala logarítmica, no hay necesidad de espaciar de manera uniforme las frecuencias discretas, sino que, sencillamente, recurrimos a la función de MATLAB *logspace*() para generar un vector de frecuencia, donde los primeros dos argumentos representan la potencia de 10 para las frecuencias de inicio y final, respectivamente (−1 y 6 en el ejemplo presente), y el tercer argumento es el número total de puntos que se desea. De tal modo, la serie de instrucciones MATLAB es

```
EDU» w = logspace(−1,6,100);
EDU» denom = (1+j*w/10) .* (1+j*w/20000);
EDU» H = −2*j*w ./ denom;
EDU» Hdb = 20*log10(abs(H));
EDU» semilogx(w,Hdb)
EDU» xlabel('frequency (rad/s)')
EDU» ylabel ('|H(jw)| (dB)')
```

la cual proporciona la gráfica que se describe en la figura 16.33.

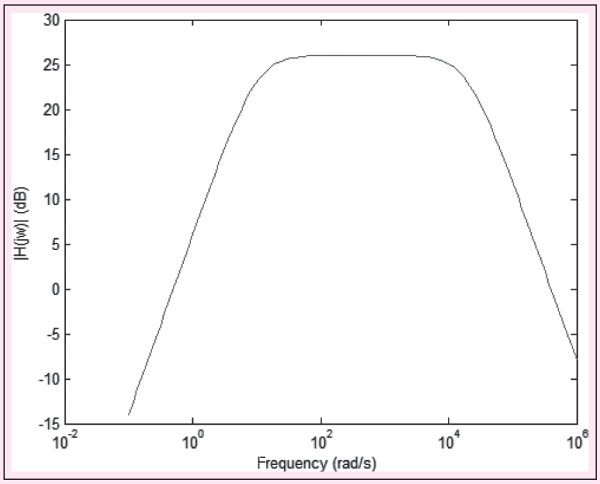


FIGURA 16.33 Gráfica H_{dB} generada utilizando MATLAB.

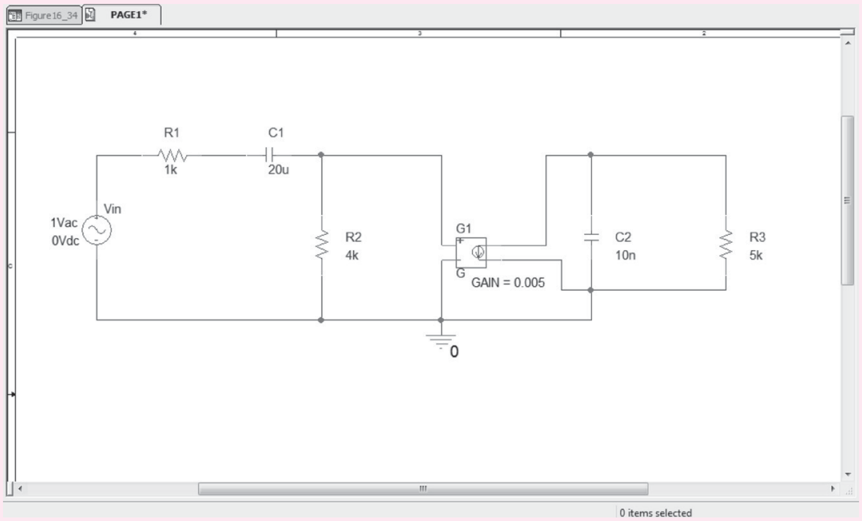
Vale la pena hacer unos cuántos comentarios acerca del código MATLAB. En primer lugar, observe que hemos sustituido $\mathbf{s} = j\omega$ en la expresión de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$. Además, MATLAB considera la variable ω como un vector o matriz unidimensional. Como tal, esta variable provoca dificultades en el denominador de una expresión cuando MATLAB intenta aplicar las reglas del álgebra matricial a cualquier expresión. Por lo tanto, el denominador de $\mathbf{H}(j\omega)$ se calcula en una línea separada, y se requiere el operador ".*" en vez de "*", con el objeto de multiplicar los dos términos. Este nuevo operador equivale al siguiente código de MATLAB:

```
EDU» for k = 1:100
denom = (1 + j*w(k)/10) * (1 + j*w(k)/20000);
end
```

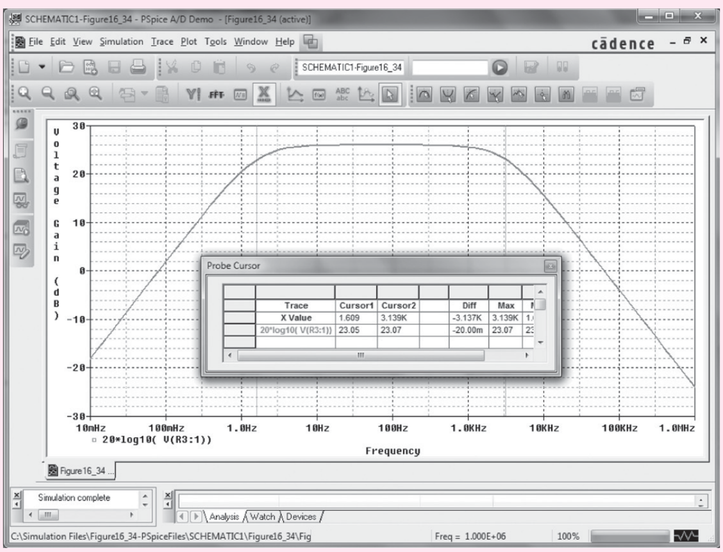
De un modo similar, el nuevo operador "./" se usa en la línea de código subsecuente. Los resultados se desean en dB, por lo que se recurre a la función *log*10() la cual representa el logaritmo natural en MATLAB. Por último, se utiliza un nuevo comando de gráfica; *semilogx*() para generar una gráfica en la que el eje *x* tiene una escala logarítmica. En este punto se recomienda al lector volver a los ejemplos anteriores y utilizar tales técnicas para generar curvas exactas, a fin de compararlas con los correspondientes diagramas de Bode.

PSpice resulta también muy adecuado para generar curvas de respuesta en frecuencia, especialmente para evaluar el diseño final. La figura 16.34*a* muestra el circuito de la figura 16.26, donde la tensión en las terminales de la resistencia R3 representa la tensión de salida deseada. El componente VAC de la fuente se ha empleado con una tensión fija de 1 V por conveniencia. Se requiere de una simulación de barrido en ca para determinar la respuesta en frecuencia del circuito; la figura 16.34*b* se generó utilizando 10 puntos por década (donde se selecciona la opción Decade del menú **Logarithmic** AC Sweep Type), desde 10 mHz hasta 1 MHz. Observe que la simulación se ha llevado a cabo en Hz, no en rad/s, por lo que la herramienta del cursor está indicando un ancho de banda de 3.14 kHz.

También en este caso se sugiere al lector que simule circuitos como ejemplo y que compare los resultados con los diagramas de Bode generados con anterioridad.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 16.34** (*a*) Circuito de la figura 16.26. (*b*) Respuesta en frecuencia del circuito graficada en escala de dB.

16.7 DISEÑO DE FILTROS BÁSICOS

El diseño de filtros es un tema muy práctico (e interesante) que por sí solo merece un libro de texto separado. En esta sección presentamos algunos de los conceptos básicos del filtrado y exploramos circuitos de filtro tanto pasivos como activos. Estos circuitos pueden ser muy simples, o bien consistir en un solo capacitor o inductor, cuya integración a una red determinada propicia un mejor desempeño. También podrían ser bastante

complejos, pues pueden constar de muchas resistencias, capacitores, inductores y amp ops para obtener la curva de respuesta precisa que se requiere en una aplicación dada. En la electrónica moderna, los filtros se utilizan para obtener tensiones de cd en los suministros de potencia, eliminar ruido en canales de comunicación, separar canales de radio y de televisión a partir de una señal multiplexada que proporcionan las antenas, y amplificar la señal de bajos en el estéreo, por nombrar sólo algunas aplicaciones.

El concepto implícito en un filtro consiste en que selecciona las frecuencias que pueden pasar a través de una red. Existen diversas variedades, dependiendo de las necesidades de una aplicación particular. Un ***filtro pasabajas***, cuya respuesta se ilustra en la figura 16.35*a* deja pasar frecuencias debajo de una frecuencia de corte, mientras que amortigua de manera significativa las frecuencias por arriba de dicho corte. Un ***filtro pasaaltas***, en cambio, realiza lo opuesto, como se indica en la figura 16.35*b*. La cifra de mérito clave para un filtro es la agudeza del corte, o el grado de inclinación de la curva en la cercanía de la frecuencia de esquina. En general, las curvas de respuesta más inclinadas requieren circuitos más complejos.

La combinación de un filtro pasabajas y uno pasaaltas es lo que se conoce como ***filtro pasabanda***, como se presenta mediante la curva de respuesta de la figura 16.35*c*.

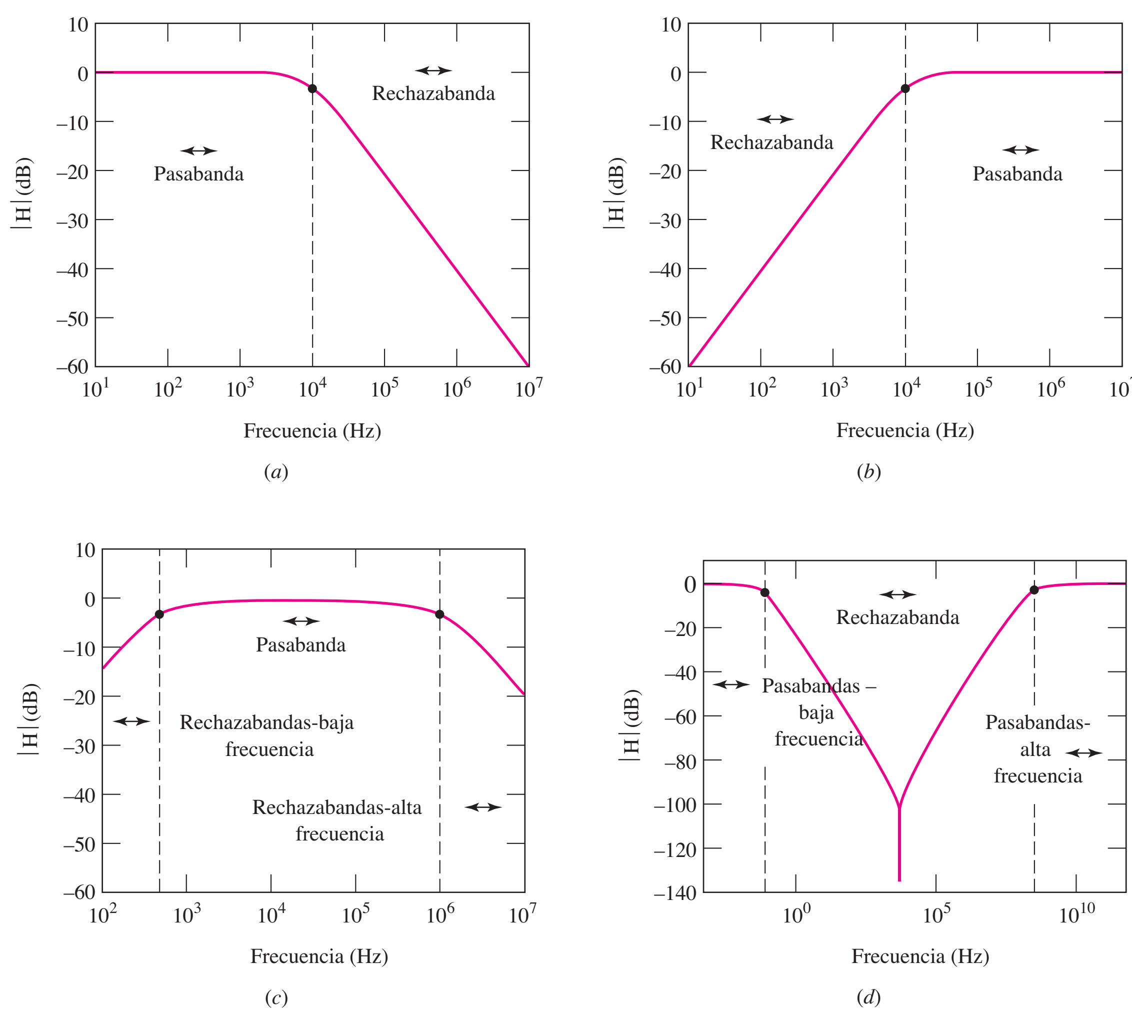


FIGURA 16.35 Curvas de respuesta en frecuencia de (*a*) filtro pasabajas; (*b*) filtro pasaaltas; (*c*) filtro pasabanda; (*d*) filtro rechazabanda. En cada diagrama, cada punto corresponde a −3 dB.

En este tipo de filtro, la región entre las dos frecuencias de esquina se conoce como ***pasabandas***; la región fuera de la banda de paso se conoce como ***rechazabandas***. Estos términos también se aplican a los filtros pasabajas y pasaaltas, como se indica en la figura 16.35*a* y *b*. Al barrer las frecuencias de corte de los dos filtros, también creamos un ***filtro rechazabanda***, que deja pasar frecuencias tanto altas como bajas, pero atenúa cualquier señal que tenga una frecuencia entre las dos frecuencias de esquina (figura 16.35*d*).

El ***filtro muesca*** es un filtro rechazabanda especializado que se diseña con una característica de respuesta estrecha, lo cual bloquea un solo componente de frecuencia de una señal. También existen ***filtros multibanda***; se trata de circuitos que tienen múltiples bandas de paso y de supresión. El diseño de tales filtros es directo, pero se encuentra más allá del alcance de este libro.

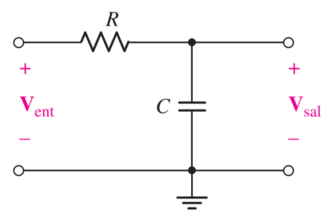
Filtros pasivos pasabajas y pasaaltas

Se puede construir un filtro mediante el empleo de un solo capacitor y una sola resistencia, como se ve en la figura 16.36*a*. La función de transferencia de este circuito de filtro pasabajas es,

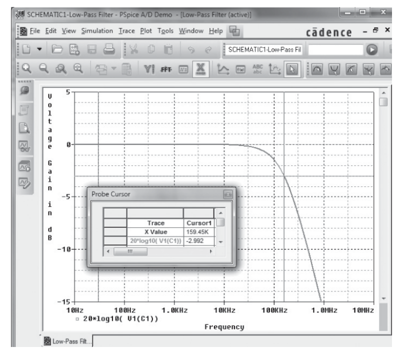
$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_{ent}} = \frac{1}{1 + RC\mathbf{s}} \qquad [32]$$

$\mathbf{H}(\mathbf{s})$ tiene una sola frecuencia de esquina, la cual ocurre en $\omega = 1/RC$, y un cero en $\mathbf{s} = \infty$, lo cual propicia su comportamiento de filtrado "pasabajas". Las frecuencias bajas ($\mathbf{s} \to 0$) producen $|\mathbf{H}(\mathbf{s})|$ cerca de su valor máximo (la unidad o 0 dB), y las frecuencias altas ($\mathbf{s} \to \infty$) originan $|\mathbf{H}(\mathbf{s})| \to 0$. Este comportamiento se entiende en forma cualitativa al considerar la impedancia del capacitor: a medida que aumenta la frecuencia, el capacitor empieza a actuar como un cortocircuito para las señales de ca, lo que da lugar a una reducción en la tensión de salida. En la figura 16.36*b* se presenta el ejemplo de una curva de respuesta de un filtro de tales características con $R = 500\ \Omega$ y $C = 2$nF la frecuencia de esquina de 159 kHz (1 Mrad/s) se determina moviendo el cursor hacia −3dB. Lo anguloso de la curva de respuesta en la vecindad de la frecuencia de corte se mejora al moverse hacia un circuito que contenga elementos reactivos adicionales (es decir, capacitivos y/o inductivos).

Un filtro pasaaltas se construye barriendo simplemente las ubicaciones de la resistencia y del capacitor en la figura 16.36*a*, como vemos en el ejemplo siguiente.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 16.36** (*a*) Filtro pasabajas simple *RC*. (*b*) Respuesta en frecuencia simulada para $R = 500\ \Omega$ y $C = 2$ nf, que muestra frecuencia de esquina en 159 kHz.

EJEMPLO 16.11

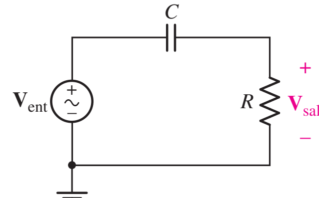
Diseñe un filtro pasaaltas con una frecuencia de esquina de 3 kHz.

Comenzamos eligiendo una topología de circuito. Dado que no se indican requerimientos en cuanto a lo riguroso de la respuesta, seleccionamos el circuito simple de la figura 16.37.

Se determina fácilmente que la función de transferencia de este circuito corresponde a

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathbf{V}_{sal}}{\mathbf{V}_{ent}} = \frac{RC\mathbf{s}}{1 + RC\mathbf{s}}$$

que tiene un cero en $\mathbf{s} = 0$ y un polo en $\mathbf{s} = -1/RC$, lo que conduce a un comportamiento de filtro "pasaaltas" (es decir, $|\mathbf{H}| \to 0$ a medida que $\omega \to \infty$).

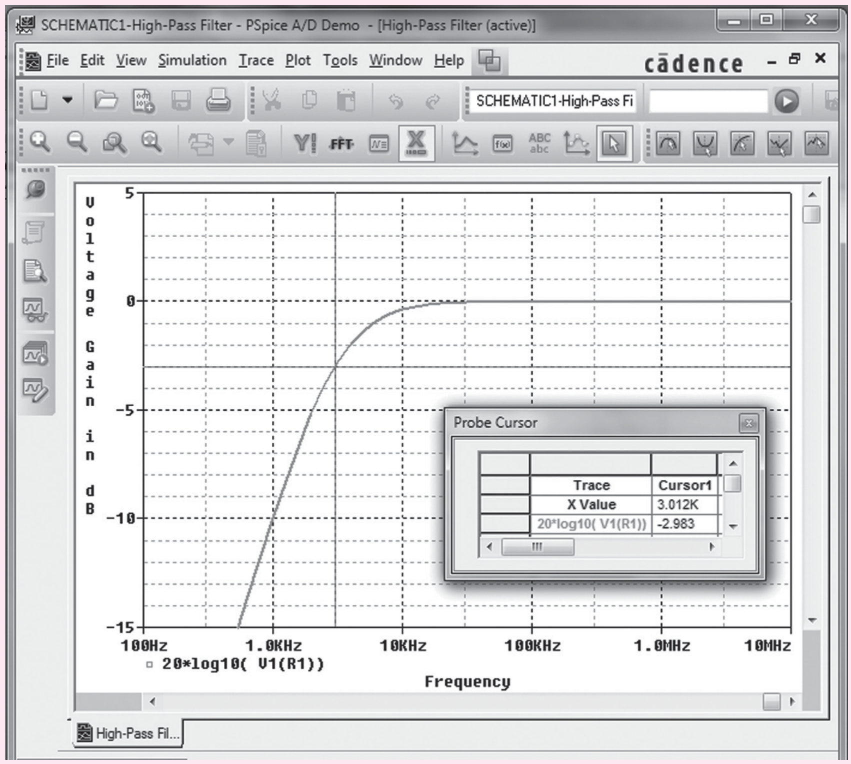


■ **FIGURA 16.37** Circuito de filtro pasaaltas simple para el que deben elegirse los valores de *R* y *C* a fin de obtener una frecuencia de corte de 3 kHz.

La frecuencia de esquina del circuito de filtro es $\omega_c = 1/RC$, y buscamos un valor de $\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi(3\,000) = 18.85$ krad/s. También en este caso se debe seleccionar un valor para R o C. En la práctica, es más probable que nuestra decisión se base en los valores de las resistencias y capacitores que estén a la mano, pero dado que no se ha dado esa información aquí, tenemos la libertad de efectuar elecciones arbitrarias.

Por lo tanto, seleccionamos el valor de la resistencia estándar de 4.7 kΩ para R, lo que conduce a un requerimiento de $C = 11.29$ nF.

El único paso que queda consiste en verificar el diseño con una simulación PSpice; la curva de respuesta en frecuencia predicha se muestra en la figura 16.38.



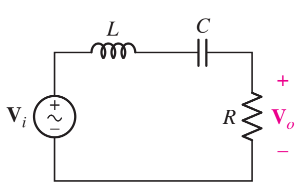
■ **FIGURA 16.38** Respuesta en frecuencia simulada del diseño final, en el que se muestra una frecuencia de corte (3 dB) de 3 kHz, como se esperaba.

PRÁCTICA

16.16 Diseñe un filtro pasaaltas con una frecuencia de corte de 13.56 MHz, frecuencia común de un suministro de potencia de RF. Verifique el diseño con PSpice.

Filtro pasabandas

En este capítulo ya hemos visto varios circuitos que se clasificarían como filtros "pasabandas" (por ejemplo, las figuras 16.1 y 16.8). Considere el circuito simple de la figura 16.39, en el que la salida se toma a través de la resistencia. Se encuentra con facilidad que la función de transferencia de este circuito es



■ **FIGURA 16.39** Filtro pasabandas simple construido mediante el uso de un circuito *RLC* en serie.

$$\mathbf{A}_V = \frac{\mathbf{s}RC}{LC\mathbf{s}^2 + RC\mathbf{s} + 1} \qquad [33]$$

La magnitud de esta función es (después de unas cuantas manipulaciones algebraicas)

$$|\mathbf{A}_V| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad [34]$$

la cual, en el límite de $\omega \to 0$, se convierte en

$$|\mathbf{A}_V| \approx \omega RC \to 0$$

y en el límite de $\omega \to \infty$ se vuelve

$$|\mathbf{A}_V| \approx \frac{R}{\omega L} \to 0$$

Sabemos a través de la experiencia con los diagramas de Bode que la ecuación [33] representa tres frecuencias críticas: un cero y dos polos. Con la finalidad de obtener una respuesta de filtro pasabandas con un valor pico unitario (0 dB), las dos frecuencias de los polos deben ser mayores que 1 rad/s, la frecuencia de cruce a 0 dB del término cero. Estas dos frecuencias críticas pueden obtenerse factorizando la ecuación [33] o determinando los valores de ω en los que la ecuación [34] es igual a $1/\sqrt{2}$. La frecuencia central de este filtro se presenta en $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Por lo tanto, si se aplica un poco de álgebra después de fijar la ecuación [34] igual a $1/\sqrt{2}$, encontramos que

$$\left(1 - LC\omega_c^2\right)^2 = \omega_c^2 R^2 C^2 \quad [35]$$

Al tomar la raíz cuadrada en ambos lados obtenemos

$$LC\omega_c^2 + RC\omega_c - 1 = 0$$

Mediante el empleo de la ecuación cuadrática encontramos que

$$\omega_c = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \quad [36]$$

En este contexto, la frecuencia negativa es una solución no física para nuestra ecuación original, por lo que es necesario retener sólo la raíz positiva de la ecuación [36]. Sin embargo, quizá hemos ido un poco rápido al tomar la raíz cuadrada positiva de ambos lados de la ecuación [35]. Tomando en cuenta también la raíz cuadrada negativa, la cual es igualmente válida, obtenemos

$$\omega_c = \frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \quad [37]$$

a partir de la cual se puede demostrar que sólo el radicando positivo es físico. Por ende, obtenemos ω_L a partir de la ecuación [36] y ω_H a partir de la ecuación [37]; puesto que $\omega_H - \omega_L = \mathcal{B}$, por simple álgebra se demuestra que $\mathcal{B} = R/L$.

EJEMPLO 16.12

Diseñe un filtro pasabanda caracterizado por un ancho de banda de 1 MHz y uno de corte de alta frecuencia de 1.1 MHz.

Elegimos la topología del circuito de la figura 16.39 y comenzamos determinando las frecuencias de esquina necesarias. El ancho de banda está dado por $f_H - f_L$, por lo que

$$f_L = 1.1 \times 10^6 - 1 \times 10^6 = 100 \text{ kHz}$$

y

$$\omega_L = 2\pi f_L = 628.3 \text{ krad/s}$$

El corte de alta frecuencia (ω_H) es simplemente 6.912 Mrad/s.

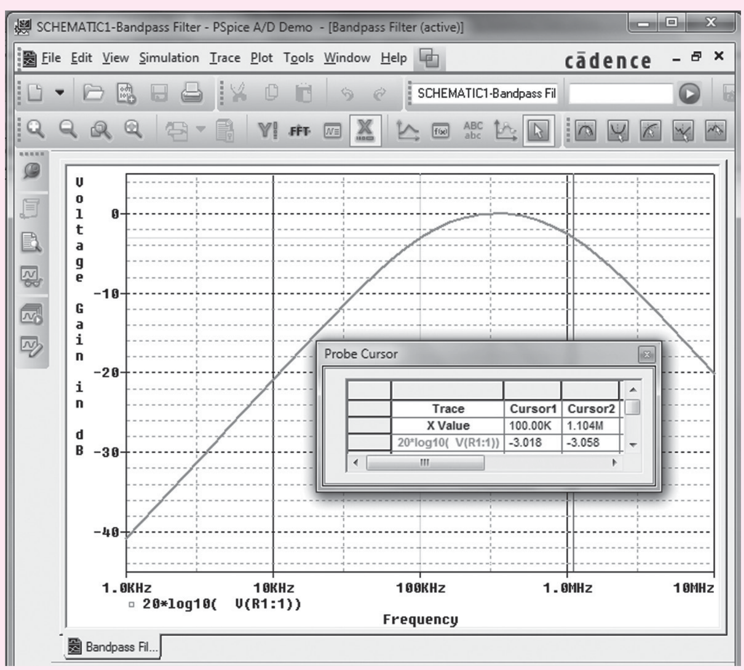
Con la finalidad de proceder al diseño de un circuito con estas características, se requiere obtener la expresión de cada frecuencia, en términos de las variables R, L y C.

El igualar la ecuación [37] con $2\pi(1.1 \times 10^6)$ permite resolver respecto a $1/LC$, pues ya sabemos que $\mathcal{B} = 2\pi(f_H - f_L) = 6.283 \times 10^6$.

$$\frac{1}{2}\mathcal{B} + \left[\frac{1}{4}\mathcal{B}^2 + \frac{1}{LC}\right]^{1/2} = 2\pi(1.1 \times 10^6)$$

Al resolver, observamos que $1/LC = 4.343 \times 10^{12}$. Al elegir de manera arbitraria $L = 50$ mH obtenemos $R = 314\ \Omega$ y $C = 4.6$ pF. Se debe observar que no hay una solución única para este problema de "diseño", pues tanto R, L como C puede elegirse como punto de partida.

La verificación del diseño con PSpice se muestra en la figura 16.40.



■ **FIGURA 16.40** Respuesta simulada del diseño de un filtro pasabandas que muestra un ancho de banda de 1 MHz y una frecuencia de corte superior de 1.1 MHz como se deseaba.

PRÁCTICA

16.17 Diseñe un filtro pasabanda con un corte de baja frecuencia de 100 rad/s y uno de alta frecuencia de 10 krad/s.

Respuesta: Una posible respuesta de muchas: $R = 990\ \Omega$, $L = 100$ mH y $C = 10\ \mu$F.

El tipo de circuito que se ha estudiado se conoce como ***filtro pasivo***, pues se construye sólo a partir de componentes pasivos (es decir, sin transistores, amp ops u otros elementos "activos"). Aunque los filtros pasivos son relativamente comunes, no son muy adecuados para todas las aplicaciones. La ganancia (definida como la tensión de salida dividida entre la tensión de entrada) de un filtro pasivo resulta difícil de establecer, y muchas veces es deseable la amplificación en los circuitos de filtro.

Filtros activos

El uso de un elemento activo, como el amp op, en el diseño de filtros, supera por mucho las desventajas de los filtros pasivos. Como vimos en el capítulo 6, se diseñan circuitos de amp op para proporcionar ganancia. Asimismo, estos circuitos pueden presentar un comportamiento similar al de los inductores mediante la ubicación estratégica de capacitores.

La circuitería interna de un amp op tiene capacitancias muy pequeñas (por lo común del orden de 100 pF), las cuales limitan la frecuencia máxima a la que el op amp funcionará de manera apropiada. En consecuencia, cualquier circuito de amp op se comportará como un filtro pasabajas con una frecuencia de corte de quizá 20 MHz o más en dispositivos modernos (lo cual depende de la ganancia del circuito).

EJEMPLO 16.13

Diseñe un filtro pasabajas activo con una frecuencia de corte de 10 kHz y una ganancia de tensión de 40 dB.

Para frecuencias mucho menores de 10 kHz requerimos un circuito amplificador capaz de proporcionar una ganancia de 40 dB, o 100 V/V. Lo anterior se logra utilizando sólo un amplificador no inversor (como el de la figura 16.41*a*) con

$$\frac{R_f}{R_1} + 1 = 100$$

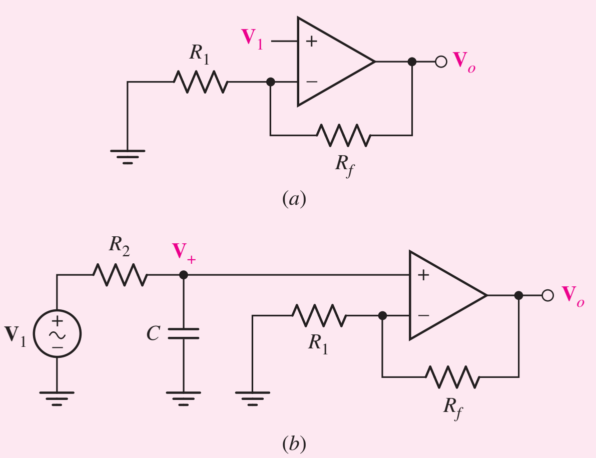
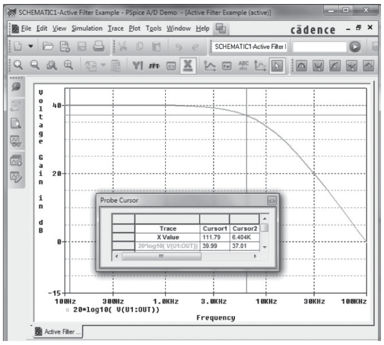
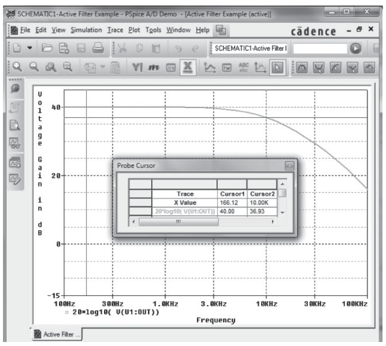


FIGURA 16.41 (*a*) Circuito de amp op no inversor simple. (*b*) Filtro pasabajas que consta de una resistencia R_2 y de un capacitor C que se ha agregado a la entrada.

(*continúa*)



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 16.42** (*a*) Respuesta en frecuencia del circuito de filtro utilizando un amp op μA741 en el que se muestra una frecuencia de esquina de 6.4 kHz. (*b*) Respuesta en frecuencia del mismo circuito de filtro, pero utilizando ahora un amp op LF411. La frecuencia de corte del circuito es igual a 10 kHz, que es el valor deseado.

Para proveer una esquina de alta frecuencia a 10 kHz, requerimos un filtro pasabajas en la entrada del amp op (como en la figura 16.41*b*). Para calcular la función de transferencia se comienza en la entrada no inversora,

$$\mathbf{V}_+ = \mathbf{V}_i \frac{1/\mathbf{s}C}{R_2 + 1/\mathbf{s}C} = \mathbf{V}_i \frac{1}{1 + \mathbf{s}R_2C}$$

En la entrada inversora tenemos

$$\frac{\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_+}{R_f} = \frac{\mathbf{V}_+}{R_1}$$

Al combinar ambas ecuaciones y despejar $\mathbf{V}_o$ encontramos que

$$\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_i \left(\frac{1}{1 + \mathbf{s}R_2C}\right)\left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right)$$

El valor máximo de la ganancia $\mathbf{A}_V = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$ es $1 + R_f/R_1$, por lo que igualamos esta cantidad a 100. En razón de que ninguna resistencia aparece en la expresión de la frecuencia de esquina $(R_2C)^{-1}$, cualquiera puede elegirse primero. Por lo tanto, seleccionamos $R_1 = 1$ kΩ, de manera que $R_f = 99$ kΩ.

Al elegir de manera arbitraria $C = 1\mu$F encontramos que

$$R_2 = \frac{1}{2\pi(10 \times 10^3)C} = 15.9\ \Omega$$

En este punto se completa nuestro diseño, ¿o no? La respuesta en frecuencia simulada en este circuito se muestra en la figura 16.42*a*.

Resulta del todo claro que, en realidad, nuestro diseño no cumple la especificación del corte de 10 kHz. ¿Qué hicimos mal? Una revisión cuidadosa del álgebra no revela ningún error, por lo que en alguna parte se planteó un supuesto erróneo. La simulación se llevó a cabo utilizando un amp op μA741 en oposición al amp op ideal supuesto en las deducciones. Resulta que ésta es la fuente del desconcierto: el mismo circuito con un amp op LF411 en vez del μA741 origina una frecuencia de corte de 10 kHz como se desea. El resultado de la simulación correspondiente se presenta en la figura 16.42*b*.

Desafortunadamente, el amp op μA741 con una ganancia de 40 dB tiene una frecuencia de esquina en la vecindad de 10 kHz, que no puede ignorarse en este caso. Sin embargo, el LF411 no alcanza su primera frecuencia de esquina sino hasta casi 75 kHz, lo cual está bastante alejado de 10 kHz como para afectar el diseño.

PRÁCTICA

16.18 Diseñe un circuito de filtro pasabajas con una ganancia de 30 dB y una frecuencia de corte de 1 kHz.

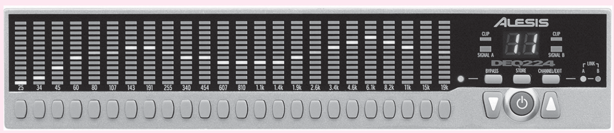
Respuesta: Una posible respuesta de muchas: $R_1 = 100$ kΩ, $R_f = 3.062$ MΩ, $R_2 = 79.58\ \Omega$ y $C = 2\mu$F.

APLICACIÓN PRÁCTICA

Ajuste de bajos, agudos e intermedios

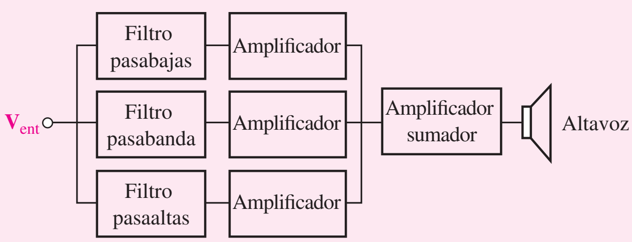
Por lo general es deseable contar con capacidad para ajustar los bajos, agudos e intermedios de manera independiente en un sistema de sonido, incluso en el caso de un equipo económico. Suele aceptarse que el intervalo de frecuencias de audio (al menos para el oído humano) va de 20 Hz a 20 kHz, con los bajos a frecuencias inferiores (< 500 Hz más o menos) y los agudos a frecuencias superiores > 5 kHz aproximadamente).

El diseño de un sistema ecualizador gráfico simple se convierte en una tarea relativamente sencilla, aunque un sistema como el que se muestra en la figura 16.43 requiere de un poco más de esfuerzo. En el ecualizador tipo bajo, intermedio y agudo comunes en muchos radios portátiles, la señal principal (proporcionada por el circuito receptor de radio, o quizás un reproductor de CD) se compone de un amplio espectro de frecuencias que tienen un ancho de banda de casi 20 kHz.



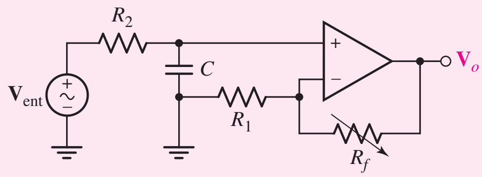
■ **FIGURA 16.43** Ejemplo de un ecualizador gráfico. *Cortesía de Alesis*.

Esa señal debe enviarse a tres diferentes circuitos de amp op, cada uno con un filtro diferente en la entrada. El circuito de ajuste de bajos requerirá un filtro pasabajas; el circuito de ajuste de agudos, uno pasaaltas y el circuito de ajuste intermedio, un filtro pasabanda. La salida de cada circuito de amp op se alimenta luego a un circuito amplificador sumador; en la figura 16.44 se presenta el diagrama de bloques del circuito completo.



■ **FIGURA 16.44** Diagrama de bloques de un circuito ecualizador gráfico simple.

El bloque constitutivo básico se indica en la figura 16.45. El circuito consiste en un circuito de amp op inversor caracterizado por una ganancia de tensión de $1 + R_f/R_1$, y un filtro pasabajas simple compuesto por una resistencia y un capacitor C. La resistencia de retroalimentación R_f es una resistencia variable (conocida algunas veces como ***potenciómetro***), el cual permite modificar la ganancia mediante la rotación de una perilla; las personas comunes llamarían a esta resistencia el control de volumen. La red del filtro pasabajas restringe las frecuencias que entrarán al amp op, y en consecuencia las que se amplificarán; la frecuencia de esquina es simplemente $(R_2C)^{-1}$. Si el diseñador de circuitos necesita que el usuario también elija la frecuencia de corte del filtro, tal vez R_2 se sustituya por un potenciómetro o, de manera alterna, C podría reemplazarse por un capacitor variable. Las etapas restantes se construyen en esencia de la misma manera, aunque con diferente red de filtro en la entrada.



■ **FIGURA 16.45** Sección de ajuste de bajos del circuito amplificador.

Para mantener independientes las resistencias, capacitores y amp ops, requerimos agregar un subíndice apropiado a cada uno, como una indicación de la etapa a la que pertenecen (t, m, b). Empezando con la etapa de agudos, ya se han encontrado problemas al usar el μA741 en el intervalo de 10 a 20 kHz a ganancia elevada, de modo que quizá el LF411 sea una mejor elección en este caso. Al elegir una frecuencia de corte de agudos de 5 kHz (existe cierta variación entre los valores elegidos por diferentes diseñadores de circuitos de audio), requerimos

$$\frac{1}{R_{2t}C_t} = 2\pi(5 \times 10^3) = 3.142 \times 10^4$$

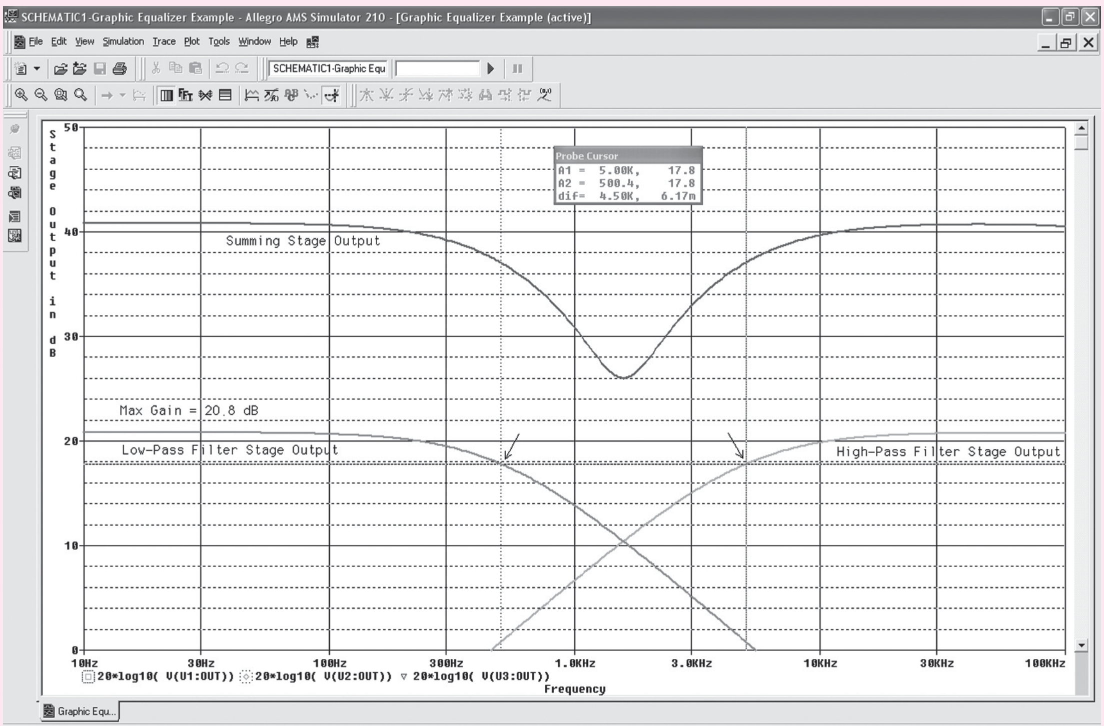
La elección arbitraria de $C_t = 1\mu$F produce un valor requerido de 31.83Ω para R_{2t}. Al seleccionar también $C_b = 1\mu$F (quizá podamos negociar una reducción de la cantidad), es necesario que $R_{2b} = 318.3\Omega$ para una frecuencia de corte bajo de 500 Hz. Dejamos al lector el diseño de un filtro pasabanda adecuado.

La parte siguiente del diseño implica la selección de valores adecuados para R_{1t} y R_{1b}, así como las correspondientes resistencias de retroalimentación. Sin ninguna instrucción contraria, es probable que lo más simple sea igualar ambas

(*continúa*)

etapas. Por lo tanto, de modo arbitrario elegimos tanto a R_{1t} como a R_{1b}, iguales a 1 kΩ, y a R_{ft} y R_{fb} como potenciómetros de 10 kΩ (lo que significa que el intervalo será de 0 a 10 kΩ). Lo anterior permite que el volumen de una señal sea hasta 11 veces más fuerte que el de la otra. En caso de que se necesite que el diseño sea portátil, debemos seleccionar tensiones de suministro de ±9 V aunque este valor podría cambiarse si así fuere necesario.

Ahora que se ha completado el diseño de la etapa de filtro, estamos listos para considerar el diseño de la etapa sumadora. En bien de la simplicidad, debemos accionar esta etapa de amp op con las mismas fuentes de tensión que las otras etapas, lo cual limita la magnitud máxima de la tensión de salida a menos de 9 V. Utilizamos una configuración de amp op inversor, con la salida de cada una de las etapas de amp op de filtro alimentadas de manera directa a su propia resistencia de 1 kΩ. La otra terminal de cada resistencia de 1 kΩ se conecta entonces a la entrada inversora de la etapa del amplificador sumador. El potenciómetro apropiado para la etapa de amplificador sumador debe escogerse de manera que se evite la saturación, por lo que se requiere saber tanto el intervalo de la tensión de entrada como la potencia en watts del altavoz de salida. En la figura 16.46 se muestra una simulación limitada del diseño final.

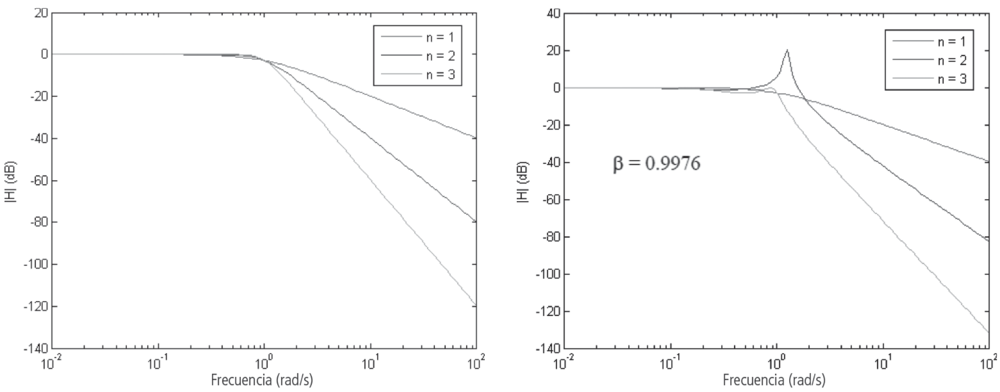


■ **FIGURA 16.46** Respuesta en frecuencia simulada del diseño del ecualizador.

16.8 DISEÑO AVANZADO DE FILTROS

Aunque los filtros básicos que hemos visto hasta ahora funcionan adecuadamente para ciertas aplicaciones, sus características de respuesta de la magnitud están lejos de ser una "como de función escalón" ideal. Afortunadamente tenemos alternativas, llamadas filtros de orden mayor, con comportamiento mejorado, a expensas de mayor complejidad y más componentes. Por ejemplo, la función de transferencia general del filtro pasabajas de orden n se puede escribir como

$$\mathbf{N}(\mathbf{s}) = \frac{K a_0}{\mathbf{s}^n + a_{n-1}\mathbf{s}^{n-1} + \cdots + a_1\mathbf{s} + a_0}$$



(*a*) (*b*)

FIGURA 16.47 Diagrama de |**H**($j\omega$)| para pasabajas de primero, segundo y tercer órdenes. (*a*) Filtros Butterworth y (*b*) filtros Chebyshev. Todos los filtros se normalizaron a una frecuencia de esquina de 1 rad/s.

y la general del filtro pasaaltas (de orden n) es sólo sutilmente diferente:

$$\mathbf{N(s)} = \frac{K\mathbf{s}^n}{\mathbf{s}^n + a_{n-1}\mathbf{s}^{n-1} + \cdots + a_1\mathbf{s} + a_0}$$

Para representar un filtro pasabandas, sólo necesitamos alterar el numerador a $K\mathbf{s}^{n/2}$ y el filtro rechazabanda (que se muestra en la figura 16.35*d*) tiene la función de transferencia

$$\mathbf{N(s)} = \frac{K\left(\mathbf{s}^2 + \omega_0^2\right)^{n/2}}{\mathbf{s}^n + a_{n-1}\mathbf{s}^{n-1} + \cdots + a_1\mathbf{s} + a_0}$$

Para el diseño de un filtro específico, por lo tanto, se necesita seleccionar la función de transferencia adecuada y la elección de una clase de polinomios que especifiquen los coeficientes como a_1, a_2, etc. En esta sección se introducen filtros basados en los ***polinomios de Butterworth*** y ***Chebyshev***, dos de los más comúnmente utilizados en el diseño de filtros.

El filtro pasabajas de Butterworth es uno de los filtros más conocidos. Se caracteriza por una magnitud de amplitud

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

que se dibuja en la figura 16.47*a* para $n = 1$, 2, 3 y 5; K es una constante real, y ω_c representa la frecuencia crítica. Como se puede ver, la magnitud tiende a una forma parecida a una función escalón al aumentar el orden n. En contraste, el filtro pasabajas Chebyshev se caracteriza por rizos bastante prominentes en la pasabanda, cuyo número depende del orden del filtro, como se ilustra en la figura 16.47*b*. Su respuesta de magnitud está descrita por

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \beta^2 C_n^2(\omega/\omega_c)}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde β es una constante real que se conoce como ***factor de rizado***, y $C_n(\omega/\omega_c)$ denota el polinomio de Chebyshev del primer tipo de grado n. Para mayor facilidad, algunos coeficientes de ambos tipos de polinomio se dan en una lista en la tabla 16.2.

TABLA 16.2 Coeficientes para funciones de filtro pasabajas Butterworth y Chebyshev ($\beta = 0.9976$, o 3 dB), normalizados a $\omega_c = 1$

Butterworth

n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
1	1.0000				
2	1.0000	1.4142			
3	1.0000	2.0000	2.0000		
4	1.0000	2.6131	3.4142	2.6131	
5	1.0000	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361

Chebyshev ($\beta = 0.9976$)

n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
1	1.0024				
2	0.7080	0.6449			
3	0.2506	0.9284	0.5972		
4	0.1770	0.4048	1.1691	0.5816	
5	0.0626	0.4080	0.5489	1.4150	0.5744

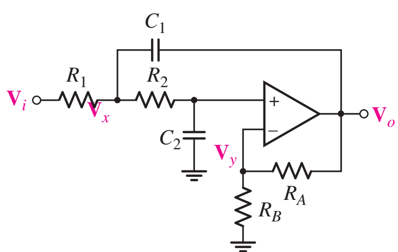


FIGURA 16.48 Circuito general para el filtro pasabajas Sallen-Key.

El amplificador Sallen-Key

Como se vio en la sección 15.8, podemos crear el circuito de un filtro que tenga un doble polo utilizando amp op, simplemente poniendo en cascada dos circuitos como el que se muestra en la figura 15.49*a*, en cuyo caso se obtiene una función de transferencia

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{(1/R_1C_f)^2}{\mathbf{s}^2 + 2/R_fC_f + (1/R_fC_f)^2} \qquad [36]$$

Si deseamos mejorar este enfoque básico, un circuito que vale la pena considerar se conoce como el amplificador Sallen-Key, que se muestra en la figura 16.48, configurado como un filtro pasabajas. El análisis nodal de este circuito es sencillo. Primero definimos la ganancia G del amplificador no inversor como

$$G \equiv \frac{R_A + R_B}{R_B} \qquad [37]$$

Entonces, la división de tensión da

$$\mathbf{V}_y = \mathbf{V}_x \frac{1}{1 + R_2C_2\mathbf{s}} \qquad [38]$$

y podemos escribir una sola ecuación nodal

$$0 = \frac{\mathbf{V}_x - \mathbf{V}_i}{R_1} + \frac{\mathbf{V}_x - \mathbf{V}_y}{R_2} + \frac{\mathbf{V}_x - \mathbf{V}_o}{1/\mathbf{s}C_1} \qquad [39]$$

Al sustituir las ecuaciones [37] y [38] en la ecuación [39] y realizando unas cuantas maniobras algebraicas, llegamos a una expresión para la función de transferencia del amplificador,

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{G/R_1R_2C_1C_2}{\mathbf{s}^2 + \left[\dfrac{1}{R_1C_1} + \dfrac{1}{R_2C_1} + \dfrac{1-G}{R_2C_2}\right]\mathbf{s} + \dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2}} \qquad [40]$$

Al observar que los coeficientes en la tabla 16.2 representan filtros con una frecuencia de corte de 1 rad/s, de modo que al terminar necesitaremos usar las sencillas técnicas de escalación que se describen en la sección 16.5, estamos ahora preparados para explorar el diseño de un filtro Butterworth pasabajas de segundo orden.

EJEMPLO 16.14

Diseñe un filtro Butterworth pasabajas de segundo orden que tenga una ganancia de 4 y una frecuencia de esquina a 1 400 rad/s.

Comenzamos seleccionando el prototipo Sallen-Key que se muestra en la figura 16.48 y optamos por la simplificación que se obtiene al hacer $R_1 = R_2 = R$, y $C_1 = C_2 = C$. Con un filtro Butterworth de segundo orden esperamos, por la tabla 16.2, tener un polinomio denominador

$$\mathbf{s}^2 + 1.4142\mathbf{s} + 1$$

y al comparar con la ecuación [42]

$$RC = 1$$

y

$$\frac{2}{RC} + \frac{1-G}{RC} = 1.414$$

por lo tanto

$$G = \frac{R_A + R_B}{R_B} = 1.586$$

Primero establecemos valores para las dos resistencias en la red de ganancia (que no necesitan escalarse) eligiendo arbitrariamente $R_B = 1$ kΩ, de modo que $R_A =$ 586 Ω.

En seguida, observamos que si $C = 1$ F, entonces $R = 1$ Ω, ninguno de los cuales es especialmente convencional. En vez de esto, seleccionamos $C' = 1\ \mu$F; esto exige escalar la resistencia por 10^6. También necesitamos escalar la frecuencia a 1 400 rad/s. Así,

$$10^{-6}\text{ F} = \frac{1\text{ F}}{k_m k_f} = \frac{1\text{ F}}{1\,400\, k_m}$$

y $k_m = 714$ Ω. En consecuencia, $R' = k_m R = 714$ Ω.

Por desgracia, nuestro diseño no ha terminado por completo. Había una restricción de una ganancia de amplificador de 1.586, o 4 dB; pero las especificaciones exigían una ganancia de 4, o 12 dB. La única opción disponible es alimentar la salida del circuito en un amplificador no inversor, como el que se muestra en la figura 6.6*a*. La elección de 1 kΩ y 1.52 kΩ para R_1 (etapa de salida) y R_f completa el diseño.

PRÁCTICA

16.19 Diseñe un filtro Butterworth pasabajas de segundo orden que tenga una ganancia de 10 dB y una frecuencia de corte de 1 000 Hz.

Respuesta: Un circuito de dos etapas, alimentando la salida del circuito de la figura 16.48 a la entrada de un amplificador no inversor, con valores de componentes $C_1 = C_2 = 1\ \mu$F, $R_1 = R_2 =$ 159 Ω, $R_A = 586$ Ω, $R_B = 1$ kΩ (etapa 1) y $R_1 = 1$ kΩ, $R_f = 994$ Ω (etapa 2).

El diseño de los filtros pasaaltas basado en el modelo Sallen-Key es igualmente sencillo; la única modificación que se necesita es reemplazar los capacitores C_1 y C_2 por resistencias, y las resistencias R_1 y R_2 por capacitores. El resto del circuito permanece sin cambios. El análisis nodal del circuito resultante con $C_1 = C_2 = C$ y $R_1 = R_2 = R$ da

$$a_0 = \frac{1}{R^2C^2} \qquad [41]$$

y

$$a_1 = \frac{3 - G}{RC} \qquad [42]$$

como encontramos para el filtro pasabajas.

Se pueden realizar filtros de mayor orden poniendo en cascada etapas adecuadas de amp op. Por ejemplo, los filtros Butterworth de orden impar (por ejemplo, 3, 5,…) necesitan un polo adicional en $\mathbf{s} = -1$. Así, un filtro Butterworth de tercer orden se construye usando una etapa Sallen-Key que proporcione como denominador una función de transferencia $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ de

$$(\mathbf{s}+1)\overline{\big)\mathbf{s}^3 + 2\mathbf{s}^2 + 2\mathbf{s} + 1} \quad \text{cociente: } \mathbf{s}^2 + \mathbf{s} + 1$$

o

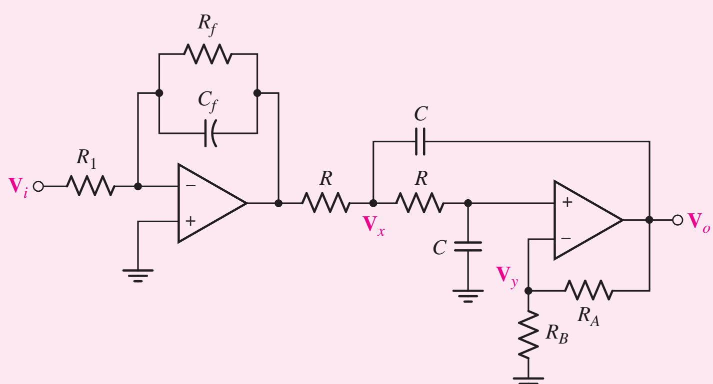
$$\mathbf{D}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^2 + \mathbf{s} + 1 \qquad [43]$$

con una etapa adicional de amp op como la de la figura 15.49a para proporcionar el término $(\mathbf{s} + 1)$.

EJEMPLO 16.15

Diseñe un filtro pasabajas Butterworth de tercer orden que tenga una magnitud de ganancia de tensión de 4 y una frecuencia de esquina a 2 000 rad/s.

Comenzamos nuevamente seleccionando el prototipo Sallen-Key que se muestra en la figura 16.48 y optamos por la simplificación que resulta al hacer $R_1 = R_2 = R$ y $C_1 = C_2 = C$. También agregaremos una etapa de entrada de la forma que se muestra en la figura 15.49a para agregar el polo necesario. El diseño básico se muestra en la figura 16.49.



■ **FIGURA 16.49** Estructura básica del filtro pasabajas Butterworth de tercer orden. Los valores de los componentes aún están por elegirse.

Al comparar las ecuaciones [41], [42] y [43] determinamos que el diseño debe asegurar que

$$1 = \frac{1}{R^2C^2}$$

y

$$1 = \frac{3 - G}{RC}$$

En consecuencia, $RC = 1$ y $G = 4$. Si elegimos $R_A = 3$ kΩ, resulta que $R_B = 1$ kΩ. Podemos escalar estos valores más adelante, si queremos, al ajustar la operación a 2 000 rad/s; pero esto es innecesario, ya que la ganancia está determinada por la relación de las dos resistencias.

Inicialmente diseñamos para $R = 1$ Ω y $C = 1$ F, ya que esto automáticamente satisface el requisito de que $RC = 1$. Sin embargo, como ninguno de estos valores es fácil de ubicar, seleccionamos un valor de capacitor más razonable de 0.1 μF que, combinado con el factor de escalamiento de frecuencia, $k_f = 2\,000$, da por resultado un factor de escalamiento de la resistencia $k_m = 5\,000$. Así, $R = 5$ kΩ en nuestro diseño final.

Todo lo que queda por hacer es seleccionar valores para R_1, R_f y C_f en nuestra etapa final frontal. Recuerde que la función de transferencia de esta etapa es

$$-\frac{1/R_1C_f}{\mathbf{s} + (1/R_fC_f)}$$

El establecer inicialmente $R_f = 1$ Ω y $C_f = 1$ F permite ubicar adecuadamente el polo antes de las operaciones de escalamiento, que exigen que se construya el circuito con $R_f = 5$ kΩ y $C_f = 0.1$ μF. La única decisión que nos resta por hacer, entonces, es asegurar que R_1 permita cumplir con el requisito de ganancia de 4. Como ya hemos logrado esto con la etapa Sallen-Key, R_1 tiene que ser igual a R_f o 5 kΩ.

El diseño de los filtros Chebyshev se lleva a cabo de manera similar al de los filtros Butterworth, salvo qua ahora tenemos más opciones con el factor de rizado. También para filtros que no tengan un factor de rizado de 3 dB, la frecuencia crítica es donde termina el canal rizado en el pasabanda, que es ligeramente diferente que lo que habíamos especificado anteriormente. Los filtros con orden $n > 2$ se construyen poniendo en cascada las etapas, ya sea etapas múltiples Sallen-Key para órdenes pares, o una sola etapa como en la figura 15.49*a* en combinación con el número adecuado de etapas Sallen-Key para órdenes impares. Para filtros con requisito específico de ganancia, usualmente se necesita en la salida una etapa amp op que contiene sólo resistencias.

RESUMEN Y REPASO

Comenzamos este capítulo con una breve explicación de la *resonancia*. Por supuesto, es probable que el lector ya haya tenido un entendimiento intuitivo del concepto básico en el momento de impulsarse con las piernas en el columpio cuando era niño; al ver videos de vasos de cristal que se quiebran debido a la potencia de la voz de una soprano entrenada; al disminuir instintivamente la velocidad cuando se maneja sobre un piso corrugado. En el contexto del análisis de circuitos lineales encontramos (quizá

sorprendentemente) que se puede elegir una frecuencia incluso con redes con capacitores e inductores de modo que la tensión y la corriente estén en fase (por lo tanto, la red parece puramente resistiva a esa frecuencia específica). La rapidez con la que cambia la respuesta de nuestro circuito al moverse "fuera de resonancia" se relacionó con un nuevo término: el *factor de calidad* (Q) del circuito. Después de definir lo que se entiende por *frecuencias críticas* para la respuesta del circuito introdujimos el concepto de *ancho de banda* y descubrimos que las expresiones se pueden simplificar drásticamente para circuitos de alto Q ($Q > 5$). Extendimos brevemente esta explicación para abarcar las diferencias entre circuitos en serie y en paralelo cerca de la resonancia, junto con redes más prácticas que no se pueden clasificar como en serie ni como en paralelo.

El resto de este capítulo trató del análisis y diseño de circuitos de filtro. Antes de adentrarse en esa discusión, el tema de componentes de circuito "escalados" trató tanto del *escalamiento* de *frecuencia* y de *magnitud* como una herramienta conveniente de diseño. También introdujimos el práctico método de los *diagramas de Bode*, que permite trazar rápidamente una aproximación razonable de la respuesta de un circuito de filtro en función de la frecuencia. En seguida consideramos los filtros tanto *pasivos* como *activos*, comenzando con los diseños sencillos que usan un solo capacitor para obtener comportamiento ya sea de filtro pasabajas o de pasaaltas. Poco después estudiamos el diseño de *filtros pasabanda*. Aunque es sencillo trabajar con ellos, la respuesta de dichos circuitos simples no es especialmente abrupta. Como alternativa, examinamos diseños de filtros basados en polinomios ya sea de Butterworth o Chebyshev, y vimos que los de órdenes mayores dan respuesta más precisa, a expensas de mayor complejidad.

- ❑ La resonancia es la condición en la que una función forzada senoidal fija produce una respuesta de amplitud máxima. (Ejemplo 16.1)
- ❑ Una red eléctrica está en resonancia cuando la tensión y la corriente en las terminales de entrada de la red están en fase. (Ejemplo 16.1)
- ❑ El factor de calidad es proporcional a la energía máxima almacenada en una red, dividida entre la energía total perdida por periodo.
- ❑ Una frecuencia de media potencia se define como la frecuencia a la que la magnitud de la función de respuesta de circuito se reduce hasta $1/\sqrt{2}$ veces su valor máximo.
- ❑ Un circuito de alta Q es un circuito resonante en el que el factor de calidad es ≥ 5. (Ejemplo 16.2)
- ❑ El ancho de banda de un circuito resonante se define como la diferencia entre las frecuencias de media potencia superior e inferior.
- ❑ En un circuito de alta Q, cada frecuencia de media potencia se ubica aproximadamente a medio ancho de banda de la frecuencia resonante. (Ejemplo 16.2)
- ❑ Un circuito resonante en serie se caracteriza por una impedancia *baja* en la resonancia, en tanto que un circuito resonante en paralelo se determina por una impedancia *alta* en la resonancia. (Ejemplos 16.1, 16.3)
- ❑ Un circuito resonante en serie y un circuito resonante en paralelo son equivalentes si $R_p = R_s(1 + Q^2)$ y $X_p = X_s(1 + Q^{-2})$. (Ejemplos 16.4, 16.5)
- ❑ Los valores imprácticos de los componentes hacen que el diseño sea a menudo más fácil. La función de transferencia de una red se podría ajustar en magnitud o en frecuencia mediante valores de sustitución apropiados para los componentes. (Ejemplo 16.6)
- ❑ Los diagramas de Bode permiten que la forma burda de la función de transferencia se grafique con rapidez, a partir de los polos y los ceros. (Ejemplos 16.7, 16.8, 16.9, 16.10)

- Los cuatro tipos básicos de filtros son: pasabajas, pasaaltas, pasabanda y rechaza-banda. (Ejemplos 16.11, 16.12)
- Los filtros pasivos sólo utilizan resistencias, capacitores e inductores; los filtros activos se basan en los amp op o en otros elementos activos. (Ejemplo 16.13)
- Los filtros Butterworth y Chebyshev se pueden diseñar con base en el sencillo amplificador Sallen-Key. La ganancia del filtro usualmente se tiene que ajustar agregando a la salida un circuito amplificador basado puramente en resistencias.

LECTURAS ADICIONALES

El estudio de una gran variedad de filtros puede encontrarse en

J. T. Taylor y Q. Huang, eds., *CRC Handbook of Electrical Filters*. Boca Raton, Fla: CRC Press,1977.

Una compilación muy completa de varios circuitos con filtros activos y procedimientos de diseño se proporciona en

D. Lancaster, *Lancaster's Active Filter Cookbook,* 2a. ed. Burlington, Mass.: Newnes, 1996.

Las referencias adicionales que el lector podría encontrar útiles incluyen:

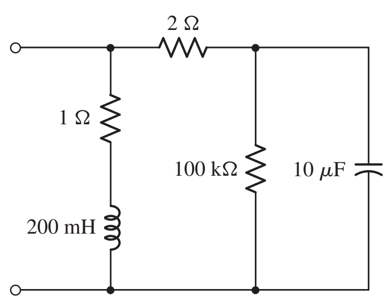
D. E. Johnson y J. L. Hilburn, *Rapid Practical Design of Active Filters*. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1975.

J. V. Wait, L. P. Huelsman, y G. A. Korn, *Introduction to Operational Amplifier Theory and Applications*, 2a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1992.

EJERCICIOS

16.1 Resonancia en paralelo

1. Calcule Q_0 y ζ para una red *RLC* simple en paralelo si (*a*) $R = 1$ kΩ, $C = 10$ mF y $L = 1$ H; (*b*) $R = 1$ Ω, $C = 10$ mF y $L = 1$ H; (*c*) $R = 1$ kΩ, $C = 1$ F y $L = 1$ H; (*d*) $R = 1$ Ω, $C = 1$ F y $L = 1$ H.
2. Para el circuito que se muestra en la figura 16.1, suponga $R = 1$ kΩ, $C = 22$ mF y $L = 12$ mH. (*a*) Calcule α, ω_0, ζ, f_0 y ω_d para el circuito. (*b*) Si $\mathbf{I} = 1\underline{/0^\circ}$ A, grafique $\mathbf{V}$, $\mathbf{I}_{LC}$, $\mathbf{I}_L$ e $\mathbf{I}_C$ en función de la frecuencia, y verifique que $\mathbf{I}$ y $\mathbf{V}$ estén en fase a ω_0. (*c*) ¿Cuál es la relación de $\mathbf{I}_L$ a $\mathbf{I}_C$ a ω_0?
3. Cierto circuito *RLC* en paralelo se construye usando valores de componentes $L = 50$ mH y $C = 33$ mH. Si $Q_0 = 10$, determine el valor de R y luego haga una gráfica de la magnitud de la impedancia de estado estable en el rango $2 < \omega < 40$ rad/s.
4. Una red *RLC* en paralelo se construye usando $R = 5\Omega$, $L = 100$ mH y $C = 1$ mH. (*a*) Calcule Q_0. (*b*) Determine a qué frecuencias cae la magnitud de la impedancia a 90% de su valor máximo.
5. Para la red de la figura 16.50, deduzca una expresión para la impedancia de entrada en estado estable y determine la frecuencia a la que tiene amplitud máxima.
6. Grafique la admitancia de entrada de la red representada en la figura 16.50 usando una escala logarítmica de frecuencia dentro del rango $0.01\omega_0 < \omega_0 < 100\ \omega_0$, y determine la frecuencia resonante y el ancho de banda de la red.
7. Quite la resistencia de 2 Ω en la red de la figura 16.50 y determine (*a*) la magnitud de la impedancia de entrada en resonancia; (*b*) la frecuencia resonante; (*c*) Q_0.
8. Quite la resistencia de 1 Ω en la red de la figura 16.50 y determine (*a*) la magnitud de la impedancia de entrada en resonancia; (*b*) la frecuencia resonante; (*c*) Q_0.



■ **FIGURA 16.50**

9. Un varactor es un dispositivo semiconductor cuya reactancia se podría variar aplicando una tensión de polarización. Es posible expresar el factor de calidad[3] como:

$$Q \approx \frac{\omega C_J R_P}{1 + \omega^2 C_J^2 R_P R_S}$$

donde $C j$ es la capacitancia de la unión (que depende de la tensión aplicada al dispositivo), R_S es la resistencia en serie del dispositivo y R_P es un término de resistencia en paralelo equivalente. (*a*) Si $C_J = 3.77$ pF a 1.5 V, $R_P = 1.5$ MΩ y $R_S = 2.8$ Ω, grafique el factor de calidad como una función de la pulsación ω. (*b*) Derive la expresión de Q a fin de obtener tanto ω_0 como $Q_{\text{máx}}$.

16.2 Ancho de banda y circuitos con alta *Q*

10. El circuito de la figura 16.1 se construye usando valores de componentes $L = 1$ mH y $C = 100$ μF. Si $Q_0 = 15$, determine el ancho de banda y estime la magnitud y ángulo de la impedancia de entrada para operación en (*a*) 3 162 rad/s; (*b*) 3 000 rad/s; (*c*) 3 200 rad/s; (*d*) 2 000 rad/s. (*e*) Verifique sus estimados usando una expresión exacta para $\mathbf{Y}(j\omega)$.
11. Se construye una red de *RLC* en paralelo con un inductor de 5 mH, y los valores de los demás componentes se eligen de manera que $Q_0 = 6.5$ y $\omega_0 = 1\,000$ rad/s. Determine el valor aproximado de la magnitud de la impedancia de entrada para operación en (*a*) 500 rad/s; (*b*) 750 rad/s; (*c*) 900 rad/s; (*d*) 1 100 rad/s. (*e*) Grafique sus estimados junto con el resultado exacto usando un eje de frecuencia lineal (rad/s).
12. Se construye un circuito *RLC* en paralelo con un inductor de 200 μH, y los valores de los demás componentes se eligen de manera que $Q_0 = 8$ y $\omega_0 = 5\,000$ rad/s. Use expresiones aproximadas para estimar el ángulo de la impedancia de entrada para operación en (*a*) 2 000 rad/s; (*b*) 3 000 rad/s; (*c*) 4 000 rad/s; (*d*) 4 500 rad/s. (*e*) Grafique sus estimados junto con el resultado exacto usando un eje de frecuencia lineal (rad/s).
13. Determine el ancho de banda de cada una de las curvas de respuesta que se muestran en la figura 16.51.

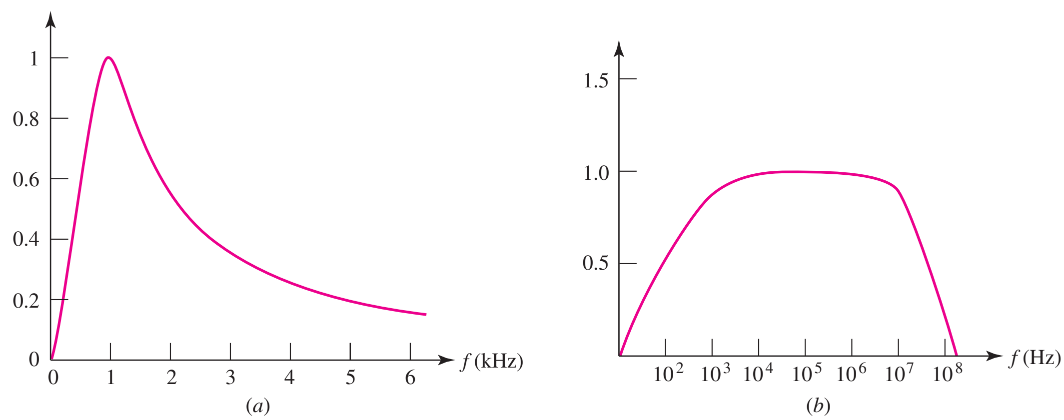
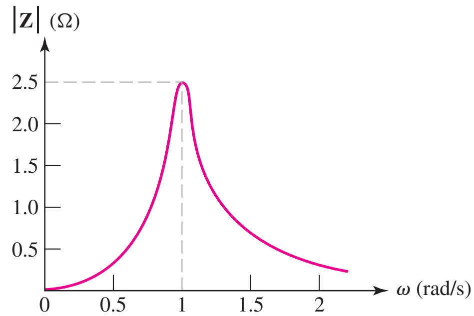


FIGURA 16.51

14. Se construye un circuito *RLC* en paralelo de manera que tenga la característica de magnitud de impedancia de entrada que se grafica en la figura 16.52. (*a*) Determine el valor de la resistencia. (*b*) Determine el valor del capacitor si se usara un inductor de 1 H. (*c*) Obtenga valores para el ancho de banda, Q_0, y la frecuencia de media potencia tanto baja como alta.

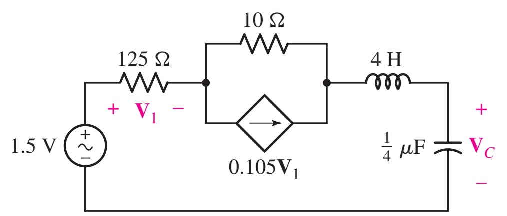
[3] S. M. Sze, *Physics of Semiconductor Devices,* 2a. ed. Nueva York: Wiley, 1981, p. 116.



■ **FIGURA 16.52**

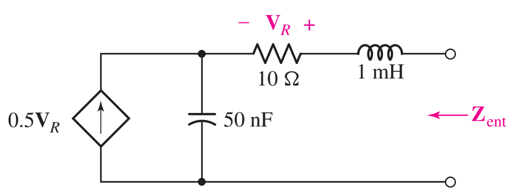
16.3 Resonancia en serie

15. Se construye un circuito *RLC* en serie usando valores de componentes $R = 100\ \Omega$ y $L =$ 1.5 mH, junto con una fuente de tensión senoidal v_s. Si $Q_0 = 7$ determine (*a*) la magnitud de la impedancia a 500 Mrad/s; (*b*) la corriente que fluye en respuesta a una tensión $v_s =$ $2.5 \cos (425 \times 10^6 t)$ V.
16. Con referencia al circuito *RLC* en serie que se describe en el ejercicio 15, ajuste el valor de la resistencia de manera que Q_0 se reduzca a 5 y (*a*) estime el ángulo de la impedancia a 90 krad/s, 100 krad/s y 110 krad/s. (*b*) Determine el error porcentual en los valores estimados, en comparación con la expresión exacta.
17. Se construye un circuito *RLC* usando $R = 5\ \Omega$, $L = 20$ mH y $C = 1$ mF. Calcule Q_0, el ancho de banda, y la magnitud de la impedancia a $0.95\ \omega_0$ si el circuito está (*a*) conectado en paralelo; (*b*) conectado en serie. (*c*) Verifique sus soluciones mediante simulaciones PSpice adecuadas. (*Pista: Una resistencia grande en paralelo con el capacitor evitará mensajes de error correspondientes a la ausencia de una trayectoria de cd a tierra, y una pequeña resistencia en serie con la fuente de VCA evitará cortocircuito por el inductor durante la determinación del punto de polarización de cd.*)
18. Inspeccione el circuito de la figura 16.53 y observe la amplitud de la tensión de la fuente. Decida si estaría dispuesto a poner sus manos desnudas en los extremos del capacitor, si el circuito se construyera realmente en el laboratorio. Grafique $|\mathbf{V}_C|$ en función de ω para justificar su respuesta.



■ **FIGURA 16.53**

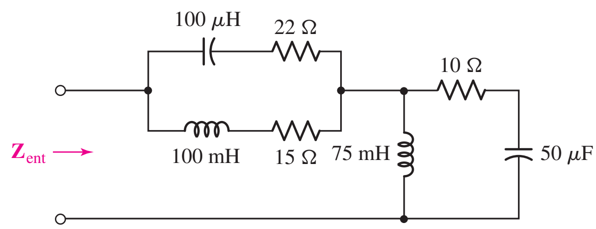
19. Después de obtener $\mathbf{Z}_{\text{ent}}(\mathbf{s})$ en la figura 16.54, determine: (*a*) ω_0; (*b*) Q_0.



■ **FIGURA 16.54**

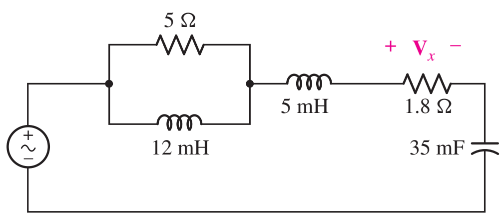
16.4 Otras formas resonantes

20. Para la red de la figura 16.9*a*, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 150\ \Omega$, y $L = 30$ mH y C se elige de manera que $\omega_0 = 750$ rad/s. Calcule la magnitud de la impedancia a (*a*) la frecuencia correspondiente a la resonancia cuando $R_1 = 0$; (*b*) 700 rad/s; (*c*) 800 rad/s.
21. Suponiendo una frecuencia de operación de 200 rad/s, encuentre un equivalente en serie de la combinación en paralelo de una resistencia de 500 Ω y (*a*) un capacitor de 1.5 μF; (*b*) un inductor de 200 mH.
22. Si la frecuencia de operación es de 40 rad/s o de 80 rad/s, encuentre un equivalente en paralelo de la combinación en serie de una resistencia de 2 Ω y (*a*) un capacitor de 100 mF; (*b*) un inductor de 3 mH.
23. Para la red representada en la figura 16.55, determine la frecuencia resonante y el valor correspondiente de $|\mathbf{Z}_{ent}|$.



■ **FIGURA 16.55**

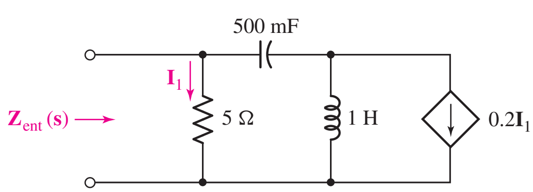
24. Para el circuito de la figura 16.56, la fuente de tensión tiene magnitud de 1 V y ángulo de fase de 0°. Determine la frecuencia resonante ω_0 y el valor de $\mathbf{V}_x$ a $0.95\omega_0$.



■ **FIGURA 16.56**

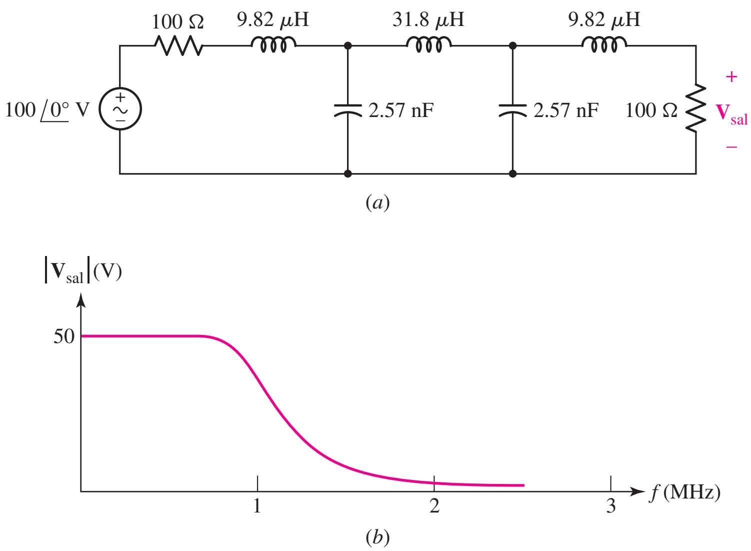
16.5 Escalamiento (o ajuste)

25. Se construye un circuito *RLC* en paralelo usando valores de componentes $R = 1\ \Omega$, $C =$ 3F y $L = \frac{1}{3}$ H. Determine los valores necesarios de componentes si la red ha de tener (*a*) una frecuencia resonante de 200 kHz; (*b*) un impedancia pico de 500 kΩ; (*c*) una frecuencia resonante de 750 kHz y una magnitud de impedancia en resonancia de 25 Ω.
26. Se construye un circuito *RLC* en serie usando valores de componentes $R = 1\ \Omega$, $C = 5$ F y $L = \frac{1}{5}$ Hz. Determine los valores necesarios de componentes si la red ha de tener (*a*) una frecuencia resonante de 430 Hz; (*b*) una impedancia pico de 100 Ω; (*c*) una frecuencia resonante de 75 kHz y una impedancia de magnitud en resonancia de 15 Ω.
27. Escale la red que se muestra en la figura 16.57 por $K_m = 200$ y $K_f = 700$ y obtenga una expresión para la nueva impedancia $\mathbf{Z}_{ent}(\mathbf{s})$.



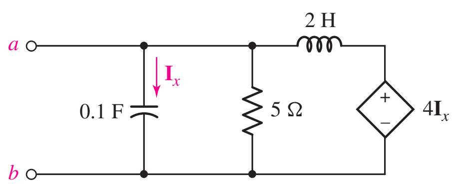
■ **FIGURA 16.57**

28. El filtro que se muestra en la figura 16.58*a* tiene la curva de respuesta que se indica en la figura 16.58*b*. (*a*) Ajuste el filtro de manera que opere entre una fuente de 50 Ω y una carga de 50 Ω además de tener una frecuencia de corte de 20 kHz. (*b*) Dibuje la nueva curva de respuesta.



■ **FIGURA 16.58**

29. (*a*) Dibuje la nueva configuración de la figura 16.59, después de que la red se ajuste mediante $K_m = 250$ y $K_f = 400$. (*b*) Determine el equivalente de Thévenin de la red ajustada en $\omega = 1$ krad/s.



■ **FIGURA 16.59**

16.6 Diagramas de Bode

30. Dibuje los diagramas de Bode de la magnitud y fase de las siguientes funciones:

$$(a)\ 3 + 4\mathbf{s};\ (b)\ \frac{1}{3 + 4\mathbf{s}}.$$

31. Para las siguientes funciones, dibuje los diagramas de Bode de la magnitud y fase:

$$(a)\ 25\left(1 + \frac{\mathbf{s}}{3}\right)(5 + \mathbf{s});\ \ (b)\ \frac{0.1}{(1 + 5\mathbf{s})(2 + \mathbf{s})}.$$

32. Use el método de Bode para graficar la magnitud de cada una de las siguientes respuestas; en seguida verifique sus soluciones con simulaciones MATLAB adecuadas:

$$(a)\ 3\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 + 7\mathbf{s} + 10};\ (b)\ \frac{4}{\mathbf{s}^3 + 7\mathbf{s}^2 + 12\mathbf{s}}.$$

33. Si una red dada se describe mediante la función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s})$, grafique la magnitud de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ como función de la frecuencia para $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ igual a

$$(a)\ \frac{\mathbf{s} + 300}{\mathbf{s}(5\mathbf{s} + 8)};\ (b)\ \frac{\mathbf{s}(\mathbf{s}^2 + 7\mathbf{s} + 7)}{\mathbf{s}(2\mathbf{s} + 4)^2}.$$

34. Grafique la fase de cada una de las siguientes funciones de transferencia:

 (*a*) $\dfrac{\mathbf{s}+1}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+2)^2}$; (*b*) $5\dfrac{\mathbf{s}^2+\mathbf{s}}{\mathbf{s}+2}$.

35. Determine el diagrama de Bode de la magnitud para las siguientes funciones de transferencia y compare con la que se predice usando MATLAB: (*a*) $\mathbf{s}^2 + 0.2\mathbf{s} + 1$;

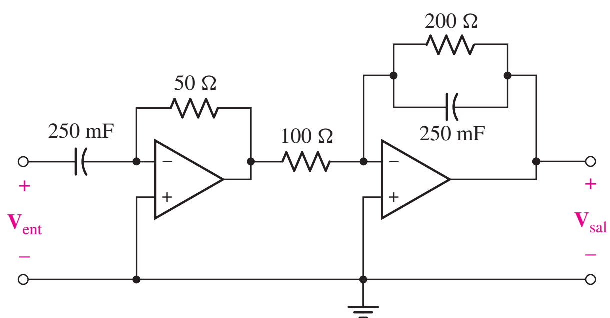
 (*b*) $\left(\dfrac{\mathbf{s}}{4}\right)^2 + 0.1\left(\dfrac{\mathbf{s}}{4}\right) + 1$.

36. Determine el diagrama de fase correspondiente a cada una de las funciones de transferencia en los ejercicios 33 y 35 y compare sus esquemas con lo que se predice usando MATLAB.

37. Determine el diagrama de Bode de la magnitud para cada una de las siguientes expresiones:

 (*a*) $\dfrac{3+0.1\mathbf{s}+\mathbf{s}^2/3}{\mathbf{s}^2+1}$; (*b*) $2\dfrac{\mathbf{s}^2+9\mathbf{s}+20}{\mathbf{s}^2(\mathbf{s}+1)^3}$.

38. Para el circuito de la figura 16.60, (*a*) deduzca una expresión para la función de transferencia $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$. (*b*) Trace los diagramas de Bode de la magnitud y fase correspondientes.



■ **FIGURA 16.60**

39. (*a*) Modifique el circuito que se muestra en la figura 16.60 para agregar un doble polo en 0.05 rad/s y un cero en 0.01 rad/s. (*b*) Trace los diagramas de Bode correspondientes para la magnitud y fase.

16.7 Diseño de filtros básicos

40. (*a*) Diseñe un filtro pasaaltas con una frecuencia de esquina de 100 rad/s. (*b*) Verifique su diseño mediante una simulación PSpice adecuada.

41. (*a*) Diseñe un filtro pasabajas con una frecuencia de corte de 1 450 rad/s. (*b*) Trace los diagramas de Bode de magnitud y fase para su diseño. (*c*) Verifique el desempeño del filtro mediante una simulación adecuada.

42. (*a*) Diseñe un filtro pasabanda caracterizado por un ancho de banda de 1 000 rad/s y una frecuencia de esquina de baja frecuencia de 250 Hz. (*b*) Verifique su diseño con una simulación PSpice adecuada.

43. Diseñe un filtro pasabanda que tenga un corte de baja frecuencia de 500 Hz y un corte de alta frecuencia de 1 580 Hz.

44. Diseñe un filtro rechazabanda que quite "ruido" de 60 Hz de influencias de la línea de transmisión en una señal particular tomando la salida de las terminales de la conexión en serie inductor-capacitor en el circuito de la figura 16.39.

45. Diseñe un filtro pasabajas caracterizado por una ganancia de tensión de 25 dB y una frecuencia de esquina de 5 000 rad/s.

46. Diseñe un filtro pasaaltas caracterizado por una ganancia de tensión de 30 dB y frecuencia de esquina de 50 rad/s.

47. (*a*) Diseñe el circuito de un filtro de dos etapas con op amp con un ancho de banda de 1 000 rad/s, un corte de baja frecuencia a 100 rad/s y una ganancia de tensión de 20 dB. (*b*) Verifique su diseño mediante una simulación PSpice adecuada.

48. Diseñe un circuito que quite todo el rango de audiofrecuencia (aproximadamente 20 Hz a 20 kHz, para la audición humana), pero amplifique la tensión de señal de todas las demás señales por un factor de 15.

49. Dependiendo de qué canción esté usted escuchando, su reproductor MP3 algunas veces reproduce bajos muy débiles, incluso cuando se maximiza el ajuste adecuado. Diseñe un filtro que le permita variar la ganancia en tiempo real de todas las señales de menos de 500 Hz antes de que lleguen a sus auriculares. Incluya un diagrama de todo el sistema.

16.8 Diseño avanzado de filtros

50. Demuestre que el circuito representado por la ecuación [36] no se puede implementar como filtro pasabajas Butterworth ni Chebyshev.

51. Diseñe un filtro pasabajas de segundo orden que tenga una ganancia de tensión de 5 dB y una frecuencia de corte de 1 700 kHz, con base en (*a*) polinomios Butterworth; (*b*) polinomios Chebyshev para factor de rizo de 3 dB.

52. Si se necesita un filtro pasaaltas que tenga una ganancia de 6 dB y una frecuencia de corte de 350 Hz, diseñe una solución adecuada de segundo orden basada en Butterworth.

53. (*a*) Diseñe un filtro Butterworth pasabajasde segundo orden con una frecuencia de corte de 890 rad/s y una ganancia de tensión de 8 dB. (*b*) Verifique su diseño mediante una simulación PSpice adecuada.

54. (*a*) Diseñe un filtro Butterworth pasaaltas de segundo orden con una frecuencia de corte de 2 000 Hz y una ganancia de tensión de 4.5 dB. (*b*) Verifique su diseño mediante una simulación PSpice adecuada.

55. Se necesita un filtro Butterworth pasabajas de tercer orden que tenga una frecuencia de corte de 1 200 Hz y una ganancia de tensión por lo menos de 3 dB. Diseñe un circuito adecuado.

56. (*a*) Diseñe un filtro Butterworth pasabajas de tercer orden que tenga una ganancia de 13 dB y una frecuencia de esquina a 1 800 Hz. (*b*) Compare la respuesta de su filtro con la de un filtro Chebyshev con las mismas especificaciones.

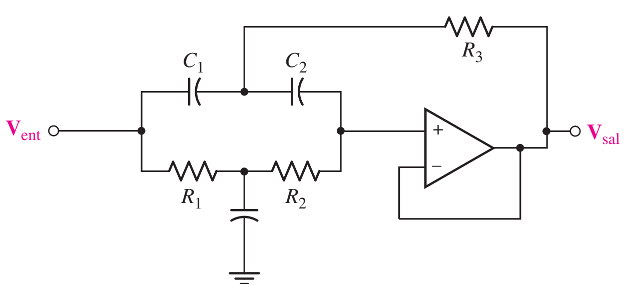
57. Diseñe un filtro Butterworth pasaaltas de cuarto orden que tenga una ganancia mínima de 15 dB y una frecuencia de esquina de 1 100 rad/s.

58. Elija parámetros para el circuito descrito por la ecuación [36] de manera que tenga una frecuencia de corte a 450 rad/s y compare su desempeño con un filtro Butterworth comparable de segundo orden.

Ejercicios de integración del capítulo

59. Diseñe un circuito resonante en paralelo para una radio de AM de modo que un inductor variable pueda ajustar la frecuencia resonante dentro de la banda de transmisión de AM 535 a 1 605 kHz, con $Q_0 = 45$ en un extremo de la banda y $Q_0 \leq 45$ en toda la banda. Suponga $R = 20\ \text{k}\Omega$, y especifique valores para C, $L_{\text{mín}}$ y $L_{\text{máx}}$.

60. Deduzca una expresión para la función de transferencia $\mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$ que describa el circuito que se muestra en la figura 16.61, y grafique su magnitud como función de la frecuencia.



■ **FIGURA 16.61**

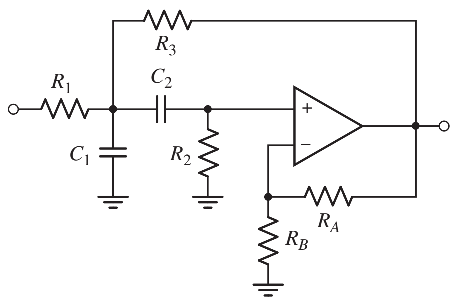
61. La red de la figura 16.36 se implementó como un filtro pasabajas diseñado con una frecuencia de esquina de 1 250 rad/s. Su desempeño es inadecuado en dos aspectos: (1) se

requiere una ganancia de tensión por lo menos de 2 dB, y (2) la magnitud de la tensión de salida no disminuye con suficiente rapidez en la banda de bloqueo.
Diseñe una mejor alternativa si sólo hay disponible un amp op y sólo se pueden ubicar dos capacitores de 1 μF.

62. Determine el efecto de la tolerancia de los componentes en el circuito diseñado en el ejemplo 16.14 si para cada componente se especifica que esté sólo dentro de 10% de su valor nominal.

63. Deduzca una expresión para la función de transferencia $\mathbf{V}_{sal}/\mathbf{V}_{ent}$ que describa el circuito que se muestra en la figura 16.62 y haga una gráfica de su magnitud como función de la frecuencia.

DP 64. Para el circuito que se muestra en la figura 16.62, seleccione valores de los componentes de un diseño para frecuencias de esquina de 500 rad/s y 1 500 rad/s. Verifique su diseño.



■ **FIGURA 16.62**

DP 65. Diseñe un filtro pasabanda que cubra la porción del espectro de audio de 200 Hz a 2 kHz y tenga una ganancia mínima de 5 dB y una característica de magnitud más pronunciada en el lado de alta frecuencia que en el lado de baja frecuencia. Verifique su diseño usando una simulación adecuada.



CAPÍTULO

17 Redes de dos puertos



INTRODUCCIÓN

Una red general que cuenta con dos pares de terminales, uno denominado "terminales de entrada" y el otro "terminales de salida", es un bloque constitutivo muy importante de los sistemas electrónicos, de comunicación, de control automático, de transmisión y distribución u otros sistemas en los que la señal o la energía (ambas eléctricas) ingresan por las terminales de entrada, donde la red actúa sobre ellas y se va por las terminales de salida. El par de terminales de salida se debería conectar perfectamente con el par de terminales de entrada de otra red. Cuando estudiamos el concepto de las redes equivalentes de Thévenin y Norton en el capítulo 5, presentamos la idea de que no siempre es necesario conocer las funciones detalladas de una parte de un circuito. Este capítulo amplía estos conceptos hasta las redes lineales, lo que da por resultado parámetros que permiten predecir cómo cualquier red interactuará con otras redes.

CONCEPTOS CLAVE

- Distinción entre redes de uno y de dos puertos
- Parámetros de admitancia (**y**)
- Parámetros de impedancia (**z**)
- Parámetros híbridos (**h**)
- Parámetros de transmisión (**t**)
- Métodos de transformación entre parámetros **y**, **z**, **h** y **t**
- Técnicas de análisis de circuitos utilizando parámetros de red

17.1 REDES DE UN PUERTO

Un par de terminales en las que es posible que entre o salga una señal de una red recibe el nombre de ***puerto***, por lo que la red que sólo cuenta con un par de este tipo de terminales se conoce como ***red de un puerto*** o simplemente *un puerto*. Quizá no se puedan realizar conexiones con cualesquiera otros nodos internos al puerto único y, por lo tanto, es evidente que i_a debe ser igual a i_b en el puerto único que se muestra en la figura 17.1*a*. Cuando se presenta más de un par de terminales, la red se conoce como ***red multipuerto***. La red de dos puertos a la cual se dedica en gran medida este capítulo se ilustra en la figura 17.1*b*. Las corrientes en los dos hilos de conexión que conforman cada puerto deben ser iguales y, por ello, se concluye que $i_o = i_b$ e $i_c = i_d$ en los dos puertos de la figura 17.1*b*. Las fuentes y las cargas deben conectarse en forma directa en las dos terminales de un puerto si se van a utilizar los métodos de este capítulo. En otras palabras, se conecta cada puerto solamente a una red de un puerto o a un puerto de otra red multipuerto. Por ejemplo, ningún dispositivo se deberá conectar entre las terminales



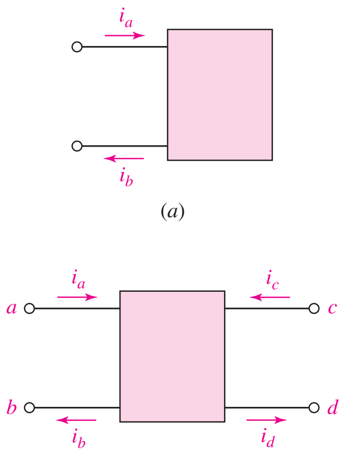


FIGURA 17.1 (*a*) Red de un puerto. (*b*) Red de dos puertos.

a y ***c*** de la red de dos puertos de la figura 17.1*b*. Si se requiere analizar un circuito de estas características, deberán escribirse ecuaciones de lazo general o nodales.

Una parte del estudio introductorio de las redes de uno y de dos puertos se lleva a cabo de mejor manera mediante el uso de una notación de red generalizada y la nomenclatura abreviada para determinantes que se presentan en el apéndice 2. De tal modo, si se escribe un conjunto de ecuaciones de lazo de una red pasiva,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{12}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{13}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{1N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_1 \\
\mathbf{Z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{23}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{2N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_2 \\
\mathbf{Z}_{31}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{32}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{33}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{3N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\mathbf{Z}_{N1}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{N2}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{N3}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{NN}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_N
\end{aligned} \qquad [1]$$

entonces el coeficiente de cada corriente será una impedancia $\mathbf{Z}_{ij}(\mathbf{s})$ y el determinante del circuito, o determinante de los coeficientes, es:

$$\Delta_{\mathbf{Z}} = \begin{vmatrix}
\mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\
\mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\
\mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN}
\end{vmatrix} \qquad [2]$$

Donde se supusieron N lazos, las corrientes aparecen en el orden de los subíndices en cada ecuación, y el orden de las ecuaciones es el mismo que el de las corrientes. Se supone también que se aplica la LVK, por lo que el signo de cada término $\mathbf{Z}_{ii}$ ($\mathbf{Z}_{11}$, $\mathbf{Z}_{22}$, ..., $\mathbf{Z}_{NN}$) es positivo; el signo de cualquier $\mathbf{Z}_{ij}$ ($i \neq j$) o término mutuo puede ser positivo o negativo, según las direcciones de referencia asignadas a $\mathbf{I}_i$ e $\mathbf{I}_j$.

Si hay fuentes dependientes dentro de la red, entonces es posible que no todos los coeficientes de las ecuaciones de lazo deban ser resistencias o impedancias. Aun así, seguiremos refiriendo al determinante del circuito como $\Delta_{\mathbf{Z}}$.

El uso de la notación menor (apéndice 2) permite que la impedancia de entrada o del punto de accionamiento en las terminales de una red *de un puerto* se exprese de manera muy concisa. El resultado también se aplica a una red de *dos puertos*, si uno de ellos termina en una impedancia pasiva, incluyendo un circuito abierto o en cortocircuito.

La regla de Cramer se estudia en el apéndice 2.

Supongamos que la red de un puerto de la figura 17.2 está compuesta en su totalidad por elementos pasivos y fuentes dependientes; también se supone linealidad. Una fuente ideal de tensión $\mathbf{V}_1$ se conecta al puerto, y la fuente de corriente se identifica como la corriente en el lazo 1. Aplicando el procedimiento de la regla de Cramer, se tiene

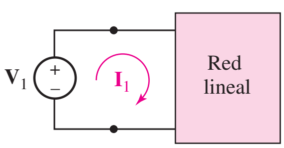


FIGURA 17.2 Fuente ideal de tensión $\mathbf{V}_1$ conectada a un solo puerto de una red lineal de un puerto que no contiene fuentes independientes; $\mathbf{Z}_{ent} = \Delta_{\mathbf{Z}}/\Delta_{11}$.

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix}
\mathbf{V}_1 & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\
0 & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\
0 & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN}
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
\mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\
\mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\
\mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN}
\end{vmatrix}}$$

o, de modo más conciso,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1 \Delta_{11}}{\Delta_\mathbf{Z}}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{\Delta_\mathbf{Z}}{\Delta_{11}} \qquad [3]$$

EJEMPLO 17.1

Calcule la impedancia de entrada de la red resistiva de un puerto que se muestra en la figura 17.3.

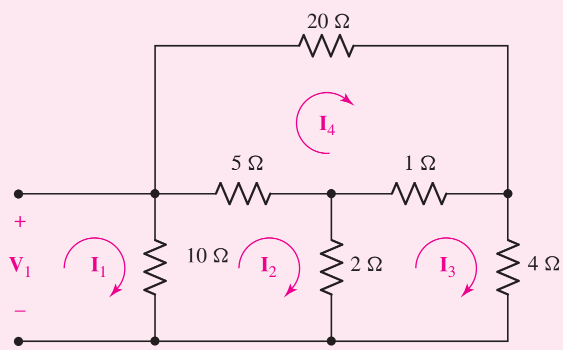


FIGURA 17.3 Ejemplo de una red de un puerto que contiene solamente elementos resistivos.

Asignamos primero las cuatro corrientes de malla como se indica y se escriben, bajo inspección, las ecuaciones de malla correspondientes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_1 &= 10\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 \\
0 &= -10\mathbf{I}_1 + 17\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{I}_3 - 5\mathbf{I}_4 \\
0 &= -2\mathbf{I}_2 + 7\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_4 \\
0 &= -5\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 + 26\mathbf{I}_4
\end{aligned}$$

El determinante del circuito está dado entonces por

$$\Delta_\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 17 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 26 \end{vmatrix}$$

y tiene un valor de $9\,680\ \Omega^4$. Eliminando el primer renglón y la primera columna, tenemos

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 17 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \\ -5 & -1 & 26 \end{vmatrix} = 2\,778\ \Omega^3$$

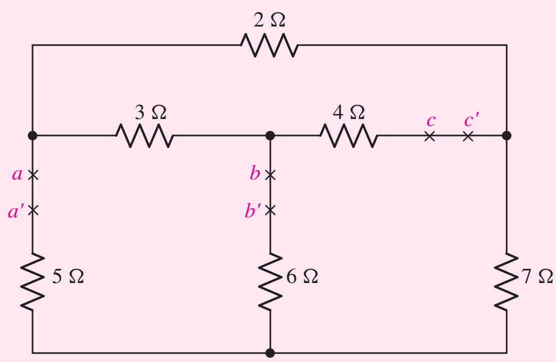
(*continúa*)

Por lo tanto, la ecuación [3] proporciona el valor de la impedancia de entrada:

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{9\,680}{2\,778} = 3.485\ \Omega$$

PRÁCTICA

17.1 Calcule la impedancia de entrada de la red que se muestra en la figura 17.4 si se forma en una red de un puerto al cortarla en las terminales: (*a*) *a* y *a*′; (*b*) *b* y *b*′; (*c*) *c* y *c*′.

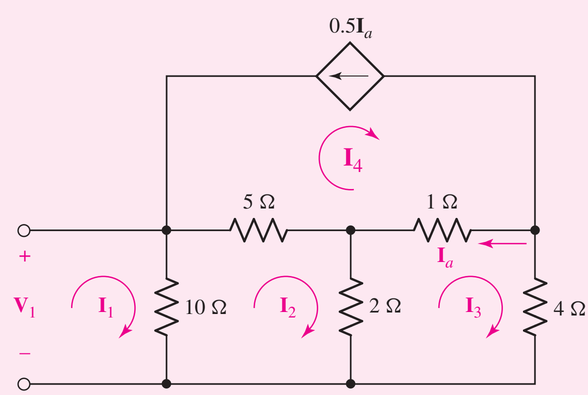


■ **FIGURA 17.4**

Respuestas: 9.47 Ω; 10.63 Ω; 7.58 Ω.

EJEMPLO 17.2

Calcule la impedancia de entrada de la red que se muestra en la figura 17.5.



■ **FIGURA 17.5** Red de un puerto que contiene una fuente dependiente.

Las cuatro ecuaciones de malla se escriben en términos de las cuatro corrientes de malla asignadas:

$$\begin{aligned} 10\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 \qquad\qquad\qquad &= \mathbf{V}_1 \\ -10\mathbf{I}_1 + 17\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{I}_3 - 5\mathbf{I}_4 &= 0 \\ -\ \ 2\mathbf{I}_2 + 7\mathbf{I}_3 - \ \mathbf{I}_4 &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{I}_4 = -0.5\mathbf{I}_a = -0.5(\mathbf{I}_4 - \mathbf{I}_3)$$

o

$$-0.5\mathbf{I}_3 + 1.5\mathbf{I}_4 = 0$$

Por lo tanto, escribimos

$$\Delta_\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 17 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1.5 \end{vmatrix} = 590\ \Omega^4$$

mientras que

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 17 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{vmatrix} = 159\ \Omega^3$$

lo cual da como resultado

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \tfrac{590}{159} = 3.711\ \Omega$$

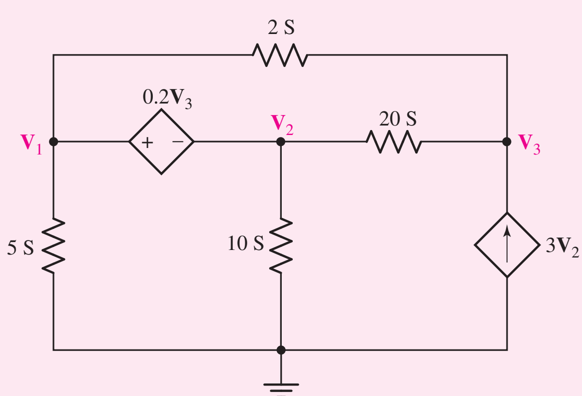
También debemos elegir un procedimiento similar con ecuaciones nodales, lo que da como resultado la admitancia de entrada:

$$\mathbf{Y}_{\text{ent}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{\text{ent}}} = \frac{\Delta_\mathbf{Y}}{\Delta_{11}} \qquad [4]$$

donde Δ_{11} se refiere en este caso al menor de $\Delta_\mathbf{Y}$.

PRÁCTICA

17.2 Escriba un conjunto de ecuaciones nodales para el circuito de la figura 17.6, calcule $\Delta_\mathbf{Y}$, y encuentre después la admitancia de entrada que se observa entre: (*a*) el nodo 1 y el nodo de referencia; (*b*) el nodo 2 y la referencia.

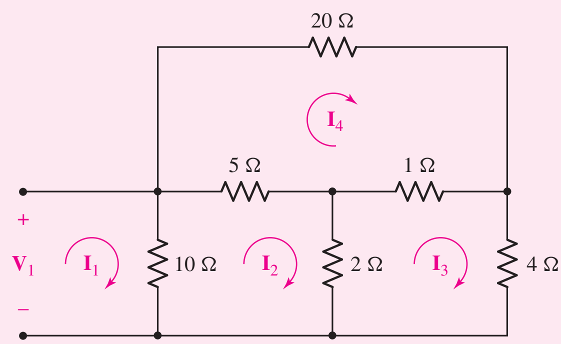


■ **FIGURA 17.6**

Respuesta: 10.68 S; 13.16 S.

EJEMPLO 17.3

Aplique la ecuación [4] para determinar de nuevo la impedancia de entrada de la red de la figura 17.3, repetida aquí como figura 17.7.



■ **FIGURA 17.7** Circuito del ejemplo 17.1 reproducido por conveniencia.

Se ordenan primero las tensiones de nodo $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ y $\mathbf{V}_3$ de izquierda a derecha, se elige la referencia en el nodo inferior y se escribe, con detenimiento, la matriz de admitancia del sistema:

$$\Delta_{\mathbf{Y}} = \begin{vmatrix} 0.35 & -0.2 & -0.05 \\ -0.2 & 1.7 & -1 \\ -0.05 & -1 & 1.3 \end{vmatrix} = 0.3473 \text{ S}^3$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1.7 & -1 \\ -1 & 1.3 \end{vmatrix} = 1.21 \text{ S}^2$$

por lo que

$$\mathbf{Y}_{\text{ent}} = \frac{0.3473}{1.21} = 0.2870 \text{ S}$$

lo cual corresponde a

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{1}{0.287} = 3.484\ \Omega$$

que concuerda con la respuesta anterior dentro del error de redondeo esperado (sólo retuvimos cuatro dígitos a lo largo de los cálculos).

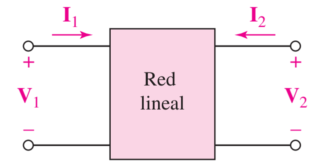


Los ejercicios 9 y 10 al final del capítulo proporcionan puertos únicos que se construyen con amplificadores operacionales e ilustran que las resistencias *negativas* podrían obtenerse de redes cuyos únicos elementos de circuito pasivos son resistencias, y que simularían los inductores sólo con resistencias y con capacitores.

17.2 PARÁMETROS DE ADMITANCIA

A continuación enfocaremos la atención en las redes de dos puertos. Supondremos en todo lo que sigue que la red está compuesta por elementos lineales y que no contiene fuentes independientes; sin embargo, *se* permiten las fuentes dependientes. También se impondrán otras condiciones a la red en algunos casos especiales.

Consideraremos el dos puertos como se indica en la figura 17.8; la tensión y la corriente en las terminales de entrada son $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_1$, además $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$ se especifican en el puerto de salida. Las direcciones de $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ suelen elegirse como si *entraran* a la red en los conductores superiores (y salieron de los conductores inferiores). Debido a que la red es lineal y no contiene fuentes independientes dentro de ella, $\mathbf{I}_1$ se debe considerar como la superposición de dos componentes, una ocasionada por $\mathbf{V}_1$ y la otra por $\mathbf{V}_2$. Cuando se aplica el mismo argumento a $\mathbf{I}_2$ empezaríamos con el siguiente conjunto de ecuaciones:



■ **FIGURA 17.8** Un dos puertos general con tensiones y corrientes de terminal específicas. El dos puertos está compuesto por elementos lineales que tal vez incluyan fuentes dependientes, pero sin ninguna fuente independiente.

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \qquad [5]$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \qquad [6]$$

donde las $\mathbf{y}$ no son más que constantes de proporcionalidad, o coeficientes desconocidos, en el presente. Sin embargo, resulta claro que sus unidades de dimensión deben ser A/V o S. Por lo tanto, reciben el nombre de parámetros $\mathbf{y}$ y se definen mediante las ecuaciones [5] y [6].

Los parámetros $\mathbf{y}$ así como otros conjuntos de parámetros que se definirán después en este capítulo, se representan en forma concisa como matrices. En este caso definimos la matriz columna $\mathbf{I}$, (2×1)

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \qquad [7]$$

la matriz cuadrada (2×2) de los parámetros $\mathbf{y}$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \qquad [8]$$

y la matriz columna $\mathbf{V}$ (2×1):

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \qquad [9]$$

La notación adoptada en este texto para representar una matriz es estándar, pero también puede confundirse fácilmente con nuestra notación anterior para los fasores o las cantidades complejas generales. La naturaleza de cualesquiera de estos símbolos debe ser clara según el contexto en el que se usan.

Por lo tanto, podemos escribir la ecuación matricial I = yV, o

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

y la multiplicación de matrices del lado derecho de la ecuación matricial da la igualdad

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \\ \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

Estas matrices (2×1) deben ser iguales, elemento por elemento; de ese modo llegamos a las ecuaciones definidas [5] y [6].

La manera más útil e informativa de relacionar un significado físico con los parámetros $\mathbf{y}$ es a través de una inspección directa de las ecuaciones [5] y [6]. Considere la ecuación [5], por ejemplo; si dejamos que $\mathbf{V}_2$ sea cero, vemos entonces que $\mathbf{y}_{11}$ debe determinarse mediante la proporción (o razón) entre $\mathbf{I}_1$ y $\mathbf{V}_1$. Por lo tanto, describimos $\mathbf{y}_{11}$ como la admitancia que se mide en las terminales de entrada con las terminales de salida en *cortocircuito* ($\mathbf{V}_2 = 0$). Debido a que no es posible que haya duda en cuanto a las terminales que están en cortocircuito, $\mathbf{y}_{11}$ se describe mejor como la *admitancia de entrada en cortocircuito*. De manera alterna podríamos describir $\mathbf{y}_{11}$ como el recíproco de la impedancia de entrada medida con las terminales de salida en cortocircuito, aunque evidentemente resulta más directo una descripción como una admitancia. No es el *nombre* del parámetro lo importante. Más bien, son las condiciones que deben aplicarse a las ecuaciones [5] o [6] y, por consiguiente, a la red, lo que tiene mayor

sentido; cuando se determinan las condiciones, el parámetro se obtiene de manera directa a partir del análisis del circuito (o mediante experimentos sobre el circuito físico). Cada uno de los parámetros **y** se podría escribir como una proporción (o razón) corriente-tensión con $\mathbf{V}_1 = 0$ (las terminales de entrada en cortocircuito) o $\mathbf{V}_2 = 0$ (las terminales de salida en cortocircuito):

$$\mathbf{y}_{11} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} \quad [10]$$

$$\mathbf{y}_{12} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0} \quad [11]$$

$$\mathbf{y}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} \quad [12]$$

$$\mathbf{y}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0} \quad [13]$$

Puesto que cada parámetro es una admitancia que se obtiene poniendo en cortocircuito el puerto de salida o el de entrada, los parámetros **y** se conocen como ***parámetros de admitancia en cortocircuito***. El nombre específico de $\mathbf{y}_{11}$ es ***admitancia de entrada en cortocircuito***; el de $\mathbf{y}_{22}$ admitancia de salida en cortocircuito; y los de $\mathbf{y}_{12}$ y $\mathbf{y}_{21}$ ***admitancias de transferencia en cortocircuito***.

EJEMPLO 17.4

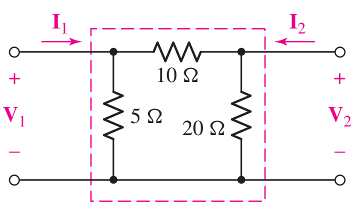


FIGURA 17.9 Dos puertos resistivos.

Determine los cuatro parámetros de admitancia en cortocircuito de los dos puertos resistivos de la figura 17.9.

Los valores de los parámetros se establecen con facilidad aplicando las ecuaciones [10] a [13], que se obtuvieron de manera directa a partir de las ecuaciones de definición (o definidas) [5] y [6]. Para determinar $\mathbf{y}_{11}$ se pone en cortocircuito la salida y se encuentra la proporción (o razón) entre $\mathbf{I}_1$ y $\mathbf{V}_1$. Lo anterior se efectúa si $\mathbf{V}_1 = 1$ V, pues en ese caso $\mathbf{y}_{11} = \mathbf{I}_1$. Por inspección de la figura 17.9, resulta claro que 1 V aplicado a la entrada, con la salida en cortocircuito, ocasionará una corriente de entrada de $(\frac{1}{5} + \frac{1}{10})$, o 0.3 A. Por consiguiente,

$$\mathbf{y}_{11} = 0.3 \text{ S}$$

Para determinar $\mathbf{y}_{12}$ ponemos en cortocircuito las terminales de entrada y se aplica 1 V en las terminales de salida. La corriente de entrada circula por el cortocircuito y es $\mathbf{I}_1 = -\frac{1}{10}$A. Por lo tanto,

$$\mathbf{y}_{12} = -0.1 \text{ S}$$

Mediante métodos similares;

$$\mathbf{y}_{12} = -0.1 \text{ S} \qquad \mathbf{y}_{22} = 0.15 \text{ S}$$

Por lo tanto, las ecuaciones que describen estos dos puertos en términos de los parámetros de admitancia son

$$\mathbf{I}_1 = 0.3\mathbf{V}_1 - 0.1\mathbf{V}_2 \quad [14]$$

$$\mathbf{I}_2 = -0.1\mathbf{V}_1 + 0.15\mathbf{V}_2 \quad [15]$$

y

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.15 \end{bmatrix} \quad \text{(todo S)}$$

Sin embargo, no se requiere encontrar estos parámetros uno por uno mediante las ecuaciones [10] y [13]. Podríamos determinar al mismo tiempo, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 17.5

Asigne las tensiones de nodo $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ en el dos puertos de la figura 17.9 y escriba las expresiones de $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ en términos de ellos.

Tenemos

$$\mathbf{I}_1 + \frac{\mathbf{V}_1}{5} = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{10} = 0.3\mathbf{V}_1 - 0.1\mathbf{V}_2$$

e

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{10} = \frac{\mathbf{V}_2}{20} = -0.1\mathbf{V}_1 + 0.15\mathbf{V}_2$$

Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones [14] y [15], y los cuatro parámetros **y** pueden leerse de *manera directa* a partir de ellas.

PRÁCTICA

17.3 Aplicando las fuentes de 1 V y los cortocircuitos apropiados al circuito de la figura 17.10, encuentre: (*a*) $\mathbf{y}_{11}$; (*b*) $\mathbf{y}_{21}$; (*c*) $\mathbf{y}_{22}$; (*d*) $\mathbf{y}_{12}$.

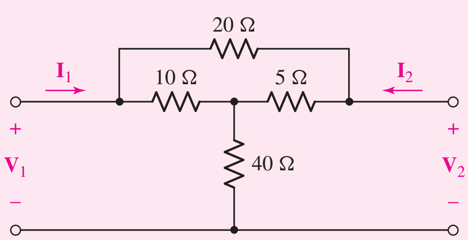


FIGURA 17.10

Respuestas: 0.1192 S; −0.1115 S; 0.1269 S; −0.1115 S.

En general, resulta más fácil utilizar las ecuaciones [10], [11], [12] o [13] cuando sólo se desea un parámetro. Sin embargo, si se necesitan todos, suele ser más fácil asignar $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ a los nodos de entrada y salida, asignar otras tensiones de nodo de referencia a cualesquiera nodos interiores, y después buscar la solución general.

Para observar el uso que podría darse a tal sistema de ecuaciones es necesario terminar ahora cada puerto con alguna red específica de un puerto. Considere la red simple de dos puertos del ejemplo 17.4 que se muestra en la figura 17.11 con una fuente

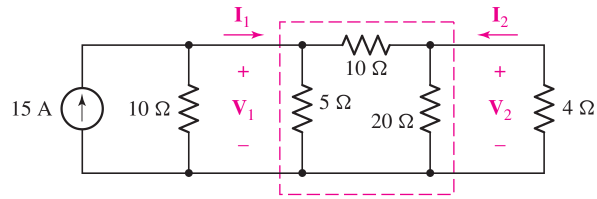


FIGURA 17.11 Red resistiva de dos puertos de la figura 17.9, que termina en redes específicas de un puerto.

de corriente práctica conectada al puerto de entrada y una carga resistiva al puerto de salida. En este caso debe existir una relación entre $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_1$ que es independiente de la red de dos puertos. Se podría determinar esta relación únicamente a partir de este circuito externo. Si se aplica LCK (o se escribe una ecuación nodal) a la entrada

$$\mathbf{I}_1 = 15 - 0.1\mathbf{V}_1$$

En la salida, la ley de Ohm origina

$$\mathbf{I}_2 = -0.25\mathbf{V}_2$$

Al sustituir estas expresiones para $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ en las ecuaciones [14] y [15], tenemos

$$\begin{aligned} 15 &= 0.4\mathbf{V}_1 - 0.1\mathbf{V}_2 \\ 0 &= -0.1\mathbf{V}_1 + 0.4\mathbf{V}_2 \end{aligned}$$

de las cuales se obtiene

$$\mathbf{V}_1 = 40 \text{ V} \qquad \mathbf{V}_2 = 10 \text{ V}$$

Las corrientes de entrada y salida se determinan también con facilidad:

$$\mathbf{I}_1 = 11 \text{ A} \qquad \mathbf{I}_2 = -2.5 \text{ A}$$

y se conocen de ese modo las características terminales completas de ambos puertos resistivos.

Las ventajas del análisis del dos puertos no se muestran en toda su magnitud en un ejemplo tan simple, aunque debe resultar claro que una vez que se determinan los parámetros y para un dos puertos más complicado, se establece con facilidad el desempeño del dos puertos para condiciones de terminales diferentes; sólo se requiere relacionar $\mathbf{V}_1$ con $\mathbf{I}_1$ en la entrada y $\mathbf{V}_2$ con $\mathbf{I}_2$ en la salida.

En el ejemplo que se acaba de terminar, se encontró que $\mathbf{y}_{12}$ y $\mathbf{y}_{21}$ eran ambas iguales a -0.1S. No es difícil demostrar que la igualdad se obtiene también si están contenidas tres impedancias generales $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ y $\mathbf{Z}_C$ en esta red en Π. Resulta un poco más difícil determinar las condiciones específicas necesarias para que $\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21}$, aunque el uso de la notación de determinantes proporciona cierta ayuda. Se verá si las relaciones de las ecuaciones [10] y [13] pueden expresarse en términos del determinante de la impedancia y sus menores.

Debido a que nuestro interés se concentra en el dos puertos y no en las redes específicas con las que terminan, dejaremos que $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ se representen mediante dos fuentes de tensión ideales. La ecuación [10] se aplica si $\mathbf{V}_2 = 0$ (poniendo por ello en cortocircuito la salida) y se calcula la admitancia de entrada. Sin embargo, la red en este caso es simplemente un puerto, y la impedancia de entrada de un puerto se determinó en la sección 17.1. Elegimos el lazo **1** para incluir las terminales de entrada y se deja que $\mathbf{I}_1$ sea la corriente del lazo; se identifica $(-\mathbf{I}_2)$ como la corriente de lazo **2** y asignamos las corrientes del lazo restantes de cualquier manera conveniente. Por lo tanto,

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}}\big|_{\mathbf{V}_2=0} = \frac{\Delta_\mathbf{Z}}{\Delta_{11}}$$

y, por ello,

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{\mathbf{Z}}}$$

De manera similar,

$$\mathbf{y}_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{\mathbf{Z}}}$$

Para determinar $\mathbf{y}_{12}$, sea $\mathbf{V}_1 = 0$ y determinamos $\mathbf{I}_1$ como una función de $\mathbf{V}_2$. Descubriremos que $\mathbf{I}_1$ está dada por la razón

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathbf{Z}_{12} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ -\mathbf{V}_2 & \mathbf{Z}_{22} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ 0 & \mathbf{Z}_{32} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \mathbf{Z}_{N2} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N2} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}}$$

De tal modo,

$$\mathbf{I}_1 = -\frac{(-\mathbf{V}_2)\Delta_{21}}{\Delta_{\mathbf{Z}}}$$

y

$$\mathbf{y}_{12} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{\mathbf{Z}}}$$

De manera similar se puede demostrar que

$$\mathbf{y}_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{\mathbf{Z}}}$$

La igualdad de $\mathbf{y}_{12}$ y $\mathbf{y}_{21}$ depende entonces de la igualdad de los dos menores de $\Delta_{\mathbf{Z}}$ – Δ_{12} y Δ_{21}. Ambos menores se determinan mediante

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \mathbf{Z}_{14} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \mathbf{Z}_{34} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \mathbf{Z}_{42} & \mathbf{Z}_{43} & \mathbf{Z}_{44} & \cdots & \mathbf{Z}_{4N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \mathbf{Z}_{N4} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}$$

y

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{23} & \mathbf{Z}_{24} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{33} & \mathbf{Z}_{34} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \mathbf{Z}_{41} & \mathbf{Z}_{43} & \mathbf{Z}_{44} & \cdots & \mathbf{Z}_{4N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N3} & \mathbf{Z}_{N4} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}$$

Su igualdad se muestra cuando se intercambian primero los renglones y las columnas de un menor (por ejemplo, Δ_{21}), que es una operación que cualquier libro de álgebra elemental demuestra que es válida, y se sustituye después toda impedancia mutua $\mathbf{Z}_{ij}$ por $\mathbf{Z}_{ji}$. Por lo tanto, se establece

$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21} \qquad \mathbf{Z}_{23} = \mathbf{Z}_{32} \qquad \text{etcétera.}$$

Esta igualdad de $\mathbf{Z}_{ij}$ y $\mathbf{Z}_{ji}$ resulta evidente para los tres elementos pasivos familiares: la resistencia, el capacitor y el inductor; también es válida para la inductancia mutua. Sin embargo, *no* es cierta para *todo* tipo de dispositivo que tal vez se desee incluir dentro de una red de dos puertos. De manera específica, no es válida en general en el caso de una fuente dependiente, ni en el de un sistema giratorio, en el de un modelo útil de los dispositivos del efecto Hall, ni en el de secciones de guías de onda que contienen ferritas. En un intervalo estrecho de frecuencias radianes, el sistema giratorio proporciona un desplazamiento (corrimiento) de fase adicional de 180° de una señal que pasa de la salida a la entrada con respecto a la señal en la dirección directa, y por lo cual $\mathbf{y}_{12} = -\mathbf{y}_{21}$. Sin embargo, un tipo común de elemento pasivo que lleva a la desigualdad de $\mathbf{Z}_{ij}$ y $\mathbf{Z}_{ji}$ es un elemento no lineal.

Cualquier dispositivo para el que $\mathbf{Z}_{ij} = \mathbf{Z}_{ji}$ sea conocido como *elemento bilateral*, y un circuito que contiene sólo elementos bilaterales se denominará *circuito bilateral*. Por lo tanto, se ha demostrado que una propiedad importante de un dos puertos bilateral es:

$$\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21}$$

así que esta propiedad se enaltece estableciéndola como el *teorema de reciprocidad*:

Una manera simple de enunciar el teorema consiste en afirmar que el intercambio de una fuente ideal de tensión y un amperímetro ideal en cualquier circuito pasivo, lineal y bilateral no variará la lectura de dicho instrumento.

En cualquier red bilateral lineal pasiva, si la fuente de tensión simple $\mathbf{V}_x$ en la rama x produce la respuesta en corriente $\mathbf{I}_y$ en la rama y, entonces la eliminación de la fuente de tensión de la rama x y su inserción en la rama y produciría la respuesta en corriente $\mathbf{I}_y$ en la rama x.

Si hubiéramos trabajado con el determinante de la admitancia del circuito y hubiéramos demostrado que los menores Δ_{21} y Δ_{12} del determinante de la admitancia $\Delta_{\mathbf{Y}}$ eran iguales, entonces habríamos obtenido el teorema de reciprocidad en su forma dual:

En otras palabras, el intercambio de una fuente ideal de corriente y de un voltímetro ideal, en cualquier circuito pasivo, lineal y bilateral, no alterará la lectura de dicho instrumento.

En cualquier red bilateral pasiva, si la fuente de corriente sencilla $\mathbf{I}_x$ entre los nodos x y x' causa la respuesta de tensión $\mathbf{V}_y$ entre los nodos y y y', entonces la eliminación (o remoción) de la fuente de corriente de los nodos x y x' y su inserción entre los nodos y y y' ocasionará la respuesta en tensión $\mathbf{V}_y$ entre los nodos x y x'.

PRÁCTICA

17.4 En el circuito de la figura 17.10, sean $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ representantes de fuentes ideales de corriente. Asigne la tensión de nodo $\mathbf{V}_1$ a la entrada, $\mathbf{V}_2$ a la salida y $\mathbf{V}_x$ desde el nodo central hasta el nodo de referencia. Escriba tres ecuaciones nodales, elimine $\mathbf{V}_x$ para obtener dos ecuaciones y luego reordene en la forma de las ecuaciones [5] y [6], de manera que la totalidad de los cuatro parámetros $\mathbf{y}$ pueda leerse en forma directa en las ecuaciones.

17.5 Determine los parámetros **y** del dos puertos que se muestra en la figura 17.12.

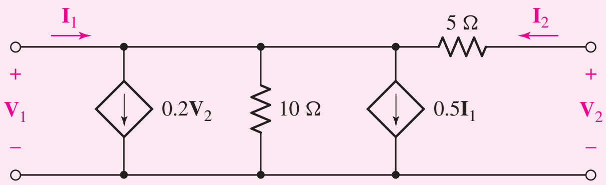


FIGURA 17.12

Respuestas: 17.4: $\begin{bmatrix} 0.1192 & -0.1115 \\ -0.1115 & 0.1269 \end{bmatrix}$ (todo S). 17.5: $\begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$ (todo S).

17.3 ALGUNAS REDES EQUIVALENTES

Cuando se analizan circuitos electrónicos, suele ser necesario sustituir el dispositivo activo (y quizá parte de su circuitería pasiva asociada) por un dos puertos equivalente que contenga sólo tres o cuatro impedancias. Quizá la validez del equivalente se restrinja a amplitudes de señal pequeñas y a una sola frecuencia, o tal vez a un intervalo limitado de frecuencias. El equivalente también es una aproximación lineal de un circuito no lineal. Sin embargo, si trabajamos con una red que contiene varios elementos tales como resistencias, capacitores e inductores, más un transistor denominado 2N3823, entonces no podemos analizar el circuito mediante cualesquiera de las técnicas estudiadas con anterioridad; el transistor debe sustituirse primero por un modelo lineal, de igual modo que se reemplazó el amp op por un modelo lineal en el capítulo 6. Los parámetros **y** proporcionan uno de estos modelos en la forma de una red de dos puertos que se usa a menudo a frecuencias elevadas. Otro modelo lineal común de un transistor aparece en la sección 17.5.

Las dos ecuaciones que determinan los parámetros de admitancia en cortocircuito

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \qquad [16]$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \qquad [17]$$

tienen la forma de un par de ecuaciones nodales escritas para un circuito con dos nodos de no referencia. La determinación de un circuito equivalente que origine las ecuaciones [16] y [17] se dificulta más por la desigualdad, en general, de $\mathbf{y}_{12}$ y $\mathbf{y}_{21}$; ayuda el hecho de recurrir a un pequeño truco para obtener un par de ecuaciones que poseen iguales coeficientes mutuos. Sumemos y restemos $\mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_1$ (el término que deseamos ver presente en el lado derecho de la ecuación [17]):

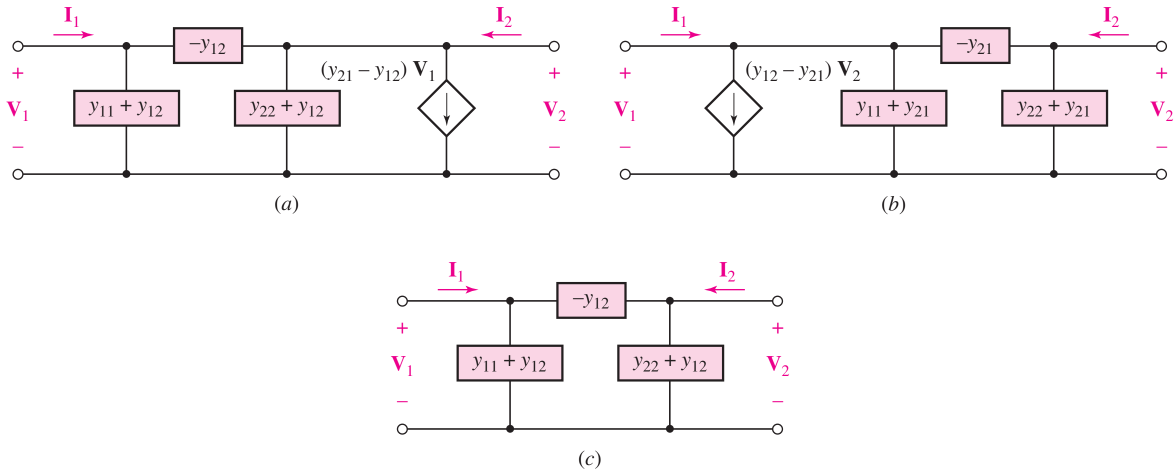
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 + (\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12})\mathbf{V}_1 \qquad [18]$$

o

$$\mathbf{I}_2 - (\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12})\mathbf{V}_1 = \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \qquad [19]$$

Los lados derechos de las ecuaciones [16] y [19] presentan ahora la simetría propia de un circuito bilateral; el lado izquierdo de la ecuación [19] se interpretaría como la suma algebraica de dos fuentes de corriente, una independiente $\mathbf{I}_2$ que entra al nodo **2**, y la otra dependiente $(\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12})\mathbf{V}_1$ que sale del nodo **2**.

Después de esto "leemos" la red equivalente de las ecuaciones [16] y [19]. Proporcionamos primero un nodo de referencia y después un nodo marcado $\mathbf{V}_1$ y otro como $\mathbf{V}_2$.

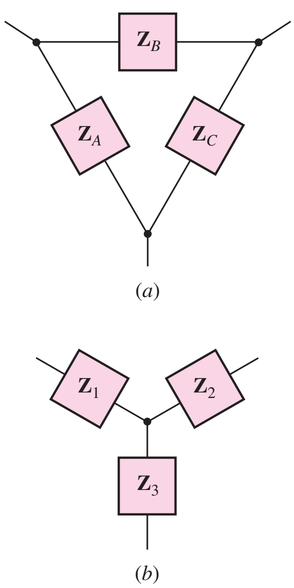


■ **FIGURA 17.13** (*a*, *b*) El dos puertos equivalentes a cualesquiera puertos lineales generales. La fuente dependiente en el inciso (*a*) depende de $\mathbf{V}_1$, y la correspondiente al inciso (*b*) depende de $\mathbf{V}_2$. (*c*) Equivalente de una red bilateral.

De acuerdo con la ecuación [16] establecemos que la corriente $\mathbf{I}_1$ fluye hacia el nodo **1**, proporcionamos una admitancia mutua $(-\mathbf{y}_{12})$ entre los nodos **1** y **2**, y proveemos una admitancia de $(\mathbf{y}_{11} + \mathbf{y}_{12})$ entre el nodo **1** y el nodo de referencia. Con $\mathbf{V}_2 = 0$, la proporción entre $\mathbf{I}_1$ y $\mathbf{V}_1$ es entonces $\mathbf{y}_{11}$, como debe ser. Considere ahora la ecuación [19]; provocamos que la corriente $\mathbf{I}_2$ fluya hacia el segundo nodo, que la corriente $(\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12})\mathbf{V}_1$ salga del nodo, observamos que la admitancia propia $(-\mathbf{y}_{12})$ existe entre los nodos, y completamos el circuito mediante la instalación de la admitancia $(\mathbf{y}_{22} + \mathbf{y}_{12})$ desde el nodo **2** hasta el de referencia. El circuito terminado se muestra en la figura 17.13*a*.

Otra forma de una red equivalente se obtiene al restar y sumar $\mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_2$ en la ecuación [16]; este circuito equivalente se ilustra en la figura 17.13*b*. Si el dos puertos es bilateral, entonces $\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21}$, y cualquiera de los equivalentes se reduce a una simple red pasiva en Π. Desaparece la fuente dependiente. Este equivalente del dos puertos bilateral se ilustra en la figura 17.13*c*.

Son varios los usos que se les puede dar a estos circuitos equivalentes. En primer lugar logramos mostrar que *existe* un equivalente de cualquier dos puertos lineal complicado. No importa cuántos nodos o lazos estén contenidos dentro de la red; el equivalente no es más complejo que los circuitos de la figura 17.13. Uno de éstos quizá sea mucho más simple de usar que el circuito dado, si sólo interesan las características terminales de la red dada.



■ **FIGURA 17.14** La red en Δ de tres terminales (*a*) y la red en Y de tres terminales (*b*) son equivalentes, si las seis impedancias satisfacen las condiciones de la transformación Y-Δ (o Π-T) ecuaciones de la [20] a la [25].

La red de tres terminales de la figura 17.14*a* se conoce a menudo como un Δ de impedancias, en tanto que la que aparece en la figura 17.14*b* se conoce como un Y. Se podría sustituir una red por la otra, si se satisfacen ciertas relaciones específicas entre las impedancias; asimismo, se establecerían estas interrelaciones mediante el uso de los parámetros **y**. Observamos que

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{1}{\mathbf{Z}_A} + \frac{1}{\mathbf{Z}_B} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3/(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)}$$

$$\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21} = -\frac{1}{\mathbf{Z}_B} = \frac{-\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}$$

$$\mathbf{y}_{22} = \frac{1}{\mathbf{Z}_C} + \frac{1}{\mathbf{Z}_B} = \frac{1}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3)}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{Z}_B$ y $\mathbf{Z}_C$ en términos de $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$:

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} \quad [20]$$

$$\mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_3} \quad [21]$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1} \quad [22]$$

o, en el caso de las relaciones inversas:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} \quad [23]$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} \quad [24]$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_C\mathbf{Z}_A}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} \quad [25]$$

El lector seguramente recordará estas útiles relaciones del capítulo 5, donde se describió su deducción.

Estas ecuaciones permiten transformar con facilidad las redes equivalentes Y y Δ, proceso que se conoce como transformación Y-Δ (o transformación Π-T si las redes se dibujan en las formas de esas letras). Al ir de Y a Δ —o sea de la ecuación [20] a la [22]— se encuentra primero el valor del numerador común como la suma de los productos de las impedancias en Y tomadas de dos en dos. Cada impedancia en Δ se determina después dividiendo el numerador entre la impedancia de ese elemento en Y que no tiene nodo común con el elemento Δ deseado. De manera inversa, dada Δ, se obtiene primero la suma de las tres impedancias alrededor de Δ y luego se divide el producto de las dos impedancias Δ que tienen un nodo común con el elemento Y deseado entre esa suma.

A menudo, tales transformaciones resultan útiles para simplificar redes pasivas, en particular las resistivas, lo cual evita la necesidad de cualquier análisis de malla o nodal.

EJEMPLO 17.6

Calcule la resistencia de entrada del circuito que se presenta en la figura 17.15*a*.

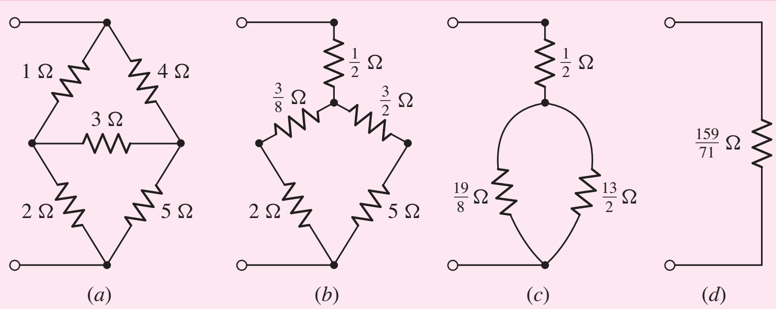


FIGURA 17.15 (*a*) Red resistiva cuya resistencia de entrada se desea. Este ejemplo se repite en el capítulo 5. (*b*) La configuración Δ superior se sustituye por una Y equivalente. (*c*, *d*) Las combinaciones en serie y en paralelo proporcionan la resistencia de entrada equivalente de $\frac{159}{71}$ Ω.

(*continúa*)

Efectuamos primero la transformación Δ-Y en la conexión Δ superior de la figura 17.15*a*. La suma de las tres resistencias que forman esta Δ es $1 + 4 + 3 = 8\ \Omega$. El producto de las dos resistencias conectadas al nodo superior es $1 \times 4 = 4\ \Omega^2$. De esta forma, la resistencia superior de la Y es $\frac{4}{8}$, o $\frac{1}{2}\ \Omega$. Al repetir este procedimiento para las otras dos resistencias obtenemos la red de la figura 17.15*b*.

A continuación realizamos las combinaciones en serie y en paralelo indicadas, obteniendo en sucesión la figura 17.15*c* y *d*. De ese modo se determina que la resistencia de entrada del circuito en la figura 17.15*a* es igual a $\frac{159}{71}$, o 2.24 Ω.

A continuación abordaremos un ejemplo un poco más complicado, el cual se ilustra en la figura 17.16. Observamos que el circuito contiene una fuente dependiente y, por ello, no se aplica la transformación Y-Δ.

EJEMPLO 17.7

Se podría considerar que el circuito de la figura 17.16 es un equivalente lineal aproximado de un amplificador de transistores, en el que la terminal del emisor es el nodo inferior; la terminal de la base corresponde al nodo de entrada superior, y la terminal del colector representa el nodo de salida superior. Se conecta una resistencia de 2 000 Ω entre el colector y la base para cierta aplicación especial, lo cual permite que el análisis del circuito sea más difícil. Determine los parámetros y de este circuito.

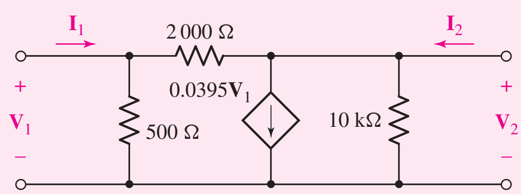


FIGURA 17.16 Circuito equivalente lineal de un transistor en la configuración de emisor común, con retroalimentación resistiva entre el colector y la base.

▶ ***Identificar el objetivo del problema.***

Utilizando el camino específico del problema para facilitar el análisis, nos damos cuenta de que se presenta una red de dos puertos y que se requiere de los parámetros **y**.

▶ ***Recopilar la información conocida.***

La figura 17.16 muestra una red de dos puertos con $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$ ya indicadas y se proporciona el valor de cada componente.

▶ ***Elaborar un plan.***

Son varias las formas en las que se podría considerar este circuito. Si aceptamos que tiene la forma del circuito equivalente de la figura 17.13*a*, entonces podríamos determinar de inmediato los valores de los parámetros **y**. Si el reconocimiento no es inmediato, entonces los parámetros **y** del dos puertos se determinarían aplicando las relaciones de las ecuaciones [10] a [13]. También podríamos evitar cualquier uso de los métodos del análisis de dos puertos y escribir de manera directa las ecuaciones del circuito, en la forma que se presenta. Esta opción parece ser la mejor en este caso.

Construir un conjunto de ecuaciones apropiado.
Por inspección, determinamos que $-\mathbf{y}_{21}$ corresponde a la admitancia de la resistencia de 2 kΩ, $\mathbf{y}_{11} + \mathbf{y}_{12}$ a la admitancia de la resistencia de 500 Ω, que la ganancia de la fuente de corriente dependiente corresponde a $\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12}$ y, por último, $\mathbf{y}_{22} + \mathbf{y}_{12}$ a la admitancia de la resistencia de 10 kΩ. Por consiguiente, podríamos escribir

$$\mathbf{y}_{12} = -\tfrac{1}{2\,000}$$
$$\mathbf{y}_{11} = \tfrac{1}{500} - \mathbf{y}_{12}$$
$$\mathbf{y}_{21} = 0.0395 + \mathbf{y}_{12}$$
$$\mathbf{y}_{22} = \tfrac{1}{10\,000} - \mathbf{y}_{12}$$

Determinar si se requiere información adicional.
Con las ecuaciones escritas como están observamos que luego de que se calcula $\mathbf{y}_{12}$, también se podrían obtener los parámetros $\mathbf{y}$ restantes.

Buscar la solución.
Al introducir los datos en una calculadora obtenemos

$$\mathbf{y}_{12} = -\tfrac{1}{2\,000} = -0.5 \text{ mS}$$
$$\mathbf{y}_{11} = \tfrac{1}{500} - \left(-\tfrac{1}{2\,000}\right) = 2.5 \text{ mS}$$
$$\mathbf{y}_{22} = \tfrac{1}{10\,000} - \left(-\tfrac{1}{2\,000}\right) = 0.6 \text{ mS}$$

y

$$\mathbf{y}_{21} = 0.0395 + \left(-\tfrac{1}{2\,000}\right) = 39 \text{ mS}$$

Entonces deben aplicarse las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{I}_1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2 \qquad [26]$$
$$\mathbf{I}_2 = 39\mathbf{V}_1 + 0.6\mathbf{V}_2 \qquad [27]$$

donde utilizamos ahora unidades de mA, V y mS o kΩ.

Verificar la solución. ¿Es razonable o esperada?
Escribiendo en forma directa las dos ecuaciones nodales del circuito, se encuentra que

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{2} + \frac{\mathbf{V}_1}{0.5} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{I}_1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2$$

y

$$-39.5\mathbf{V}_1 + \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{2} + \frac{\mathbf{V}_2}{10} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{I}_2 = 39\mathbf{V}_1 + 0.6\mathbf{V}_2$$

lo que concuerda con las ecuaciones [26] y [27] que se obtuvieron de manera directa a partir de los parámetros $\mathbf{y}$.

A continuación recurriremos a las ecuaciones [26] y [27] para analizar el desempeño del dos puertos en la figura 17.16 bajo varias condiciones de operación diferentes. Proporcionaremos primero una fuente de corriente de $1\underline{/0^\circ}$ mA en la entrada y conectaremos una carga de 0.5 kΩ (2 mS) en la salida. Por lo tanto, las redes terminadas resultan de un puerto y nos dan la siguiente información específica que relaciona a $\mathbf{I}_1$ con $\mathbf{V}_1$ y a $\mathbf{I}_2$ con $\mathbf{V}_2$:

$$\mathbf{I}_1 = 1(\text{para cualquier } \mathbf{V}_1) \qquad \mathbf{I}_2 = -2\mathbf{V}_2$$

Tenemos ahora cuatro ecuaciones con cuatro variables, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. Al sustituir las dos relaciones de un puerto en las ecuaciones [26] y [27] obtenemos dos ecuaciones que relacionan a $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$:

$$1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2 \qquad 0 = 39\mathbf{V}_1 + 2.6\mathbf{V}_2$$

Resolviendo, observamos que

$$\mathbf{V}_1 = 0.1 \text{ V} \quad \mathbf{V}_2 = -1.5 \text{ V}$$
$$\mathbf{I}_1 = 1 \text{ mA} \quad \mathbf{I}_2 = 3 \text{ mA}$$

Estos cuatro valores se aplican al dos puertos que opera con una entrada establecida ($\mathbf{I}_1 = 1$ mA) y una carga específica ($R_L = 0.5$ kΩ).

A menudo, el desempeño de un amplificador se describe mediante la indicación de unos cuantos valores específicos. Calcularemos cuatro de dichos valores para este dos puertos con sus terminaciones. Definiremos y evaluaremos y la ganancia de tensión, la ganancia de corriente, la ganancia de potencia y la impedancia de entrada.

La *ganancia de tensión* $\mathbf{G}_V$ es

$$\mathbf{G}_V = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}$$

De acuerdo con los resultados numéricos, resulta fácil ver que $\mathbf{G}_V = -15$.

La *ganancia de corriente* $\mathbf{G}_I$ se define como

$$\mathbf{G}_I = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}$$

y tenemos

$$\mathbf{G}_I = 3$$

Definimos y calculamos la *ganancia de potencia* G_P para una excitación senoidal supuesta. Tenemos

$$G_P = \frac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{ent}}} = \frac{\text{Re}\left[-\frac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2^*\right]}{\text{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^*\right]} = 45$$

El dispositivo podría recibir el nombre de amplificador de tensión, de corriente o de potencia, puesto que todas las ganancias son mayores que la unidad. Si se eliminara la resistencia de 2 kΩ la ganancia de potencia aumentaría hasta 354.

Muchas veces se requieren las impedancias de entrada y de salida del amplificador para que pueda conseguirse la transferencia de potencia máxima hacia o desde un dos puertos adyacente. En este caso definimos la *impedancia de entrada* $\mathbf{Z}_{\text{ent}}$ como la proporción (o razón) entre la tensión y la corriente, ambas de entrada:

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = 0.1 \text{ k}\Omega$$

Ésta es la impedancia que se presenta en la fuente de corriente cuando se conecta la carga de 500 Ω en la salida. (Con la salida en cortocircuito, la impedancia de entrada es necesariamente $1/\mathbf{y}_{11}$, o sea 400 Ω.)

Debe observarse que la impedancia de entrada *no puede* determinarse sustituyendo toda fuente por su impedancia interna y combinando después las resistencias o las conductancias. En un circuito dado, un procedimiento de este tipo produciría un valor de 416 Ω. El error, desde luego, proviene de considerar a la fuente *dependiente* como una fuente *independiente*. Si suponemos que la impedancia de entrada es numéricamente igual a la tensión de entrada producida por una corriente de entrada de 1 A, la aplicación de la fuente de 1 A origina cierta tensión de entrada $\mathbf{V}_1$ y la magnitud de la fuente dependiente ($0.0395\mathbf{V}_1$) no puede valer cero. Debemos recordar que cuando obtenemos la impedancia equivalente de Thévenin de un circuito con una fuente dependiente, junto con una o más fuentes independientes, debemos sustituir las fuentes independientes por cortocircuitos o circuitos abiertos, aunque una fuente dependiente no puede suprimirse. Desde luego, si la tensión o la corriente de la que depende la fuente dependiente es cero, estará inactiva; en ocasiones, un circuito se simplifica al reconocer una ocurrencia de este tipo.

Además de $\mathbf{G}_V$, $\mathbf{G}_I$, G_P y $\mathbf{Z}_{\text{ent}}$, hay otro parámetro de desempeño que resulta bastante útil: la *impedancia de salida* $\mathbf{Z}_{\text{sal}}$, la que se determina para una configuración de circuito diferente.

La impedancia de salida es sólo otro término con el que se designa la impedancia de Thévenin que aparece en el circuito equivalente de Thévenin de esa porción de la red enfrentada por la carga. En nuestro circuito, que suponemos que es accionado por una fuente de corriente de $1\underline{/0^\circ}$ mA, sustituimos, por lo tanto, dicha fuente independiente por un circuito abierto, dejamos sola a la fuente dependiente, y buscamos la impedancia de *entrada* vista al mirar hacia la izquierda de las terminales de salida (con la carga eliminada). De tal modo, definimos

$$\mathbf{Z}_{\text{sal}} = \mathbf{V}_2|_{\mathbf{I}_2=1} \text{ con todas las demás fuentes independientes desconectadas } y\ RL \text{ removido}$$

Por lo tanto, eliminamos la resistencia de carga, aplicamos $1\underline{/0^\circ}$ mA (puesto que estamos trabajando en V, mA y kΩ) en las terminales de salida y determinamos $\mathbf{V}_2$. Fijando estos requerimientos en las ecuaciones [26] y [27], obtenemos

$$0 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2 \qquad 1 = 39\mathbf{V}_1 + 0.6\mathbf{V}_2$$

Al resolver

$$\mathbf{V}_2 = 0.1190 \text{ V}$$

y, de ese modo,

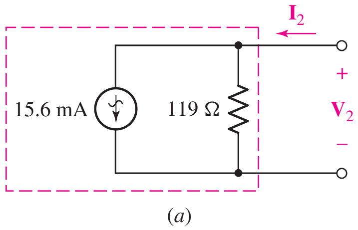
$$\mathbf{Z}_{\text{sal}} = 0.1190 \text{ k}\Omega$$

Un procedimiento alterno podría consistir en encontrar la tensión de salida en circuito abierto y la corriente de salida en cortocircuito. Por lo tanto, la impedancia de Thévenin es la impedancia de salida:

$$\mathbf{Z}_{\text{sal}} = \mathbf{Z}_{th} = -\frac{\mathbf{V}_{2oc}}{\mathbf{I}_{2sc}}$$

Llevando a cabo este procedimiento, volvemos a encender primero la fuente independiente de modo que $\mathbf{I}_1 = 1$ mA, y después ponemos en circuito abierto la carga, de modo que $\mathbf{I}_2 = 0$. Tenemos

$$1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2 \qquad 0 = 39\mathbf{V}_1 + 0.6\mathbf{V}_2$$



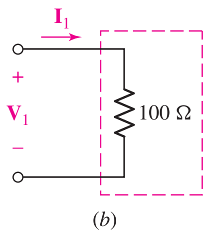


FIGURA 17.17 (a) Equivalente de Norton de la red de la figura 17.16 a la izquierda de la terminal de salida, $\mathbf{I}_1 = 1\underline{/0^\circ}$ mA. (b) Equivalente de Thévenin de esa porción de la red, a la derecha de las terminales de entrada, si $\mathbf{I}_2 = -2\mathbf{V}_2$ mA.

y, de ese modo,

$$\mathbf{V}_{2oc} = -1.857 \text{ V}$$

En seguida aplicamos las condiciones de cortocircuito, esto es, dejando $\mathbf{V}_2 = 0$ e igualando de nuevo $\mathbf{I}_1 = 1$ mA. Encontramos que

$$\mathbf{I}_1 = 1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0 \qquad \mathbf{I}_2 = 39\mathbf{V}_1 + 0$$

y, por lo tanto,

$$\mathbf{I}_{2sc} = 15.6 \text{ mA}$$

Las direcciones tomadas de $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$ resultan, en consecuencia, en una impedancia de Thévenin o de salida

$$\mathbf{Z}_{\text{sal}} = -\frac{\mathbf{V}_{2oc}}{\mathbf{I}_{2sc}} = -\frac{-1.857}{15.6} = 0.1190 \text{ k}\Omega$$

como antes.

Se cuenta ahora con suficiente información que permite dibujar el equivalente de Thévenin o de Norton del dos puertos de la figura 17.16, cuando se activa por medio de una fuente de corriente de $1\underline{/0^\circ}$ mA y se termina en una carga de 500 Ω. De tal modo, el equivalente de Norton que se presenta a la carga debe contener una fuente de corriente igual a la corriente en cortocircuito $\mathbf{I}_{2sc}$ en paralelo con la impedancia de salida; este equivalente se muestra en la figura 17.17*a*. Además, el equivalente de Thévenin que se presenta a la fuente de entrada $1\underline{/0^\circ}$ mA debe consistir sólo en la impedancia de entrada, según se observa en la figura 17.17*b*.

Antes de dejar los parámetros **y** debemos reconocer su utilidad para describir la conexión en paralelo de dos puertos, como se indica en la figura 17.18. Cuando definimos por primera vez un puerto en la sección 17.1 observamos que la corriente que entra y sale de las dos terminales de un puerto tenía que ser igual y que no podrían establecerse conexiones externas que establecieran un puente entre puertos. Al parecer la conexión en paralelo de la figura 17.18 viola esta condición. Sin embargo, si cada pareja de puertos tiene un nodo de referencia que sea común a su puerto de entrada y de salida y si el dos puertos se conecta en paralelo de manera que tengan un nodo de referencia común, entonces todos los puertos quedan como tales después de la conexión. Por lo tanto, para la red *A*,

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{y}_A \mathbf{V}_A$$

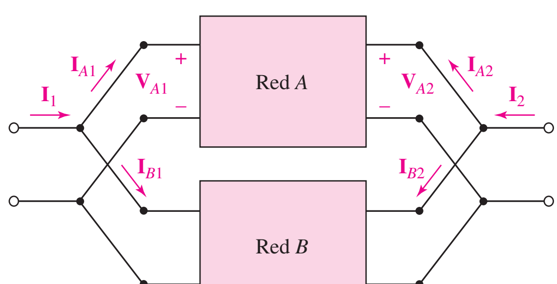


FIGURA 17.18 Conexión en paralelo de dos redes de dos puertos. Si ambas entradas y salidas tienen el mismo nodo de referencia, la matriz de admitancia es $\mathbf{y} = \mathbf{y}_A + \mathbf{y}_B$.

donde

$$\mathbf{I}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{A1} \\ \mathbf{I}_{A2} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{V}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{A1} \\ \mathbf{V}_{A2} \end{bmatrix}$$

y en el caso de la red B

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{y}_B \mathbf{V}_B$$

Sin embargo,

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B = \mathbf{V} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{I} = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{I} = (\mathbf{y}_A + \mathbf{y}_B)\mathbf{V}$$

y observamos que cada parámetro **y** de la red en paralelo está dado como la suma de los parámetros correspondientes de las redes individuales:

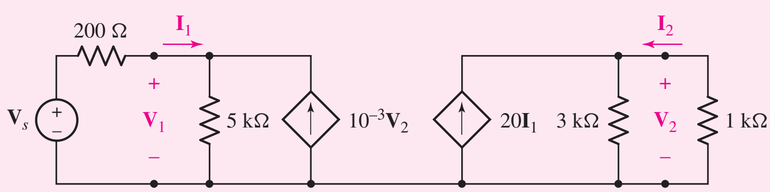
$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_A + \mathbf{y}_B \qquad [28]$$

Lo anterior puede extenderse a cualquier número de dos puertos conectados en paralelo.

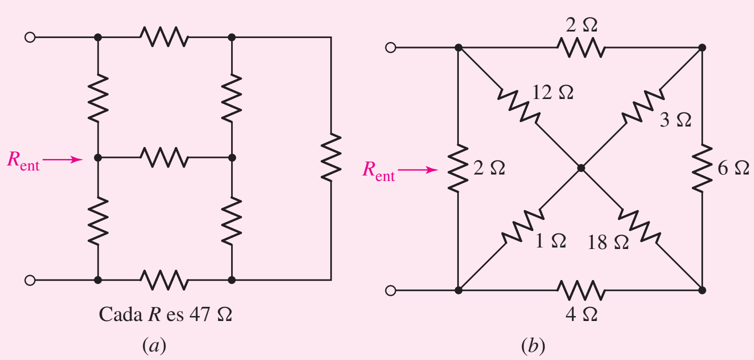
PRÁCTICA

17.6 Determine **y** y $\mathbf{Z}_{sal}$ del dos puertos completo de la figura 17.19.

17.7 Utilice las transformaciones Δ-Y y Y-Δ para deterninar R_{ent} de la red que se muestra en (*a*) la figura 17.20*a*; (*b*) la figura 17.20*b*.



■ **FIGURA 17.19**



■ **FIGURA 17.20**

Respuestas: 17.6: $\begin{bmatrix} 2 \times 10^{-4} & -10^{-3} \\ -4 \times 10^{-3} & 20.3 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$ (S); 51.1 Ω. 17.7; 53.71 Ω, 1.311 Ω.

17.4 PARÁMETROS DE IMPEDANCIA

El concepto de parámetros de dos puertos se presentó en términos de los parámetros de admitancia en cortocircuito. Sin embargo, existen otros conjuntos de parámetros y cada uno se asocia con una clase de redes particular para cuyo uso se proporciona el análisis más simple. Consideraremos otros tres tipos de parámetros, los de impedancia en circuito abierto, que son el tema de esta sección, así como los híbridos y los de transmisión, que se analizan en las secciones siguientes.

Comenzamos de nuevo con un dos puertos lineal general que no contiene ninguna fuente independiente: las corrientes y las tensiones se asignan como ya se hizo (figura 17.8). Consideremos ahora la tensión $\mathbf{V}_1$ como la respuesta producida por dos fuentes de corriente $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. Por lo tanto, para $\mathbf{V}_1$ podemos

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \qquad [29]$$

y para $\mathbf{V}_2$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 \qquad [30]$$

o

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{zI} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \qquad [31]$$

Desde luego, al usar estas ecuaciones no es necesario que $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ sean fuentes de corriente; tampoco se requiere que $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ sean fuentes de tensión. En general, podríamos tener, en cualquier extremo, cualesquiera redes que terminen en los de dos puertos. A medida que se escriben las ecuaciones, tal vez consideremos que $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ sean las cantidades indicadas, o variables independientes, y que $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ sean incógnitas, o variables dependientes.

Las seis formas en las que se pueden escribir dos ecuaciones para relacionar estas cuatro cantidades definen los diferentes sistemas de parámetros. Estudiamos los cuatro más importantes de estos seis sistemas de parámetros.

La descripción más informativa de los parámetros **z**, definida en las ecuaciones [29] y [30], se obtiene igualando a cero cada una de las corrientes. Por lo tanto,

$$\mathbf{z}_{11} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0} \qquad [32]$$

$$\mathbf{z}_{12} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} \qquad [33]$$

$$\mathbf{z}_{21} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0} \qquad [34]$$

$$\mathbf{z}_{22} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} \qquad [35]$$

Puesto que resulta una corriente igual a cero de una terminación en circuito abierto, los parámetros **z** se conocen como *parámetros de impedancia en circuito abierto*, los

cuales se relacionan con facilidad con los parámetros de admitancia en cortocircuito al resolver las ecuaciones [29] y [30] para $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{z}_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{vmatrix}}$$

o

$$\mathbf{I}_1 = \left(\frac{\mathbf{z}_{22}}{\mathbf{z}_{11}\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}\right)\mathbf{V}_1 - \left(\frac{\mathbf{z}_{12}}{\mathbf{z}_{11}\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}\right)\mathbf{V}_2$$

Utilizando la notación de determinantes y teniendo cuidado de que el subíndice sea una $\mathbf{z}$, suponemos y obtenemos $\Delta_\mathbf{z} \neq 0$

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}_{22}}{\Delta_\mathbf{z}} \qquad \mathbf{y}_{12} = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta_\mathbf{z}} = -\frac{\mathbf{z}_{12}}{\Delta_\mathbf{z}}$$

y del despeje de $\mathbf{I}_2$, tenemos

$$\mathbf{y}_{21} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_\mathbf{z}} = -\frac{\mathbf{z}_{21}}{\Delta_\mathbf{z}} \qquad \mathbf{y}_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}_{11}}{\Delta_\mathbf{z}}$$

De manera similar, los parámetros **z** se deben expresar en términos de los parámetros de admitancia. Las transformaciones de esta naturaleza son posibles entre cualquiera de los diversos sistemas de parámetros, y en forma completa se podría obtener una colección de fórmulas ocasionalmente útiles. Las transformaciones entre los parámetros **y** y **z** (así como las de los parámetros **h** y **t** que se consideran en las secciones siguientes) se presentan en la tabla 17.1 como una referencia útil.

TABLA 17.1 Transformaciones entre los parámetros y, z, h y t

	y		z		h		t	
y	$\mathbf{y}_{11}$	$\mathbf{y}_{12}$	$\frac{\mathbf{z}_{22}}{\Delta_\mathbf{z}}$	$\frac{-\mathbf{z}_{12}}{\Delta_\mathbf{z}}$	$\frac{1}{\mathbf{h}_{11}}$	$\frac{-\mathbf{h}_{12}}{\mathbf{h}_{11}}$	$\frac{\mathbf{t}_{22}}{\mathbf{t}_{12}}$	$\frac{-\Delta_\mathbf{t}}{\mathbf{t}_{12}}$
	$\mathbf{y}_{21}$	$\mathbf{y}_{22}$	$\frac{-\mathbf{z}_{21}}{\Delta_\mathbf{z}}$	$\frac{\mathbf{z}_{11}}{\Delta_\mathbf{z}}$	$\frac{\mathbf{h}_{21}}{\mathbf{h}_{11}}$	$\frac{\Delta_\mathbf{h}}{\mathbf{h}_{11}}$	$\frac{-1}{\mathbf{t}_{12}}$	$\frac{\mathbf{t}_{11}}{\mathbf{t}_{12}}$
z	$\frac{\mathbf{y}_{22}}{\Delta_\mathbf{y}}$	$\frac{-\mathbf{y}_{12}}{\Delta_\mathbf{y}}$	$\mathbf{z}_{11}$	$\mathbf{z}_{12}$	$\frac{\Delta_\mathbf{h}}{\mathbf{h}_{22}}$	$\frac{\mathbf{h}_{12}}{\mathbf{h}_{22}}$	$\frac{\mathbf{t}_{11}}{\mathbf{t}_{21}}$	$\frac{\Delta_\mathbf{t}}{\mathbf{t}_{21}}$
	$\frac{-\mathbf{y}_{21}}{\Delta_\mathbf{y}}$	$\frac{\mathbf{y}_{11}}{\Delta_\mathbf{y}}$	$\mathbf{z}_{21}$	$\mathbf{z}_{22}$	$\frac{-\mathbf{h}_{21}}{\mathbf{h}_{22}}$	$\frac{1}{\mathbf{h}_{22}}$	$\frac{1}{\mathbf{t}_{21}}$	$\frac{\mathbf{t}_{22}}{\mathbf{t}_{21}}$
h	$\frac{1}{\mathbf{y}_{11}}$	$\frac{-\mathbf{y}_{12}}{\mathbf{y}_{11}}$	$\frac{\Delta_\mathbf{z}}{\mathbf{z}_{22}}$	$\frac{\mathbf{z}_{12}}{\mathbf{z}_{22}}$	$\mathbf{h}_{11}$	$\mathbf{h}_{12}$	$\frac{\mathbf{t}_{12}}{\mathbf{t}_{22}}$	$\frac{\Delta_\mathbf{t}}{\mathbf{t}_{22}}$
	$\frac{\mathbf{y}_{21}}{\mathbf{y}_{11}}$	$\frac{\Delta_\mathbf{y}}{\mathbf{y}_{11}}$	$\frac{-\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{22}}$	$\frac{1}{\mathbf{z}_{22}}$	$\mathbf{h}_{21}$	$\mathbf{h}_{22}$	$\frac{-1}{\mathbf{t}_{22}}$	$\frac{\mathbf{t}_{21}}{\mathbf{t}_{22}}$
t	$\frac{-\mathbf{y}_{22}}{\mathbf{y}_{21}}$	$\frac{-1}{\mathbf{y}_{21}}$	$\frac{\mathbf{z}_{11}}{\mathbf{z}_{21}}$	$\frac{\Delta_\mathbf{z}}{\mathbf{z}_{21}}$	$\frac{-\Delta_\mathbf{h}}{\mathbf{h}_{21}}$	$\frac{-\mathbf{h}_{11}}{\mathbf{h}_{21}}$	$\mathbf{t}_{11}$	$\mathbf{t}_{12}$
	$\frac{-\Delta_\mathbf{y}}{\mathbf{y}_{21}}$	$\frac{-\mathbf{y}_{11}}{\mathbf{y}_{21}}$	$\frac{1}{\mathbf{z}_{21}}$	$\frac{\mathbf{z}_{22}}{\mathbf{z}_{21}}$	$\frac{-\mathbf{h}_{22}}{\mathbf{h}_{21}}$	$\frac{-1}{\mathbf{h}_{21}}$	$\mathbf{t}_{21}$	$\mathbf{t}_{22}$

Para todos los grupos de parámetros: $\Delta_\mathbf{p} = \mathbf{p}_{11}\mathbf{p}_{22} - \mathbf{p}_{12}\mathbf{p}_{21}$.

Si el dos puertos corresponde a una red bilateral, está presente la reciprocidad; es fácil demostrar que lo anterior origina la igualdad de $\mathbf{z}_{12}$ y $\mathbf{z}_{21}$.

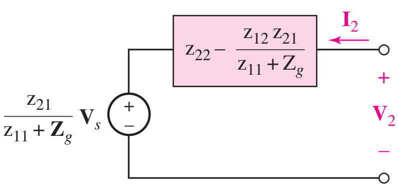
Los circuitos equivalentes de nuevo se podrían obtener a partir de la inspección de las ecuaciones [29] y [30]; su construcción se facilita sumando y restando o $\mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_1$ en la ecuación [30], o $\mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_2$ en la ecuación [29]. Cada uno de estos circuitos equivalentes contiene una fuente de tensión dependiente.

Dejaremos la deducción de un equivalente de estas características para algún momento de ocio y consideraremos a continuación un ejemplo de naturaleza más general. ¿Podemos construir un equivalente de Thévenin general del dos puertos, según se observa desde las terminales de salida? Es necesario suponer primero una configuración específica del circuito de entrada y seleccionaremos una fuente de tensión independiente $\mathbf{V}_s$ (signo positivo en la parte superior) en serie con una impedancia de generador $\mathbf{Z}_g$. Por lo tanto,

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_1 + \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_g$$

Al combinar este resultado con las ecuaciones [29] y [30] eliminaremos $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_1$ para obtener

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11} + \mathbf{Z}_g}\mathbf{V}_s + \left(\mathbf{z}_{22} - \frac{\mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11} + \mathbf{Z}_g}\right)\mathbf{I}_2$$



■ **FIGURA 17.21** Equivalente de Thévenin del dos puertos general, según se observa desde las terminales de salida, expresado en términos de los parámetros de impedancia en circuito abierto.

El circuito equivalente de Thévenin se puede dibujar en forma directa a partir de esta ecuación, como se observa en la figura 17.21. La impedancia de salida, expresada en términos de los parámetros **z**, está dada por

$$\mathbf{Z}_{\text{sal}} = \mathbf{z}_{22} - \frac{\mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11} + \mathbf{Z}_g}$$

Si la impedancia del generador es cero se obtiene la expresión más simple

$$\mathbf{Z}_{\text{sal}} = \frac{\mathbf{z}_{11}\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11}} = \frac{\Delta_{\mathbf{z}}}{\Delta_{22}} = \frac{1}{\mathbf{y}_{22}} \qquad (\mathbf{Z}_g = 0)$$

para este caso especial, la *admitancia* de salida es idéntica a $\mathbf{y}_{22}$, como se indica mediante la relación básica de la ecuación [13].

EJEMPLO 17.8

Dado el siguiente conjunto de parámetros de impedancia:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 10^3 & 10 \\ -10^6 & 10^4 \end{bmatrix} \quad (\text{todo } \Omega)$$

que es representativo de un transistor de unión bipolar que funciona en la configuración de emisor común, determine las ganancias respectivas de tensión, corriente y potencia, así como las impedancias de entrada y salida. Podría considerar el dos puertos como si lo accionara una fuente de tensión senoidal ideal $\mathbf{V}_s$ en serie con una resistencia de 500 Ω y terminado en una resistencia de carga de 10 kΩ.

Las dos ecuaciones descriptivas del dos puertos son

$$\mathbf{V}_1 = 10^3\mathbf{I}_1 + 10\mathbf{I}_2 \qquad [36]$$

$$\mathbf{V}_2 = -10^6\mathbf{I}_1 + 10^4\mathbf{I}_2 \qquad [37]$$

y las ecuaciones de caracterización de las redes de entrada y salida corresponden a

$$\mathbf{V}_s = 500\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_1 \qquad [38]$$

$$\mathbf{V}_2 = -10^4\mathbf{I}_2 \qquad [39]$$

A partir de estas últimas cuatro ecuaciones podemos obtener, sin ninguna dificultad, las expresiones de $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{I}_1$ $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$ en términos de $\mathbf{V}_s$:

$$\mathbf{V}_1 = 0.75\mathbf{V}_s \qquad \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_s}{2\,000}$$

$$\mathbf{V}_2 = -250\mathbf{V}_s \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_s}{40}$$

A partir de esta información, resulta sencillo determinar la ganancia de tensión,

$$\mathbf{G}_V = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = -333$$

la ganancia de corriente,

$$\mathbf{G}_I = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = 50$$

la ganancia de potencia,

$$G_P = \frac{\text{Re}\left[-\frac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2^*\right]}{\text{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^*\right]} = 16\,670$$

y la impedancia de entrada,

$$\mathbf{Z}_{\text{ent}} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = 1\,500\ \Omega$$

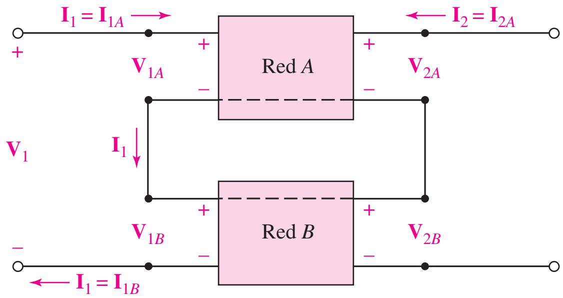
La impedancia de salida se obtiene con referencia a la figura 17.21:

$$\mathbf{Z}_{\text{sal}} = \mathbf{z}_{22} - \frac{\mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11} + \mathbf{Z}_g} = 16.67\ \text{k}\Omega$$

De acuerdo con la predicción del teorema de transferencia de potencia máxima, la ganancia de potencia alcanza un valor máximo cuando $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{sal}^* = 16.67\ \text{k}\Omega$; ese valor máximo es 17 045.

Los parámetros **y** son útiles cuando dos elementos de dos puertos se interconectan en paralelo, y de una manera dual, los parámetros **z** simplifican el problema de una conexión en serie de redes, que se ilustra en la figura 17.22. Observar que la conexión en serie *no* es la misma que la conexión en cascada que se explicará después en conexión con los parámetros de transmisión. Si cada uno del de dos puertos tiene un nodo de referencia común para su entrada y salida, y si las referencias se conectan juntas como se indica en la figura 17.22, entonces $\mathbf{I}_1$ fluye a través de los puertos de entrada de las dos redes en serie. Una afirmación similar se cumple para $\mathbf{I}_2$. Por lo tanto, los puertos lo siguen siendo después de la interconexión. Se concluye que $\mathbf{I} = \mathbf{I}_A = \mathbf{I}_B$ y

$$\begin{aligned}\mathbf{V} = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B &= \mathbf{z}_A\mathbf{I}_A + \mathbf{z}_B\mathbf{I}_B \\ &= (\mathbf{z}_A + \mathbf{z}_B)\mathbf{I} = \mathbf{z}\mathbf{I}\end{aligned}$$



■ **FIGURA 17.22** La conexión en serie de dos redes de dos puertos se realiza conectando entre sí los cuatro nodos de referencia común; en ese caso la matriz $\mathbf{z} = \mathbf{z}_A + \mathbf{z}_B$.

donde

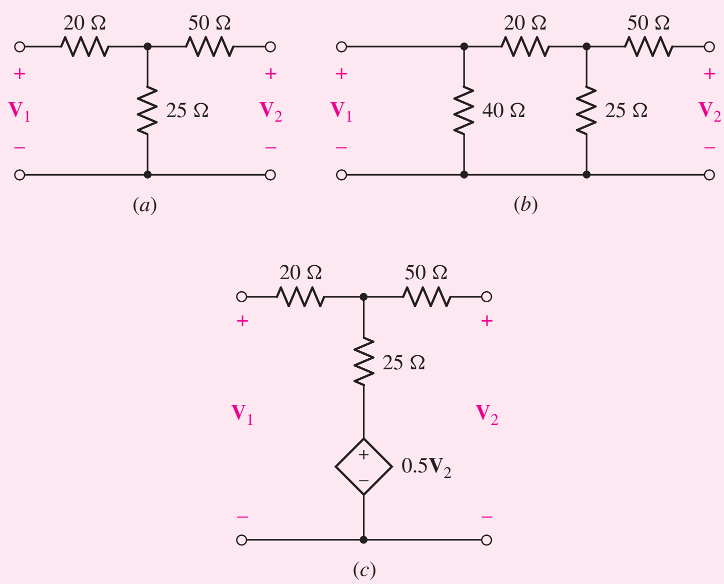
$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_A + \mathbf{z}_B$$

de manera que $\mathbf{z}_{11} = \mathbf{z}_{11A} + \mathbf{z}_{11B}$, etcetera.

PRÁCTICA

17.8 Calcule **z** del dos puertos que se muestra en: (*a*) la figura 17.23*a*; (*b*) la figura 17.23*b*.

17.9 Encuentre **z** del dos puertos que se muestra en la figura 17.23*c*.



■ **FIGURA 17.23**

Respuestas: 17.8: $\begin{bmatrix} 45 & 25 \\ 25 & 75 \end{bmatrix} (\Omega)$, $\begin{bmatrix} 21.2 & 11.76 \\ 11.76 & 67.6 \end{bmatrix} (\Omega)$. 17.9: $\begin{bmatrix} 70 & 100 \\ 50 & 150 \end{bmatrix} (\Omega)$.

17.5 PARÁMETROS HÍBRIDOS

La dificultad para medir cantidades como los parámetros de impedancia en circuito abierto surge cuando debe medirse un parámetro como $\mathbf{z}_{21}$. Una corriente senoidal conocida se suministra con facilidad en las terminales de entrada, pero debido al elevado excedente de la impedancia de salida del circuito transistorizado, resulta difícil poner en circuito abierto las terminales de salida, o incluso suministrar las tensiones de polarización de cd necesarias y medir la tensión de salida senoidal. Es mucho más fácil llevar a cabo una medición de corriente en cortocircuito en las terminales de salida.

Los parámetros híbridos se definen escribiendo el par de ecuaciones que relacionan $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$ como si $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_2$ fueran las variables independientes:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2 \qquad [40]$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2 \qquad [41]$$

o

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{h} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \qquad [42]$$

La naturaleza de los parámetros se aclara poniendo primero $\mathbf{V}_2 = 0$. Por lo tanto,

$$\mathbf{h}_{11} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} = \text{impedancia de entrada de cortocircuito}$$

$$\mathbf{h}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} = \text{ganancia de corriente de cortocircuito}$$

Si $\mathbf{I}_1 = 0$ obtenemos

$$\mathbf{h}_{12} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} = \text{ganancia de tensión inversa de circuito abierto}$$

$$\mathbf{h}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} = \text{admitancia de salida de circuito abierto}$$

Dado que los parámetros representan una impedancia, una admitancia, una ganancia de tensión y una ganancia de corriente, se conocen con el nombre de parámetros "híbridos".

Las designaciones de los subíndices de estos parámetros se simplifican a menudo cuando se aplican a transistores. De tal modo, $\mathbf{h}_{11}$, $\mathbf{h}_{12}$, $\mathbf{h}_{21}$ y $\mathbf{h}_{22}$ se convierten en $\mathbf{h}_i$, $\mathbf{h}_r$, $\mathbf{h}_f$ y $\mathbf{h}_o$, respectivamente, donde los subíndices denotan entrada, inverso, directo y salida.

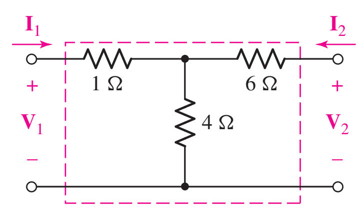
EJEMPLO 17.9

Determine h **del circuito resistivo bilateral dibujado en la figura 17.24.**

Con la salida en cortocircuito ($\mathbf{V}_2 = 0$), la aplicación de una fuente de 1 A en la entrada ($\mathbf{I}_1 = 1$A) produce una tensión de entrada de 3.4 V ($\mathbf{V}_1 = 3.4$ V); por consiguiente, $\mathbf{h}_{11} = 3.4\ \Omega$. Bajo estas mismas condiciones, la corriente de salida se obtiene con facilidad mediante la división de corriente, $\mathbf{I}_2 = -0.4$ A; de tal modo, $\mathbf{h}_{21} = -3.4\ \Omega$.

Los dos parámetros restantes se obtienen con la entrada en circuito abierto ($\mathbf{I}_1 = 0$). Aplicaremos una tensión de 1 V en las terminales de salida ($\mathbf{V}_2 = 1$ V).

(continúa)



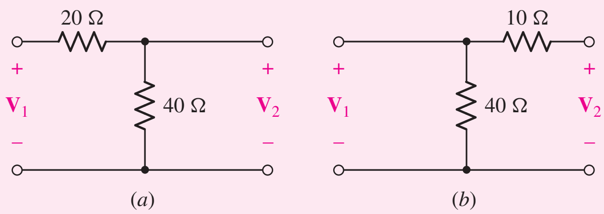
■ **FIGURA 17.24** Red bilateral para la que se calculan los parámetros **h**: $\mathbf{h}_{12} = -\mathbf{h}_{21}$.

La respuesta en las terminales de entrada es 0.4 V ($\mathbf{V}_1 = 0.4$ V) y, por ello, $\mathbf{h}_{12} = 0.4$. La corriente entregada por esta fuente en las terminales de salida es 0.1 A ($\mathbf{I}_2 = 0.1$ A) y, por lo tanto, $\mathbf{h}_{22} = 0.1$ S.

Por lo tanto, tenemos $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 3.4\ \Omega & 0.4 \\ -0.4 & 0.1\text{ S} \end{bmatrix}$, que es una consecuencia del teorema de reciprocidad $\mathbf{h}_{12} = -\mathbf{h}_{21}$ en una red bilateral.

PRÁCTICA

17.10 Determine **h** del dos puertos que se muestra en: (*a*) la figura 17.25*a*; (*b*) la figura 17.25*b*.



■ **FIGURA 17.25**

17.11 Si $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 5\ \Omega & 2 \\ -0.5 & 0.1\text{ S} \end{bmatrix}$ encuentre (*a*) **y**; (*b*) **z**.

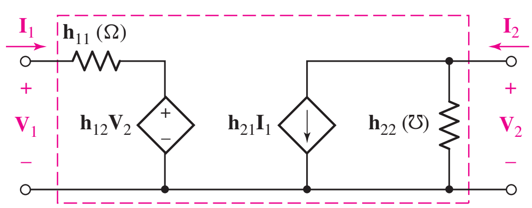
Respuestas: 17.10: $\begin{bmatrix} 20\ \Omega & 1 \\ -1 & 25\text{ ms} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 8\ \Omega & 0.8 \\ -0.8 & 20\text{ ms} \end{bmatrix}$. 17.11: $\begin{bmatrix} 0.2 & -0.4 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$ (S), $\begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ (Ω).

El circuito de la figura 17.26 es una traducción directa de las dos ecuaciones de definición [40] y [41]. La primera representa la LVK en torno al lazo de entrada, mientras que la segunda se obtiene a partir de la LCK en el nodo de salida superior. Este circuito es también un circuito equivalente de transistor muy común. Supongamos algunos valores razonables para la configuración de emisor común: $\mathbf{h}_{11} = 1\,200\ \Omega$, $\mathbf{h}_{12} = 2 \times 10^{-4}$, $\mathbf{h}_{21} = 50$, $\mathbf{h}_{22} = 50 \times 10^{-6}$ S, un generador de tensión de $1\underline{/0°}$ mV en serie con 800 Ω, y una carga de 5 kΩ. Para la entrada,

$$10^{-3} = (1\,200 + 800)\mathbf{I}_1 + 2 \times 10^{-4}\mathbf{V}_2$$

y en la salida:

$$\mathbf{I}_2 = -2 \times 10^{-4}\mathbf{V}_2 = 50\mathbf{I}_1 + 50 \times 10^{-6}\mathbf{V}_2$$



■ **FIGURA 17.26** Los cuatro parámetros **h** se refieren a un dos puertos. Las ecuaciones pertinentes son $\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2$.

APLICACIÓN PRÁCTICA

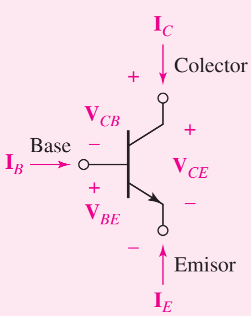
Caracterización de transistores

Por lo general, los valores de los parámetros de los transistores de unión bipolar se indican en términos de parámetros **h**. Inventado a finales de la década de los años de 1940 por investigadores de Bell Laboratories (figura 17.27), el transistor es un dispositivo semiconductor no lineal que constituye la base de casi todos los amplificadores y circuitos lógicos digitales.



■ **FIGURA 17.27** Fotografía de la primera demostración del transistor bipolar de unión ("bjt").
Lucent Technologies Inc./Bell Labs

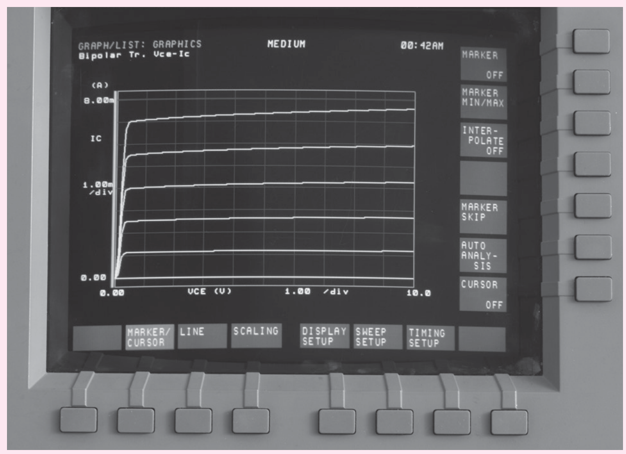
Las tres terminales del transistor se denominan *base* (*b*), *colector* (*c*) y *emisor* (*e*) como se muestra en la figura 17.28, y se nombran de acuerdo con sus funciones en el transporte de portadores de carga dentro del dispositivo. Los parámetros **h** de un transistor de unión bipolar se miden casi siempre con la terminal del emisor conectada a tierra, lo que se conoce también como configuración de *emisor común*; la base se designa entonces como la entrada y el colector como la salida. Sin embargo, como ya se mencionó, el transistor es un dispositivo no lineal, y por ello la definición de los parámetros **h** válida para todas las tensiones y las corrientes no se cumple. Por lo tanto, es una práctica común indicar los parámetros **h** con un valor específico de la corriente de colector I_C y de la tensión del colector-emisor V_{CE}. Otra consecuencia de la no linealidad del dispositivo es que los parámetros **h** en ca y en cd muchas veces difieren bastante en su valor.



■ **FIGURA 17.28** Diagrama de un bjt que muestra las corrientes y tensiones definidas de acuerdo con la convención del IEEE.

Existen muchos tipos de instrumentos que se emplean para obtener los parámetros **h** correspondientes a un transistor específico. Un ejemplo es un analizador de parámetros de semiconductor, que se muestra en la figura 17.29. Este instrumento barre la corriente deseada (graficada sobre el eje vertical) en función de una tensión especificada (graficada sobre el eje horizontal). Se genera una "familia" de curvas al variar la corriente de la base en intervalos discretos.

Como ejemplo, el fabricante del transistor de silicio 2N3904 NPN indica los parámetros **h** como se nota en la tabla 17.2; observe que a los parámetros específicos se les dan asignaciones alternas (h_{ie}, h_{re}, etc.) por los ingenieros electrónicos. Las mediciones fueron hechas con $I_C = 1.0$ mA, $V_{CE} = 10$ Vdc y $f = 1.0$ kHz.



■ **FIGURA 17.29** Vista del despliegue de un analizador de parámetros de semiconductor HP 4155A, que se usa para medir los parámetros **h** de un transistor de unión bipolar 2N3904 (bjt).

Sólo por diversión, uno de los autores y un amigo decidieron medir tales parámetros. Luego de tomar un dispositivo económico del anaquel y utilizar el instrumento de la figura 17.29, encontraron

$$h_{oe} = 3.3\ \mu\text{mhos} \qquad h_{fe} = 109$$

$$h_{ie} = 3.02\ \text{k}\Omega \qquad h_{re} = 4 \times 10^{-3}$$

(*continúa*)

TABLA 17.2 Resumen de los parámetros en ca del 2N3904

Parámetro	Nombre	Especificación	Unidades
h_{ie} (h_{11})	Impedancia de entrada	1.0-10	kΩ
h_{re} (h_{12})	Relación (o razón) de retroalimentación de tensión	$0.5\text{-}8.0 \times 10^{-4}$	–
h_{fe} (h_{21})	Ganancia de corriente para pequeña señal	100-400	–
h_{oe} (h_{22})	Admitancia de salida	1.0-40	μmhos

que los primeros tres de estos valores se ubicaron bien dentro de las tolerancias reconocidas por el fabricante, aunque mucho más cerca de los valores mínimos que de los máximos. Sin embargo, el valor de h_{re} fue un orden de magnitud superior ¡que el valor máximo especificado por la hoja de datos del fabricante!, lo cual resultó bastante desconcertante, pues pensamos que todo iba muy bien hasta ese momento.

Luego de reflexionar nos percatamos que el arreglo experimental permitía que el dispositivo se calentara durante la medición, ya que estábamos barriendo valores por debajo y por arriba de $I_C = 1$ mA. Desafortunadamente, los transistores pueden cambiar sus propiedades de manera muy drástica en función de la temperatura; los valores del fabricante correspondían de manera específica a 25 °C. Luego de que se cambió el barrido para minimizar el calentamiento del dispositivo, obtuvimos un valor de 2.0×10^{-4} para h_{re}. Con los circuitos lineales resulta mucho más fácil trabajar, ¡aunque los circuitos no lineales pueden ser mucho más interesantes!

Despejando, se tiene

$$\mathbf{I}_1 = 0.510\ \mu\text{A} \qquad \mathbf{V}_1 = 0.592\ \text{mV}$$
$$\mathbf{I}_2 = 20.4\ \mu\text{A} \qquad \mathbf{V}_2 = -102\ \text{mV}$$

A través del transistor tenemos una ganancia de corriente de 40, una ganancia de tensión de −172 y una ganancia de potencia de 6 880. La impedancia de entrada del transistor corresponde a 1 160 Ω; unos cuantos cálculos más indican que la impedancia de salida es igual a 22.2 kΩ.

Se podrían agregar en forma directa parámetros híbridos cuando se conectan dos puertos, en serie a la entrada y en paralelo a la salida, lo cual se conoce como interconexión serie-paralelo, aunque no se usa con mucha frecuencia.

17.6 PARÁMETROS DE TRANSMISIÓN

Los últimos parámetros de dos puertos que analizaremos se conocen como ***parámetros* t**, ***parámetros ABCD*** o simplemente ***parámetros de transmisión***; se definen mediante:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{t}_{11}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{12}\mathbf{I}_2 \qquad [43]$$

y

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{t}_{21}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{22}\mathbf{I}_2 \qquad [44]$$

o

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{t} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \qquad [45]$$

donde $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ se definen como es usual (figura 17.8). Los signos negativos que aparecen en las ecuaciones [43] y [44] deben asociarse con la corriente de salida,

como $(-\mathbf{I}_2)$. Así, tanto $\mathbf{I}_1$ como $-\mathbf{I}_2$ se dirigen hacia la derecha, o sea la dirección de la transmisión de la energía o de la señal.

Otra nomenclatura que se emplea mucho para este conjunto de parámetros es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_{11} & \mathbf{t}_{12} \\ \mathbf{t}_{21} & \mathbf{t}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad [46]$$

Observe que no hay signos negativos en las matrices **t** o **ABCD**.

Considerando de nuevo las ecuaciones [43] a [45] observamos que las cantidades de la izquierda, con frecuencia consideradas como las variables dadas o independientes, son la tensión y la corriente ambas de entrada, $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_1$; las variables dependientes, $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$, son las cantidades de salida. Por lo tanto, los parámetros de transmisión proporcionan una relación directa entre la entrada y la salida. Su uso principal se presenta en el análisis de líneas de transmisión y en las redes en cascada.

Determinemos los parámetros **t** del dos puertos resistivo bilateral de la figura 17.30*a*. Como ejemplo de un posible procedimiento para determinar un único parámetro, considere

$$\mathbf{t}_{12} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{-\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{V}_2=0}$$

Por lo tanto, ponemos en cortocircuito la salida ($\mathbf{V}_2 = 0$) y fijamos $\mathbf{V}_1 = 1$ V, como en la figura 17.30*b*. Observe que no se puede igualar a uno el denominador al poner la fuente de corriente de 1 A en la salida; en realidad, ya tenemos ahí un cortocircuito. La resistencia equivalente que se presenta a la fuente de 1 V es $R_{eq} = 2 + (4\|10)\ \Omega$, y en ese caso se utiliza la división de corriente para obtener

$$-\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2 + (4\|10)} \times \frac{10}{10+4} = \frac{5}{34}\ \text{A}$$

De aquí que

$$\mathbf{t}_{12} = \frac{1}{-\mathbf{I}_2} = \frac{34}{5} = 6.8\ \Omega$$

Si es necesario determinar los cuatro parámetros escribimos cualquier par conveniente de ecuaciones mediante el empleo de las cuatro cantidades terminales, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. De la figura 17.30*a* tenemos dos ecuaciones de malla

$$\mathbf{V}_1 = 12\mathbf{I}_1 + 10\mathbf{I}_2 \quad [47]$$

$$\mathbf{V}_2 = 10\mathbf{I}_1 + 14\mathbf{I}_2 \quad [48]$$

Resolviendo la ecuación [48] para $\mathbf{I}_1$ tenemos

$$\mathbf{I}_1 = 0.1\mathbf{V}_2 - 1.4\mathbf{I}_2$$

por lo que $\mathbf{t}_{21} = 0.1$ S y $\mathbf{t}_{22} = 1.4$. Al sustituir la expresión de $\mathbf{I}_1$ en la ecuación [47] encontramos que

$$\mathbf{V}_1 = 12(0.1\mathbf{V}_2 - 1.4\mathbf{I}_2) + 10\mathbf{I}_2 = 1.2\mathbf{V}_2 - 6.8\mathbf{I}_2$$

además, $\mathbf{t}_{11} = 1.2$ y $\mathbf{t}_{12} = 6.8\ \Omega$, también en este caso.

En el caso de redes recíprocas, el determinante de la matriz **t** es igual a uno:

$$\Delta_{\mathbf{t}} = \mathbf{t}_{11}\mathbf{t}_{22} - \mathbf{t}_{12}\mathbf{t}_{21} = 1$$

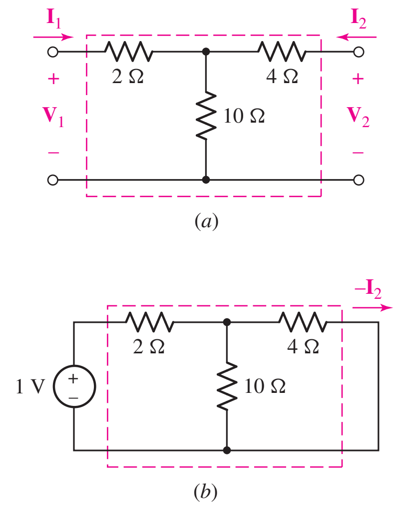


FIGURA 17.30 (*a*) Red resistiva del dos puertos para la que se va a determinar los parámetros. (*b*) Para obtener $\mathbf{t}_{12}$, sea $\mathbf{V}_1 = 1$ V con $\mathbf{V}_2 = 0$; entonces $\mathbf{t}_{12} = 1/(-\mathbf{I}_2) = 6.8\ \Omega$.

En el ejemplo resistivo de la figura 17.30, $\Delta_\mathbf{t} = 1.2 \times 1.4 - 6.8 \times 0.1 = 1$. ¡Bien!

Terminamos el análisis del dos puertos conectando dos de estos dos puertos en cascada, como se ilustra en las dos redes de la figura 17.31. Las tensiones y corrientes de terminal se indican para cada uno de los dos dos puertos y las relaciones correspondientes al parámetro **t** son, para la red A,

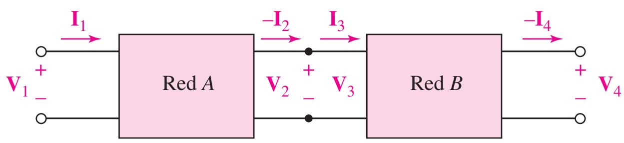


FIGURA 17.31 Cuando las redes A y B de dos puertos se conectan en cascada, la matriz del parámetro **t** de la red combinada está dada por el producto matricial $\mathbf{t} = \mathbf{t}_A\,\mathbf{t}_B$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_A \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_A \begin{bmatrix} \mathbf{V}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$$

y para la red B,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_B \begin{bmatrix} \mathbf{V}_4 \\ -\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}$$

Al combinar estos resultados tenemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_A \mathbf{t}_B \begin{bmatrix} \mathbf{V}_4 \\ -\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, los parámetros **t** de las redes en cascada se calculan mediante el producto de matrices

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_A \mathbf{t}_B$$

Este producto *no* se obtiene multiplicando los elementos correspondientes en las dos matrices. Si es necesario, repase el procedimiento correcto para la multiplicación matricial en el Apéndice 2.

EJEMPLO 17.10

Determine los parámetros t **de las redes en cascada de la figura 17.32.**

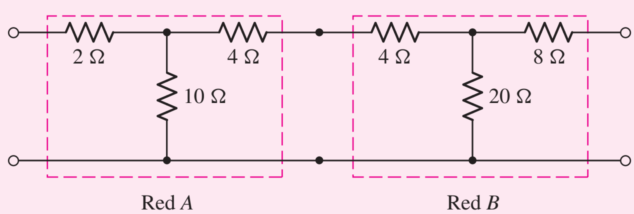


FIGURA 17.32 Conexión en cascada.

La red A corresponde al dos puertos de la figura 17.32 y, por lo tanto,

$$\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8\ \Omega \\ 0.1\ \text{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

mientras que la red B tiene valores de resistencia dos veces mayores, por lo cual

$$\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6\ \Omega \\ 0.05\ \text{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

Para la red combinada,

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_A\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8 \\ 0.1 & 1.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.2 & 13.6 \\ 0.05 & 1.4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1.2 \times 1.2 + 6.8 \times 0.05 & 1.2 \times 13.6 + 6.8 \times 1.4 \\ 0.1 \times 1.2 + 1.4 \times 0.05 & 0.1 \times 13.6 + 1.4 \times 1.4 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1.78 & 25.84\ \Omega \\ 0.19\ \text{S} & 3.32 \end{bmatrix}$$

PRÁCTICA

17.12 Dada $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 3.2 & 8\ \Omega \\ 0.2\ \text{S} & 4 \end{bmatrix}$, encuentre (*a*) **z**; (*b*) **t** de las dos redes idénticas en cascada; (*c*) **z** de las dos redes idénticas en cascada.

Respuestas: $\begin{bmatrix} 16 & 56 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}$ (Ω); $\begin{bmatrix} 11.84 & 57.6\ \Omega \\ 1.44\ \text{S} & 17.6 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 8.22 & 87.1 \\ 0.694 & 12.22 \end{bmatrix}$ (Ω).

ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

La caracterización de redes de dos puertos mediante parámetros **t** brinda la oportunidad de hacer análisis muy simplificados de circuitos en cascada de redes de dos puertos. Como se vio en esta sección, donde, por ejemplo,

$$\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8\ \Omega \\ 0.1\ \text{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6\ \Omega \\ 0.05\ \text{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

encontramos que los parámetros **t** que caracterizan a la red en cascada se obtienen con sólo multiplicar $\mathbf{t}_A$ y $\mathbf{t}_B$:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_A \cdot \mathbf{t}_B$$

Tales operaciones de matrices se efectúan con facilidad con calculadoras científicas o mediante programas de cómputo como MATLAB. La serie de instrucciones de MATLAB, por ejemplo, sería

(*continúa*)

```
EDU» tA = [1.2 6.8; 0.1 1.4];
EDU» tB = [1.2 13.6; 0.05 1.4];
EDU» t = tA*tB

t =

   1.7800    25.8400
   0.1900     3.3200
```

como se vio en el ejemplo 17.10.

Para introducir matrices en MATLAB, cada una tiene un nombre de variable que reconoce mayúsculas (tA, tB y t en este ejemplo). Los elementos de la matriz se incorporan renglón por renglón, empezando con el superior; los renglones se separan mediante un punto y coma. También en esta situación el lector siempre debe tener cuidado de recordar que el orden de las operaciones resulta crítico cuando se realiza álgebra de matrices. Por ejemplo, tB*tA produce una matriz del todo diferente que la que se busca:

$$\mathbf{t}_B \cdot \mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 2.8 & 27.2 \\ 0.2 & 2.3 \end{bmatrix}$$

En el caso de matrices simples, como las consideradas en este ejemplo, una calculadora científica es apenas práctica (y no más que eso). Sin embargo, las redes en cascada más grandes se manejan con mayor facilidad en una computadora, donde es más conveniente ver todos los arreglos de manera simultánea en la pantalla.

RESUMEN Y REPASO

En este capítulo nos encontramos con una manera algo abstracta de representar las redes. Este nuevo enfoque es especialmente útil si la red es *pasiva* y se conectará de alguna manera a otras redes en algún punto, o quizá los valores de los componentes se cambiarán frecuentemente. Introdujimos el concepto mediante la idea de una *red de un puerto*, en la que todo lo que realmente hicimos fue determinar la resistencia equivalente de Thévenin (o impedancia, hablando en términos más generales). Nuestro primer contacto con la idea de una red de dos puertos (¿quizás uno de los puertos es una entrada y el otro es una salida?) fue mediante los parámetros de admitancia, también llamados parámetros **y**. El resultado es una matriz que, cuando se multiplica por el vector que contiene las tensiones en las terminales, da un vector con las corrientes en cada puerto. Con un poco de manipulación obtuvimos los equivalentes Δ-Y, como se llamaron en el capítulo 5. La contraparte directa de los parámetros **y** la constituyen los parámetros **z**, donde cada elemento de la matriz es la relación de una tensión a una corriente. En ocasiones, los parámetros **y** y **z** no son muy convenientes, por lo cual se introdujeron los parámetros "híbridos" o **h**, así como los parámetros de "transmisión", o **t**, que también se llaman parámetros *ABCD*.

La tabla 17.1 presenta un resumen del proceso de conversión entre los parámetros **y**, **z**, **h** y **t**; es suficiente tener un conjunto de parámetros que describa por completo una red, independientemente del tipo de matriz que se prefiera para un análisis específico.

Para comodidad del lector presentaremos ahora directamente una lista de los conceptos clave en este capítulo, junto con los ejemplos correspondientes.

- Para emplear los métodos de análisis descritos en este capítulo, resulta crítico recordar que cada puerto sólo puede conectarse a una red de un puerto o a un puerto de otra red multipuerto.
- La impedancia de entrada de una red lineal de un puerto (*pasiva*) se puede obtener mediante el análisis ya sea nodal o de malla; en algunos casos se puede escribir el conjunto de coeficientes directamente por inspección. (Ejemplos 17.1, 17.2, 17.3)
- Las ecuaciones de definición para analizar una red de dos puertos en términos de sus parámetros de admitancia (**y**) son:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2$$

donde

$$\mathbf{y}_{11} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} \qquad \mathbf{y}_{12} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0}$$

$$\mathbf{y}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{y}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0}$$

(Ejemplos 17.4, 17.5, 17.7)

- Las ecuaciones de definición para analizar una red de dos puertos en términos de sus parámetros de impedancia (**z**) son:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

(Ejemplo 17.8)

- Las ecuaciones de definición para analizar una red de dos puertos en términos de sus parámetros híbridos (**h**) corresponden a:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2$$

(Ejemplo 17.9)

- Las ecuaciones de definición para analizar una red de dos puertos en términos de sus parámetros de transmisión (**t**) (denominados también parámetros **ABCD**) son:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{t}_{11}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{12}\mathbf{I}_2 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{I}_1 = \mathbf{t}_{21}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{22}\mathbf{I}_2$$

(Ejemplo 17.10)

- Resulta un procedimiento directo hacer conversiones entre los parámetros **h**, **z**, **t** y **y** en función de las necesidades del análisis de circuitos; las transformaciones se resumen en la tabla 17.1. (Ejemplo 17.6)

LECTURAS ADICIONALES

Detalles adicionales acerca de los métodos matriciales en el análisis de circuitos pueden encontrarse en:

R. A. DeCarlo and P. M. Lin, *Linear Circuit Analysis,* 2a. ed. Nueva York: Oxford University Press, 2001.

El análisis de circuitos transistorizados que utilizan parámetros de red se describe en:

W. H. Hayt, Jr. and G. W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design,* 2a. ed. Nueva York: Wiley, 1995.

EJERCICIOS

17.1 Redes de un puerto

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-2\mathbf{I}_1 + 4\mathbf{I}_2 = 3$$
$$5\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 - 9\mathbf{I}_3 = 0$$
$$2\mathbf{I}_1 - 5\mathbf{I}_2 + 4\mathbf{I}_3 = -1$$

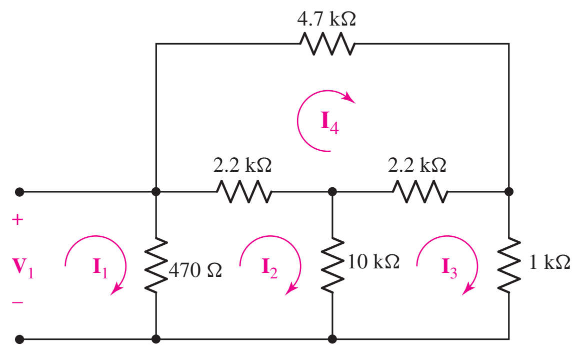
(*a*) Escriba el conjunto de ecuaciones en forma de matriz. (*b*) Determine $\Delta_\mathbf{Z}$ y Δ_{11}. (*c*) Calcule **I**.

2. Para el siguiente sistema de ecuaciones:

$$100\mathbf{V}_1 - 45\mathbf{V}_2 + 30\mathbf{V}_3 = 0.2$$
$$75\mathbf{V}_1 + 80\mathbf{V}_3 = -0.1$$
$$48\mathbf{V}_1 + 200\mathbf{V}_2 + 42\mathbf{V}_3 = 0.5$$

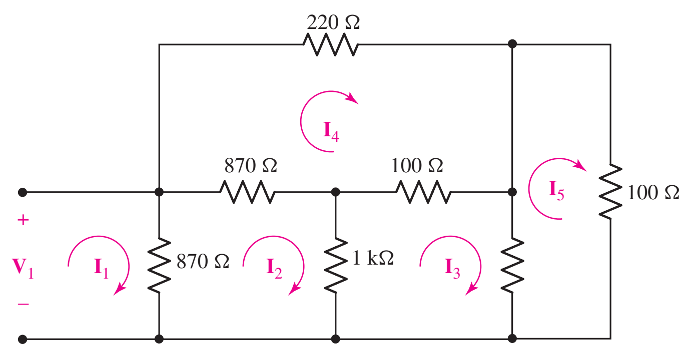
(*a*) Escriba el conjunto de ecuaciones en forma de matriz. (*b*) Use $\Delta_\mathbf{Y}$ solamente para calcular $\mathbf{V}_2$.

3. Respecto a la red pasiva representada en la figura 17.33, (*a*) obtenga las cuatro ecuaciones de malla; (*b*) calcule $\Delta_\mathbf{Z}$ y (*c*) calcule la impedancia de entrada.

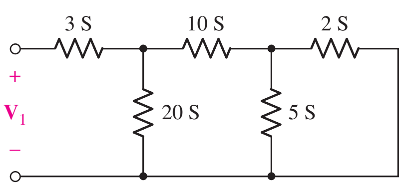


■ FIGURA 17.33

4. Determine la impedancia de entrada de la red que se muestra en la figura 17.34, después de calcular primero $\Delta_\mathbf{Z}$.



■ FIGURA 17.34

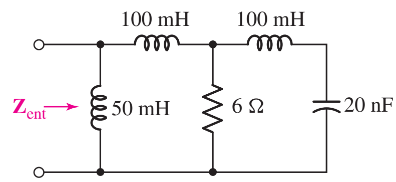


■ FIGURA 17.35

5. Para la red de un puerto que se representa esquemáticamente en la figura 17.35, elija el nodo inferior como referencia; llame $\mathbf{V}_2$ al nodo entre las conductancias de 3, 10 y 20 S, y llame $\mathbf{V}_3$ al nodo restante. (*a*) Escriba las tres ecuaciones nodales. (*b*) Calcule $\Delta_\mathbf{Y}$. (*c*) Calcule la admitancia de entrada.

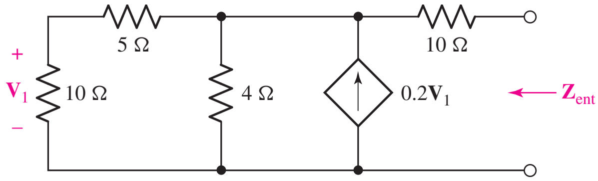
6. Calcule $\Delta_\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Z}_{ent}$ para la red de la figura 17.36 si ω es igual a (*a*) 1 rad/s; (*b*) 320 krad/s.

7. Sea $\omega = 100\pi$ rad/s en la red de un puerto de la figura 17.36. (*a*) Calcule $\Delta_{\mathbf{Y}}$ y la admitancia de entrada en ω, $\mathbf{Y}_{\text{ent}}(\omega)$. (*b*) Se conecta a la red una fuente de corriente sinusoidal de magnitud 100 A, frecuencia de 100π rad/s y fase de 0°. Calcule la tensión entre las terminales de la fuente de corriente (exprese la respuesta como fasor).



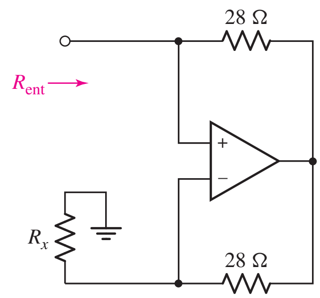
■ **FIGURA 17.36**

8. Con referencia a la red de un puerto de la figura 17.37, que contiene una fuente de corriente dependiente controlada por la tensión sobre una resistencia, (*a*) calcule $\Delta_{\mathbf{Z}}$; (*b*) calcule $\mathbf{Z}_{\text{ent}}$.



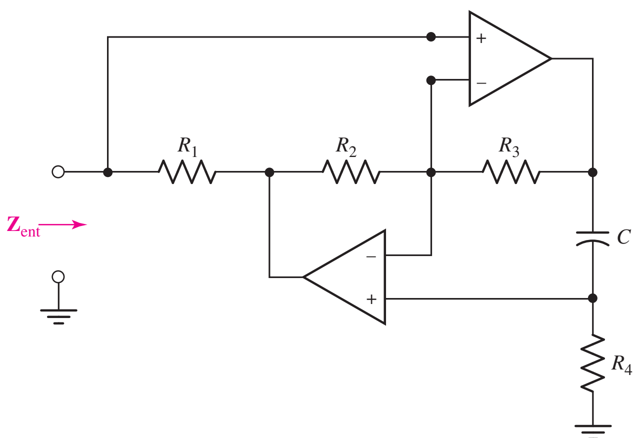
■ **FIGURA 17.37**

9. Para el circuito amp op ideal representado en la figura 17.38, la resistencia de entrada es la vista desde la terminal no inversora del amp op y tierra. (*a*) Escriba las ecuaciones nodales adecuadas para la red de un puerto. (*b*) Obtenga una expresión para R_{ent}. ¿Su respuesta es un poco inesperada? Explique.



■ **FIGURA 17.38**

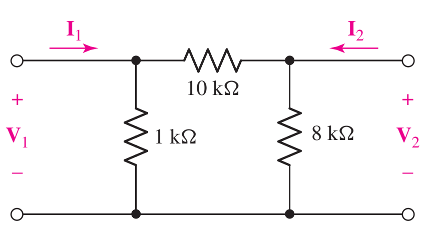
10. (*a*) Si se supone que los amp op del circuito de la figura 17.39 son ideales ($R_i = \infty$, $R_o = 0$ y $A = \infty$), encuentre $\mathbf{Z}_{\text{ent}}$. (*b*) $R_1 = 4$ kΩ, $R_2 = 10$ kΩ, $R_3 = 10$ kΩ, $R_4 = 1$ kΩ y $C = 200$ pF, demuestre que $\mathbf{Z}_{\text{ent}} = j\omega L_{\text{ent}}$, donde $L_{\text{ent}} = 0.8$mH.



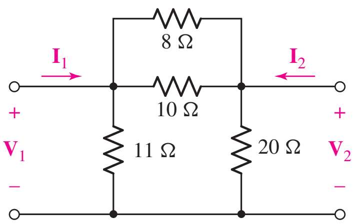
■ **FIGURA 17.39**

17.2 Parámetros de admitancia

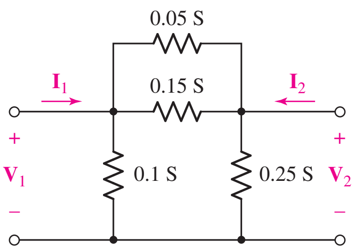
11. Obtenga un conjunto completo de parámetros **y** que describan la red de dos puertos que se muestra en la figura 17.40.



■ **FIGURA 17.40**

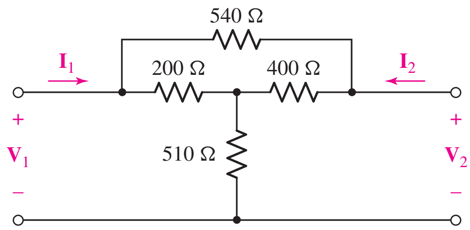


■ **FIGURA 17.41**



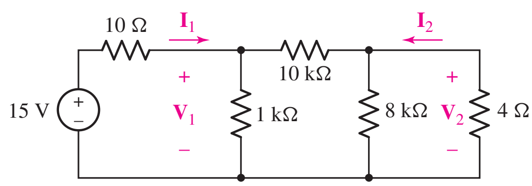
■ **FIGURA 17.42**

12. (*a*) Determine los parámetros de admitancia en cortocircuito que describan por completo la red de dos puertos de la figura 17.41. (*b*) Si $\mathbf{V}_1 = 3$ V y $\mathbf{V}_2 = -2$ V, use su respuesta del inciso (*a*) para calcular $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$.
13. (*a*) Determine los parámetros **y** para la red de dos puertos de la figura 17.42. (*b*) Defina el nodo inferior de la figura 17.42 como nodo de referencia, y aplique análisis nodal para obtener expresiones para $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ en términos de $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$. Use estas expresiones para escribir la matriz de admitancia. (*c*) Si $\mathbf{V}_1 = 2\mathbf{V}_2 = 10$ V, calcule la potencia disipada en la conductancia de 100 mS.
14. Obtenga un conjunto completo de parámetros **y** para describir la red de dos puertos representada en la figura 17.43.



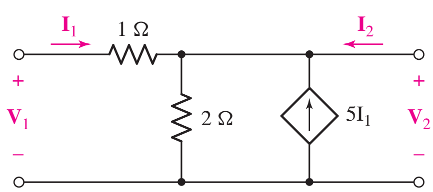
■ **FIGURA 17.43**

15. El circuito de la figura 17.44 es simplemente la red de dos puertos de la figura 17.40, terminada en una red pasiva de un puerto y una red separada de un puerto que consiste en una fuente de tensión en serie con una resistencia. (*a*) Determine el conjunto completo de parámetros de admitancia que describa la red de dos puertos. (*Pista:* Dibuje la red de dos puertos sola, adecuadamente marcada con la tensión y la corriente en cada puerto.) (*b*) Calcule la potencia disipada en la red pasiva de un puerto, usando su respuesta del inciso (*a*).



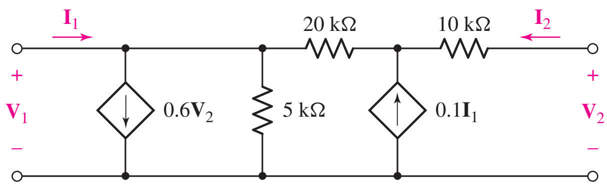
■ **FIGURA 17.44**

16. Reemplace la resistencia de 10 Ω de la figura 17.44 por una resistencia de 1 kΩ, la fuente de 15 V por una de 9 V y la resistencia de 4 Ω por uno de 4 kΩ. (*a*) Determine el conjunto completo de parámetros de admitancia que describe la red de dos puertos que consiste en las resistencias de 1 kΩ, 10 kΩ y 8 kΩ. (*Pista:* Dibuje la red de dos puertos sola, adecuadamente marcada con la tensión y la corriente en cada puerto.) (*b*) Calcule la potencia disipada en la red pasiva de un puerto, usando la respuesta del inciso (*a*).
17. Determine los parámetros de admitancia que describen la red de dos puertos que se muestra en la figura 17.45



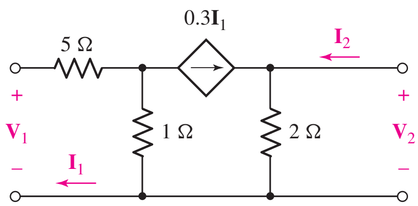
■ **FIGURA 17.45**

18. Obtenga el parámetro **y** para la red que se muestra en la figura 17.46 y úselo para determinar $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ si (*a*) $\mathbf{V}_1 = 0$, $\mathbf{V}_2 = 1$ V; (*b*) $\mathbf{V}_1 = -8$ V, $\mathbf{V}_2 = 3$ V; (*c*) $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = 5$ V.



■ **FIGURA 17.46**

19. Use un método adecuado para obtener **y** para la red de la figura 17.47.



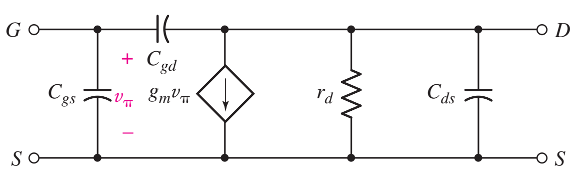
■ **FIGURA 17.47**

20. A menudo, el transistor semiconductor de metal-óxido de efecto de campo (MOSFET), un elemento no lineal de tres terminales que se utiliza en muchas aplicaciones de la electrónica, se especifica en términos de sus parámetros **y**. Los parámetros en ca dependen en gran medida de las condiciones de medición y comúnmente se llaman y_{is}, y_{rs}, y_{fs} y y_{os}, como en:

$$I_g = y_{is}V_{gs} + y_{rs}V_{ds} \qquad [49]$$

$$I_d = y_{fs}V_{gs} + y_{os}V_{ds} \qquad [50]$$

donde I_g es la corriente de compuerta del transistor, I_d es la corriente de drenado del transistor y la tercera terminal (la fuente) es común a la entrada y a la salida durante la medición. Por lo tanto, V_{gs} es la tensión entre la compuerta y la fuente y V_{ds} es la tensión entre el drenado y la fuente. El modelo típico a alta frecuencia que se utiliza para aproximar el comportamiento de un MOSFET se muestra en la figura 17.48.

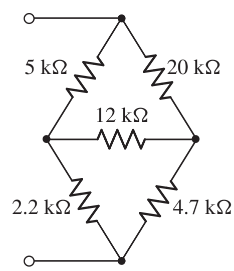


■ **FIGURA 17.48**

(*a*) En el caso de la configuración que se acaba de especificar, ¿qué terminal del transistor se utilizó como la entrada, y qué terminal se utilizó como salida? (*b*) Deduzca las expresiones de los parámetros y_{is}, y_{rs}, y_{fs} y y_{os}, definidos en las ecuaciones [49] y [50], en términos de los parámetros del modelo C_{gs}, C_{gd}, g_m, r_d y C_{ds}, de la figura 17.48. (*c*) Calcule y_{is}, y_{rs}, y_{fs} y y_{os}, y $g_m = 4.7$ mS, $C_{gs} = 3.4$ pF, $C_{gd} = 1.4$ pF, $C_{ds} = 0.4$ pF y $r_d = 10$ kΩ.

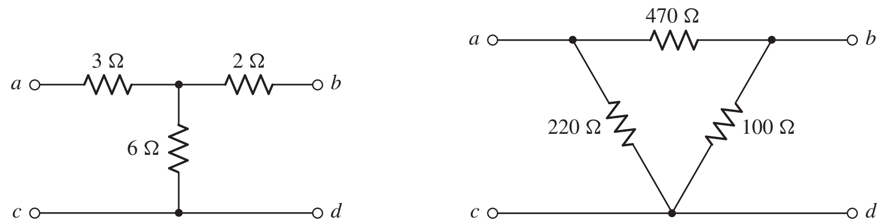
17.3 Algunas redes equivalentes

21. Para la red de dos puertos que se muestra en la figura 17.49, (*a*) determine la resistencia de entrada; (*b*) calcule la potencia disipada por la red si se conecta en paralelo con una fuente de corriente de 2A; (*c*) calcule la potencia disipada por la red si se conecta en paralelo con una fuente de tensión de 9 V.



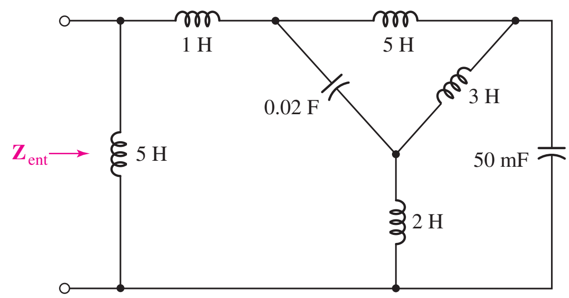
■ **FIGURA 17.49**

22. Con referencia a las dos redes de la figura 17.50, convierta la red conectada en Δ en una red conectada en Y, y viceversa.



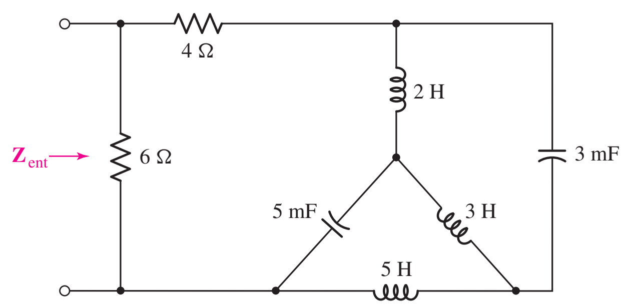
■ **FIGURA 17.50**

23. Determine la impedancia de entrada $\mathbf{Z}_{ent}$ de la red de un puerto que se muestra en la figura 17.51 si ω es igual a (*a*) 50 rad/s; (*b*) 1 000 rad/s.



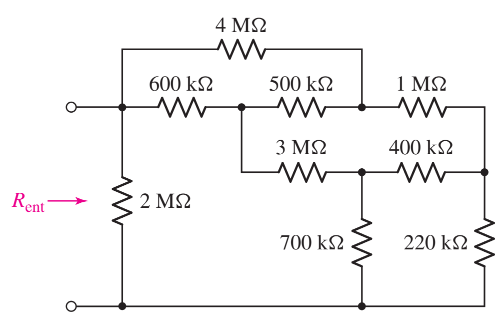
■ **FIGURA 17.51**

24. Determine la impedancia de entrada $\mathbf{Z}_{ent}$ de la red de un puerto que se muestra en la figura 17.52 si ω es igual a (*a*) 50 rad/s; (*b*) 1 000 rad/s.



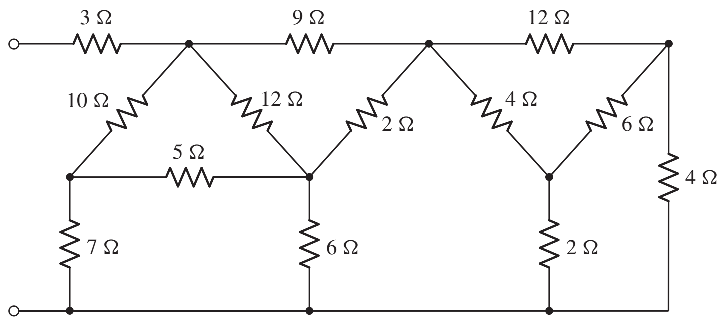
■ **FIGURA 17.52**

25. Use técnicas de conversión Δ-Y según convenga para determinar la resistencia de entrada R_{ent} de la red de un puerto que se muestra en la figura 17.53.



■ **FIGURA 17.53**

26. Use técnicas adecuadas para encontrar un valor para la resistencia de entrada de la red de un puerto que se muestra en el esquema de la figura 17.54.



■ **FIGURA 17.54**

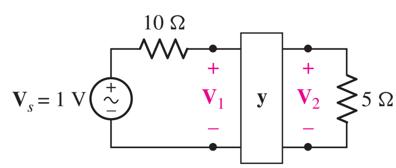
27. (*a*) Determine los valores de los parámetros que se necesitan para modelar la red de la figura 17.43 con la red alternativa que se muestra en la figura 17.13*a*. (*b*) verifique que las dos redes sean en efecto equivalentes, calculando la potencia disipada en la resistencia de 2 Ω conectado a la derecha de cada red y conectando una fuente de corriente de 1 A a las terminales de la izquierda.

28. (*a*) La red de la figura 17.13*b* es equivalente a la red de la figura 17.43 suponiendo que se eligen los valores de parámetros adecuados. (*a*) Calcule los valores de parámetros necesarios. (*b*) Verifique la equivalencia de las dos redes terminando cada una con una resistencia de 1 Ω (entre sus terminales $\mathbf{V}_2$), conectando una fuente de 10 mA a las otras terminales y demostrando que $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{I}_2$ y $\mathbf{V}_2$ son iguales para ambas redes.

29. Calcule los tres valores de parámetros necesarios para construir una red equivalente para la figura 17.43 modelada según la red de la figura 17.13*c*. Verifique su equivalencia mediante una simulación PSpice adecuada. (*Pista:* Conecte algún tipo de fuente(s) o carga(s).)

30. Es posible construir una red de dos puertos que sea una alternativa a la que se muestra en la figura 17.47, seleccionando los valores de parámetros adecuados como se marcan en el diagrama de la figura 17.13. (*a*) Construya dicha red equivalente. (*b*) Verifique su equivalencia mediante una simulación PSpice adecuada. (*Pista:* Conecte algún tipo de fuente(s) y carga(s).)

31. Sea $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ -0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$(S) del dos puertos de la figura 17.55. Determine (*a*) $\mathbf{G}_V$; (*b*) $\mathbf{G}_I$; (*c*) G_P; (*d*) $\mathbf{Z}_{\text{ent}}$; (*e*) $\mathbf{Z}_{\text{sal}}$. (*f*) Si la ganancia de tensión inversa $\mathbf{G}_{V,\,rev}$ se define como $\mathbf{V}_1/\mathbf{V}_2$ con $\mathbf{V}_s = 0$ y se elimina R_L calcule $\mathbf{G}_{V,\,rev}$. (*g*) Si la ganancia de potencia de inserción G_{ms} se define como el cociente de $P_{5\Omega}$ con el dos puertos en su sitio y $P_{5\Omega}$ con el dos puentes sustituidos por puentes que conectan cada terminal de entrada con la terminal de salida correspondiente, calcule G_{ms}.



■ **FIGURA 17.55**

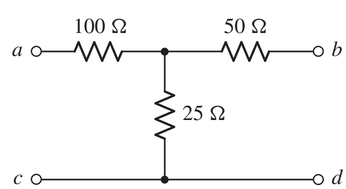
17.4 Parámetros de impedancia

32. Convierta los siguientes parámetros **z** a parámetros **y**, o viceversa, como sea apropiado:

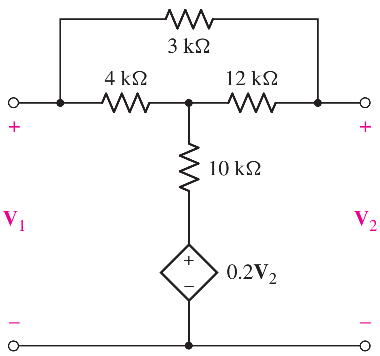
$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \Omega \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1000 & 470 \\ 2500 & 900 \end{bmatrix} \Omega$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.005 \\ 0.006 & 0.03 \end{bmatrix} \text{S} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{S}$$

33. Mediante el empleo de las ecuaciones [32] a [35] obtenga un conjunto completo de parámetros **z** para la red dada en la figura 17.56.

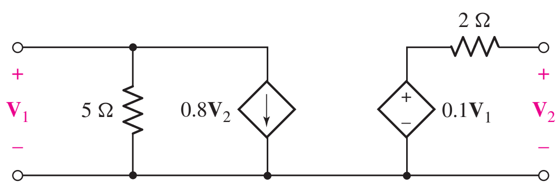


■ **FIGURA 17.56**



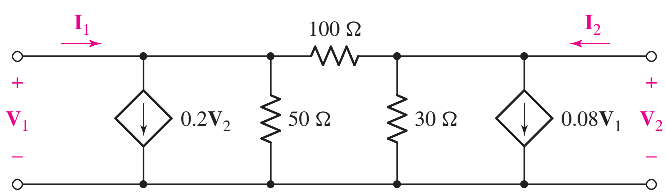
■ **FIGURA 17.57**

34. La red de la figura 17.56 se termina con una resistencia de 10 Ω entre las terminales *b* y *d* y se conecta una fuente de corriente sinusoidal de 6 mA que opera a 100 Hz en paralelo con una resistencia de 50 Ω entre las terminales *a* y *c*. Calcule las ganancias de tensión, corriente y potencia, respectivamente, así como la impedancia de entrada y salida.
35. Las redes de dos puertos de la figura 17.50 se conectan en serie. (*a*) Determine los parámetros de impedancia para la conexión en serie encontrando primero los parámetros **z** de las redes individuales. (*b*) Si, en vez de esto, las dos redes se conectan en paralelo, determine los parámetros de admitancia de la combinación encontrando primero los parámetros **y** de las redes individuales. (*c*) Verifique su respuesta del inciso (*b*) usando la tabla 17.1 en combinación con su respuesta del inciso (*a*).
36. (*a*) Use un método adecuado para obtener los parámetros de impedancia que describen la red que se ilustra en la figura 17.57. (*b*) Si se conecta una fuente de 1 V en serie con una resistencia de 1 kΩ al puerto de la izquierda de manera que la terminal de referencia negativa de la fuente se conecte a la terminal común de la red, y se conecta una carga de 5 kΩ entre las terminales de la derecha, calcule la tensión de corriente y la ganancia de potencia.
37. Determine los parámetros de impedancia para la red de dos puertos que se muestra en la figura 17.58.



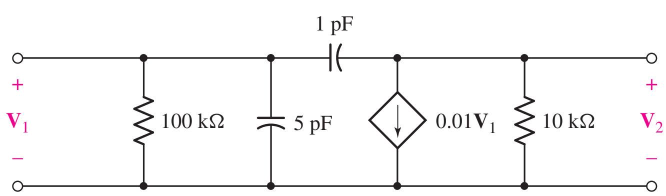
■ **FIGURA 17.58**

38. Obtenga tanto los parámetros de impedancia como los de admitancia para la red de dos puertos de la figura 17.59.



■ **FIGURA 17.59**

39. Determine los cuatro parámetros **z** a $\omega = 10^8$rad/s para el circuito equivalente del transistor de alta frecuencia de la figura 17.60.

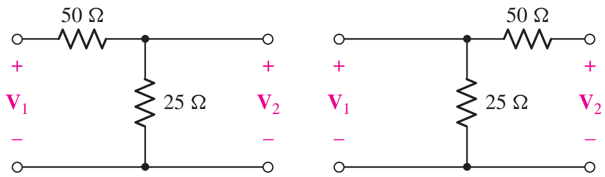


■ **FIGURA 17.60**

17.5 Parámetros híbridos

40. Determine los parámetros **h** que describen la red puramente resistiva de la figura 17.56, conectando adecuadamente 1 V, 1 A y cortocircuitos a las terminales, según se requiera.

41. Obtenga los parámetros **h** de las redes de dos puertos de la figura 17.61.



■ **FIGURA 17.61**

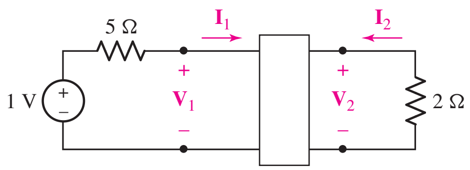
42. Si para una red de dos puertos particular, **h** está dada por $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 2\text{ k}\Omega & -3 \\ 5 & 0.01\text{ S} \end{bmatrix}$, calcule (*a*) **z** y (*b*) **y**.

43. Cierta red de dos puertos está descrita por los parámetros híbridos $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 100\ \Omega & -2 \\ 5 & 0.1\text{ S} \end{bmatrix}$.

    Determine los nuevos parámetros **h** si se conecta una resistencia de 25 Ω en paralelo con (*a*) la entrada; (*b*) la salida.

44. Un transistor de unión bipolar de capas está conectado en configuración de emisor común y se encuentra que tiene parámetros **h**: $h_{11} = 5\text{ k}\Omega$, $h_{12} = 0.55 \times 10^{-4}$, $h_{21} = 300$ y $h_{22} = 39\ \mu\text{S}$. (*a*) Escriba **h** en forma de matriz. (*b*) Determine la ganancia de corriente de señal pequeña. (*c*) Determine la resistencia de salida en kΩ. (*d*) Si se conecta a las terminales de entrada una fuente de tensión senoidal con frecuencia de 100 rad/s y amplitud de 5 mV, en serie con una resistencia de 100 Ω, calcule la tensión pico que aparece entre las terminales de salida.

45. La red de dos puertos que desempeña un papel principal en el circuito de la figura 17.62 se puede caracterizar por los parámetros híbridos $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1\ \Omega & -1 \\ 2 & 0.5\text{ S} \end{bmatrix}$. Determine $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$.

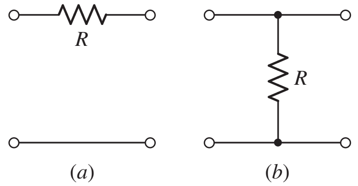


■ **FIGURA 17.62**

46. Las dos redes de la figura 17.61 se conectan en serie mediante la conexión de sus terminales como se ilustra en la figura 17.22 (suponga que la red izquierda de la figura 17.61 es la red *A*). Determine el nuevo conjunto de parámetros **h** que describen la conexión en serie.

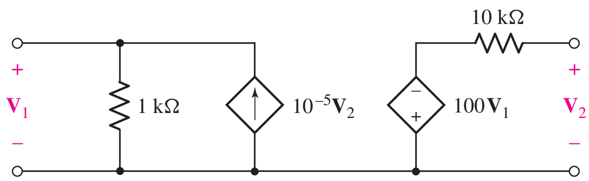
47. Las dos redes de la figura 17.61 se conectan en paralelo mediante la conexión de las terminales de entrada correspondientes, seguida de la conexión de las terminales de salida correspondientes. Determine el nuevo conjunto de parámetros **h** que describen la conexión en paralelo.

48. Determine **y**, **z** y **h** para ambos dos puertos de la figura 17.63. Si algún parámetro resulta infinito, páselo por alto (no lo tome en cuenta).



■ **FIGURA 17.63**

49. (*a*) Determine **h** para el dos puertos de la figura 17.64. (*b*) Calcule $\mathbf{Z}_{sal}$ si la entrada contiene $\mathbf{V}_s$ en serie con $R_s = 200\ \Omega$.



■ **FIGURA 17.64**

17.6 Parámetros de transmisión

50. (*a*) Con la ayuda de las ecuaciones de malla adecuadas, determine la matriz *ABCD* que representa la red de dos puertos que se muestra en la figura 17.9. (*b*) Convierta su respuesta a **h**.

51. (*a*) Use ecuaciones de malla adecuadas para obtener los parámetros **t** que caracterizan la red de la figura 17.57. (*b*) Si se define que las corrientes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ fluyen hacia las terminales de referencia (+) de $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, respectivamente, calcule las tensiones si $\mathbf{I}_1 = 2\mathbf{I}_2 = 3$ mA.

52. Considere las siguientes matrices:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

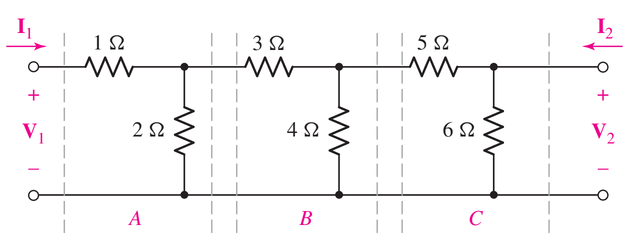
Calcule (*a*) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; (*b*) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$; (*c*) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$; (*d*) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$; (*e*) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$; (*f*) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$.

53. Dos redes están representadas por las siguientes matrices de impedancia:

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 4.7 & 0.5 \\ 0.87 & 1.8 \end{bmatrix} \text{ k}\Omega \text{ y } \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 1.1 & 2.2 \\ 0.89 & 1.8 \end{bmatrix} \text{ k}\Omega\text{, respectivamente.}$$

(*a*) Determine la matriz **t** que caracteriza la red en cascada que resulta al conectar la red 2 a la salida de la red 1. (*b*) Invierta el orden de las redes y calcule la nueva matriz **t** que resulta.

54. La red de dos puertos de la figura 17.65 se puede visualizar como tres redes individuales de dos puertos en cascada, *A, B y C*. (*a*) Calcule **t** para cada red. (*b*) Obtenga **t** para la red en cascada. (*c*) Verifique su respuesta llamando V_x y V_y a los dos nodos medios, respectivamente, escribiendo las ecuaciones nodales, obteniendo los parámetros de admitancia a partir de sus ecuaciones nodales y convirtiendo a parámetros **t** mediante la tabla 17.1.



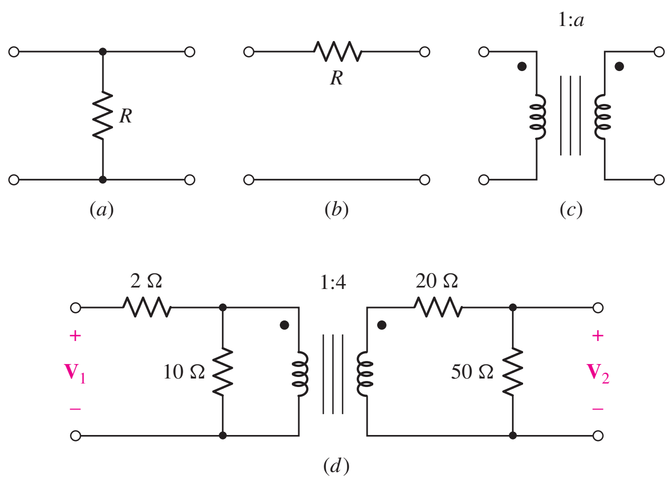
■ **FIGURA 17.65**

55. Considere las dos redes individuales de dos puertos de la figura 17.61. Determine la matriz *ABCD* que caracteriza la red en cascada que resulta al conectar (*a*) la salida de la red izquierda a la entrada de la red derecha; (*b*) la salida de la red derecha a la entrada de la red izquierda.

56. (*a*) Determine los parámetros **t** que describen la red de dos puertos de la figura 17.58. (*b*) Calcule $\mathbf{Z}_{sal}$ si se conecta una fuente de tensión práctica que tenga una resistencia de 100 Ω en serie a las terminales de entrada de la red.

57. Se ponen en cascada tres redes idénticas a la representada en la figura 17.56. Determine los parámetros **t** que representen totalmente el resultado.

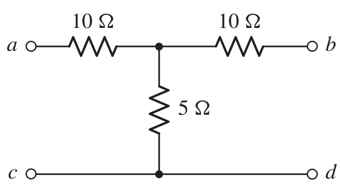
58. (*a*) Determine $\mathbf{t}_a$, $\mathbf{t}_b$ y $\mathbf{t}_c$ de las redes que se muestran en la figura 17.66*a*, *b* y *c*. (*b*) Mediante las reglas de la interconexión del dos puertos con otro en cascada, calcule **t** de la red de la figura 17.66*d*.



■ **FIGURA 17.66**

Ejercicios de integración del capítulo

59. (*a*) Obtenga los parámetros **y**, **z**, **h** y **t** para la red que se muestra en la figura 17.67, usando ya sea las ecuaciones definitorias o las ecuaciones de malla/nodales. (*b*) Verifique sus respuestas usando las relaciones de la tabla 17.1



■ **FIGURA 17.67**

60. Cuatro redes, cada una idéntica a la representada en la figura 17.67, se conectan en paralelo de manera que todas las terminales marcadas *a* se unen, todas las terminales designadas *b* se unen y todas las terminales marcadas *c* y *d* se conectan. Obtenga los parámetros **y**, **z**, **h** y **t** que describan la red conectada en paralelo.

61. Una red en cascada de 12 elementos se forma usando cuatro redes de dos puertos idénticas a la que se muestra en la figura 17.67. Determine los parámetros **y**, **z**, **h** y **t** que describan el resultado.

62. El concepto de matrices *ABCD* se extiende a sistemas más allá de los circuitos eléctricos. Por ejemplo, se usan comúnmente para cálculos de trazado de rayos en sistemas ópticos. En ese caso, se visualizan planos paralelos de entrada y salida en *xy*, atravesados por un eje óptico *z*. Un rayo que entra cruza el plano de entrada a una distancia $x = r_{\text{ent}}$ del eje óptico, formando un ángulo θ_{ent}. Los correspondientes parámetros r_{sal}, θ_{sal} para el rayo que sale cruzando el plano de salida están dados entonces por la matriz *ABCD* de manera que

$$\begin{bmatrix} r_{\text{sal}} \\ \theta_{\text{sal}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{\text{ent}} \\ \theta_{\text{ent}} \end{bmatrix}$$

Cada tipo de elemento óptico (por ejemplo, un espejo, una lente o incluso la propagación en el espacio libre) tiene su propia matriz *ABCD*. Si el rayo pasa a través de varios elementos,

el efecto neto se puede predecir simplemente poniendo en cascada las matrices individuales *ABCD* (en el orden adecuado).

(a) Obtenga expresiones para A, B, C y D similares a las ecuaciones [32] a [35].
(b) Si la matriz *ABCD* para un espejo plano con reflexión perfecta está dada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, haga un esquema del sistema junto con los rayos entrantes y salientes, teniendo cuidado de observar la orientación del espejo.

63. Continuando el ejercicio 62, el comportamiento de un rayo que se propaga por el espacio libre por una distancia d se puede modelar con la matriz *ABCD* $\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ($a$) Demuestre que se obtiene el mismo resultado (r_{sal}, θ_{sal}) si se usa una sola matriz *ABCD* con d, que si se usan dos matrices en cascada, cada una con $d/2$. (b) ¿Cuáles son las unidades de A, B, C y D, respectivamente?



CAPÍTULO 18

Análisis de circuitos por Fourier



CONCEPTOS CLAVE

- Representación de funciones periódicas como suma de senos y cosenos
- Frecuencias armónicas
- Simetría par e impar
- Simetría de media onda
- Forma compleja de la serie de Fourier
- Espectro de línea discreto
- Transformada de Fourier
- Uso de las técnicas de la serie y la transformada de Fourier en el análisis de circuitos
- Respuesta de un sistema y convolución en el dominio de la frecuencia

INTRODUCCIÓN

En este capítulo continuamos con la introducción al análisis de circuitos con el estudio de las funciones periódicas tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. De manera específica, consideraremos funciones forzadas *periódicas* con naturalezas funcionales que satisfacen ciertas restricciones matemáticas, características de cualquier función que se pueda generar en el laboratorio. Estas funciones pueden representarse como la suma de un número infinito de funciones seno y coseno, que se relacionan de manera armónica. Por lo tanto, debido a que la respuesta forzada de cada componente senoidal se determina con facilidad mediante el análisis senoidal de estado permanente, la respuesta de la red lineal a la función forzada periódica general se obtiene mediante la superposición de las respuestas parciales.

El tema de la serie de Fourier es de vital importancia para varios campos, en particular para el de las comunicaciones. Sin embargo, el uso de las técnicas basadas en el análisis de Fourier para auxiliar el análisis de circuitos poco a poco ha caído en desuso en los últimos años. Ahora que necesitamos enfrentar una fracción cada vez más grande de uso de energía global que proviene de equipos que emplean suministros de potencia modulados por pulsos (por ejemplo, computadoras), el tema de las armónicas en los sistemas de potencia y la electrónica de potencia se está convirtiendo con mucha rapidez en un problema serio, incluso en plantas de generación de gran escala. Sólo con el análisis basado en la serie de Fourier se comprenden los problemas implícitos y las soluciones posibles.

18.1 FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LA SERIE DE FOURIER

Se sabe que la respuesta completa de un circuito lineal a una función forzada arbitraria está compuesta por la suma de una *respuesta*



forzada y una *respuesta natural.* La respuesta natural se analizó tanto en el dominio del tiempo (capítulos 7, 8 y 9) como en el dominio de la frecuencia (capítulos 14 y 15). La respuesta forzada se ha considerado también desde diferentes perspectivas, entre las que se incluyen las técnicas basadas en fasores del capítulo 10. Como hemos visto, en algunos casos necesitamos *ambos* componentes de la respuesta total de un circuito en particular, mientras que en otros solamente requerimos la respuesta natural o la forzada. En esta sección volvemos a enfocar la atención en las funciones forzadas *senoidales* por naturaleza y descubrimos cómo escribir una función periódica general como la *suma* de dichas funciones, lo que nos lleva a un análisis de un nuevo conjunto de procedimientos para el análisis de circuitos.

Armónicas

Quizá se obtenga cierta percepción de la validez de representar una función *periódica* general mediante una suma infinita de funciones seno y coseno al considerar un ejemplo simple. Supongamos primero una función coseno de frecuencia en radianes, ω_0,

$$v_1(t) = 2\cos\omega_0 t$$

donde

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

y el periodo T es

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Si bien T suele no llevar un subíndice cero, es el periodo de la frecuencia fundamental. Las ***armónicas*** de esta senoide tienen frecuencias $n\omega_0$, donde ω_0 es la frecuencia fundamental y $n = 1, 2, 3, \ldots$ La frecuencia angular de la primera armónica es la ***frecuencia fundamental***.

A continuación seleccionamos una tercera armónica de tensión

$$v_{3a}(t) = \cos 3\omega_0 t$$

La fundamental $v_1(t)$, la tercera armónica $v_{3a}(t)$ y la suma de ambas se muestran como funciones del tiempo en la figura 18.1*a*. Debe observarse que la suma es periódica, con periodo $T = 2\pi/\omega_0$.

La forma de la función periódica resultante cambia a medida que varía la fase y la amplitud de la componente de la tercera armónica. De tal manera, la figura 18.1*b* muestra el efecto de combinar $v_1(t)$ y una tercera armónica de amplitud un poco mayor:

$$v_{3b}(t) = 1.5\cos 3\omega_0 t$$

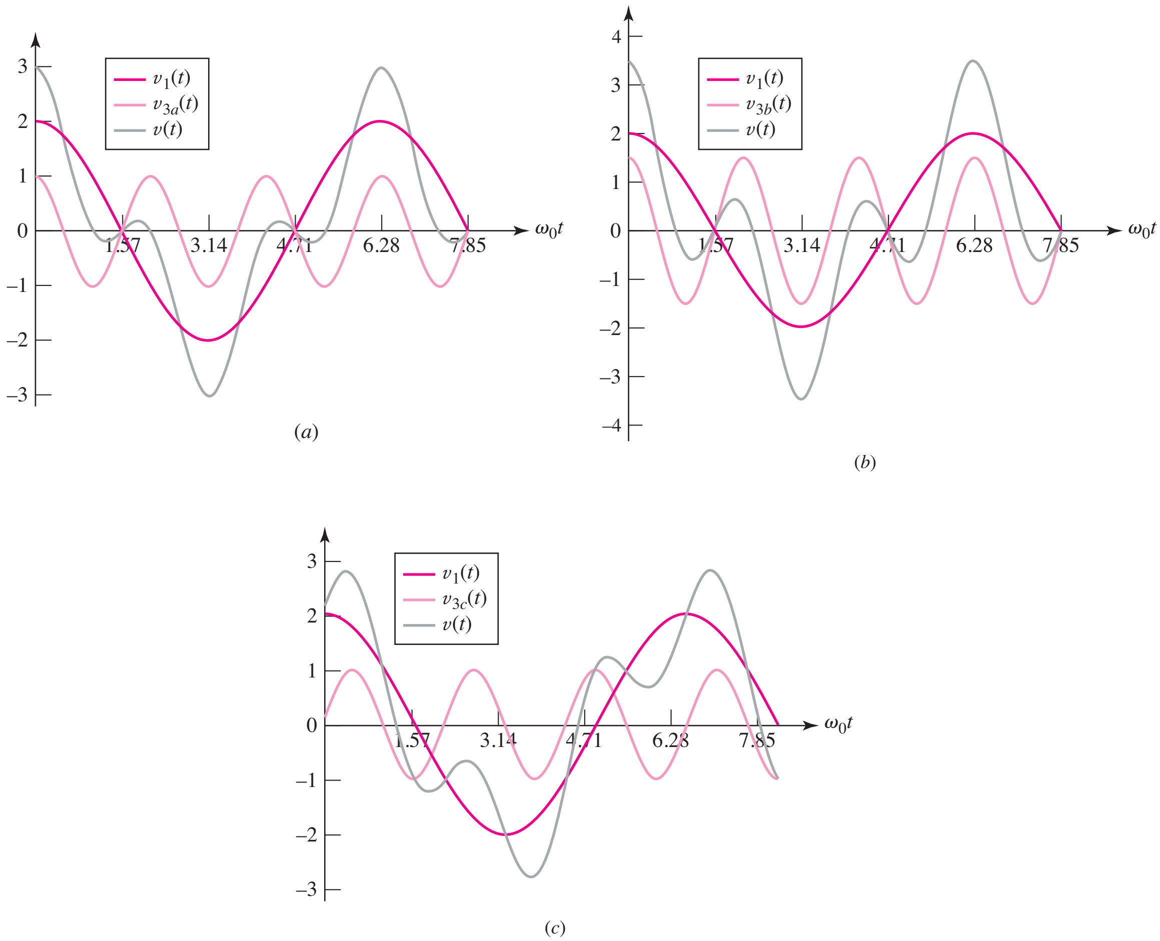
Al desplazar la fase de la tercera armónica de 90 grados se obtiene

$$v_{3c}(t) = \text{sen } 3\omega_0 t$$

La suma, que se muestra en la figura 18.1*c*, adquiere un carácter incluso diferente. En todos los casos, el periodo de la forma de onda resultante es el mismo que el de la forma de onda fundamental. La naturaleza de la forma de onda depende de la amplitud y de la fase de toda componente armónica posible, por lo que se pueden generar formas de onda que tienen características en extremo no senoidales, mediante una combinación apropiada de funciones senoidales.

Después que nos familiaricemos con el uso de la suma de un número infinito de funciones seno y coseno para representar una forma de onda periódica, consideraremos

la representación en el dominio de la frecuencia de una forma de onda no periódica general, de una manera similar a la transformada de Laplace.



■ **FIGURA 18.1** Varias formas de onda diferentes que se pueden obtener (de un número infinito) mediante la combinación de una fundamental y una tercera armónica. La fundamental es $v_1 = 2 \cos \omega_0 t$, y la tercera armónica corresponde a: (*a*) $v_{3a} = \cos 3\,\omega_0 t$; (*b*) $v_{3b} = 1.5 \cos 3\,\omega_0 t$; (*c*) $v_{3c} =$ sen $3\,\omega_0 t$.

PRÁCTICA

18.1 Suponga que se agrega una tercera armónica de tensión a la fundamental para producir $v = 2 \cos \omega_0 t + V_{m3}$ sen $\omega_0 t$, la forma de onda de la figura 18.1*c* para $V_{m3} = 1$, (*a*) Determine el valor de V_{m3} de manera que $v(t)$ tenga una pendiente cero en $\omega_0 t = 2\pi/3$. (*b*) Evalúe $v(t)$ en $\omega_0 t = 2\pi/3$.

Respuestas: 0.577; −1.000.

La serie de Fourier

Consideramos primero una función *periódica* $f(t)$, definida en la sección 11.2 por la relación funcional siguiente:

$$f(t) = f(t + T)$$

donde T es el periodo. Se supone además que la función $f(t)$ satisface las siguientes propiedades:

Tomaremos $f(t)$ para representar una forma de onda de tensión o corriente; además, cualquier forma de onda de tensión o corriente que se pueda en realidad producir debe satisfacer estas condiciones. Ciertas funciones matemáticas que se podrían suponer quizá no satisfagan tales condiciones, aunque se supondrá que las cuatro condiciones siempre se satisfacen.

1. $f(t)$ es univaluada en todos lados; es decir, $f(t)$ satisface la definición matemática de una función.
2. La integral $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|\, dt$ existe (es decir, no es infinita) para cualquier t_0.
3. $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en cualquier periodo.
4. $f(t)$ tiene un número finito de máximos y de mínimos en cualquier periodo.

Dada tal función periódica $f(t)$, el teorema de Fourier establece que $f(t)$ se podría representar mediante la serie infinita:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \cdots \\ &\quad + b_1 \operatorname{sen} \omega_0 t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega_0 t + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \end{aligned} \qquad [1]$$

donde la pulsación fundamental ω_0 se relaciona con el periodo T mediante

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

y donde a_0, a_n y b_n son constantes que dependen de n y $f(t)$. La ecuación [1] es una forma trigonométrica de la ***serie de Fourier*** *para* $f(t)$, en tanto el proceso de determinar los valores de las constantes a_0, a_n y b_n se llama *análisis de Fourier*. El objetivo no es la prueba de este teorema, sino sólo una simple formulación de los procedimientos del análisis de Fourier y una percepción de que el teorema es correcto (convincente).

Algunas integrales trigonométricas útiles

Antes de explicar la evaluación de las constantes que aparecen en la serie de Fourier, recopilaremos un conjunto de integrales trigonométricas útiles. Sean n como k representativos de cualquier elemento del conjunto de enteros 1, 2, 3, . . . En las siguientes integrales, 0 y T se usan como límites de integración, aunque se entiende que cualquier intervalo de un periodo es igual de correcto.

$$\int_0^T \operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt = 0 \qquad [2]$$

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t\, dt = 0 \qquad [3]$$

$$\int_0^T \operatorname{sen} k\omega_0 t \cos n\omega_0 t\, dt = 0 \qquad [4]$$

$$\int_0^T \operatorname{sen} k\omega_0 t \operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt = 0 \qquad (k \neq n) \qquad [5]$$

$$\int_0^T \cos k\omega_0 t \cos n\omega_0 t \, dt = 0 \qquad (k \neq n) \tag{6}$$

Los casos que se exceptúan en las ecuaciones [5] y [6] también se evalúan con facilidad; se obtiene

$$\int_0^T \operatorname{sen}^2 n\omega_0 t \, dt = \frac{T}{2} \tag{7}$$

$$\int_0^T \cos^2 n\omega_0 t \, dt = \frac{T}{2} \tag{8}$$

Evaluación de los coeficientes de Fourier

La evaluación de las constantes desconocidas en la serie de Fourier tal vez ahora se consiga sin dificultades. Primero buscamos a_0. Si integramos cada lado de la ecuación [1] a lo largo de un periodo completo, se obtiene

$$\int_0^T f(t)\, dt = \int_0^T a_0 \, dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)\, dt$$

Pero todo término de la sumatoria es de la forma de la ecuación [2] o [3], por lo cual

$$\int_0^T f(t)\, dt = a_0 T$$

o

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \tag{9}$$

Esta constante a_0 es sencillamente el valor promedio de $f(t)$ sobre un periodo, y por lo tanto lo describimos como una componente en cd de $f(t)$.

Para evaluar uno de los coeficientes coseno —tal como a_k, el coeficiente de cos $k\omega_0 t$— multiplicamos primero cada lado de la ecuación [1] por cos $k\omega_0 t$ y luego integramos ambos lados de la ecuación sobre un periodo completo:

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t) \cos k\omega_0 t \, dt &= \int_0^T a_0 \cos k\omega_0 t \, dt \\ &+ \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k\omega_0 t \cos n\omega_0 t \, dt \\ &+ \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos k\omega_0 t \; \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt\end{aligned}$$

En las ecuaciones [3], [4] y [6] observamos que todo término del lado derecho de ellas es cero, salvo el término individual a_n, donde $k = n$. Evaluamos el término utilizando la ecuación [8] y al hacerlo de ese modo encontramos a_k, o a_n:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \tag{10}$$

El resultado es el *doble* del valor promedio del producto $f(t)\cos n\omega_0 t$ sobre un periodo.

De manera similar, obtenemos b_k si se multiplica por sen $k\omega_0 t$; se integra sobre un periodo, pero se observa que todos, menos uno de los términos del lado derecho, son cero y se efectúa esa simple integración mediante la ecuación [7]. El resultado es

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt \qquad [11]$$

que es el *doble* del valor promedio de $f(t)$ sen $n\omega_0 t$, sobre un periodo.

Las ecuaciones de la [9] a la [11] nos permiten ahora determinar los valores de a_0 y de todas las a_n y b_n de la serie de Fourier, en la ecuación [1], tal como se resume en seguida:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n\, \text{sen}\, n\omega_0 t) \qquad [1]$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \qquad [9]$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\, dt \qquad [10]$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt \qquad [11]$$

EJEMPLO 18.1

La forma de onda "semisenoidal" que se muestra en la figura 18.2 representa la respuesta en tensión que se obtiene a la salida del circuito rectificador de media onda, un circuito no lineal cuyo propósito es convertir una tensión de entrada senoidal en una tensión de salida de cd (pulsante). Determine la representación mediante una serie de Fourier de esta forma de onda.

Identifique el objetivo del problema.

Presentamos una función periódica y pedimos determinar la representación mediante una serie de Fourier. A no ser por la eliminación de todas las tensiones negativas, el problema sería trivial, pues sólo se requeriría *una* senoide.

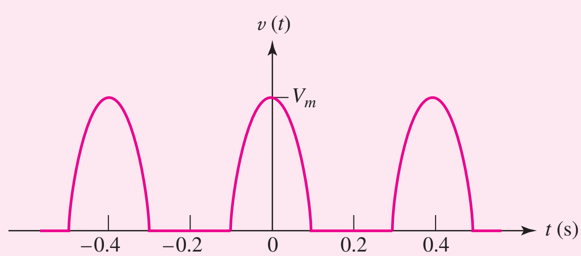


FIGURA 18.2 Salida de un rectificador de media onda en el que se aplica una entrada senoidal.

▶ *Recopile toda la información conocida.*

Para representar esta tensión como una serie de Fourier, debemos determinar primero el periodo y luego expresar la tensión gráfica como una función analítica del tiempo. De acuerdo con la gráfica, se observa que el periodo es

$$T = 0.4 \text{ s}$$

así que

$$f_0 = 2.5 \text{ Hz}$$

y

$$\omega_0 = 5\pi \text{ rad/s}$$

▶ *Elabore un plan.*

La forma más directa es aplicar las ecuaciones [9] a [11] para calcular el conjunto de coeficientes a_0, a_n y b_n. Para llevar a cabo lo anterior, necesitamos contar con una expresión funcional de $v(t)$, siendo la más directa la definida sobre el intervalo $t = 0$ a $t = 0.4$ como:

$$v(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t & 0 \le t \le 0.1 \\ 0 & 0.1 \le t \le 0.3 \\ V_m \cos 5\pi t & 0.3 \le t \le 0.4 \end{cases}$$

Sin embargo, al elegir que el periodo se extienda desde $t = -0.1$ hasta $t = 0.3$ se obtendría un menor número de ecuaciones, y en consecuencia menos integrales:

$$v(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t & -0.1 \le t \le 0.1 \\ 0 & 0.1 \le t \le 0.3 \end{cases} \qquad [12]$$

Esta forma es preferible, aunque cualquier descripción daría el resultado correcto.

▶ *Construya un conjunto de ecuaciones apropiado.*

La componente de frecuencia cero se obtiene con facilidad:

$$a_0 = \frac{1}{0.4}\int_{-0.1}^{0.3} v(t)\,dt = \frac{1}{0.4}\left[\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t\,dt + \int_{0.1}^{0.3} 0\,dt\right]$$

Observe que la integración sobre un periodo completo debe descomponerse en subintervalos del periodo, para cada uno de los cuales se conoce la forma funcional de $v(t)$.

La amplitud de un término coseno *general* es:

$$a_n = \frac{2}{0.4}\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \cos 5\pi n t\,dt$$

y la amplitud de un término senoidal general es

$$b_n = \frac{2}{0.4}\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \text{ sen } 5\pi n t\,dt$$

el cual, de hecho, es siempre igual a cero, por lo cual no se tomará en cuenta de aquí en adelante.

▶ *Determine si se requiere información adicional.*

La forma de la función que obtuvimos luego de integrar difiere cuando n es la unidad, en comparación con el caso en el que se elige cualquier otro valor de n. Si $n = 1$, tenemos

$$a_1 = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos^2 5\pi t\,dt = \frac{V_m}{2} \qquad [13]$$

(*continúa*)

mientras que si n no es igual a la unidad, encontramos que

$$a_n = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos 5\pi t \cos 5\pi nt \, dt$$

Busque una solución.
Al resolver, tenemos que

$$a_0 = \frac{V_m}{\pi} \qquad [14]$$

$$a_n = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \frac{1}{2}[\cos 5\pi(1+n)t + \cos 5\pi(1-n)t]\, dt$$

o

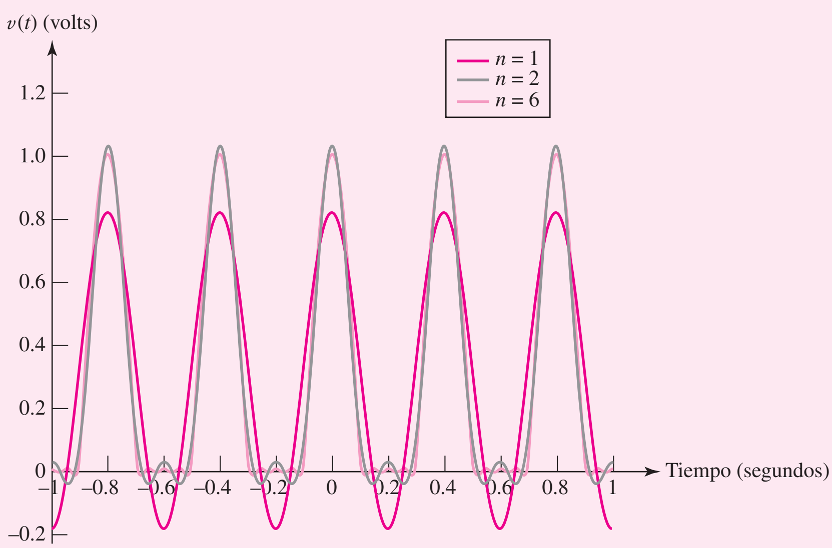
$$a_n = \frac{2V_m}{\pi}\frac{\cos(\pi n/2)}{1-n^2} \qquad (n \neq 1) \qquad [15]$$

Debe destacarse, de manera incidental, que la expresión de an cuando $n \neq 1$ proporcionará el resultado concreto de $n = 1$ en el límite a medida que $n \rightarrow 1$.

(Una integración similar muestra que $b_n = 0$ para cualquier valor de n y que así la serie de Fourier no contiene términos seno.) Por lo tanto, la serie de Fourier se obtiene de las ecuaciones [1], [13], [14] y [15]:

$$v(t) = \frac{V_m}{\pi} + \frac{V_m}{2}\cos 5\pi t + \frac{2V_m}{3\pi}\cos 10\pi t - \frac{2V_m}{15\pi}\cos 20\pi t + \frac{2V_m}{35\pi}\cos 30\pi t - \cdots \qquad [16]$$

Verifique la solución. ¿Es razonable o la esperada?
Nuestra solución se comprueba insertando valores en la ecuación [16] y truncando después un número específico de términos. Sin embargo, otro método consiste en graficar la función, como se indica en la figura 18.3 para $n = 1$, 2 y 6. Como



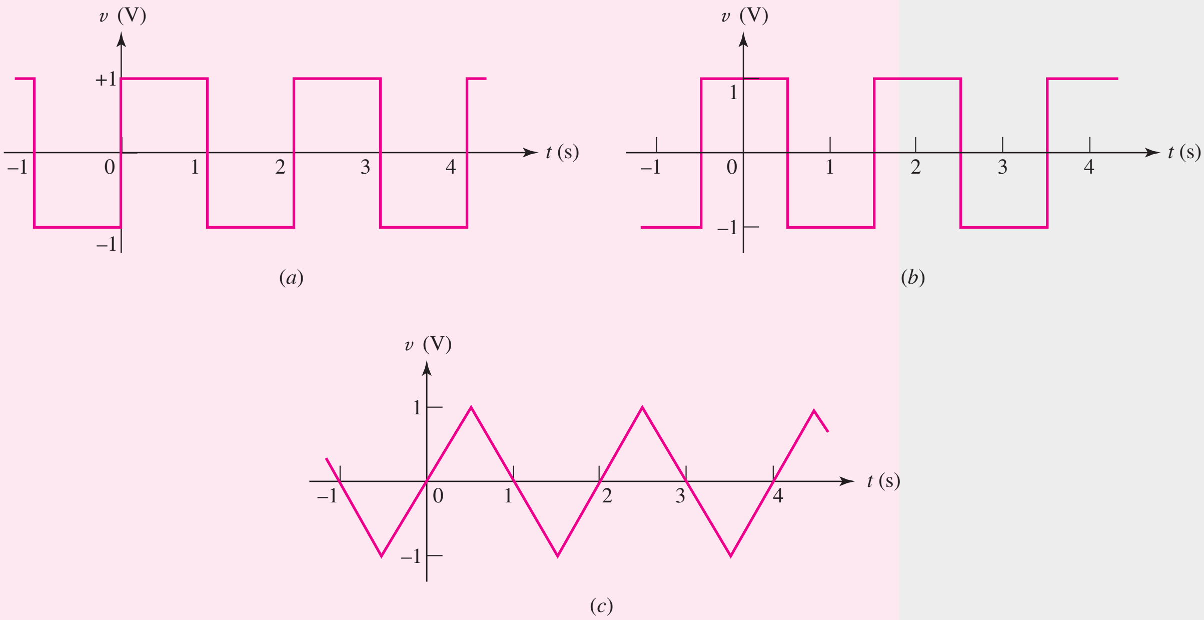
■ **FIGURA 18.3** Ecuación [16] truncada después del término $n = 1$, $n = 2$ y $n = 6$ que muestra la convergencia hacia la media senoide $v(t)$. Se ha elegido por conveniencia una magnitud de $V_m = 1$.

puede verse, a medida que se incluyan más términos, la gráfica se asemejará más a la de la figura 18.2.

PRÁCTICA

18.2 Una función periódica $f(t)$ se describe como sigue: $f(t) = -4$, para $0 < t < 0.3$; $f(t) = 6$ para $0.3 < t < 0.4$; $f(t) = 0$, para $0.4 < t < 0.5$; $T = 0.5$. Calcule (*a*) a_0; (*b*) a_3; (*c*) b_1.

18.3 Escriba la serie de Fourier para las tres formas de onda de tensión de la figura 18.4.

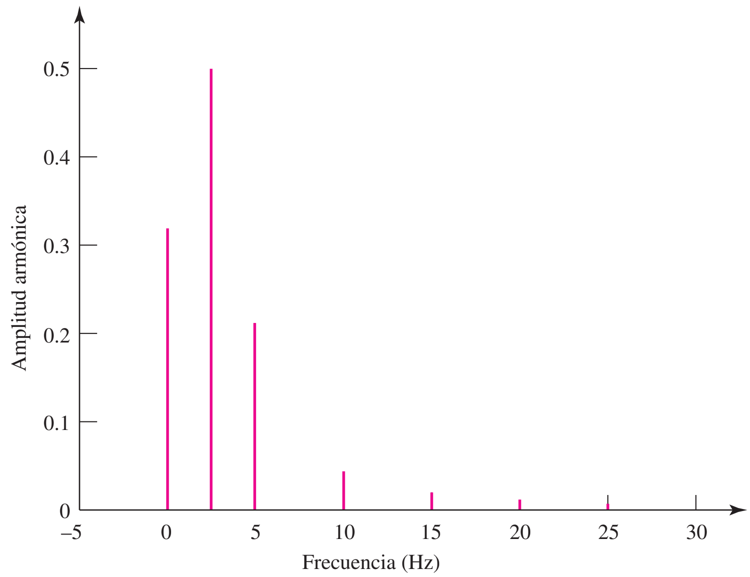


■ **FIGURA 18.4**

Respuestas: 18.2: −1.200; 1.383; −4.44. 18.3: $(4/\pi)(\text{sen}\ \pi t + \frac{1}{3}\text{sen}\ 3\pi t + \frac{1}{5}\text{sen}\ 5\pi t + \cdots)$ V; $(4/\pi)(\cos \pi t - \frac{1}{3}\cos 3\pi t + \frac{1}{5}\cos 5\pi t - \cdots)$ V; $(8/\pi^2)(\text{sen}\ \pi t - \frac{1}{9}\text{sen}\ 3\pi t + \frac{1}{25}\text{sen}\ 5\pi t - \cdots)$.

Espectros de línea y de fase

En la figura 18.2, mostramos la función $v(t)$ del ejemplo 18.1 en forma gráfica y, en la ecuación [12], se expresa como una función analítica (ambas representaciones están en el dominio del tiempo). La representación en serie de Fourier de $v(t)$ en la ecuación [16] también es una expresión en el dominio del tiempo, aunque se podría transformar con facilidad en una representación en el *dominio de la frecuencia.* Por ejemplo, la figura 18.5 muestra la amplitud de cada componente de frecuencia de $v(t)$, un tipo de gráfica llamada ***espectro de línea***. Aquí, la magnitud de cada componente de frecuencia (es decir, $|a_0|$, $|a_1|$, etc.) se indica por la longitud de la línea vertical a la frecuencia correspondiente (f_0, f_1, etc.); para efectos de conveniencia, tomamos $V_m = 1$. Dado un valor diferente de V_m, simplemente ajustamos los valores del eje y a los nuevos valores.



■ **FIGURA 18.5** Espectro de línea discreto de $v(t)$ como se representa en la ecuación [16], que muestra las primeras siete componentes de frecuencia. Por conveniencia se ha seleccionado una magnitud de $V_m = 1$.

A menudo, dicha gráfica se conoce con el nombre de ***espectro discreto*** y un solo vistazo a ella proporciona una gran cantidad de información. En particular, podemos observar cuántos términos de la serie se requieren para obtener una aproximación razonable de la forma de onda original. En el espectro de línea de la figura 18.5 observamos que las armónicas 8a. y 10a. (20 y 25 Hz, respectivamente) agregan solamente una pequeña corrección. Por lo tanto, interrumpir la serie después de la 6a. armónica debe proporcionar una buena aproximación; el lector podrá juzgarlo por sí mismo considerando la figura 18.3.

Es necesario señalar un aspecto importante. El ejemplo considerado no contiene términos seno y la amplitud de la armónica *n-ésima* es, por lo tanto, $|a_n|$. Si b_n no es cero, entonces la amplitud de la componente a una frecuencia $n\omega_0$ debe ser $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, que es una cantidad general que debemos indicar en el espectro de líneas. Cuando estudiamos la forma compleja de la serie de Fourier, veremos que tal amplitud se obtiene de manera más directa.

Además del espectro de amplitud, también construyamos un ***espectro de fase*** discreto. A cualquier frecuencia $n\omega_0$, se combinan los términos coseno y seno para determinar el ángulo de fase ϕ_n:

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos\left(n\omega_0 t + \tan^{-1}\frac{-b_n}{a_n}\right)$$
$$= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

o

$$\phi_n = \tan^{-1}\frac{-b_n}{a_n}$$

En la ecuación [16], $\phi_n = 0°$ o $180°$ para cualquier n.

La serie de Fourier de este ejemplo no incluye términos seno ni armónicas impares (salvo la fundamental) entre los términos coseno. Se puede pronosticar la ausencia de

ciertos términos en una serie de Fourier, antes de que se efectúe cualquier integración, mediante una inspección de la simetría de la función de tiempo dada. En la siguiente sección investigaremos el uso de la simetría.

18.2 USO DE LA SIMETRÍA

Simetría par e impar

Los dos tipos de simetría que se reconocen con mayor facilidad son la *simetría de función par* y *la de función impar* o simplemente *simetría par* y *simetría impar.* Decimos que $f(t)$ posee la propiedad de simetría si

$$f(t) = f(-t) \qquad [17]$$

Funciones como t^2, cos $3t$, ln(cos t), sen^2 $7t$, y una constante C poseen todas simetría par; la sustitución de t por $(-t)$ no cambia el valor de ninguna de estas funciones. Este tipo de simetría también se podría reconocer en forma gráfica, pues si $f(t) = f(-t)$ entonces existe simetría reflejada respecto del eje $f(t)$. La función de la figura 18.6*a* posee simetría par; si la figura se plegara a lo largo del eje $f(t)$, entonces las porciones de la gráfica de los tiempos positivo y negativo coincidirían con exactitud.

Definimos la simetría impar señalando que si es una propiedad de $f(t)$, entonces

$$f(t) = -f(-t) \qquad [18]$$

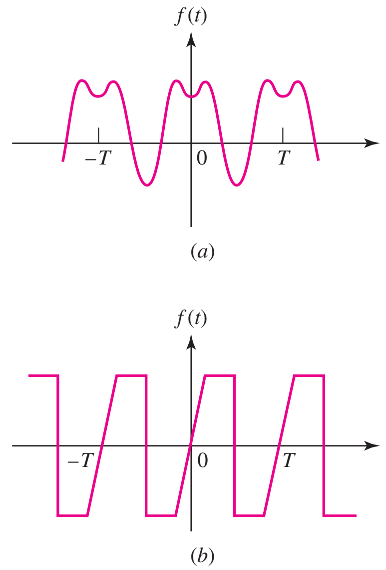


FIGURA 18.6 (*a*) Forma de onda que muestra simetría par. (*b*) Forma de onda con simetría impar.

En otras palabras, si t se sustituye por $(-t)$, entonces se obtiene el negativo de la función dada; por ejemplo, t, sen t, t cos $70t$, $t\sqrt{1+t^2}$ y la función dibujada en la figura 18.6*b* son funciones impares y poseen simetría impar. Las características gráficas de la simetría impar son patentes en la parte de $f(t)$ para la que $t > 0$ se gira en torno al eje t positivo y la figura resultante se gira después en torno al eje $f(t)$; las dos curvas coincidirán de manera exacta. Es decir, en este caso se tiene simetría respecto del origen y no en torno al eje $f(t)$, como ocurrió en el caso de las funciones pares.

Al tener definiciones de la simetría par y la impar, debemos observar que el producto de dos funciones con simetría par, o de dos funciones con simetría impar, tiene como resultado una función con simetría par. Por su parte, el producto de una función par y una impar da como resultado una función con simetría impar.

Simetría y términos de la serie de Fourier

Investigaremos ahora el efecto que la simetría par produce en una serie de Fourier. Si consideramos la expresión que iguala una función par $f(t)$ con la suma de un número infinito de funciones seno y coseno, resulta claro que la suma también debe ser una función par. Sin embargo, una onda seno es una función impar, y *ninguna suma de onda seno puede producir una función par, aparte de cero* (que es tanto par como impar). Así, es posible que la serie de Fourier de cualquier función par esté compuesta sólo por una constante y por funciones coseno. Demostraremos ahora con cuidado que $b_n = 0$. Tenemos

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{ sen } n\omega_0 t \, dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t) \text{ sen } n\omega_0 t \, dt + \int_{0}^{T/2} f(t) \text{ sen } n\omega_0 t \, dt\right]$$

Luego sustituimos la variable t en la primera integral por $-\tau$, o $\tau = -t$, y recurrimos al hecho de que $f(t) = f(-t) = f(\tau)$:

$$b_n = \frac{2}{T}\left[\int_{T/2}^{0} f(-\tau)\ \text{sen}\,(-n\omega_0\tau)(-d\tau) + \int_0^{T/2} f(t)\ \text{sen}\ n\omega_0 t\ dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[-\int_0^{T/2} f(\tau)\ \text{sen}\ n\omega_0\tau\ d\tau + \int_0^{T/2} f(t)\ \text{sen}\ n\omega_0 t\ dt\right]$$

Sin embargo, el símbolo que utilizamos para identificar la variable de integración no puede afectar el valor de la integral. Así,

$$\int_0^{T/2} f(\tau)\ \text{sen}\ n\omega_0\tau\ d\tau = \int_0^{T/2} f(t)\ \text{sen}\ n\omega_0 t\ dt$$

y

$$b_n = 0 \qquad \text{(simetría par)} \qquad [19]$$

Ningún término seno está presente. En consecuencia, si $f(t)$ tiene simetría par, entonces $b_n = 0$; inversamente, si $b_n = 0$, entonces $f(t)$ debe tener simetría par.

Una inspección similar de la expresión de a_n conduce a una integral sobre la *mitad del periodo* que se extiende desde $t = 0$ hasta $t = \frac{1}{2}T$:

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt \quad \text{(simetría par)} \qquad [20]$$

El hecho de que sea posible obtener a_n de una función par tomando “el doble de la integral sobre la mitad del intervalo” debe parecer lógico.

Una función con simetría impar no contiene un término constante ni un término seno en su desarrollo de Fourier. Demostraremos la segunda parte de este enunciado. Tenemos

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt + \int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt\right]$$

y ahora hacemos que $t = -\tau$ en la primera integral:

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_{T/2}^{0} f(-\tau)\cos(-n\omega_0\tau)(-d\tau) + \int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} f(-\tau)\cos\ n\omega_0\tau\ d\tau + \int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\ dt\right]$$

Pero $f(-\tau) = -f(\tau)$; por lo tanto

$$a_n = 0 \qquad \text{(simetría impar)} \qquad [21]$$

Una prueba similar, aunque más simple, demuestra que

$$a_0 = 0 \quad \text{(simetría impar)}$$

Por lo tanto, con simetría impar $a_n = 0$ y $a_0 = 0$; inversamente, si $a_n = 0$ y $a_0 = 0$, está presente la simetría impar.

Los valores de b_n se obtendrían otra vez integrando sobre la mitad del intervalo:

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt \quad \text{(simetría impar)} \qquad [22]$$

Simetría de media onda

La serie de Fourier de ambas ondas cuadradas tiene una característica interesante: ninguna contiene alguna *armónica* par.[1] Esto es, las únicas componentes de frecuencia presentes en la serie son múltiplos impares de la frecuencia fundamental; a_n y b_n son cero para valores pares de n. Este resultado se debe a otro tipo de simetría, conocida como simetría de media onda. Afirmaremos que $f(t)$ posee *simetría de media onda* si

$$f(t) = -f\left(t - \tfrac{1}{2}T\right)$$

o la expresión equivalente,

$$f(t) = -f\left(t + \tfrac{1}{2}T\right)$$

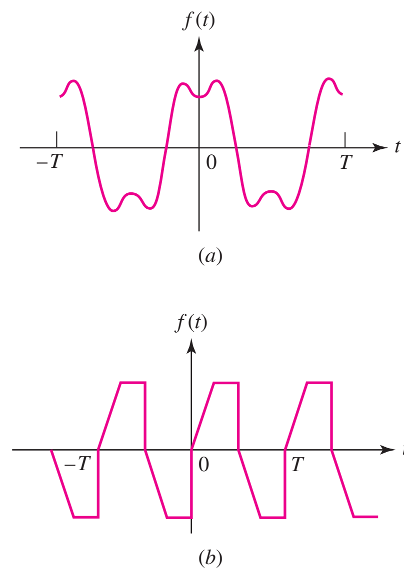


FIGURA 18.7 (*a*) Forma de onda un tanto similar a la que se muestra en la figura 18.6*a*, pero que posee simetría de media onda. (*b*) Forma de onda un tanto similar a la de la figura 18.6*b*, pero con simetría de media onda.

Salvo por el cambio de signo, cada medio ciclo es similar a los medios ciclos adyacentes. La simetría de media onda, a diferencia de la simetría par e impar, no está en función de la elección del punto $t = 0$. Por lo tanto, establecemos que la onda cuadrada (figura 18.4*a* o *b*) muestra simetría de media onda. Ninguna de las formas de onda de la figura 18.6 tiene simetría de media onda, aunque las dos funciones algo semejantes que se grafican en la figura 18.7 poseen simetría de media onda.

Se podría demostrar que la serie de Fourier de cualquier función que tiene simetría de media onda contiene únicamente armónicas impares. Consideremos los coeficientes a_n. Tenemos de nuevo

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$
$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt + \int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt\right]$$

la cual representaríamos como

$$a_n = \frac{2}{T}(I_1 + I_2)$$

Sustituimos ahora la nueva variable $\tau = t + \frac{1}{2}T$ en la integral I_1:

$$I_1 = \int_0^{T/2} f\left(\tau - \frac{1}{2}T\right)\cos n\omega_0\left(\tau - \frac{1}{2}T\right) d\tau$$
$$= \int_0^{T/2} -f(\tau)\left(\cos n\omega_0\tau \cos\frac{n\omega_0 T}{2} + \operatorname{sen} n\omega_0\tau \operatorname{sen}\frac{n\omega_0 T}{2}\right) d\tau$$

[1] Se requiere una vigilancia constante para evitar la confusión entre una función par y una armónica par, o entre una función impar y una armónica impar. Por ejemplo, b_{10} es el coeficiente de una armónica par, y es cero si $f(t)$ es una función par.

Pero $\omega_0 T$ es 2π; por ello,

$$\text{sen}\,\frac{n\omega_0 T}{2} = \text{sen}\,n\pi = 0$$

Por consiguiente,

$$I_1 = -\cos n\pi \int_0^{T/2} f(\tau)\cos n\omega_0\tau\, d\tau$$

Al observar la forma de I_2, podemos escribir

$$a_n = \frac{2}{T}(1-\cos n\pi)\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$

El factor $(1 - \cos n\pi)$ indica que a_n es cero, si n es par. De tal manera,

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases} \qquad \left(\tfrac{1}{2}\text{ simetría de onda}\right) \qquad [23]$$

Una investigación similar muestra que b_n es también cero para toda n par y, por lo tanto,

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases} \qquad \left(\tfrac{1}{2}\text{ simetría de onda}\right) \qquad [24]$$

Debe observarse que la simetría de media onda se presentaría como una forma de onda que también muestre simetría impar o par. La forma de onda dibujada en la figura 18.7*a*, por ejemplo, posee simetría par y de media onda. Cuando una forma de onda tiene simetría de media onda y simetría par o impar, entonces se puede reconstruir la forma de onda, si se conoce la función sobre cualquier intervalo de un cuarto del periodo. El valor de a_n o b_n también se determina al integrar sobre cualquier cuarto de periodo. Por lo tanto,

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt && n \text{ impar} \\ a_n &= 0 && n \text{ par} \\ b_n &= 0 && \text{todo } n \end{aligned}\right\} \quad \left(\tfrac{1}{2}\text{ simetría de onda y par}\right) \qquad [25]$$

Siempre vale la pena dedicar unos momentos a investigar la simetría de una función para la que se va a determinar la serie de Fourier.

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0 && \text{todo } n \\ b_n &= \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\,\text{sen}\,\omega_0 t\, dt && n \text{ impar} \\ b_n &= 0 && n \text{ par} \end{aligned}\right\} \quad \left(\tfrac{1}{2}\text{ simetría de onda e impar}\right) \qquad [26]$$

La tabla 18.1 proporciona un breve resumen de las simplificaciones que surgen de los diferentes tipos de simetrías que se estudiaron en esta sección.

TABLA 18.1 Resumen de las simplificaciones de la serie de Fourier con base en las simetrías

Tipo de simetría	Característica	Simplificación
Par	$f(t) = -f(t)$	$b_n = 0$
Impar	$f(t) = -f(-t)$	$a_n = 0$
Media onda	$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$ o $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$	$a_n = \begin{cases} \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$ $b_n = \begin{cases} \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$
Media onda y par	$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$ y $f(t) = -f(t)$ o $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$ y $f(t) = -f(t)$	$a_n = \begin{cases} \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t_1)\cos n\omega_0 t\, dt & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$ $b_n = 0$ para todo n
Media onda e impar	$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$ y $f(t) = -f(-t)$ o $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$ y $f(t) = -f(-t)$	$a_n = 0$ para todo n $b_n = \begin{cases} \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$

PRÁCTICA

18.4 Grafique cada una de las funciones descritas, establezca si está presente o no la simetría par, la simetría impar o la simetría de media onda, e indique el periodo: (*a*) $v = 0$, para $-2 < t < 0$ y $2 < t < 4$; $v = 5$, para $0 < t < 2$; $v = -5$, para $4 < t < 6$: se repite; (*b*) $v = 10$, para $1 < t < 3$; $v = 0$, para $3 < t < 7$; $v = -10$, para $7 < t < 9$; se repite; (*c*) $v = 8t$, para $-1 < t < 1$; $v = 0$, para $1 < t < 3$; se repite.

18.5 Determine la serie de Fourier de las formas de onda del problema de práctica 18.4*a* y *b*.

Respuestas: 18.4: No, no, sí, 8; no, no, no, 8; no, sí, no, 4.

18.5: $\sum_{n=1(\text{impar})}^{\infty} \frac{10}{n\pi}\left(\text{sen}\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi t}{4} + \text{sen}\frac{n\pi t}{4}\right)$;

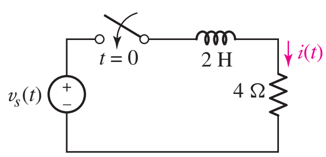
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n\pi}\left[\left(\text{sen}\frac{3n\pi}{4} - 3\,\text{sen}\frac{n\pi}{4}\right)\cos\frac{n\pi t}{4} + \left(\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}\right)\text{sen}\frac{n\pi t}{4}\right]$.

18.3 RESPUESTA COMPLETA A FUNCIONES FORZADAS PERIÓDICAS

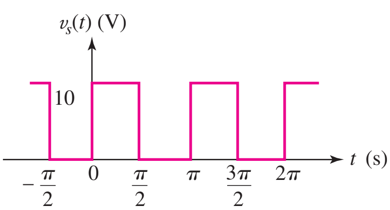
Mediante el uso de la serie de Fourier podríamos expresar ahora una función forzada periódica arbitraria como la suma de un número infinito de funciones forzadas senoidales. La respuesta forzada de cada una de estas funciones se debe determinar mediante el análisis convencional de estado permanente, pero la forma de la respuesta natural se establece a partir de los polos de una función de transferencia de red apropiada. Las condiciones iniciales que existen en la red, incluso el valor inicial de la respuesta forzada, permiten la selección de la amplitud de la respuesta natural; en consecuencia, la respuesta completa se obtiene como la suma de las respuestas forzada y natural.

EJEMPLO 18.2

Para el circuito de la figura 18.8*a*, determine la respuesta periódica *i*(*t*) correspondiente a la función forzada que se muestra en la figura 18.8*b* si *i*(0) = 0.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 18.8** (*a*) Un circuito *RL* simple sujeto a una función periódica forzante $v_s(t)$. (*b*) La forma de la función forzante.

La función forzada tiene una frecuencia compleja (pulsación) fundamental $\omega_0 = 2$ rad/s, y su serie de Fourier se podría escribir por comparación con la serie de Fourier generada para la forma de onda de la figura 18.4*b* en la solución del problema de práctica 18.3,

$$v_s(t) = 5 + \frac{20}{\pi} \sum_{n=1\,(\text{impar})}^{\infty} \frac{\text{sen}\, 2nt}{n}$$

Encontraremos la respuesta forzada de la armónica *n-ésima* trabajando en el dominio de la frecuencia. De tal modo,

$$v_{sn}(t) = \frac{20}{n\pi}\,\text{sen}\, 2nt$$

y

$$\mathbf{V}_{sn} = \frac{20}{n\pi}\underline{/-90^\circ} = -j\frac{20}{n\pi}$$

La impedancia que ofrece el circuito *RL* a esta frecuencia está dada por

$$\mathbf{Z}_n = 4 + j(2n)2 = 4 + j4n$$

y por ello la componente de la respuesta forzada a esta frecuencia es igual a

$$\mathbf{I}_{fn} = \frac{\mathbf{V}_{sn}}{\mathbf{Z}_n} = \frac{-j5}{n\pi(1 + jn)}$$

Si se transforma al dominio del tiempo, tenemos

$$i_{fn} = \frac{5}{n\pi}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\cos(2nt - 90^\circ - \tan^{-1} n)$$

$$= \frac{5}{\pi(1+n^2)}\left(\frac{\text{sen}\, 2nt}{n} - \cos 2nt\right)$$

Recuerde que V_m sen ω es igual a V_m (cos ωt − 90°), correspondiente a $V_m\underline{/-90^\circ} = -jV_m$.

Dado que la respuesta de la componente de cd es simplemente 5 V/4 Ω = 1.25 A, la respuesta forzada se expresaría como la sumatoria

$$i_f(t) = 1.25 + \frac{5}{\pi} \sum_{n=1(\text{impar})}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen} 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2} \right]$$

La respuesta natural familiar de este circuito simple es el término exponencial [que caracteriza al único polo de la función de transferencia, $\mathbf{I}_f/\mathbf{V}_s = 1/(4 + 2\mathbf{s})$]

$$i_n(t) = Ae^{-2t}$$

La respuesta *completa* es, por lo tanto, la suma

$$i(t) = i_f(t) + i_n(t)$$

Si $t = 0$, encontramos A utilizando $i\,(0) = 0$:

$$A = -1.25 + \frac{5}{\pi} \sum_{n=1(\text{impar})}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

Aunque es correcto, resulta más conveniente utilizar el valor numérico de la sumatoria. La suma de los primeros cinco términos de $\Sigma\ 1/(1 + n^2)$ es 0.671, la suma de los primeros diez términos es 0.695, la suma de los primeros veinte términos corresponde a 0.708 y la suma exacta es igual a 0.720 hasta tres cifras significativas. Por lo tanto,

$$A = -1.25 + \frac{5}{\pi}(0.720) = -0.104$$

e

$$i(t) = -0.104e^{-2t} + 1.25 + \frac{5}{\pi} \sum_{n=1(\text{impar})}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen} 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2} \right] \quad \text{amperes}$$

Al obtener esta solución, empleamos muchos de los conceptos más generales que se presentaron en éste y en los 17 capítulos precedentes. No nos fue necesario utilizar algunos debido a la naturaleza simple de este circuito en particular, aunque indicamos su posición en el análisis general. En este sentido, podríamos considerar la solución de este problema como un logro significativo en el estudio introductorio del análisis de circuitos. Sin embargo, a pesar de este glorioso sentimiento de logro, debe señalarse que la respuesta completa, según se obtuvo de manera analítica en el ejemplo 18.2, no es de mucho valor en la forma dada, pues no ofrece una imagen clara de la naturaleza de la respuesta. Lo que en realidad requerimos es un bosquejo de $i(t)$ como función del tiempo, la cual se obtendría mediante un cálculo laborioso. Una computadora de escritorio o una calculadora programable son de gran ayuda en este caso. El bosquejo quizá se aproxime mediante la suma gráfica de la respuesta natural, el término de cd y unas cuantas de las primeras armónicas; ésta es una tarea ingrata.

Cuando todo se ha dicho y hecho, tal vez la solución más informativa de este problema se obtenga mediante un análisis transitorio repetido. Esto es, la forma de la

respuesta puede calcularse con certeza en el intervalo de $t = 0$ a $t = \pi/2$ s; éste es un crecimiento exponencial hacia 2.5 A. Después de determinar el valor en el extremo del primer intervalo, tenemos la condición inicial del siguiente segundo intervalo de $(\pi/2)$. El proceso se repite hasta que la respuesta asume una naturaleza que suele resultar periódica. El método resulta muy adecuado para este ejemplo, pues hay un cambio insignificante en la forma de onda de la corriente en los periodos sucesivos $\pi/2 < t < 3\pi/2$ y $3\pi/2 < t < 5\pi/2$. La respuesta de corriente completa se dibuja en la figura 18.9.

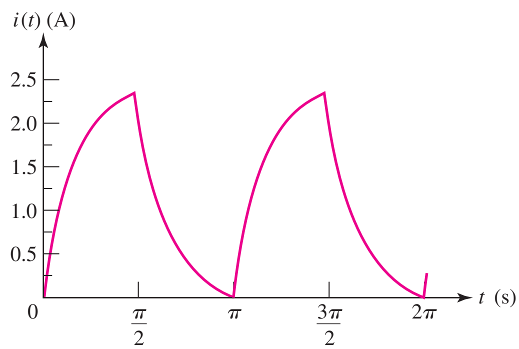


FIGURA 18.9 Porción inicial de la respuesta completa del circuito de la figura 18.8*a* a la función forzada de la figura 18.8*b*.

PRÁCTICA

18.6 Utilice los métodos del capítulo 8 para determinar el valor de la corriente de la figura 18.9 en t igual a: (*a*) $\pi/2$; (*b*) π; (*c*) $3\pi/2$.

Respuestas: 2.392 A; 0.1034 A; 2.396 A.

18.4 FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER

Al obtener un espectro de frecuencia, observamos que la amplitud de cada componente de frecuencia depende tanto de a_n como de b_n; esto es, el término seno y el término coseno contribuyen a la amplitud. La expresión exacta de esta amplitud es $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. También es posible obtener la amplitud en forma directa al utilizar una forma de la serie de Fourier en la que cada término es una función coseno con un ángulo de fase; la amplitud y el ángulo de fase son funciones de $f(t)$ y n. Una forma incluso más conveniente y concisa de la serie de Fourier se consigue si los senos y cosenos se expresan como funciones exponenciales con constantes multiplicadoras complejas.

Consideremos primero la forma trigonométrica de la serie de Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \,\text{sen}\, n\omega_0 t)$$

El lector recordará las identidades

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{j2}$$

y

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

y luego sustituyamos las formas exponenciales del seno y el coseno. Tras reordenar,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{jn\omega_0 t}\frac{a_n - jb_n}{2} + e^{-jn\omega_0 t}\frac{a_n + jb_n}{2}\right)$$

Definimos ahora una constante compleja $\mathbf{c}_n$:

$$\mathbf{c}_n = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n) \qquad (n = 1, 2, 3,...) \tag{27}$$

Los valores de a_n, b_n y $\mathbf{c}_n$ dependen todos de n y $f(t)$. Suponiendo que reemplazamos ahora n por $(-n)$, ¿cómo cambian los valores de las constantes? Los coeficientes a_n y b_n se definen mediante las ecuaciones [10] y [11] y resulta evidente que:

$$a_{-n} = a_n$$

pero

$$b_{-n} = -b_n$$

De la ecuación [27] se tiene

$$\mathbf{c}_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + jb_n) \qquad (n = 1, 2, 3,...) \tag{28}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{c}^*_{-n}$$

También sea,

$$\mathbf{c}_0 = a_0$$

Por lo tanto, podríamos expresar $f(t)$ como

$$f(t) = \mathbf{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

o

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

Por último, en lugar de sumar la segunda serie respecto de los enteros positivos desde 1 hasta ∞, sumemos respecto de los enteros negativos desde -1 hasta $-\infty$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t}$$

o

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \tag{29}$$

Por convención, una sumatoria desde $-\infty$ hasta ∞ se entiende que incluye un término para $n = 0$.

La ecuación [29] es la *forma compleja* de la serie de Fourier para $f(t)$; su concisión es una de las razones más importantes por la que se utiliza. Para obtener la expresión mediante la que se podría evaluar un coeficiente complejo particular $\mathbf{c}_n$ se sustituyen las ecuaciones [10] y [11] en la [27]:

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt - j\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ \text{sen}\ n\omega_0 t\, dt$$

y luego utilizamos los equivalentes exponenciales del seno y del coseno y simplificamos:

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \qquad [30]$$

Así, una sola y concisa ecuación sirve para sustituir las dos ecuaciones requeridas para la forma trigonométrica de la serie de Fourier. En lugar de evaluar dos integrales para obtener los coeficientes de Fourier, sólo se necesita una integración; además, casi siempre es una integración más simple. Debe observarse que la integral de la ecuación [30] contiene el factor $1/T$, mientras que las integrales de a_n y b_n no contienen el factor $2/T$.

Al agrupar las dos relaciones básicas de la forma exponencial de la serie de Fourier, tenemos

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \qquad [29]$$

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \qquad [30]$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$ como es usual.

La amplitud de la componente de la serie de Fourier exponencial en $\omega = n\omega_0$, donde $n = 0, \pm1, \pm2$ …., es $|\mathbf{c}_n|$. Graficaríamos un espectro de frecuencia discreto dando $|\mathbf{c}_n|$ en función de $n\omega_0$ o nf_0, utilizando una abscisa que muestre los valores tanto positivos como negativos. Cuando efectuamos lo anterior, la gráfica es simétrica alrededor del origen, pues las ecuaciones [27] y [28] muestran que $|\mathbf{c}_n| = |\mathbf{c}_{-n}|$.

Observamos también de las ecuaciones [29] y [30] que la amplitud de la componente senoidal en $\omega = n\omega_0$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$, es $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|\mathbf{c}_n| = 2|\mathbf{c}_{-n}| = |\mathbf{c}_n| + |\mathbf{c}_{-n}|$. En el caso de la componente de cd, $a_0 = \mathbf{c}_0$.

Los coeficientes exponenciales de Fourier, dados por la ecuación [30], también resultan afectados por la presencia de ciertas simetrías en $f(t)$. De tal modo, las expresiones apropiadas de $\mathbf{c}_n$ son:

$$\mathbf{c}_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \qquad \text{(simetría par)} \qquad [31]$$

$$\mathbf{c}_n = \frac{-j2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\,dt \qquad \text{(simetría impar)} \qquad [32]$$

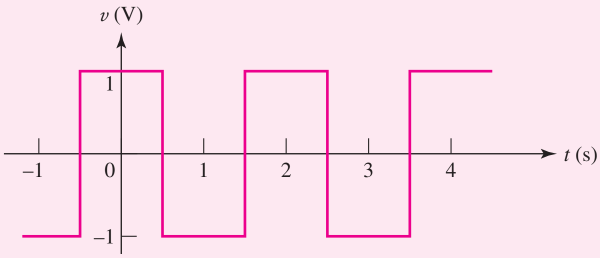
$$\mathbf{c}_n = \begin{cases} \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt & (n \text{ impar, simetría } \tfrac{1}{2} \text{ onda}) \quad [33a] \\ 0 & (n \text{ par, simetría } \tfrac{1}{2} \text{ onda}) \quad [33b] \end{cases}$$

$$\mathbf{c}_n = \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt & (n \text{ impar, simetría } \tfrac{1}{2} \text{ onda}) \quad [34a] \\ 0 & (n \text{ par, simetría } \tfrac{1}{2} \text{ onda}) \quad [34b] \end{cases}$$

$$\mathbf{c}_n = \begin{cases} \dfrac{-j4}{T}\displaystyle\int_0^{T/4} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\,dt & (n \text{ impar, simetría } \tfrac{1}{2} \text{ onda}) \quad [35a] \\ 0 & (n \text{ par, simetría } \tfrac{1}{2} \text{ onda}) \quad [35b] \end{cases}$$

EJEMPLO 18.3

Determine c_n de la onda cuadrada de la figura 18.10.



■ **FIGURA 18.10** Función de onda cuadrada que posee paridad y simetría para media onda.

Esta onda cuadrada posee simetría paridad y simetría para media onda. Si ignoramos esta simetría y usamos la ecuación general [30], con $T = 2$ y $\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{-0.5} -e^{-jn\pi t}\,dt + \int_{-0.5}^{0.5} e^{-jn\pi t}\,dt - \int_{0.5}^{1} e^{-jn\pi t}\,dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{-jn\pi}(e^{-jn\pi t})\Big|_{-1}^{-0.5} + \frac{1}{-jn\pi}(e^{-jn\pi t})\Big|_{-0.5}^{0.5} + \frac{-1}{-jn\pi}(e^{-jn\pi t})\Big|_{0.5}^{1}\right] \\
&= \frac{1}{j2n\pi}(e^{jn\pi/2} - e^{jn\pi} - e^{-jn\pi/2} + e^{jn\pi/2} + e^{-jn\pi} - e^{-jn\pi/2}) \\
&= 2\,\frac{e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2}}{j2n\pi} - \frac{e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}}{j2n\pi} \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[2\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2} - \text{sen}\,n\pi\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, encontramos que $\mathbf{c}_0 = 0$, $\mathbf{c}_1 = 2/\pi$, $\mathbf{c}_2 = 0$, $\mathbf{c}_3 = -2/3\pi$, $\mathbf{c}_4 = 0$, $\mathbf{c}_5 = 2/5\pi$, etc. Estos valores concuerdan con la serie de Fourier trigonométrica dada como respuesta de la práctica 18.3 para la forma de onda de la figura 18.4*b*, si recordamos que $a_n = 2\,\mathbf{c}_n$ cuando $b_n = 0$.

Al utilizar la simetría de la forma de onda (paridad y media onda), se requiere menos trabajo cuando aplicamos las ecuaciones [34*a*] y [34*b*], que llevan a

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_n &= \frac{4}{T}\int_{0}^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \\
&= \frac{4}{2}\int_{0}^{0.5} \cos n\pi t\,dt = \frac{2}{n\pi}(\text{sen}\,n\pi t)\Big|_{0}^{0.5} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}\,\text{sen}\,\dfrac{n\pi}{2} & (n \text{ impar}) \\ 0 & (n \text{ par}) \end{cases}
\end{aligned}$$

Estos resultados son los mismos que los que obtuvimos cuando no tomamos en cuenta la simetría de la forma de onda. Consideremos ahora un ejemplo más difícil e interesante.

EJEMPLO 18.4

Cierta función $f(t)$ es un tren de pulsos rectangulares de amplitud V_0 y duración τ, que se repiten en forma periódica cada T segundos, como se muestra en la figura 18.11. Determine la serie de Fourier exponencial de $f(t)$.

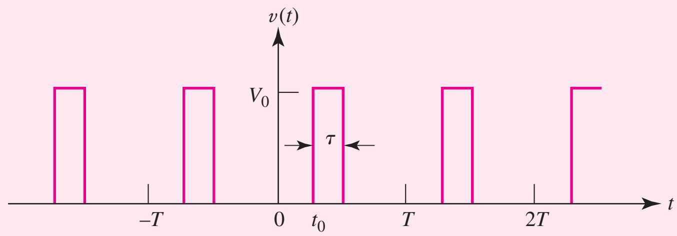


FIGURA 18.11 Secuencia periódica de pulsos rectangulares.

La frecuencia fundamental es $f_0 = 1/T$. No se presenta simetría y el valor de un coeficiente complejo general se determina gracias a la ecuación [30]:

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{V_0}{T}\int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$= \frac{V_0}{-jn\omega_0 T}\left(e^{-jn\omega_0(t_0+\tau)} - e^{-jn\omega_0 t_0}\right)$$

$$= \frac{2V_0}{n\omega_0 T}e^{-jn\omega_0(t_0+\tau/2)}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)$$

$$= \frac{V_0\tau}{T}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau}e^{-jn\omega_0(t_0+\tau/2)}$$

Por lo tanto, la magnitud de $\mathbf{c}_n$ es

$$|\mathbf{c}_n| = \frac{V_0\tau}{T}\left|\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau}\right| \qquad [36]$$

y el ángulo de $\mathbf{c}_n$ está dado por

$$\text{ang }\mathbf{c}_n = -n\omega_0\left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right) \qquad \text{(posiblemente más de 180°)} \qquad [37]$$

Las ecuaciones [36] y [37] representan la solución de este problema de la serie de Fourier exponencial.

La función de muestreo

A menudo, en la teoría de comunicaciones moderna aparece el factor trigonométrico de la ecuación [36], que se conoce como ***función de muestreo***. El "muestreo" se refiere a la función de tiempo que se muestra en la figura 18.11, de la cual se deduce la

función de muestreo. El producto de esta secuencia de pulsos y cualquier otra función $f(t)$ representa *muestras* de $f(t)$ cada T segundos, si τ es pequeña y $V_0 = 1$. Definimos

$$\mathrm{Sa}(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Debido a la forma en que ayuda a determinar la amplitud de las diversas componentes de frecuencia en $f(t)$, vale la pena descubrir las características importantes de esta función. Primero, observamos que Sa(x) es cero, siempre que x sea un múltiplo entero de π; esto es:

$$\mathrm{Sa}(n\pi) = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Cuando x es cero, la función es indeterminada, pero resulta fácil demostrar que su valor es la unidad:

$$\mathrm{Sa}(0) = 1$$

Por lo tanto, la magnitud de Sa(x) disminuye desde la unidad en $x = 0$ hasta cero en $x = \pi$. A medida que x aumenta desde π hasta 2π, $|\mathrm{Sa}(x)|$ se incrementa desde cero hasta un máximo menor que la unidad y después disminuye hasta cero otra vez. Conforme x continúa aumentando, los máximos sucesivos se vuelven cada vez más pequeños, debido a que el numerador de Sa(x) no puede exceder de la unidad y el denominador crece de manera continua. Además, Sa(x) muestra simetría par.

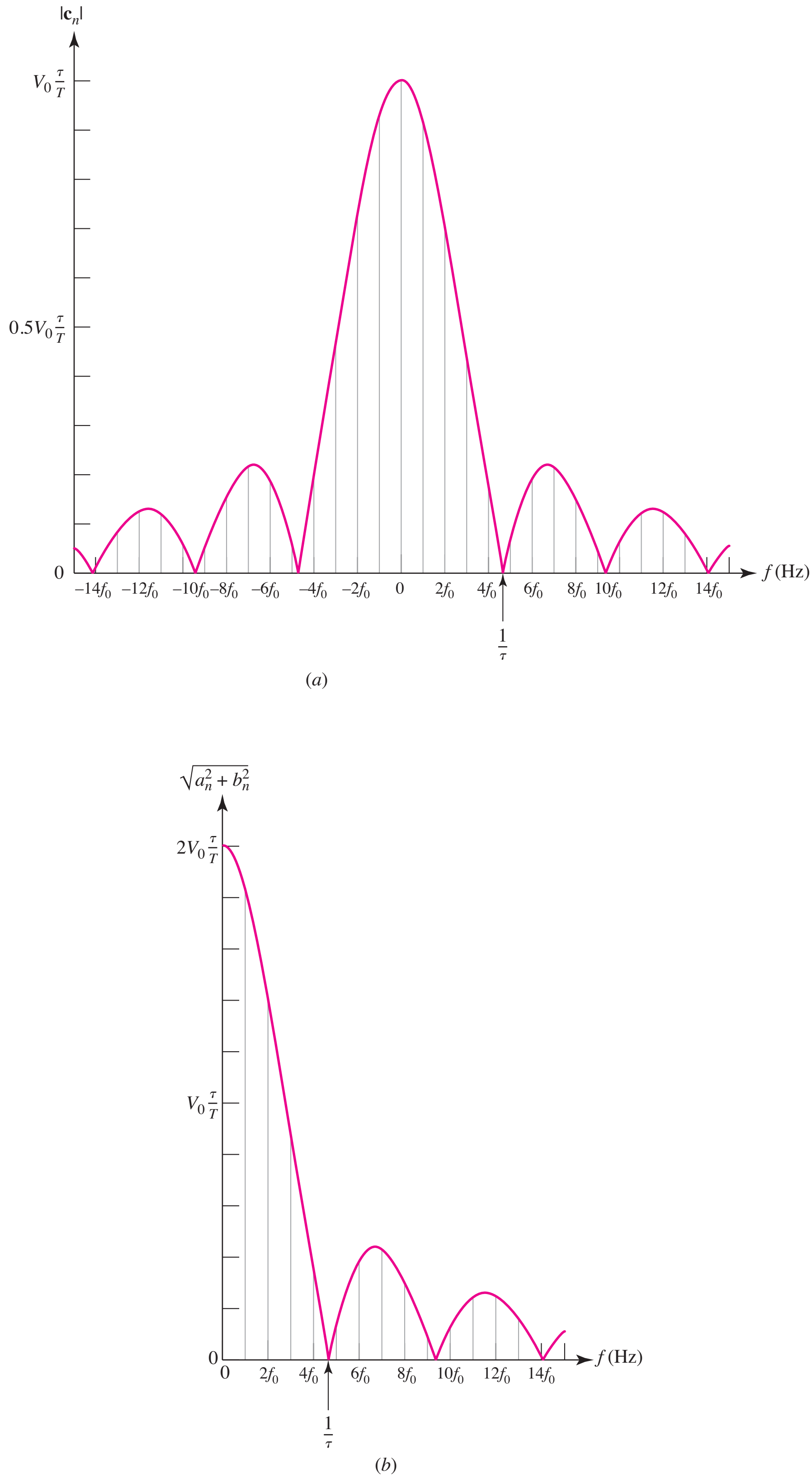
Construiremos ahora el espectro de líneas. Consideramos primero $|\mathbf{c}_n|$, escribiendo la ecuación [36] en términos de la frecuencia cíclica fundamental f_0:

$$|\mathbf{c}_n| = \frac{V_0 \tau}{T}\left|\frac{\operatorname{sen}(n\pi f_0 \tau)}{n\pi f_0 \tau}\right| \qquad [38]$$

La amplitud de cualquier $\mathbf{c}_n$ se obtiene de la ecuación [38] utilizando los valores conocidos τ y $T = 1/f_0$ y eligiendo el valor deseado de n, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ En lugar de evaluar la ecuación [38] en estas frecuencias discretas, dibujaremos la *envolvente* de $|\mathbf{c}_n|$ considerando la frecuencia nf_0 como una variable continua. Es decir, f, la cual es nf_0, en realidad sólo puede tomar los valores discretos de las frecuencias armónicas 0, $\pm f_0$, $\pm 2f_0$, $\pm 3f_0$, etc., aunque, por el momento, podríamos considerar a n como una variable continua. Cuando f es cero, $|\mathbf{c}_n|$ es evidentemente $V_0\,\tau/T$, y cuando f aumenta hasta $1/\tau$, $|\mathbf{c}_n|$ es cero. La envolvente resultante se dibuja con una línea tenue en la figura 18.12*a*. El espectro de línea se obtiene entonces levantando una recta vertical en cada frecuencia armónica, como se ilustra en el dibujo. Las amplitudes que se presentan son las correspondientes a $\mathbf{c}_n$. El caso dibujado se aplica a la situación en la que $\tau/T = 1/(1.5\pi) = 0.212$. En este ejemplo, no hay armónica exactamente en la frecuencia donde la amplitud de la envolvente es igual a cero; sin embargo, otra elección de τ o T produciría dicho suceso.

En la figura 18.12*b*, la amplitud de la componente senoidal se grafica como una función de la frecuencia. Observe otra vez que $a_0 = \mathbf{c}_0$ y $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |\mathbf{c}_n| + |\mathbf{c}_{-n}|$.

Son varias las observaciones y las conclusiones que podemos hacer acerca del espectro de líneas de una secuencia periódica de pulsos rectangulares, como se indica en la figura 18.12*b*. Con respecto a la envolvente del espectro discreto, resulta evidente que el "ancho" de la envolvente depende de τ, y no de T. En realidad, la forma de la envolvente no es una función de T. Se concluye que el ancho de banda de un filtro que se diseña para dejar pasar pulsos periódicos es una función del ancho del pulso τ, pero no del periodo del pulso T; un examen de la figura 18.12*b* indica que el ancho de banda requerido es casi igual a $1/\tau$ Hz. Si el periodo T del pulso se incrementa (o la frecuencia de repetición f_0 del pulso disminuye), no cambia el ancho de banda $1/\tau$, aunque aumenta el número de líneas espectrales entre la frecuencia cero y $1/\tau$ Hz



■ **FIGURA 18.12** (a) Espectro de línea discreto de $|\mathbf{c}_n|$ *versus* $f = nf_0$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, correspondiente al tren de pulsos que se muestra en la figura 18.11. (b) $\sqrt{a^2 + b^2}$ *versus* $f = nf_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ para el mismo tren de pulsos.

pero en forma discontinua; la amplitud de cada línea es inversamente proporcional a T. Por último, un desplazamiento con respecto al origen del tiempo no cambia el espectro de líneas; esto es, $|\mathbf{c}_n|$ no es una función de t_0. Las fases relativas de los componentes de frecuencia cambian con la elección de t_0.

PRÁCTICA

18.7 Determine el coeficiente general $\mathbf{c}_n$ en la serie de Fourier compleja para la forma de onda de la figura: (*a*) 18.4*a*; (*b*) 18.4*c*.

Respuestas: $-j2/(n\pi)$ para n impar, 0 para n par; $-j\,[4/(n^2\pi^2)]$ sen $n\pi/2$ para toda n.

18.5 DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Ahora que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de la representación mediante la serie de Fourier de funciones periódicas, procederemos a definir la transformada de Fourier recordando primero el espectro del tren periódico de pulsos rectangulares que obtuvimos en la sección anterior. Se trataba de un espectro de líneas *discreto* que es el tipo que se debe obtener siempre para funciones periódicas del tiempo. El espectro era discreto en el sentido de que no era una función uniforme o continua de la frecuencia, sino que tenía valores distintos de cero sólo a frecuencias específicas.

Sin embargo, hay muchas funciones forzadas importantes que no son funciones periódicas del tiempo, como un pulso rectangular individual, una función escalón, una función rampa o cierto tipo extraño de función llamada *función impulso* que se definió en el capítulo 14. Quizá obtengamos los espectros de frecuencia para tales funciones no periódicas, aunque serán espectros *continuos* en los cuales determinada energía, en general, se encontraría en cualquier intervalo de frecuencia distinto de cero, sin importar qué tan pequeño sea.

Desarrollaremos este concepto empezando con una función periódica para dejar luego que el periodo se vuelva infinito. Nuestra experiencia con los pulsos rectangulares periódicos debe indicar que la envolvente disminuirá en amplitud, sin cambiar la forma, y que más y más componentes de frecuencia se encontrarán en un intervalo de frecuencia determinado. En el límite, debemos esperar una envolvente de amplitud pequeña que poco a poco se anule, llena con un número infinito de componentes de frecuencia separadas por intervalos de frecuencia cada vez más pequeños. El número de componentes de frecuencia entre 0 y 100 Hz, por ejemplo, se vuelve infinito, aunque la amplitud de cada uno tiende a cero. En principio, el espectro de amplitud cero parece un concepto misterioso. Sabemos que el espectro de líneas de una función forzada periódica muestra la amplitud de cada componente de frecuencia. Sin embargo, ¿qué significa la amplitud cero del espectro continuo de una función forzada no periódica? La pregunta se responderá en la sección siguiente; ahora procederemos a efectuar el procedimiento límite que se acaba de sugerir.

Empezamos con la forma exponencial de la serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \qquad [39]$$

donde

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \qquad [40]$$

y

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{41}$$

Dejamos ahora

$$T \to \infty$$

y, por ello, de la ecuación [41], ω_0 debe ser cada vez más pequeña. Representamos el límite mediante una diferencial:

$$\omega_0 \to d\omega$$

De tal modo,

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \to \frac{d\omega}{2\pi} \tag{42}$$

Por último, la frecuencia de cualquier "armónica" $n\omega_0$ debe corresponder ahora con la variable de frecuencia general que describe el espectro continuo. En otras palabras, n debe tender al infinito a medida que ω_0 tiende a cero, por lo que el producto es finito:

$$n\omega_0 \to \omega \tag{43}$$

Cuando las cuatro operaciones límite se aplican a la ecuación [40], encontramos que $\mathbf{c}_n$ debe tender a cero, como habíamos supuesto. Si multiplicamos cada lado de la ecuación [40] por el periodo T y después llevamos a cabo el proceso de límite, se obtiene un resultado no trivial:

$$\mathbf{c}_n T \to \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

El lado derecho de esta expresión es una función de ω (y *no* de t), así que se representa mediante $\mathbf{F}(j\omega)$:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{44}$$

Luego aplicamos el proceso límite a la ecuación [39]. Comenzamos multiplicando y dividiendo la sumatoria entre T,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n T e^{jn\omega_0 t}\frac{1}{T}$$

sustituimos $\mathbf{c}_n T$ por la nueva cantidad $\mathbf{F}(j\omega)$ y después utilizamos las expresiones [42] y [43]. En el límite, la sumatoria se vuelve una integral, y

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \tag{45}$$

Las ecuaciones [44] y [45] se llaman de manera colectiva *par de transformadas de Fourier*. La función $\mathbf{F}(j\omega)$ es la *transformada de Fourier* de $f(t)$, y $f(t)$ es el universo de la transformada de Fourier de $\mathbf{F}(j\omega)$.

¡Esta relación de pares de transformadas es de lo más importante! Debemos memorizarla, dibujar flechas que la señalen y recordarla de aquí en adelante y para siempre. Subrayamos la importancia de estas relaciones repitiéndolas en forma de recuadro:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t)\, dt \qquad [46a]$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \mathbf{F}(j\omega)\, d\omega \qquad [46b]$$

Tal vez el lector haya observado unas cuantas similitudes entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace. Las diferencias clave entre ellas incluyen el hecho de que el almacenamiento de energía inicial no se incorpora con facilidad en el análisis de circuitos que emplea la transformda de Laplace. Además, hay varias funciones de tiempo (por ejemplo, la exponencial *creciente*) para las que no existe una transformada de Fourier. Sin embargo, si el lector está interesado sobre todo en la información espectral y no en la respuesta transitoria, la opción es la transformada de Fourier.

Los términos exponenciales de ambas ecuaciones llevan signos opuestos en los exponentes. Para mantenerlos correctos, quizá ayude advertir que el signo positivo se asocia con la expresión de $f(t)$, como sucede con la serie de Fourier compleja, ecuación [39].

Es importante plantear una pregunta en este momento. En el caso de las relaciones de la transformada de Fourier de la ecuación [46], ¿es posible obtener la transformada de Fourier de *cualquier* $f(t)$ elegida de manera arbitraria? La respuesta es afirmativa para casi cualquier tensión o corriente que sea factible producir. Una condición suficiente de la existencia de $\mathbf{F}(j\omega)$ es que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Sin embargo, esta condición no es *necesaria*, debido a que algunas funciones que no la cumplen siguen teniendo una transformada de Fourier; la función de escalón es un ejemplo de lo anterior. Además, se verá después que $f(t)$ incluso no necesita ser no periódica para tener transformada de Fourier; la representación en serie de Fourier de una función periódica de tiempo es sólo un caso especial de la representación más general de la transformada de Fourier.

Como ya indicamos, la relación del par de transformadas de Fourier es única. Para una $f(t)$ dada hay una $\mathbf{F}(j\omega)$ específica, y para una $\mathbf{F}(j\omega)$ hay una $f(t)$ específica.

EJEMPLO 18.5

Aplique la transformada de Fourier para obtener el espectro continuo del pulso rectangular sencillo que se muestra en la figura 18.13*a*.

El pulso es una versión truncada de la secuencia que se consideró anteriormente en la figura 18.11, y puede describirse como

$$f(t) = \begin{cases} V_0 & t_0 < t < t_0 + \tau \\ 0 & t < t_0 \text{ y } t > t_0 + \tau \end{cases}$$

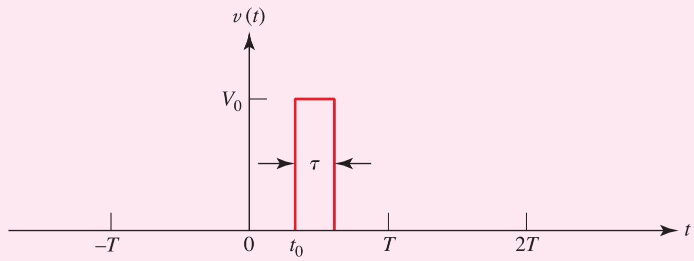
La transformada de Fourier de $f(t)$ se determina a partir de la ecuación [46*a*]:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} V_0 e^{-j\omega t} dt$$

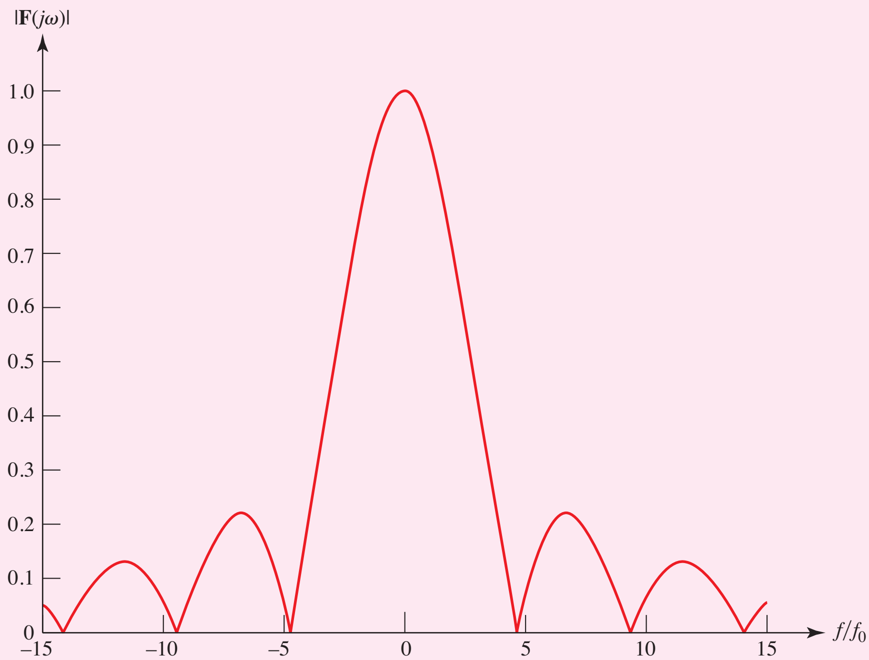
(*continúa*)

y se integraría y simplificaría con facilidad:

$$\mathbf{F}(j\omega) = V_0\tau \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega\tau}{\frac{1}{2}\omega\tau} e^{-j\omega(t_0+\tau/2)}$$



(*a*)



(*b*)

FIGURA 18.13 (*a*) Pulso rectangular único idéntico a los de la secuencia de la figura 18.11. (*b*) Gráfica de $|\mathbf{F}(j\omega)|$ correspondiente al pulso con $V_0 = 1$, $\tau = 1$ y $t_0 = 0$. El eje de la frecuencia se ha normalizado al valor de $f_0 = 1/1.5\pi$ correspondiente a la figura 18.12*a* para facilitar la comparación; obsérvese que f_0 no tiene significado o relevancia en el contexto de $\mathbf{F}(j\omega)$.

La magnitud de $\mathbf{F}(j\omega)$ tiene como resultado el espectro de frecuencia continuo, y evidentemente es de la forma de la función de muestreo. El valor de $\mathbf{F}(0)$ es $V_0\tau$. La forma del espectro resulta idéntica a la envolvente de la figura 18.12*b*. Una gráfica de $|\mathbf{F}(j\omega)|$ como función de ω *no* indica la magnitud de la tensión presente en cualquier frecuencia dada. Entonces, ¿cuál es? El examen de la ecuación [45] muestra que si $f(t)$ es una forma de onda de tensión, entonces las dimensiones de $\mathbf{F}(j\omega)$ son "volts por unidad de frecuencia", un concepto que se presentó en la sección 15.1.

PRÁCTICA

18.8 Si $f(t) = -10$ V, para $-0.2 < t < -0.1$s, $f(t) = 10$ V, para $0.1 < t < 0.2$ s y $f(t) = 0$ para todas las demás t, calcule $\mathbf{F}(j\omega)$ para ω igual a (*a*) 0; (*b*) 10π rad/s; (*c*) -10π rad/s; (*d*) 15π rad/s; (*e*) -20π rad/s.
18.9 Si $\mathbf{F}(j\omega) = -10$ V/(rad/s) para $-4 < \omega < -2$ rad/s, $+$ 10 V/(rad/s) para $2 < \omega < 4$ rad/s, y 0 para las demás ω, determine el valor numérico de $f(t)$ en t igual a: (*a*) 10^{-4} s; (*b*) 10^{-2} s; (*c*) $\pi/4$ s; (d) $\pi/2$ s; (*e*) π s.

Respuestas: 18.8: 0; $j1.273$ V/(rad/s); $-j1.273$ V/(rad/s); $-j0.424$ V/(rad/s); 0.
18.9: $j1.9099 \times 10^{-3}$ V; $j0.1910$ V; $j4.05$ V; $-j4.05$ V; 0.

18.6 ALGUNAS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Nuestro objetivo en esta sección consiste en establecer varias de las propiedades matemáticas de la transformada de Fourier y, algo más importante, comprender su significado físico. Comenzamos utilizando la identidad de Euler para sustituir $e^{-j\omega t}$ en la ecuación [46*a*]:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{ sen } n\omega t\, dt \qquad [47]$$

Dado que $f(t)$, cos ωt y sen ωt son funciones reales de tiempo, ambas integrales de la ecuación [47] son funciones reales de ω. Por lo tanto, haciendo

$$\mathbf{F}(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |\mathbf{F}(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} \qquad [48]$$

tenemos

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt \qquad [49]$$

$$B(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{ sen }\omega t\, dt \qquad [50]$$

$$|\mathbf{F}(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \qquad [51]$$

y

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\frac{B(\omega)}{A(\omega)} \qquad [52]$$

Sustituyendo ω por $-\omega$ se demuestra que $A(\omega)$ y $|\mathbf{F}(j\omega)|$ son funciones pares de ω, en tanto que $B(\omega)$ y $\phi(\omega)$ son funciones impares de ω.

Ahora bien, si $f(t)$ es una función par de t, el integrando de la ecuación [50] es una función impar de t, por lo que los límites simétricos obligan a que $B(\omega)$ sea cero; de tal modo, si $f(t)$ es par, su transformada de Fourier $\mathbf{F}(j\omega)$ es una función real y par de ω, además, la función de fase $\phi(\omega)$ es cero o π para toda ω. Sin embargo, si $f(t)$ es una función impar de t, entonces $A(\omega) = 0$ y $\mathbf{F}(j\omega)$ son impares y una función imaginaria pura de ω; $\phi(\omega)$ es $\pm\pi/2$. Sin embargo, en general $\mathbf{F}(j\omega)$ es una función compleja de ω.

Por último, observamos que la sustitución de ω por $-\omega$ en la ecuación [47] forma el *conjugado* de $\mathbf{F}(j\omega)$. Por lo tanto,

$$\mathbf{F}(-j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = \mathbf{F}^*(j\omega)$$

y tenemos

$$\mathbf{F}(j\omega)\mathbf{F}(-j\omega) = \mathbf{F}(j\omega)\mathbf{F}^*(j\omega) = A^2(\omega) + B^2(\omega) = |\mathbf{F}(j\omega)|^2$$

Significado físico de la transformada de Fourier

Cuando conocemos estas propiedades matemáticas básicas de la transformada de Fourier, estamos listos para considerar su significado físico. Supongamos que $f(t)$ es la tensión o la corriente en la resistencia de 1 Ω, de modo que $f^2(t)$ es la potencia instantánea que entrega 1 Ω a la resistencia de $f(t)$. Si integramos esta potencia a lo largo del tiempo, obtenemos la energía total que suministra $f(t)$ a la resistencia de 1 Ω,

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt \qquad [53]$$

Recurriremos ahora a un pequeño artificio. Considerando al integrando en la ecuación [53] como $f(t)$ multiplicada por sí misma, sustituimos una de esas funciones mediante la ecuación [46*b*]:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\mathbf{F}(j\omega)\,d\omega\right]dt$$

Puesto que $f(t)$ no es una función de la variable de integración ω, podemos mover dentro de la integral entre corchetes y luego intercambiar el orden de integración:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}(j\omega)e^{j\omega t}f(t)\,dt\right]d\omega$$

A continuación, necesitamos que $\mathbf{F}(j\omega)$ esté fuera de la integral interna, lo que provoca que la integral se convierta en $\mathbf{F}(-j\omega)$:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}(j\omega)\mathbf{F}(-j\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathbf{F}(j\omega)|^2\,d\omega$$

Agrupando estos resultados, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathbf{F}(j\omega)|^2\,d\omega \qquad [54]$$

Marc Antoine Parseval-Deschenes fue más bien un desconocido matemático, geógrafo y ocasional poeta francés que publicó estos resultados en 1805, diecisiete años antes de que Fourier publicara su teorema.

La ecuación [54] es una expresión muy útil conocida como teorema de Parseval. Este teorema, junto con la ecuación [53], establece que la energía asociada con $f(t)$ se obtiene de una integración de cualquier t en el dominio del tiempo, o mediante $1/(2\pi)$ veces una integración sobre toda la frecuencia (en radianes) en el dominio de la frecuencia.

El teorema de Parseval permite una mejor comprensión e interpretación del significado de la transformada de Fourier. Considere una tension $v(t)$ con transformada de Fourier $\mathbf{F}_v(j\omega)$ y energía 1 Ω para $W_{1\Omega}$:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\,d\omega$$

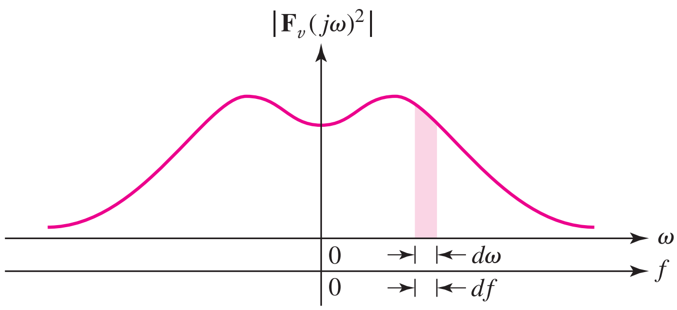


FIGURA 18.14 El área de la franja $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ es la energía correspondiente a una resistencia de 1 Ω asociada con $v(t)$ que se ubica en el ancho de banda df.

donde la igualdad que está más a la derecha se deduce del hecho de que $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ es una función par de ω. En ese caso, puesto que $\omega = 2\pi f$, expresamos:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, df = 2\int_{0}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, df \qquad [55]$$

La figura 18.14 ilustra una gráfica típica de $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ como una función tanto de ω como de f. Si dividimos la escala de frecuencia en incrementos df cada vez más pequeños, la ecuación [55] nos muestra que el área de la rebanada diferenciada bajo la curva $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$, con un ancho df, es $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, df$. Dicha área se muestra sombreada. La suma de todas estas áreas, cuando f varía desde menos hasta más infinito, es la energía total de 1 Ω contenida en $v(t)$. De tal manera, $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ es la (1 Ω) ***densidad de energía*** o energía por ancho de banda unitario (J/Hz), de $v(t)$, y tal densidad de energía siempre es una función real, par y no negativa de ω. Integrando $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ sobre un intervalo de frecuencia apropiada, podemos calcular esa porción de la energía total que se encuentra dentro del intervalo elegido. Observe que la densidad de energía no es una función de la fase de $\mathbf{F}_v(j\omega)$, por lo cual existe un número infinito de funciones de tiempo y de transformadas de Fourier que poseen funciones energía-densidad idénticas.



EJEMPLO 18.6

El pulso exponencial unilateral [es decir, $v(t) = 0$ de $t < 0$]

$$\mathbf{v(t) = 4e^{-3t}\, u(t) \qquad V}$$

se aplica a la entrada de un filtro pasabanda ideal. Si el filtro pasabanda se define mediante $1 < |f| < 2$ Hz, calcule la energía de salida total.

Podemos llamar $v_o(t)$ a la tensión de salida del filtro. La energía en $v_o(t)$ será, por lo tanto, igual a la energía de esa parte de $v(t)$ que tenga componentes de frecuencia en los intervalos $1 < f < 2$ y $-2 < f -1$. Determinamos la transformada de Fourier de $v(t)$,

$$\mathbf{F}_v(j\omega) = 4\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-3t} u(t)\, dt$$

$$= 4\int_{0}^{\infty} e^{-(3+j\omega)t} dt = \frac{4}{3+j\omega}$$

(continúa)

y luego podríamos calcular la energía de 1 Ω en la señal de entrada, ya sea mediante

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, d\omega$$
$$= \frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{16}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{8}{3}\text{ J}$$

o

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)\, dt = 16\int_{0}^{\infty} e^{-6t}\, dt = \frac{8}{3}\text{ J}$$

Sin embargo, la energía total en $v_o(t)$ es más pequeña:

$$W_{o1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-4\pi}^{-2\pi} \frac{16\, d\omega}{9+\omega^2} + \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{16\, d\omega}{9+\omega^2}$$
$$= \frac{16}{\pi}\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{16}{3\pi}\left(\tan^{-1}\frac{4\pi}{3} - \tan^{-1}\frac{2\pi}{3}\right) = 358\text{ mJ}$$

En general, vemos que un filtro pasabanda ideal permite eliminar la energía de intervalos de frecuencia prestablecidos, siempre y cuando se retenga la energía contenida en otros intervalos de frecuencia. La transformada de Fourier nos ayuda a describir en forma cuantitativa la acción de filtrado, sin evaluar en realidad $v_o(t)$, si bien veremos después que también se utiliza la transformada de Fourier para obtener la expresión relativa a $v_o(t)$ si deseamos hacerlo de esa manera.

PRÁCTICA

18.10 Si $i(t) = 10e^{20t}\,[u(t + 0.1) - u(t - 0.1)]$ A, encuentre: (*a*) $\mathbf{F}_i(j\,0)$; (*b*) $\mathbf{F}_i(j\,10)$; (*c*) $A_i\,(10)$; (*d*) $B_i\,(10)$; (*e*) $\phi_i\,(10)$.

18.11 Encuentre la energía de 1 Ω asociada con la corriente $i(t) = 20e^{-10t}\,u(t)$ A en el intervalo: (*a*) $-0.1 < t < 0.1$ s; (*b*) $-10 < \omega < 10$ rad/s; (*c*) $10 < \omega < \infty$ rad/s.

Respuestas: 18.10: 3.63 A/(rad/s); $3.33\underline{/-31.7°}$. A/(rad/s); 2.83 A/(rad/s); −1.749 A/(rad/s); −31.7°. 18.11; 17.29 J; 10 J; 5 J.

18.7 PARES DE TRANSFORMADAS DE FOURIER DE ALGUNAS FUNCIONES DEL TIEMPO SIMPLES

Función impulso unitario

Buscaremos ahora la transformada de Fourier del impulso unitario $\delta(t - t_0)$, una función que se presentó en la sección 14.4. Esto es, nos interesan las propiedades espectrales o la descripción en el dominio de la frecuencia de la singularidad de esta función. Si utilizamos la notación $\mathcal{F}\{\}$ para simbolizar la "transformada de Fourier de {}", entonces:

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\,\delta(t - t_0)\, dt$$

De acuerdo con el análisis anterior de este tipo de integral, tenemos

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} = \cos \omega t_0 - j \operatorname{sen} \omega t_0$$

Esta función compleja de ω conduce a la función de densidad de energía de 1 Ω,

$$|\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\}|^2 = \cos^2 \omega t_0 + \operatorname{sen}^2 \omega t_0 = 1$$

Este notable resultado indica que la energía (1 Ω) por ancho de banda unitario es la unidad en *todas las frecuencias* y que la energía total en el impulso unitario es infinitamente grande. No es de sorprenderse, entonces, que se deba concluir que el impulso unitario es "impráctico", en el sentido de que no puede generarse en el laboratorio. Además, incluso si pudieramos disponer de uno de ellos, podría aparecer distorsionado después de someterse a un ancho de banda finito de cualquier instrumento de laboratorio de prueba.

Dado que existe una correspondencia única unívoca entre una función de tiempo y su transformada de Fourier, afirmamos que la transformada inversa de Fourier de $e^{-j\omega t_0}$ es $\delta(t - t_0)$. Mediante el símbolo $\mathcal{F}^{-1}\{\}$ de la transformada inversa, tenemos

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\omega t_0}\} = \delta(t - t_0)$$

De tal modo, ahora sabemos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} e^{-j\omega t_0} d\omega = \delta(t - t_0)$$

aun cuando fracasáramos en el intento de evaluar en forma directa esta integral impropia. De manera simbólica, deberíamos escribir

$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0} \qquad [56]$$

donde $\Leftrightarrow$ indica que las dos funciones constituyen un par de transformadas de Fourier.

Continuando con el análisis de la función impulso unitario, consideremos la transformada de Fourier en esa forma:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$$

la cual es un impulso unitario *en el dominio de la frecuencia* localizado en $\omega = \omega_0$. Entonces $f(t)$ debe ser

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\delta(\omega - \omega_0)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

donde utilizamos la propiedad de filtrado del impulso unitario. De esta manera, ahora deberíamos escribir

$$\frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow \delta(\omega - \omega_0)$$

o

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \qquad [57]$$

Además, mediante un simple cambio de signo, obtenemos

$$e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \qquad [58]$$

Claramente, la función del tiempo es compleja en las dos expresiones, [57] y [58], y no existe en el mundo real del laboratorio.

Sin embargo, sabemos que

$$\cos \omega_0 t = \tfrac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

y se observa de inmediato, a partir de la definición de la transformada de Fourier, que

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} + \mathcal{F}\{f_2(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t) + f_2(t)\} \qquad [59]$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} &= \mathcal{F}\left\{\tfrac{1}{2}e^{j\omega_0 t}\right\} + \mathcal{F}\left\{\tfrac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right\} \\ &= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)\end{aligned}$$

lo cual indica que la descripción en el dominio de la frecuencia de cos $\omega_0 t$ muestra un *par* de impulsos, ubicados en $\omega = \pm\omega_0$. Lo anterior no sería una gran sorpresa, ya que en el primer análisis de la frecuencia compleja en el capítulo 14 advertimos que una función senoidal del tiempo siempre se representaba mediante un par de frecuencias imaginarias localizadas en $\mathbf{s} = \pm j\omega_0$. Por lo tanto, tenemos

$$\cos \omega_0 t \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \qquad [60]$$

Función forzada constante

Para determinar la transformada de Fourier de una función constante del tiempo, $f(t) = K$, el primer impulso podría sustituir esta constante en la ecuación de definición de la transformada de Fourier y evaluar la integral resultante. Si lo hiciéramos encontraríamos una expresión indeterminada. Sin embargo, por fortuna ya resolvimos este problema, pues de acuerdo con la expresión [58],

$$e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

Observamos que si sólo dejamos $\omega_0 = 0$, entonces el par de transformadas resultante es

$$1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \qquad [61]$$

de lo cual se concluye que

$$K \Leftrightarrow 2\pi K\delta(\omega) \qquad [62]$$

y nuestro problema se encuentra resuelto. El espectro de frecuencia de una función constante de tiempo consiste sólo en una componente correspondiente a $\omega = 0$, lo cual ya se sabía.

Función signo

Como otro ejemplo, obtengamos la transformada de Fourier de una función singular conocida como ***función signo***, sgn(t), definida por:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \qquad [63]$$

o

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

También en este caso, si intentáramos sustituir esta función del tiempo en la ecuación de definición de la transformada de Fourier, nos enfrentaríamos a una expresión inde-

terminada, luego de la sustitución de los límites de integración. El mismo problema surgirá cada vez que intentemos obtener la transformada de Fourier de una función de tiempo, que no tiende a cero cuando $|t|$ tiende al infinito. Afortunadamente, esta situación se evita utilizando la *transformada de Laplace*, pues contiene un factor de convergencia incluido que reduce muchos de los inconvenientes asociados con la evaluación de ciertas transformadas de Fourier.

A lo largo de aquellas líneas, la función signo que se está considerando puede escribirse como

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a\to 0}[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]$$

Observe que la expresión dentro de los corchetes *tiende* a cero cuando $|t|$ se vuelve muy grande. Mediante la definición de la transformada de Fourier, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} &= \lim_{a\to 0}\left[\int_0^{\infty} e^{-j\omega t}e^{-at}dt - \int_{-\infty}^{0} e^{-j\omega t}e^{at}dt\right] \\ &= \lim_{a\to 0}\frac{-j2\omega}{\omega^2 + a^2} = \frac{2}{j\omega}\end{aligned}$$

La componente real es cero, dado que sgn(t) es una función impar de t. Por lo tanto

$$\text{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \qquad [64]$$

Función escalón unitario

Como un ejemplo final de esta sección, examinaremos la familiar función escalón unitario, $u(t)$. Con base en la presentación hecha sobre la función signo en los párrafos precedentes, representamos el escalón unitario mediante

$$u(t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\text{sgn}(t)$$

EJEMPLO 18.7

Utilice la tabla 18.2 para encontrar la transformada de Fourier de la función de tiempo $3e^{-t}\cos 4t\, u(t)$.

De la penúltima entrada de la tabla, sabemos que

$$e^{-\alpha t}\cos\omega_d t u(t) \Leftrightarrow \frac{\alpha + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_d^2}$$

Por lo tanto, identificamos a α como 1 y ω_d como 4 y tenemos

$$\mathbf{F}(j\omega) = (3)\frac{1 + j\omega}{(1 + j\omega)^2 + 16}$$

PRÁCTICA

18.12 Calcule la transformada de Fourier en $\omega = 12$ para la función de tiempo: (*a*) $4u(t) - 10\delta(t)$; (*b*) $5e^{-8t}u(t)$; (*c*) $4\cos 8tu(t)$; (*d*) $-4\,\text{sgn}(t)$.
18.13 Encuentre $f(t)$ en $t = 2$ si $\mathbf{F}(j\omega)$ es igual a: (*a*) $5e^{-j3t\omega} - j(4/\omega)$; (*b*) $8[\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)]$; (*c*) $(8/\omega)$ sen 5ω.

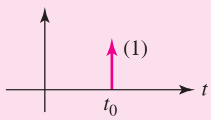
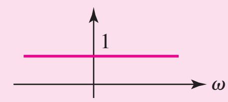
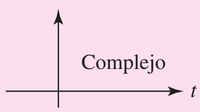
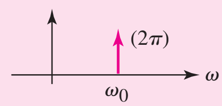
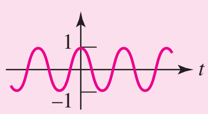
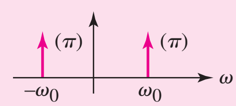
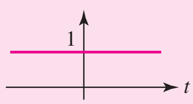
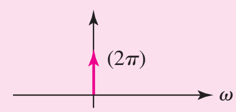
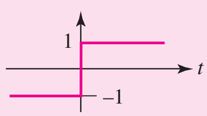
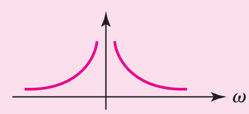
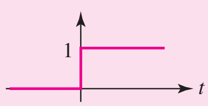
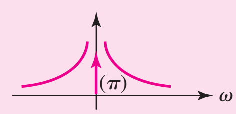
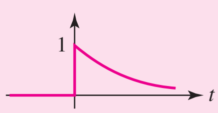
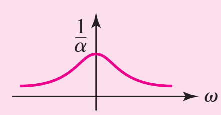
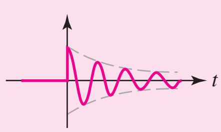
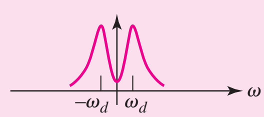
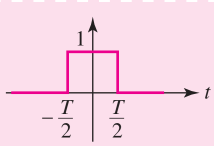
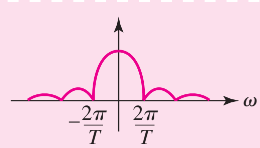
Respuestas: 18.12: $10.01\underline{/-178.1°}$; $0.347\underline{/-56.3°}$; $-j\,0.6$; $j\,0.667$. 18.13: 2.00; 2.45; 4.00.

y se obtiene el par de transformadas de Fourier

$$u(t) \Leftrightarrow \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] \qquad [65]$$

La tabla 18.2 presenta las conclusiones extraídas de los ejemplos explicados en esta sección, junto con unos cuantos más que no se han detallado aquí.

TABLA 18.2 Resumen de los pares de transformadas de Fourier

f(t)	***f(t)***	$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathbf{F}(j\omega)$	$\lvert\mathbf{F}(j\omega)\rvert$
	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	
	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	
	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$	
	1	$2\pi\delta(\omega)$	
	$\mathrm{sgn}(t)$	$\dfrac{2}{j\omega}$	
	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}$	
	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\dfrac{1}{\alpha + j\omega}$	
	$[e^{-\alpha t}\cos\omega_d t]u(t)$	$\dfrac{\alpha + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_d^2}$	
	$u(t + \frac{1}{2}T) - u(t - \frac{1}{2}T)$	$T\dfrac{\mathrm{sen}\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$	

18.8 TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN DEL TIEMPO PERIÓDICA GENERAL

En la sección 18.5 subrayamos que podríamos demostrar que las funciones de tiempo periódicas, al igual que las no periódicas, poseen transformadas de Fourier. Estableceremos ahora este hecho sobre una base rigurosa. Considérese una función de tiempo periódica $f(t)$ con periodo T y su desarrollo en serie de Fourier, tal como se describe mediante las ecuaciones [39], [40] y [41], repetidas aquí por conveniencia:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \qquad [39]$$

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \qquad [40]$$

y

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad [41]$$

Si se conoce que la transformada de Fourier de una suma es exactamente la suma de las transformadas de los términos contenidos en la suma y que $\mathbf{c}_n$ no es una función del tiempo, expresamos

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}$$

Luego de obtener la transformada de $e^{j\omega_0 t}$ de la expresión [57], tenemos

$$f(t) \Leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \delta(\omega - n\omega_0) \qquad [66]$$

Lo anterior muestra que $f(t)$ tiene un espectro discreto con impulsos ubicados en puntos sobre el eje ω dados por $\omega = n\omega_0$, $n = \ldots, -2, -1. 0, 1, \ldots$ La intensidad de cada impulso es 2π veces el valor del coeficiente de Fourier correspondiente, que aparece en la forma compleja del desarrollo en serie de Fourier para $f(t)$.

Para verificar este trabajo, veamos si la transformada inversa de Fourier del lado derecho de la expresión [66] es también, en este caso, $f(t)$. La transformada inversa se escribe como

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\left[2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \delta(\omega - n\omega_0)\right] d\omega \stackrel{?}{=} f(t)$$

Dado que el término exponencial no contiene el índice n de la sumatoria, intercambiamos el orden de integración y las operaciones de la sumatoria:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{j\omega t} \delta(\omega - n\omega_0)\, d\omega \stackrel{?}{=} f(t)$$

Debido a que no es una función de la variable de integración, se considera a $\mathbf{c}_n$ como una constante. En ese caso, utilizando la propiedad de filtrado del impulso, obtenemos

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \stackrel{?}{=} f(t)$$

que es exactamente igual a la ecuación [39], el desarrollo de la serie de Fourier en forma compleja de $f(t)$. Ahora se eliminan los signos de interrogación de las ecuaciones anteriores y se establece la existencia de la transformada de Fourier para una función del tiempo periódica. Sin embargo, lo anterior no debe producir una gran sorpresa. En la última sección evaluamos la transformada de Fourier de una función coseno, que es en realidad periódica, si bien no hicimos una referencia directa a su periodicidad. Sin embargo, recurrimos a un procedimiento inverso al obtener la transformada. Pero ahora tenemos una herramienta matemática con la que obtenemos la transformada de manera más directa. Para demostrar dicho procedimiento, considérese $f(t) = \cos \omega_0 t$ una vez más. Primero evaluamos los coeficientes de Fourier $\mathbf{c}_n$:

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_0 t e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = \pm 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

así,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

La expresión tiene valores que son distintos de cero sólo cuando $n = \pm 1$, por lo tanto, se concluye que toda la sumatoria se reduce a

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

que es precisamente la expresión que obtuvimos antes. ¡Qué alivio!

PRÁCTICA

18.14 Determine: (*a*) $\mathcal{F}\{5 \text{ sen}^2 3t\}$; (*b*) $\mathcal{F}\{A \text{ sen } \omega_0 t\}$; (*c*) $\mathcal{F}\{6 \cos(8t + 01\pi)\}$.

Respuestas: $2.5\,\pi\,[2\delta(\omega) - \delta(\omega + 6) - \delta(\omega - 6)]$; $j\pi A[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$; $[18.85\underline{/-18^\circ}]\,\delta(\omega - 8) + [18.85\underline{/-18^\circ}]\delta(\omega + 8)$.

18.9 FUNCIÓN DEL SISTEMA Y RESPUESTA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

En la sección 15.5, el problema de determinar la salida de un sistema físico en términos de la entrada y la respuesta al impulso se resolvió mediante la integral de convolución y al trabajar primero en el dominio del tiempo. La entrada, la salida y la respuesta al impulso son funciones del tiempo. Subsecuentemente, descubrimos que resultaba más conveniente llevar a cabo estas operaciones en el dominio de la frecuencia, pues la transformada de Laplace de la convolución de dos funciones es sólo el producto de cada función en el dominio de la frecuencia. Siguiendo las mismas líneas, descubrimos que lo mismo es cierto cuando se trabaja con las transformadas de Fourier.

Para aplicar este procedimiento, examinamos la transformada de Fourier de la salida del sistema. Suponiendo de manera arbitraria que la entrada y la salida son tensiones,

aplicamos la definición básica de la transformada de Fourier y expresamos la salida mediante la integral de convolución:

$$\mathcal{F}\{v_0(t)\} = \mathbf{F}_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} v_i(t-z)h(z)\,dz\right]dt$$

donde de nuevo suponemos que no se almacena energía inicial. A primera vista, tal expresión parece bastante temible, pero se reduce a un resultado que es sorpresivamente simple. Podemos mover el término exponencial dentro de la integral interna, pues no contiene a la variable de integración z. Luego invertimos el orden de integración y obtenemos

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} v_i(t-z)h(z)\,dt\right]dz$$

Puesto que no es una función de t, extraemos $h(z)$ de la integral interior y simplificamos la integración con respecto a t mediante un cambio de variable, $t - z = x$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_0(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(z)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(x+z)} v_i(x)\,dx\right]dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z}h(z)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} v_i(x)\,dx\right]dz\end{aligned}$$

Sin embargo, la suma está empezando ahora a abrirse paso, pues la integral interna es nada más la transformada de Fourier de $v_i(t)$. Además, no contiene términos z y se considera como una constante en cualquier integración que implique a z. Así, podemos mover esta transformada, $\mathbf{F}_t\,(j\omega)$, por completo fuera de los signos de integración:

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \mathbf{F}_i(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z}h(z)\,dz$$

Por fin, la última integral representa de nuevo a la vieja conocida, ¡otra transformada de Fourier!: la transformada de Fourier de la respuesta al impulso, que se designará mediante la notación $\mathbf{H}(j\omega)$. Por lo tanto, todo nuestro trabajo se reduce a un simple resultado:

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \mathbf{F}_i(j\omega)\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{F}_i(j\omega)\mathcal{F}\{h(t)\}$$

Éste es otro resultado importante: define la *función del sistema* $\mathbf{H}(j\omega)$ como la proporción entre la transformada de Fourier de la función de respuesta y la transformada de Fourier de la función forzada. Además, la función del sistema y la respuesta al impulso constituyen un par de transformadas de Fourier:

$$h(t) \Leftrightarrow \mathbf{H}(j\omega) \qquad [67]$$

El desarrollo que se realizó en los párrafos anteriores sirve también para confirmar el enunciado general de que la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones de tiempo es igual al producto de sus transformadas de Fourier,

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \mathbf{F}_f(j\omega)\mathbf{F}_g(j\omega)} \qquad [68]$$

Los comentarios anteriores podrán hacer surgir la pregunta, una vez más, respecto de las razones por las cuales elegimos trabajar siempre en el dominio del tiempo, aunque

Para recapitular, si conocemos las transformadas de Fourier de la función forzada y de la respuesta al impulso, la transformada de Fourier de la función de respuesta se obtiene como su producto. El resultado es una descripción de la función de respuesta en el dominio de la frecuencia; la descripción en el dominio del tiempo de esta función se logra tomando simplemente la transformada inversa de Fourier. De ese modo vemos que el proceso de la convolución en el dominio del tiempo equivale a la más o menos simple operación de multiplicación en el dominio de la frecuencia.

se debe recordar también, siempre, que rara vez obtenemos algo a cambio de nada. Un poeta dijo una vez: *"Nuestra más sincera risa/la cargamos con un poco de dolor."*[2] En este caso, el dolor es provocado por la dificultad ocasional de obtener la transformada inversa de Fourier de una función de respuesta, debido a razones de complejidad matemática. Por otra parte, una sencilla computadora puede convolucionar dos funciones del tiempo con magnífica velocidad. Respecto de ello, también se obtiene una TRF (transformada rápida de Fourier) con bastante rapidez. En consecuencia, no hay una ventaja clara entre trabajar en el dominio del tiempo y hacerlo en el dominio de la frecuencia. Debemos tomar una decisión cada vez que surge un nuevo problema, y ella debe basarse en la información disponible y en las facilidades de cómputo que se tengan a mano.

Considere una función forzada de la forma

$$v_i(t) = u(t) - u(t-1)$$

y una respuesta al impulso unitario definida por

$$h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

Primero obtenemos las transformadas de Fourier correspondientes. La función forzada es la diferencia entre dos funciones de escalón unitario. Ambas funciones son idénticas, excepto en que una se inicia 1 s después de la otra. Evaluaremos la respuesta debida a $u(t)$; la respuesta debida a $u(t-1)$ es la misma, aunque retrasada 1 s en el tiempo. La diferencia entre las dos respuestas parciales será la respuesta total debida a $v_i(t)$.

La transformada de Fourier de $u(t)$ se obtuvo en la sección 18.7:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

La función del sistema se obtiene tomando la transformada de Fourier de $h(t)$, que se presenta en la tabla 18.2:

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = \mathbf{H}(j\omega) = \mathcal{F}\{2e^{-t}u(t)\} = \frac{2}{1+j\omega}$$

La transformada inversa del producto de estas dos funciones da como resultado esa componente de $v_o(t)$ causada por $u(t)$,

$$v_{o1}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi\delta(\omega)}{1+j\omega} + \frac{2}{j\omega(1+j\omega)}\right\}$$

Al utilizar la propiedad de filtrado del impulso unitario, la transformada inversa del primer término es una constante exactamente igual a la unidad. De tal modo,

$$v_{o1}(t) = 1 + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega(1+j\omega)}\right\}$$

El segundo término contiene un producto de términos en el denominador, cada uno de la forma $(\alpha + j\omega)$; además, su transformada inversa se determina con mayor facilidad recurriendo a la expansión en fracciones parciales que desarrollamos en la sección

[2] P.B. Shelley, "To a Skylark", 1821.

14.5. Debemos seleccionar una técnica para obtener un desarrollo en fracciones parciales, que tenga una gran ventaja, que funcionará siempre, aunque suelen disponerse métodos más rápidos para la mayor parte de las situaciones. Asignamos una cantidad desconocida en el numerador de cada fracción, en este caso dos cantidades,

$$\frac{2}{j\omega(1+j\omega)} = \frac{A}{j\omega} + \frac{B}{1+j\omega}$$

y luego sustituimos un número correspondiente de valores simples de $j\omega$. Aquí, sea $j\omega = 1$:

$$1 = A + \frac{B}{2}$$

y luego sea $j\omega = -2$:

$$1 = -\frac{A}{2} - B$$

Esto lleva a $A = 2$ y $B = -2$. De tal modo que

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega(1+j\omega)}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega} - \frac{2}{1+j\omega}\right\} = \operatorname{sgn}(t) - 2e^{-t}u(t)$$

por lo que

$$\begin{aligned} v_{o1}(t) &= 1 + \operatorname{sgn}(t) - 2e^{-t}u(t) \\ &= 2u(t) - 2e^{-t}u(t) \\ &= 2(1 - e^{-t})u(t) \end{aligned}$$

Se concluye que $v_{o2}(t)$, la componente de $v_o(t)$ obtenida por $u(t-1)$, es

$$v_{o2}(t) = 2(1 - e^{-(t-1)})u(t-1)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v_o(t) &= v_{o1}(t) - v_{o2}(t) \\ &= 2(1 - e^{-t})u(t) - 2(1 - e^{-t+1})u(t-1) \end{aligned}$$

Las discontinuidades en $t = 0$ y $t = 1$ indican una separación en tres intervalos de tiempo:

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2(1 - e^{-t}) & 0 < t < 1 \\ 2(e-1)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

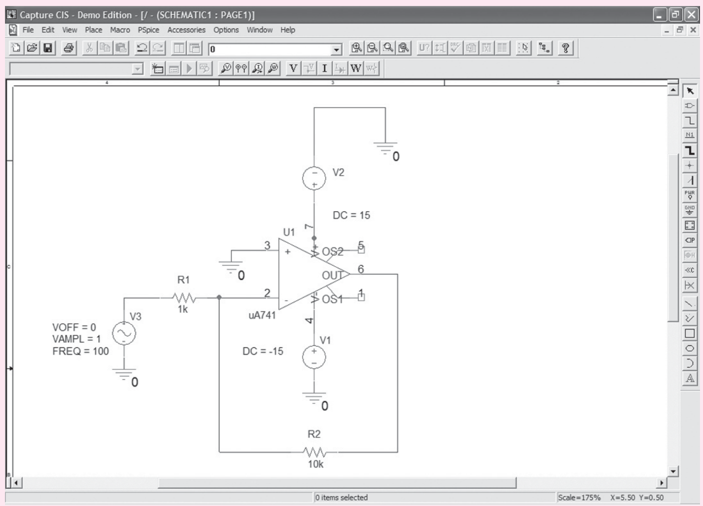
PRÁCTICA

18.15 La respuesta al impulso de cierta red lineal es $h(t) = 6e^{-20t}u(t)$. La señal de entrada corresponde a $3e^{-6t}u(t)$ V. Determine: (*a*) $\mathbf{H}(j\omega)$; (*b*) $\mathbf{V}_i(j\omega)$; (*c*) $\mathbf{V}_o(j\omega)$; (*d*) $v_o(0.1)$; (*e*) $v_o(0.3)$; (*f*) $v_{o,\text{máx}}$.

Respuestas: $6/(20 + j\omega)$; $3/(6 + j\omega)$; $18/[(20 + j\omega)(6 + j\omega)]$; 0.532 V; 0.209 V; 0.5372.

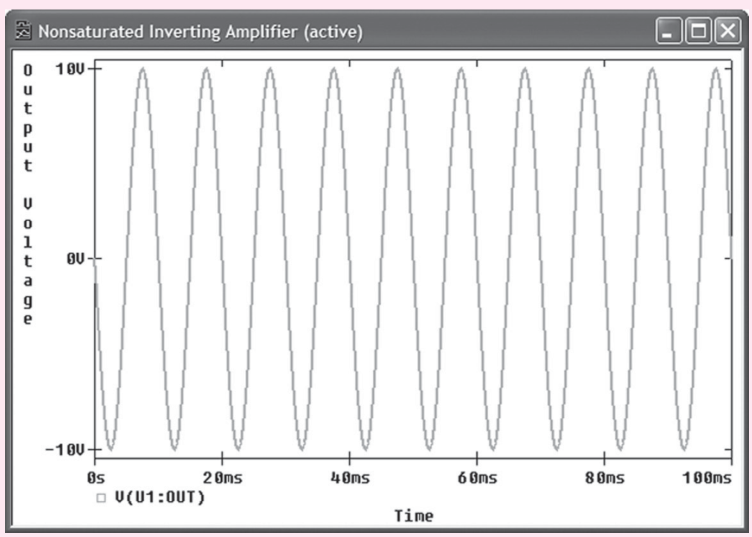
ANÁLISIS ASISTIDO POR COMPUTADORA

El material que se presenta en este capítulo constituye el cimiento de muchos campos de estudios avanzados, entre los que se incluyen el procesamiento de señales, las comunicaciones y los controles. Sólo podemos presentar algunos de los conceptos básicos dentro del contexto de un libro de circuitos introductorio, aunque incluso en este punto se aplica cierto grado del poder del análisis basado en Fourier. Como un primer ejemplo, considérese el circuito de amp op de la figura 18.15, construido en PSpice mediante un amplificador operacional μA741.



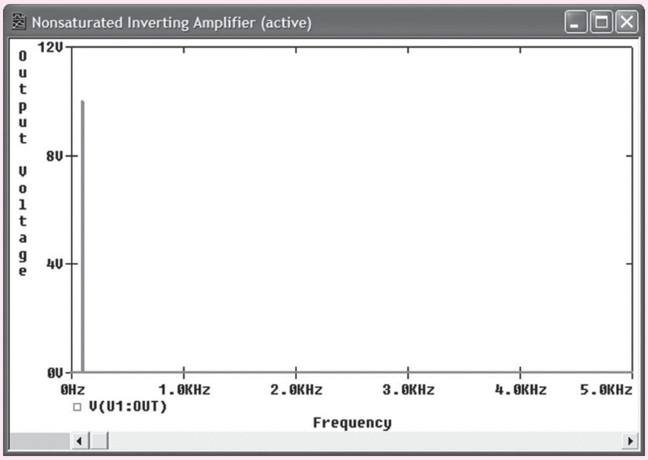
■ **FIGURA 18.15** Circuito amplificador inversor con una ganancia de tensión de −10, accionado por una entrada senoidal que opera a 100 Hz.

El circuito tiene una ganancia de tensión de −10, y por ello esperaríamos una salida senoidal con 10 V de amplitud. En realidad, esto es lo que obtenemos de un análisis transitorio del circuito, como se muestra en la figura 18.16.



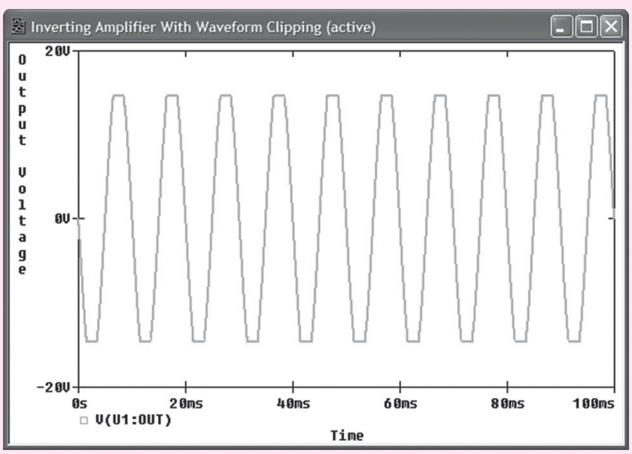
■ **FIGURA 18.16** Tensión de salida simulada del circuito amplificador que se muestra en la figura 18.15.

PSpice nos permite determinar el espectro de frecuencia de la tensión de salida, a través de lo que se conoce como la transformada rápida de Fourier (TRF), una aproximación en tiempo discreto a la transformada exacta de Fourier de la señal. A partir de Probe, seleccionamos **Fourier** bajo el menú **Trace**; el resultado se presenta en la figura 18.17. Como se esperaba, el espectro de línea de la tensión de salida de este circuito amplificador consiste en una sola señal a una frecuencia de 100 Hz.



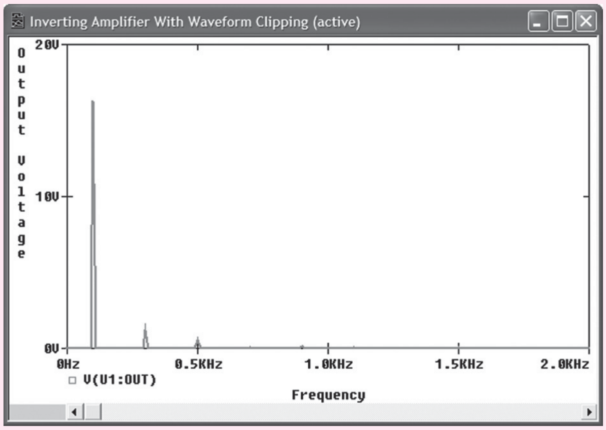
■ **FIGURA 18.17** Aproximación discreta de la transformada de Fourier de la figura 18.16.

A medida que aumenta la tensión de entrada, la salida del amplificador se aproxima a la condición de saturación determinada por las fuentes de tensión de cd positiva y negativa (±15 V en este ejemplo). Este comportamiento es evidente en el resultado de la simulación que se presenta en la figura 18.18, que corresponde a una magnitud de la tensión de entrada de 1.8 V. Una característica de interés fundamental es que la forma de onda de la tensión de salida ya no es una senoide pura. Como consecuencia, esperamos que aparezcan valores diferentes de

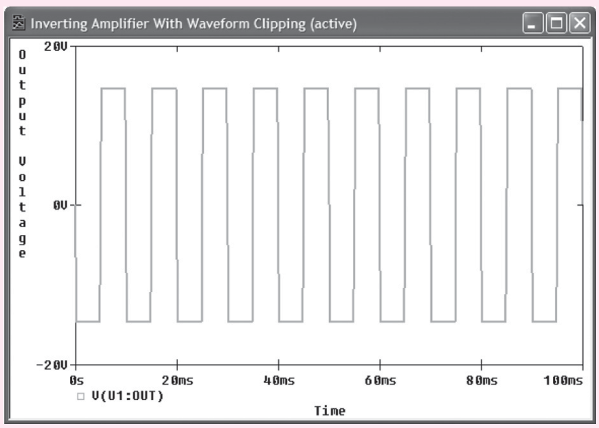


■ **FIGURA 18.18** Resultados de la simulación del análisis de transitorios para el circuito amplificador cuando se aumenta a 1.8 V la magnitud de la tensión de entrada. Los efectos de saturación se manifiestan en la gráfica como extremos recortados de la forma de onda.

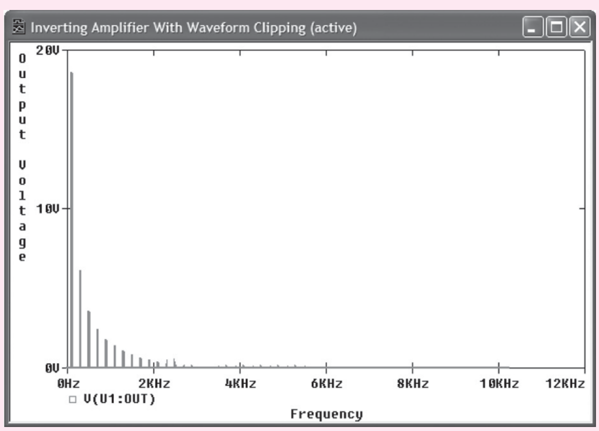
(*continúa*)



■ **FIGURA 18.19** Espectro de frecuencia de la forma de onda que aparece en la figura 18.18, que muestra la presencia de varias componentes armónicas además de la frecuencia fundamental. El ancho finito de las señales es un artefacto de la discretización numérica (se utilizó un conjunto de valores discretos de tiempo).



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 18.20** (*a*) Se pueden observar los efectos severos de la saturación del amplificador en la respuesta simulada a una entrada de 15 V. (*b*) La TRF de la forma de onda muestra un incremento significativo de la fracción de energía presente en las armónicas, contrariamente a la correspondiente de la frecuencia fundamental de 100 Hz.

cero en las frecuencias de las armónicas en el espectro de frecuencia de la función, como en el caso de la figura 18.19. El efecto de alcanzar el punto de saturación en el circuito amplificador representa una distorsión en la señal; si se conecta a la bocina, no se escuchará una forma de onda "limpia" de 100 Hz, sino que escucharemos una superposición de formas de onda que incluye no sólo la frecuencia fundamental de 100 Hz, sino también las componentes armónicas significativas a 300 y 500 Hz. La distorsión adicional de la forma de onda aumentará la cantidad de energía contenida en las frecuencias armónicas, por lo que se harán más significativas las contribuciones de las armónicas de más alta frecuencia. Lo anterior resulta evidente en los resultados de la simulación de las figuras 18.20*a* y *b*, los cuales muestran la tensión de salida en los dominios del tiempo y de la frecuencia, respectivamente.

18.10 SIGNIFICADO FÍSICO DE LA FUNCIÓN DEL SISTEMA

En esta sección se tratará de vincular varios aspectos de la transformada de Fourier con el trabajo que se realizó en los capítulos anteriores.

Dada una red lineal general de dos puertos N sin ningún almacenamiento de energía inicial, suponemos funciones con forzamiento y respuesta senoidales, dadas arbitrariamente como tensiones, según se muestra en la figura 18.21. Dejamos que la tensión de entrada sea sólo $A\cos(\omega_x t + \theta)$, y la salida puede describirse en términos generales como $v_o(t) = B\cos(\omega_x t + \phi)$, donde la amplitud B y el ángulo de fase ϕ son funciones de ω_x. En forma fasorial, expresamos las funciones forzada y de respuesta como $\mathbf{V}_i = Ae^{j\theta}$ y $\mathbf{V}_o = Be^{j\phi}$. La razón entre la respuesta fasorial y la función forzada fasorial es un número complejo que está en función de ω_x:

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \mathbf{G}(\omega_x) = \frac{B}{A}e^{j(\phi-\theta)}$$

donde B/A es la amplitud de $\mathbf{G}$ y $\phi - \theta$ es su ángulo de fase. Dicha función de transferencia $\mathbf{G}(\omega_x)$ podría obtenerse en el laboratorio variando ω_x sobre un gran intervalo de valores y midiendo la amplitud B/A y la fase $\phi - \theta$ para cada valor de ω_x. Si graficamos en esas condiciones cada uno de estos parámetros como una función de la frecuencia, el par de curvas resultantes describiría por completo la función de transferencia.

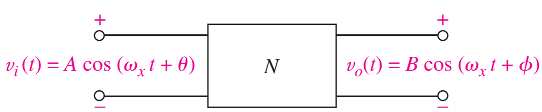


FIGURA 18.21 Se puede recurrir al análisis senoidal para determinar la función de transferencia $\mathbf{H}(j\omega_x) = (B/A)e^{j(\phi-\theta)}$ donde B y ϕ son funciones de ω_x.

Dejaremos por ahora estos comentarios lejos de nuestra mente, ya que examinaremos un aspecto diferente del mismo problema de análisis.

En el circuito con la entrada y la salida senoidal que se muestran en la figura 18.21, ¿cuál es la función $\mathbf{H}(j\omega)$ del sistema? Para responder esta pregunta, comenzamos con la definición de $\mathbf{H}(j\omega)$ como la proporción (o razón) de las transformadas de Fourier de la salida y la entrada. Ambas funciones incluyen la forma funcional $\cos(\omega_x t + \beta)$,

cuya transformada de Fourier aún no hemos evaluado, aunque podemos trabajar con $\cos \omega_x t$. La transformada que necesitamos es

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_x t + \beta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \cos(\omega_x t + \beta)\, dt$$

Si llevamos a cabo la sustitución $\omega_x t + \beta = \omega_x \tau$ entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos(\omega_x t + \beta)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau + j\omega\beta/\omega_x} \cos \omega_x \tau\, d\tau \\ &= e^{j\omega\beta/\omega_x} \mathcal{F}\{\cos \omega_x t\} \\ &= \pi e^{j\omega\beta/\omega_x} [\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)]\end{aligned}$$

lo cual es un nuevo par de transformadas de Fourier

$$\cos(\omega_x t + \beta) \Leftrightarrow \pi e^{j\omega\beta/\omega_x} [\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)] \qquad [69]$$

que utilizamos ahora para evaluar la función deseada del sistema:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(j\omega) &= \frac{\mathcal{F}\{B \cos(\omega_x t + \phi)\}}{\mathcal{F}\{A \cos(\omega_x t + \theta)\}} \\ &= \frac{\pi B e^{j\omega\phi/\omega_x} [\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)]}{\pi A e^{j\omega\theta/\omega_x} [\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)]} \\ &= \frac{B}{A} e^{j\omega(\phi - \theta)/\omega_x}\end{aligned}$$

Recordemos la expresión de $\mathbf{G}(\omega_x)$,

$$\mathbf{G}(\omega_x) = \frac{B}{A} e^{j(\phi - \theta)}$$

donde B y ϕ se evalúan en $\omega = \omega_x$; además observamos que al evaluar $\mathbf{H}(j\omega)$ en $\omega = \omega_x$ se obtiene

$$\mathbf{H}(\omega_x) = \mathbf{G}(\omega_x) = \frac{B}{A} e^{j(\phi - \theta)}$$

Puesto que no hay nada especial acerca del subíndice x, concluimos que la función del sistema y la función de transferencia son idénticas:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{G}(\omega) \qquad [70]$$

El hecho de que un argumento sea ω mientras que el otro se indica mediante $j\omega$ no tiene importancia y es arbitrario; la j sólo posibilita una comparación más directa entre las transformadas de Fourier y de Laplace.

La ecuación [70] representa una conexión directa entre las técnicas de la transformada de Fourier y el análisis del estado senoidal permanente. Nuestro trabajo previo de análisis del estado senoidal permanente mediante fasores fue más bien un caso especial de las técnicas más generales del análisis de la transformada de Fourier. Resultó "especial" en el sentido de que las entradas y las salidas eran senoides, en tanto que el uso de las transformadas de Fourier y las funciones del sistema permiten manejar funciones y respuestas forzadas no senoidales.

Por lo tanto, para determinar la función $\mathbf{H}(j\omega)$ del sistema relativa a una red, sólo se requiere determinar la función de transferencia senoidal correspondiente como una función de ω (o $j\omega$).

EJEMPLO 18.8

Determine la tensión en los extremos del inductor del circuito que se muestra en la figura 18.22*a* cuando la tensión de entrada es un pulso de decaimiento exponencial simple, como se indica.

Necesitamos la función del sistema, pero no es necesario aplicar un impulso; encuentre la respuesta de impulso y luego determine la transformada inversa. Mejor usaremos la ecuación [70] para obtener la función $\mathbf{H}(j\omega)$ del sistema, bajo el supuesto de que las tensiones de entrada y de salida son senoides descritas por sus fasores correspondientes, como se muestra en la figura 18.22*b*. Mediante la división de tensión, tenemos

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{j2\omega}{4 + j2\omega}$$

La transformada de la función forzada es:

$$\mathcal{F}\{v_i(t)\} = \frac{5}{3 + j\omega}$$

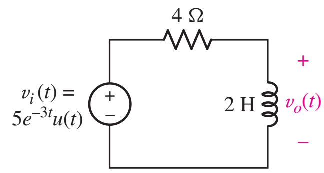
y por ello la transformada de $v_o(t)$ se indica como

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{v_o(t)\} &= \mathbf{H}(j\omega)\mathcal{F}\{v_i(t)\}\\ &= \frac{j2\omega}{4 + j2\omega}\frac{5}{3 + j\omega}\\ &= \frac{15}{3 + j\omega} - \frac{10}{2 + j\omega}\end{aligned}$$

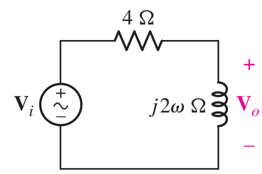
donde las fracciones parciales que aparecen en el último paso ayudan a determinar la transformada inversa de Fourier:

$$\begin{aligned}v_o(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{15}{3 + j\omega} - \frac{10}{2 + j\omega}\right\}\\ &= 15e^{-3t}u(t) - 10e^{-2t}u(t)\\ &= 5(3e^{-3t} - 2e^{-2t})u(t)\end{aligned}$$

Nuestro problema se resuelve sin molestias, convoluciones o ecuaciones diferenciales.



(*a*)

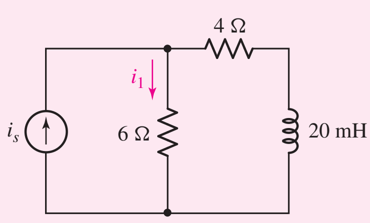


(*b*)

■ **FIGURA 18.22** (*a*) Se desea la respuesta $v_o(t)$ causada por $v_i(t)$. (*b*) La función $\mathbf{H}(j\omega)$ del sistema se determinaria mediante el análisis de estado permanente senoidal $\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$.

PRÁCTICA

18.16 Utilice las técnicas de la transformada de Fourier en el circuito de la figura 18.23 para determinar: $i_1(t)$ en $(t) = 1.5$ ms si i_s es igual a: (*a*) $\delta(t)$ A; (*b*) $u(t)$ A; (*c*) cos $500t$ A.



■ **FIGURA 18.23**

Respuestas: −141.7 A; 0.683 A; 0.308 A.

APLICACIÓN PRÁCTICA

Procesamiento de imágenes

A pesar del enorme progreso que se ha logrado en cuanto al desarrollo de una comprensión total de la función del músculo, aún existen muchas interrogantes. Se ha investigado mucho en este campo utilizando músculo esquelético de vertebrados, en particular con el *sartorius* o músculo de la pierna de la rana (figura 18.24).



FIGURA 18.24 Acercamiento de una rana contra un fondo anaranjado. *© IT Stock/PunchStock/RF.*

De la gran cantidad de técnicas analíticas que utilizan los científicos, una de las más importantes es la microscopía electrónica. La figura 18.25 muestra una micrografía

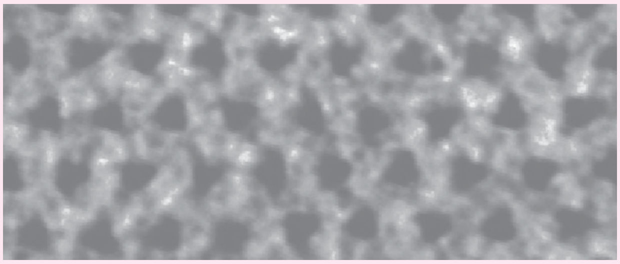


FIGURA 18.25 Micrografía electrónica de una región de tejido muscular de la rana sartorius. Se utilizó falso color a fin de tener una mayor claridad. *(Cortesía del profesor John M. Squire, Imperial College, Londres.)*

electrónica de tejido muscular de la rana sartorius, seccionado de tal manera que resalta el arreglo uniforme de *myosin*, una proteína contráctil de tipo filamentario. Es de gran interés para los biólogos estructurales la periodicidad y el desorden de estas proteínas en una gran área del tejido muscular. Con el fin de desarrollar un modelo para mostrar estas características, se prefiere utilizar un método numérico, mediante el cual se pueda automatizar el análisis de dichas imágenes. Sin embargo, como se puede observar en la figura, la imagen que genera el microscopio electrónico puede contaminarse por un ruido de fondo de alto nivel, lo que hace errática la identificación automática de los filamentos de myosin.

Presentadas con el objeto de ayudar en el análisis de circuitos lineales variantes en el tiempo, las técnicas basadas en Fourier de este capítulo son, en realidad, métodos generales muy poderosos que se aplican en muchas otras situaciones, entre las cuales el campo del *procesamiento de imágenes* hace un uso extensivo de las técnicas de Fourier, especialmente a través de la transformada rápida de Fourier (TRF) y métodos numéricos relacionados. La imagen de la figura 18.25 se puede describir mediante una función espacial $f(x, y)$ donde $f(x, y) = 0$ corresponde al blanco, $f(x, y) = 1$ corresponde al rojo y (x, y) describe una ubicación del pixel en la imagen. Definiendo una función de filtro $h(x, y)$ que tenga la apariencia de la figura 18.26*a*, la operación de convolución

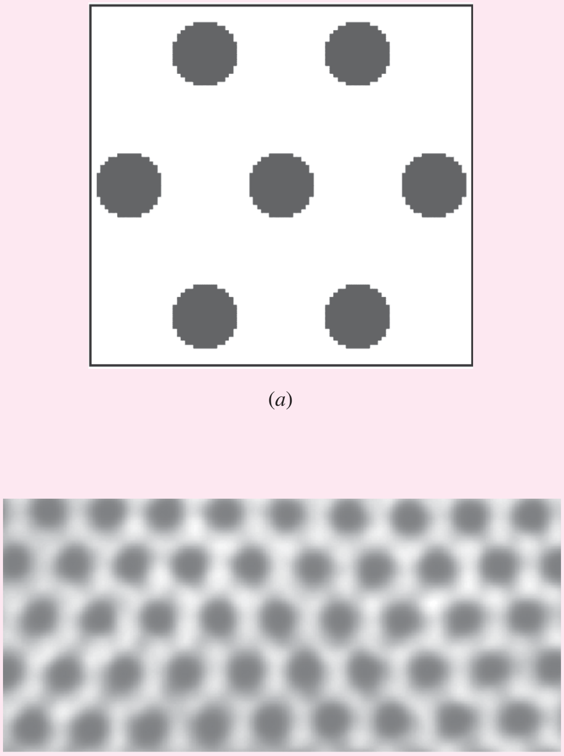
$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$$

da como resultado la imagen de la figura 18.26*b* en la que los filamentos de myosin (que se ven en el extremo) se pueden identificar de una manera más clara.

En la práctica, este procesamiento de análisis se lleva a cabo en el dominio de la frecuencia, donde se calcula la TRF

Epílogo

De regreso a la ecuación [70], la identidad entre la función $\mathbf{H}(j\omega)$ del sistema y la función de transferencia de estado senoidal permanente $\mathbf{G}(\omega)$, tal vez consideremos ahora la función del sistema como el cociente entre el fasor de salida y el fasor de entrada. Bajo el supuesto de que mantenemos la amplitud del fasor de entrada en la unidad y el ángulo de fase en cero, entonces el fasor de salida es $\mathbf{H}(j\omega)$. En estas condiciones, si registramos la amplitud y la fase de salida como funciones de ω, para toda ω, registramos la función $\mathbf{H}(j\omega)$ del sistema como una función de ω, para toda ω. De este modo, examinamos la respuesta del sistema bajo la condición de que un número infinito de senoides, todas con amplitud unitaria y fase cero, se aplicó en forma sucesiva en la entrada. Supóngase ahora que la entrada es un simple impulso unitario y considerando la respuesta al impulso $h(t)$. ¿La información que examinamos en la unidad se diferen-



(*a*)

(*b*)

FIGURA 18.26 (*a*) Filtro espacial con simetría hexagonal. (*b*) Imagen después de haber sido convolucionada y de habérsele aplicado la transformada inversa y discreta de Fourier, que muestra una reducción del ruido de fondo. *(Cortesía del profesor John M. Squire, Imperial College, Londres.)*

de f y h y las matrices resultantes se multiplican entre sí. La operación inversa de la TRF genera la imagen filtrada de la figura 18.26*b*. ¿Por qué esta convolución es igual a la operación de filtrado? El arreglo filamentario del myosin posee una simetría hexagonal, al igual que la función de filtrado $h(x, y)$ —lo cual indica que, de alguna manera, tanto el arreglo filamentario como la función de filtrado poseen las mismas frecuencias espaciales—. La convolución de f con h genera un reforzamiento del patrón hexagonal dentro de la imagen original y la remoción de pixeles de ruido (los cuales no poseen la simetría hexagonal). Lo anterior puede comprenderse de manera cualitativa si modelamos una fila horizontal de la figura 18.25, como una función senoidal $f(x) = \cos \omega_0 t$, que tiene la transformada de Fourier que se muestra en la figura 18.27*a* por un par acoplado de funciones impulso separadas una distancia de $2\omega_0$. Si convolucionamos esta función con la función de un filtro $h(x) = \cos \omega_1 t$, cuya transformada de Fourier se muestra en la figura 18.27*b*, obtenemos cero si $\omega_1 \neq \omega_0$; las frecuencias (periodicidades) de las dos funciones no coinciden. Si, en lugar de eso, seleccionamos una función de filtro con la misma frecuencia de $f(x)$, la convolución tendrá un valor diferente de cero en $\omega = \pm\omega_0$.

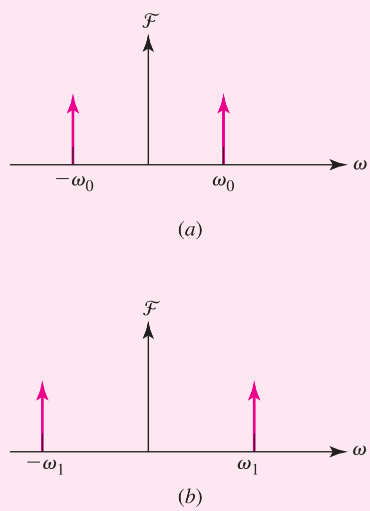


FIGURA 18.27 (*a*) Transformada de Fourier de $f(x) = \cos \omega_0 t$. (*b*) Transformada de Fourier de $h(x) = \cos \omega_1 t$.

cia en algo de la que acabamos de obtener? La transformada de Fourier del impulso unitario es una constante igual a la unidad, lo que indica que están presentes todas las componentes de frecuencia, con la misma magnitud y con fase cero. Nuestra respuesta del sistema es la suma de las respuestas de todas estas componentes. Nuestro resultado podría verse en la salida sobre un osciloscopio de rayos catódicos. Resulta evidente que la función del sistema y la función de respuesta al impulso contienen información equivalente en cuanto a la respuesta del sistema.

Por lo tanto, contamos con dos métodos distintos para describir la respuesta de un sistema a una función forzada general: uno es la descripción en el dominio del tiempo y el otro la descripción en el dominio de la frecuencia. Al trabajar en el dominio del tiempo, se convoluciona la función forzada con la respuesta al impulso del sistema para obtener la función de respuesta. Como vimos al considerar por primera vez la

convolución, este procedimiento se interpretaría considerando a la entrada como una serie de impulsos de intensidad y de tiempos de aplicación diferentes; la salida que resulta es una serie de respuestas al impulso.

Sin embargo, en el dominio de la frecuencia, determinamos la respuesta multiplicando la transformada de Fourier de la función forzada por la función del sistema. En este caso, interpretamos la transformada de la función forzada como un espectro de frecuencia o un continuo de senoides. Multiplicando lo anterior por la función del sistema obtenemos la función de respuesta, también como un conjunto continuo de senoides.

RESUMEN Y REPASO

Ya sea que optemos por considerar la salida como un continuo de respuestas al impulso o como un conjunto continuo de respuestas senoidales, la linealidad de la red y el principio de superposición nos permiten determinar la salida total como una función de tiempo, al sumar sobre todas las frecuencias (la transformada inversa de Fourier), o como una función de frecuencia al sumar sobre todos los tiempos (la transformada de Fourier).

Desafortunadamente, ambas técnicas tienen algunas dificultades o limitantes asociadas con su aplicación. Al utilizar la convolución, la integral misma, muchas veces, puede ser bastante difícil de evaluar cuando se presentan funciones forzadas o funciones de impulso complicadas. Además, desde el punto de vista experimental, en realidad no podemos medir la respuesta al impulso de un sistema, debido a que no podemos generar un impulso. Incluso si aproximamos el impulso mediante un impulso estrecho de elevada amplitud, tal vez llevaríamos al sistema a la saturación y fuera de su intervalo de operación lineal.

Con respecto al dominio de la frecuencia, encontramos una limitante absoluta en el sentido de que quizá se formulen fácilmente hipótesis relativas a las funciones forzadas que al lector le gustaría aplicar de manera teórica, pero que no poseen transformadas de Fourier. Además, si deseamos encontrar la descripción en el dominio del tiempo de la función de respuesta, es necesario evaluar una transformada inversa de Fourier, pero algunas de tales inversiones resultan demasiado complicadas.

Por último, ninguna de estas técnicas ofrece un método muy conveniente para manejar las condiciones iniciales. Para esto, la transformada de Laplace resulta muy superior.

El beneficio más grande que se deriva del uso de la transformada de Fourier surge debido a la abundancia de información útil que proporciona acerca de las propiedades espectrales de una señal, en particular de la energía o potencia por ancho de banda unitario. Parte de esta información se obtiene también con facilidad mediante la transformada de Laplace; debemos dejar un análisis detallado de los méritos relativos de cada una para cursos más avanzados de señales y sistemas.

Ahora bien, ¿por qué se expone todo esto ahora? La mejor respuesta tal vez resida en que estas poderosas técnicas pueden complicar mucho la solución de problemas simples y tender a oscurecer la interpretación física del desempeño de redes más simples. Por ejemplo, si sólo nos interesa la respuesta forzada, no tiene mucho caso utilizar la transformada de Laplace y obtener tanto la respuesta forzada como la natural, después de llevar a cabo una difícil operación de transformada inversa.

Ahora bien, podríamos continuar, pero todas las cosas buenas tienen que llegar a un final. Se desea al lector la mejor de las suertes en sus estudios futuros.

- Las frecuencias armónicas de una senoide con frecuencia fundamental ω_0 son $n\omega_0$, donde n es un entero. (Ejemplos 18.1, 18.2)
- El teorema de Fourier establece que dada una función $f(t)$ que satisface ciertas propiedades fundamentales, podría representarse por las series infinitas

$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{ sen } n\omega_0 t)$, donde $a_0 = (1/T) \int_0^T f(t)\,dt$. $a_n = (2/T) \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t\,dt$, y $b_n = (2/T) \int_0^T f(t) \text{ sen } n\omega_0 t\,dt$. (Ejemplo 18.1)

- Una función $f(t)$ posee simetría *par* si $f(t) = f(-t)$.
- Una función $f(t)$ tiene simetría *impar* si $f(t) = -f(-t)$.
- Una función $f(t)$ muestra simetría *de media onda* si $f(t) = -f(t - \frac{1}{2}T)$.
- La serie de Fourier de una función par está compuesta sólo por una constante y funciones coseno.
- La serie de Fourier de una función impar se forma sólo por una constante y funciones seno.
- La serie de Fourier de cualquier función que posee simetría de media onda contiene sólo armónicas impares.
- Se podría expresar también la serie de Fourier de una función en forma compleja o exponencial, donde $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t}$ y $\mathbf{c}_n = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t}\,dt$. (Ejemplos 18.3, 18.4)
- La transformada de Fourier permite representar funciones variables en el tiempo en el dominio de la frecuencia, de una manera similar a la de la transformada de Laplace. Las ecuaciones de definición son $\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t)\,dt$ y $f(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \mathbf{F}(j\omega)\,d\omega$. (Ejemplos 18.5, 18.6 y 18.7)
- El análisis con transformada de Fourier se puede implementar para analizar circuitos que contengan resistencias, inductores y/o capacitores de manera similar a lo que se hace usando transformadas de Laplace. (Ejemplo 18.8)

LECTURAS ADICIONALES

Un tratamiento muy ameno del análisis de Fourier puede encontrarse en

A. Pinkus y S. Zafrany, *Fourier Series and Integral Transforms*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Por último, para aquellos interesados en aprender más acerca de la investigación sobre músculos, incluyendo la microscopía electrónica de tejidos, se puede encontrar un excelente tratamiento en

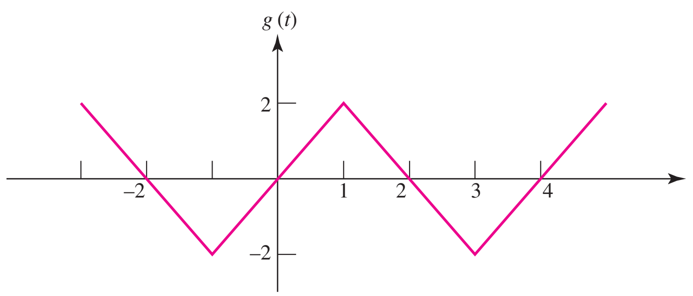
J. Squire, *The Structural Basis of Muscular Contraction*. Nueva York: Plenum Press, 1981.

EJERCICIOS

18.1 Forma trigonométrica de la serie de Fourier

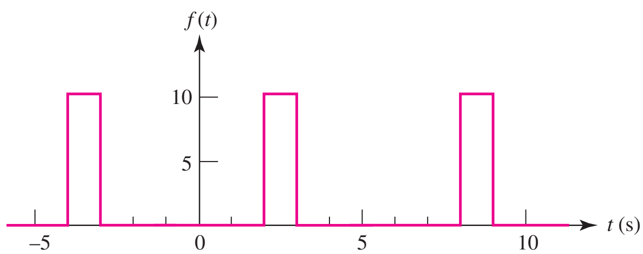
1. Determine la frecuencia fundamental, la frecuencia fundamental en radianes y el periodo de lo siguiente: (*a*) 5 sen 9*t*; (*b*) 200 cos 70*t*; (*c*) 4 sen($4t - 10°$); (*d*) 4 sen($4t + 10°$).
2. Grafique periodos múltiples de la primera, tercera y quinta armónicas, sobre la misma gráfica, de cada una de las siguientes formas de onda (se desean tres gráficas individuales en total): (*a*) 3 sen *t*; (*b*) 40 cos 100*t*; (*c*) 2 cos($10t - 90°$).
3. Calcule a_0 para lo siguiente: (*a*) 4 sen 4*t*; (*b*) 4 cos 4*t*; (*c*) 4 + cos 4*t*; (*d*) 4 cos($4t + 40°$).
4. Calcule a_0, a_1 y b_1 para las siguientes funciones: (*a*) 2 cos 3*t*; (*b*) 3 − cos 3*t*; (*c*) 4 sen($4t - 35°$).
5. (*a*) Calcule los coeficientes de Fourier a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 y b_3 para la función periódica $f(t) = 2u(t) - 2u(t + 1) + 2u(t + 2) - 2u(t + 3) + \cdots$. (*b*) Grafique $f(t)$ y la serie de Fourier truncada después de $n = 3$ durante 3 periodos.

6. (*a*) Calcule los coeficientes de Fourier a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3 y b_4 para la función periódica $g(t)$ parcialmente graficada en la figura 18.28. (*b*) Grafique $g(t)$ junto con la representación de la serie de Fourier truncada después de $n = 4$.



■ **FIGURA 18.28**

7. Para la forma de onda periódica $f(t)$ representada en la figura 18.29, calcule a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3.



■ **FIGURA 18.29**

8. Con referencia a la forma de onda periódica dibujada en la figura 18.29, suponga que $g_n(t)$ es la representación de la serie de Fourier de $f(t)$ truncada en n. [Por ejemplo, si $n = 1$, $g_1(t)$ tiene tres términos, definidos a través de a_0, a_1 y b_1.] (*a*) Grafique un esquema de $g_2(t)$, $g_3(t)$ y $g_5(t)$, junto con $f(t)$. (*b*) Calcule $f(2.5)$, $g_2(2.5)$, $g_3(2.5)$ y $g_5(2.5)$.
9. Respecto a la forma de onda periódica $g(t)$ dibujada en la figura 18.28, defina $y_n(t)$, como la representación de la serie Fourier truncada en n. (Por ejemplo, $y_2(t)$ tiene cinco términos, definidos a través de a_0, a_1, a_2, b_1 y b_2.) (*a*) Grafique un esquema de $y_3(t)$ y $y_5(t)$, junto con $g(t)$. Calcule $y_1(0.5)$, $y_2(0.5)$, $y_3(0.5)$ y $g(0.5)$.
10. Determine expresiones para a_n y b_n para $g(t - 1)$ si la forma de onda periódica $g(t)$ se define como se grafica en la figura 18.28.
11. Grafique el espectro de líneas (limitado a los seis términos mayores) para la forma de onda que se muestra en la figura 18.4*a*.
12. Grafique el espectro de líneas (limitado a los seis términos mayores) para la forma de onda de la figura 18.4*b*.
13. Grafique el espectro de líneas (limitado a los seis términos mayores) para la forma de onda representada por la gráfica de la figura 18.4*c*.

18.2 El uso de la simetría

14. Diga si lo siguiente muestra simetría impar, simetría par y/o simetría de media onda: (*a*) 4 sen $100t$; (*b*) 4 cos $100t$; (*c*) 4 cos$(4t + 70°)$; (*d*) 4 cos $100t + 4$; (*e*) cada forma de onda en la figura 18.4.
15. Determine si lo siguiente muestra simetría impar, simetría par y/o simetría de media onda: (*a*) la forma de onda en la figura 18.28; (*b*) $g(t - 1)$, si $g(t)$ está representada en la figura

18.28; (*c*) $g(t+1)$, si $g(t)$ está representada en la figura 18.28; (*d*) la forma de onda de la figura 18.29.

16. La forma de onda no periódica $g(t)$ se define en la figura 18.30. Úsela para crear una nueva función $y(t)$ tal que $y(t)$ sea idéntica a $g(t)$ dentro del intervalo $0 < t < 4$ y también se caracterice por un periodo $T = 8$ y tenga (*a*) simetría impar; (*b*) simetría par; (*c*) tanto simetría impar como simetría de media onda.

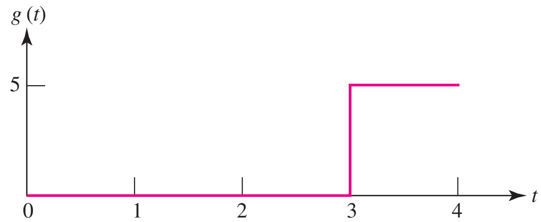


FIGURA 18.30

17. Calcule a_0, a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3 para la forma de onda periódica $v(t)$ representada en la figura 18.31.

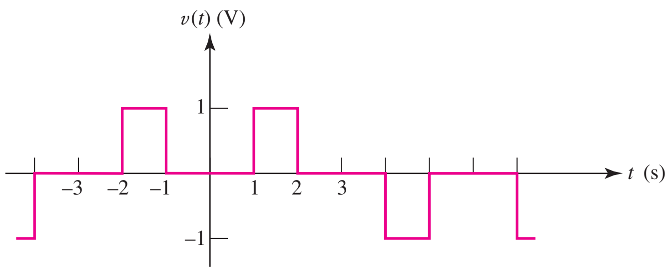


FIGURA 18.31

18. La forma de onda de la figura 18.31 se corre para crear una nueva forma de onda tal que $v_{nueva}(t) = v(t+1)$. Calcule a_0, a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3.

19. Diseñe una forma de onda triangular que tenga una magnitud pico de 3, un periodo de 2 s y se caracterice por (*a*) simetría de media onda y par; (*b*) simetría de media onda e impar.

20. Recurra lo más posible a la simetría para obtener valores numéricos correspondientes a a_0, a_n y b_n, $1 \leq n \leq 10$, para la forma de onda de la figura 18.32.

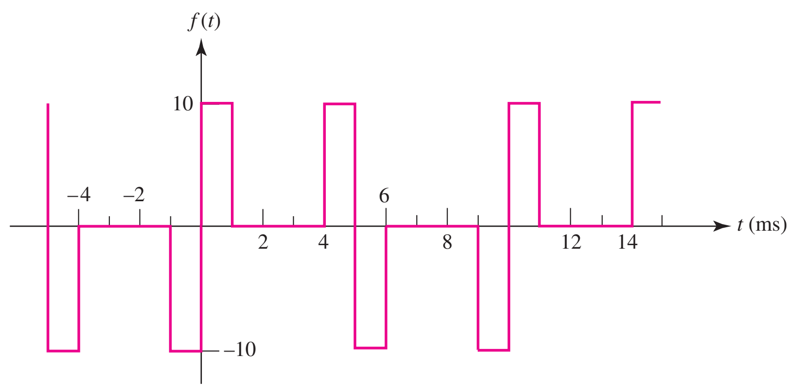
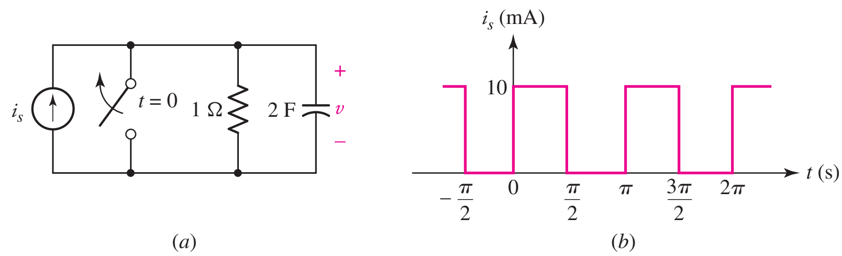


FIGURA 18.32

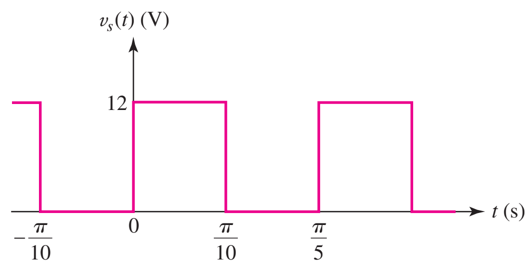
18.3 Respuesta completa a funciones forzadas periódicas

21. Para el circuito de la figura 18.33a, calcule $v(t)$ si $i_s(t)$ está dada por la figura 18.33b y $v(0) = 0$.



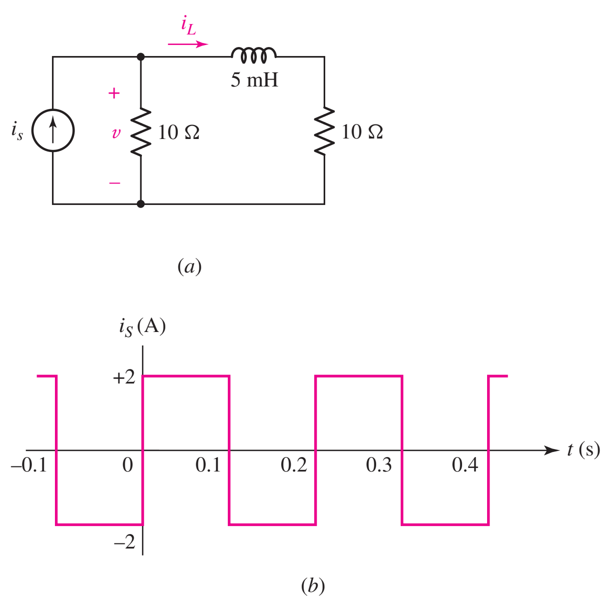
■ **FIGURA 18.33**

22. Si la forma de onda que se muestra en la figura 18.34 se aplica al circuito de la figura 18.8a, calcule $i(t)$.



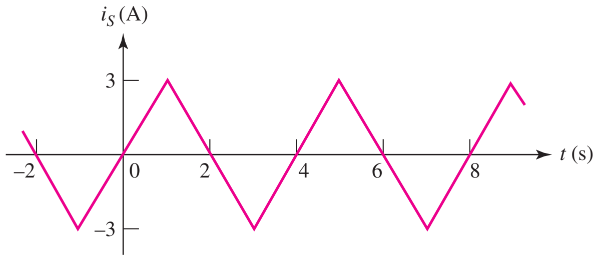
■ **FIGURA 18.34**

23. El circuito de la figura 18.35a se encuentra sujeto a la forma de onda que se muestra en la figura 18.35b. Determine la tensión $v(t)$ en estado estable.



■ **FIGURA 18.35**

24. Aplique la forma de onda de la figura 18.36 al circuito de la figura 18.35*b* y calcule la corriente de estado estable $i_L(t)$.

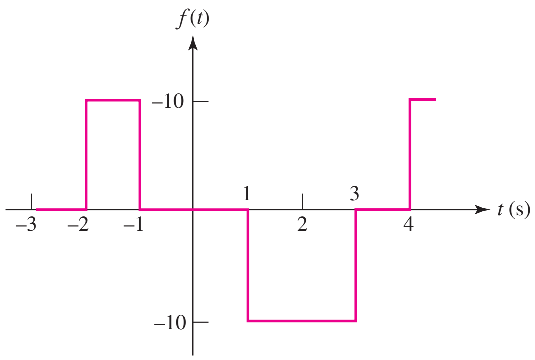


■ **FIGURA 18.36**

25. Si la forma de onda de corriente de la figura 18.36 se aplica al circuito de la figura 18.33*a*, calcule la tensión de estado estable $v(t)$.

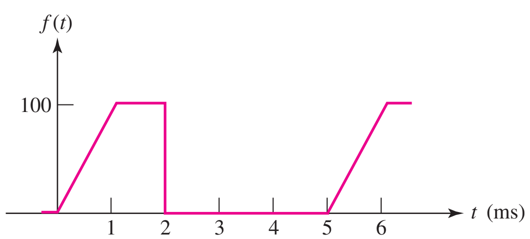
18.4 Forma compleja de la serie de Fourier

26. Suponga que la función $v(t)$ se define como se indica en la figura 18.10. Determine $\mathbf{c}_n$ para (*a*) $v(t + 0.5)$; (*b*) $v(t - 0.5)$.
27. Calcule $\mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}_{\pm 1}$ y $\mathbf{c}_{\pm 2}$ para la forma de onda de la figura 18.36.
28. Determine los primeros cinco términos de la representación de la serie exponencial de Fourier de la forma de onda graficada en la figura 18.33*b*.
29. Para la forma de onda periódica que se muestra en la figura 18.37, determine (*a*) el periodo T; (*b*) $\mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}_{\pm 1}$, $\mathbf{c}_{\pm 2}$ y $\mathbf{c}_{\pm 3}$.



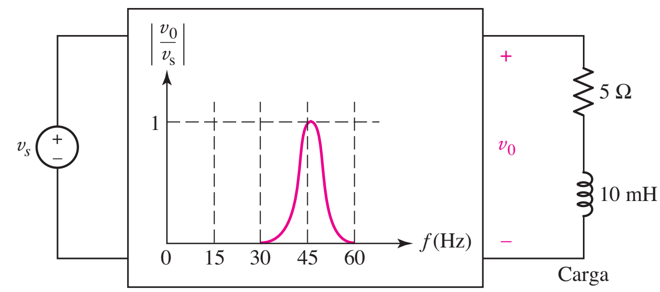
■ **FIGURA 18.37**

30. Para la forma de onda periódica representada en la figura 18.38, calcule (*a*) el periodo T; (*b*), $\mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}_{\pm 1}$, $\mathbf{c}_{\pm 2}$ y $\mathbf{c}_{\pm 3}$.



■ **FIGURA 18.38**

31. Una secuencia de pulsos tiene un periodo de 5 μs, una amplitud unitaria de $-0.6 < t < -0.4$ μs y de $0.4 < 1 < 0.6$ μs, así como amplitud cero en cualquier otro lado del intervalo del periodo. Esta serie de pulsos podría representar el número decimal 3 que se está transmitiendo en forma binaria mediante una computadora digital. (*a*) Determine $\mathbf{c}_n$. (*b*) Calcule $\mathbf{c}_4$. (*c*) Calcule $\mathbf{c}_0$. (*d*) Calcule $|\mathbf{c}_n|_{\text{máx}}$. (*e*) Obtenga N de manera que $|\mathbf{c}_n| \leq 0.1|\mathbf{c}_n|_{\text{máx}}$ para toda $n > N$. (*f*). ¿Qué ancho de banda se requiere para transmitir esta parte del espectro?
32. Sea una tensión periódica $v_s(t) = 40$ V para $0 < t < \frac{1}{96}$ s, y 0 para $\frac{1}{96} < t < \frac{1}{16}$ s. Si $T = \frac{1}{16}$ s, calcule: (*a*) $\mathbf{c}_3$; (*b*) la potencia entregada a la carga en el circuito de la figura 18.39.



■ **FIGURA 18.39**

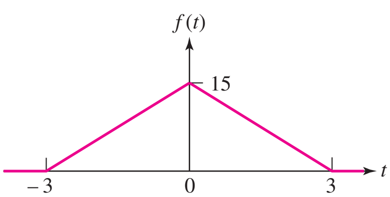
18.5 Definición de la transformada de Fourier

33. Dado

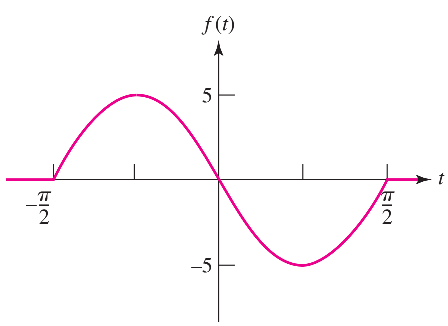
$$g(t) = \begin{Bmatrix} 5 & -1 < t < 1 \\ 0 & \text{otro} \end{Bmatrix}$$

grafique (*a*) de $g(t)$; (*b*) de $\mathbf{G}(j\omega)$.

34. Para la función $v(t) = 2u(t) - 2u(t+2) + 2u(t+4) - 2u(t+6)$ V, grafique (*a*) $v(t)$; (*b*) $\mathbf{V}(j\omega)$.
35. Use la ecuación [46*a*] para calcular $\mathbf{G}(j\omega)$ si $g(t)$ es (*a*) $5e^{-t}u(t)$; (*b*) $5te^{-t}u(t)$.
36. Obtenga la transformada de Fourier $\mathbf{F}(j\omega)$ del pulso triangular graficado en la figura 18.40.
37. Determine la transformada de Fourier $\mathbf{F}(j\omega)$ de la onda sinusoidal que se muestra en la figura 18.41.



■ **FIGURA 18.40**



■ **FIGURA 18.41**

18.6 Algunas propiedades de la transformada de Fourier

38. Para $g(t) = 3e^{-t}u(t)$, calcule (*a*) $\mathbf{G}(j\omega)$; (*b*) $\mathbf{A}_g(1)$; (*c*) $\mathbf{B}_g(1)$; (*d*) $\phi(\omega)$.
39. El pulso de tensión $2e^{-t}u(t)$ V se aplica a la entrada de un filtro pasabanda ideal. El pasabanda del filtro se define por $100 < |f| < 500$ Hz. Calcule la energía de salida total.

40. Dado que $v(t) = 4e^{-|t|}$ V, calcule el rango de frecuencia en el que está el 85% de la energía de 1 Ω.

41. Calcule la energía de 1 Ω correspondiente a la función $f(t) = 4te^{-3t}u(t)$.

42. Use la definición de la transformada de Fourier para demostrar los siguientes resultados, donde $\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathbf{F}(j\omega)$: (*a*) $\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-j\omega t0}\,\mathcal{F}\{f(t)\}$; (*b*) $\mathcal{F}\{df(t)/dt\} = j\omega\,\mathcal{F}\{f(t)\}$; (*c*) $\mathcal{F}\{f(kt)\} = (1/|k|)\,\mathbf{F}(j\omega/k)$; (*d*) $\mathcal{F}\{f(-t)\} = \mathbf{F}(-j\omega)$; (*e*) $\mathcal{F}\{tf(t)\} = j\,d[\mathbf{F}(j\omega)]/d\omega$.

18.7 Pares de transformadas de Fourier de algunas funciones del tiempo simples

43. Determine la transformada de Fourier de lo siguiente: (*a*) $5u(t) - 2\,\text{sgn}(t)$; (*b*) $2\cos 3t - 2$; (*c*) $4e^{-j3t} + 4e^{j3t} + 5u(t)$.

44. Encuentre la transformada de Fourier de cada una de las siguientes expresiones: (*a*) $85u(t + 2) - 50u(t - 2)$; (*b*) $5\delta(t) - 2\cos 4t$.

45. Grafique $f(t)$ y $|\mathbf{F}(j\omega)|$ si $f(t)$ está dada por (*a*) $2\cos 10t$; (*b*) $e^{-4t}u(t)$; (*c*) $5\,\text{sgn}(t)$.

46. Determine $f(t)$ si $\mathbf{F}(j\omega)$ está dada por (*a*) $4\delta(\omega)$; (*b*) $2/(5\,000 + j\omega)$; (*c*) $e^{-j120\omega}$.

47. Obtenga una expresión para $f(t)$ si $\mathbf{F}(j\omega)$ está dada por

$$(a)\ -j\frac{231}{\omega};\ (b)\ \frac{1+j2}{1+j4};\ (c)\ 5\delta(\omega)+\frac{1}{2+j10}.$$

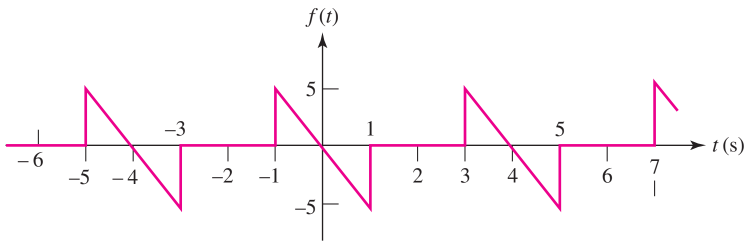
18.8 Transformada de Fourier de una función del tiempo periódica general

48. Calcule la transformada de Fourier de las siguientes funciones: (*a*) $2\cos^2 5t$; (*b*) $7\,\text{sen}\,4t\cos 3t$; (*c*) $3\,\text{sen}(4t - 40°)$

49. Determine la transformada de Fourier de la función periódica $g(t)$ que está definida dentro del intervalo $0 < t < 10$ s por $g(t) = 2u(t) - 3u(t - 4) + 2u(t - 8)$.

50. Si $\mathbf{F}(j\omega) = 20\sum_{n=1}^{\infty}[1/(|n|! + 1)]\delta(\omega - 20n)$, encuentre el valor de $f(0.05)$.

51. Dada la forma de onda periódica que se muestra en la figura 18.42, determine su transformada de Fourier.



■ **FIGURA 18.42**

18.9 Función del sistema y respuesta en el dominio de la frecuencia

52. Si un sistema está descrito por la función de transferencia $h(t) = 2u(t) + 2u(t - 1)$, use convolución para calcular la salida (en dominio de tiempo) si la entrada es (*a*) $2u(t)$; (*b*) $2te^{-2t}u(t)$.

53. Dada la función de entrada $x(t) = 5e^{-5t}u(t)$, use convolución para obtener una salida en el dominio de tiempo si la función de transferencia del sistema $h(t)$ está dada por (*a*) $3u(t + 1)$; (*b*) $10te^{-t}u(t)$.

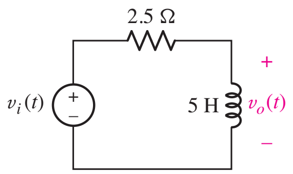
54. (*a*) Diseñe un amplificador no inversor que tenga una ganancia de 10. Si el circuito se construye usando un amp op μA741 alimentado por fuentes de ±15 V, determine la TRF de la salida mediante simulaciones adecuadas si la tensión de entrada opera a 1 kHz y tiene magnitud (*b*)10 mV; (*c*) 1 V; (*d*) 2 V.

55. (*a*) Diseñe un amplificador inversor que tenga una ganancia de 5. Si el circuito se construye usando un amp op μA741 alimentado por fuentes de ±10 V, realice simulaciones

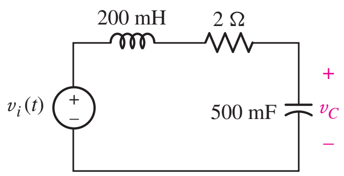
adecuadas para determinar la TRF de la tensión de salida si la tensión de entrada tiene una frecuencia de 10 kHz y magnitud (*b*) 500 mV; (*c*) 1.8 V; (*d*) 3 V.

18.10 Significado físico de la función del sistema

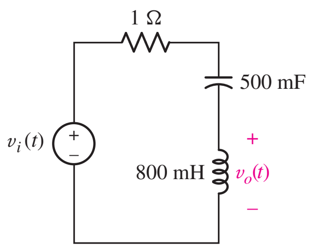
56. Con referencia al circuito de la figura 18.43, calcule $v_o(t)$ usando técnicas de Fourier si $v_i(t) = 2te^{-t}u(t)$ V.
57. Después de que el inductor de la figura 18.43 se reemplaza clandestinamente por un capacitor de 2 F, calcule $v_o(t)$ usando técnicas de Fourier si $v_i(t)$ es igual a (*a*) $5u(t)$ V; (*b*) $3e^{-4t}u(t)$ V.
58. Use técnicas basadas en Fourier para calcular $v_C(t)$ marcada en la figura 18.44 si $v_i(t)$ es igual a (*a*) $2u(t)$ V; (*b*) $2\delta(t)$ V.
59. Use técnicas basadas en Fourier para calcular $v_o(t)$ marcada en la figura 18.45 si $v_i(t)$ es igual a (*a*) $5u(t)$ V; (*b*) $3\delta(t)$ V.
60. Use técnicas basadas en Fourier para calcular $v_o(t)$ marcada en la figura 18.45 si $v_i(t)$ es igual a (*a*) $5u(t-1)$ V; (*b*) $2 + 8e^{-t}u(t)$ V.



■ **FIGURA 18.43**



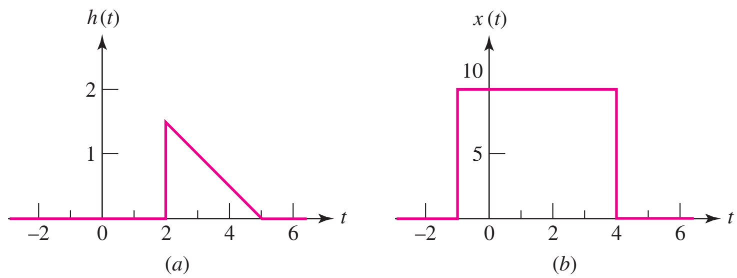
■ **FIGURA 18.44**



■ **FIGURA 18.45**

Ejercicios de integración del capítulo

61. Aplique el pulso cuya forma de onda se muestra en la figura 18.46*a* como la tensión de entrada $v_i(t)$ al circuito que se muestra en la figura 18.44 y calcule $v_C(t)$.



■ **FIGURA 18.46**

62. Aplique el pulso cuya forma de onda se muestra en la figura 18.46*b* como la tensión de entrada $v_i(t)$ al circuito que se muestra en la figura 18.44 y calcule $v_C(t)$.
63. Aplique el pulso cuya forma de onda se muestra en la figura 18.46*a* como la tensión de entrada $v_i(t)$ al circuito que se muestra en la figura 18.44 y calcule $i_C(t)$, definida de acuerdo con la convención pasiva de signos.
64. Aplique el pulso cuya forma de onda se muestra en la figura 18.46*b* como tensión de entrada $v_i(t)$ al circuito que se muestra en la figura 18.45 y calcule $v_o(t)$.
65. Aplique el pulso cuya forma de onda se muestra en la figura 18.46*b* como la tensión de entrada $v_i(t)$ al circuito que se muestra en la figura 18.45 y calcule $v_o(t)$.

APÉNDICE 1

INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA DE REDES

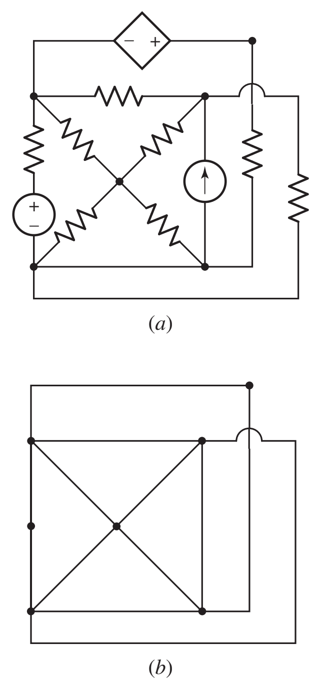
Después de resolver muchos problemas de circuitos, poco a poco se hace evidente que una gran cantidad de los que hemos estudiado tienen mucho en común, al menos en términos del arreglo de componentes. A partir de este reconocimiento, es posible crear una visión más abstracta de los circuitos, la cual llamamos *topología de redes*, un tema que introdujimos en este apéndice.

A1.1 ÁRBOLES Y ANÁLISIS NODAL GENERAL

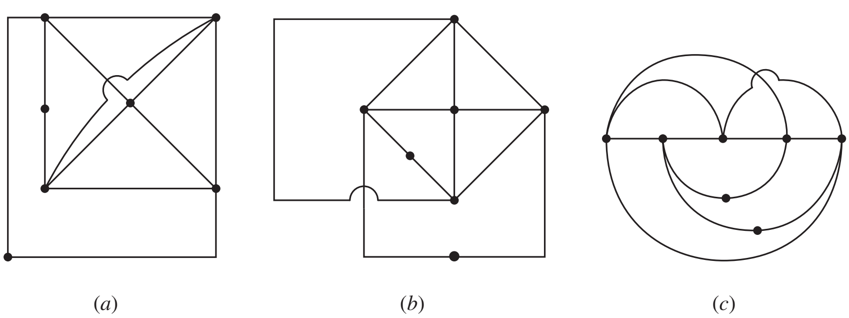
Planeamos ahora generalizar el método del análisis nodal que hemos llegado a comprender y a amar. Debido a que este análisis se aplica a cualquier red, no podemos prometer que resolverá una clase más amplia de problemas de circuitos. Sin embargo, buscaremos tener la capacidad de elegir un método de análisis nodal general para resolver cualquier problema particular, que tal vez dé origen a un menor número de ecuaciones y menos trabajo.

Debemos extender primero la lista de definiciones relacionadas con la topología de redes. Comenzamos con la definición de la propia *topología* como una rama de la geometría relacionada con las propiedades de una figura geométrica que no cambian cuando la figura se tuerce, dobla, pliega, alarga o encoje, o se amarra en nudos, con la restricción de que ninguna parte de la figura se corta o se pega a otra. Una esfera y un tetraedro son topológicamente idénticos, pues constituyen un cuadrado y un círculo. En términos de circuitos eléctricos no nos interesan los tipos particulares de elementos que aparecen en el circuito, sino sólo la forma en la que se arreglan las ramas y los nodos. En realidad, se suele suprimir la naturaleza de los elementos y simplificar el dibujo del circuito mediante la presentación de los elementos como líneas. El dibujo que resulta se denomina gráfica lineal o simplemente gráfica. Un circuito y su gráfica se muestran en la figura A1.1. Observe que en ella todos los nodos se identifican mediante puntos gruesos.

En razón de que las propiedades topológicas del circuito, o su gráfica, permanecen invariables cuando se distorsiona, las tres gráficas de la figura A1.2 son topológicamente idénticas al circuito y a la gráfica A1.1.



■ **FIGURA A1.1** (*a*) Un circuito dado. (*b*) Gráfica lineal de este circuito.



■ **FIGURA A1.2** (*a*, *b*, *c*) Gráficas lineales alternativas del circuito de la figura A1.1.

Los términos topológicos que ya conocemos y empleamos de manera correcta son:

Nodo: punto en el que dos o más elementos tienen una conexión común.

Trayectoria: conjunto de elementos que pueden recorrerse en orden, sin pasar por el mismo nodo dos veces.

Rama: trayectoria sencilla que contiene un elemento simple, el cual conecta un nodo a cualquier otro nodo.

Lazo: trayectoria cerrada.

Malla: lazo que no contiene ningún otro lazo dentro de él.

Circuito plano: circuito que puede dibujarse sobre una superficie plana, de manera que ninguna rama pase por encima o por debajo de cualquier otra rama.
Circuito no plano: cualquier circuito que no es plano.

Las gráficas de la figura A1.2 contienen cada una 12 ramas y 7 nodos.

Ahora deben definirse tres nuevas propiedades de una gráfica lineal: un *árbol*, un *coárbol* y un *enlace*. Definimos *árbol* como cualquier conjunto de ramas que no contiene ningún lazo y que conecta cada nodo a otro, no necesariamente de manera directa. Suele haber varios árboles diferentes de una red que se podrían dibujar, de modo que el número aumenta con rapidez, a medida que aumenta la complejidad de la red. La gráfica simple que se muestra en la figura A1.3*a* tiene ocho árboles posibles, cuatro de los cuales se indican mediante líneas gruesas en la figura A1.3*b*, *c*, *d* y *e*.

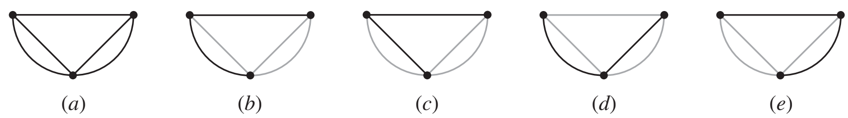


FIGURA A1.3 (*a*) Gráfica lineal de una red de tres nodos. (*b*, *c*, *d*, *e*) Cuatro de los ocho diferentes árboles que se podrían dibujar de esta gráfica se representan con líneas negras.

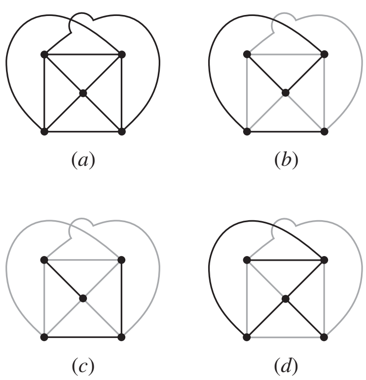


FIGURA A1.4 (*a*) Gráfica lineal. (*b*) Posible árbol de esta gráfica. (*c*, *d*) Estos conjuntos de rama no satisfacen la definición de árbol.

En la figura A1.4*a* se presenta una gráfica más compleja. La figura A1.4*b* muestra un árbol posible y las figuras A1.4*c* y *d* presentan conjuntos de ramas que no son árboles, pues ningún conjunto satisface la definición.

Después de especificar un árbol, las ramas que no son parte de él forman un *coárbol* o complemento de un árbol. Las ramas dibujadas con líneas delgadas en la figura A1.3*b* a *e* muestran los coárboles que corresponden a los árboles trace más espesos.

Luego que hemos comprendido la construcción de un árbol y su coárbol, el concepto de *enlace* es muy simple, en vista de que es cualquier rama que pertenece a un coárbol. Resulta evidente que cualquier rama particular puede ser un enlace o no, según el árbol particular que se elija.

Se relacionará de manera muy sencilla el número de enlaces en una gráfica con el número de ramas y nodos. Si la gráfica tiene N nodos, entonces se requieren exactamente $(N-1)$ ramas para construir un árbol, debido a que la primera rama elegida conecta dos nodos y cada rama adicional incluye un nodo más. Por lo tanto, dadas B ramas, el número de enlaces L debe ser

$$L = B - (N - 1)$$

o

$$L = B - N + 1 \qquad [1]$$

Hay L ramas en el coárbol y $(N-1)$ ramas en el árbol.

En cualquiera de las gráficas de la figura A1.3 observamos que $3 = 5 - 3 + 1$; asimismo, en la gráfica de la figura A1.4*b*, $6 = 10 - 5 + 1$. Tal vez en una red haya varias partes desconectadas; por ello, la ecuación [1] quizá se haga más general al sustituir $+1$ con $+ S$, donde S es el número de partes separadas. Sin embargo, también se pueden conectar dos partes separadas mediante un solo conductor, lo que provocaría que dos nodos formen un nodo, pero no fluye ninguna corriente por este conductor. Este proceso se podría utilizar para unir cualquier número de partes separadas, sin que tengamos pérdida de generalidad, si restringimos la atención a los circuitos en los cuales $S = 1$.

A estas alturas ya podemos analizar un método mediante el cual es posible escribir un conjunto de ecuaciones nodales independientes y suficientes, lo cual permite obtener muchos conjuntos de ecuaciones diferentes de la misma red, todos ellos válidos. Sin embargo, el método no proporciona todo el conjunto de ecuaciones posible. Describiremos primero el procedimiento, con la ayuda de tres ejemplos y, después, señalaremos la razón por la que las ecuaciones son independientes y suficientes.

Dada una red, debemos:

1. Dibujar una gráfica y luego identificar un árbol.
2. Colocar todas las fuentes de tensión en el árbol.
3. Ubicar todas las fuentes de corriente en el coárbol.
4. Poner en el árbol todas las ramas de control de tensión de las fuentes dependientes controladas por la tensión, si es posible.
5. Situar en el coárbol todas las ramas de control de corriente de las fuentes dependientes controladas por la corriente, si es posible.

Estos últimos cuatro pasos asocian de manera eficaz las tensiones con el árbol y las corrientes con el coárbol.

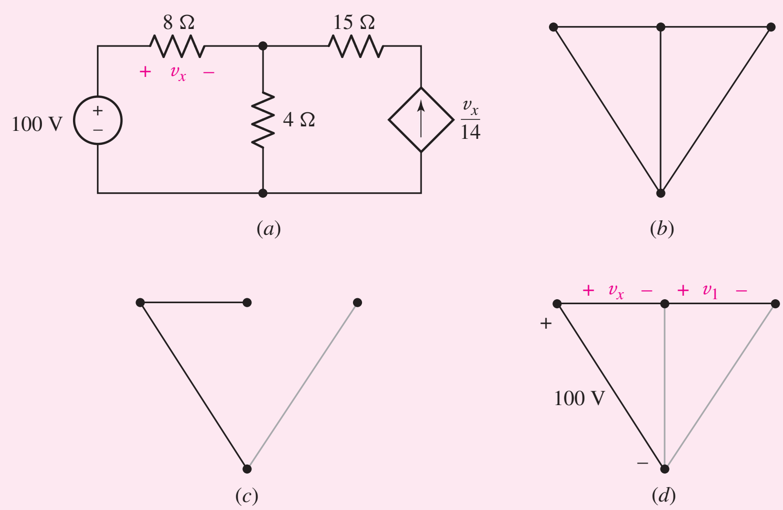
A continuación asignaremos una variable de tensión (con su par más-menos) en los extremos de cada una de las $(N - 1)$ ramas del árbol. Una rama que contenga una fuente de tensión (dependiente o independiente) debe asignarse a esa tensión de fuente, mientras que una que contenga una tensión controlada debe vincularse con esa tensión controladora. El número de nuevas variables que introdujimos es, en consecuencia, igual al número de ramas del árbol $(N - 1)$, reducidas por el número de fuentes de tensión del árbol y por el número de tensiones de control que se pueden localizar en el árbol. En el ejemplo A1.3 se encuentra que el número de nuevas variables requeridas tal vez sea cero.

Al tener un conjunto de variables, es necesario que escribamos un conjunto de ecuaciones que sean suficientes para determinar tales variables. Las ecuaciones se obtienen mediante la aplicación de la LCK. Las fuentes de tensión se manejan de la misma manera que se hizo en el examen anterior relativo al análisis nodal; cada fuente de tensión, así como los dos nodos de sus terminales constituyen un supernodo o una parte de un supernodo. En consecuencia, la ley de corrientes de Kirchhoff se aplica en todos menos uno de los nodos y supernodos restantes. Se iguala a cero la suma de las corrientes que salen del nodo en todas las ramas conectadas a él. Cada corriente se expresa en términos de las variables de tensión que se acaban de asignar. Tal vez se ignore un nodo, como sucedió en el caso anterior con el nodo de referencia. Por último, en el caso de que haya fuentes dependientes controladas por corriente, es necesario escribir una ecuación para cada corriente de control que la relacione con las variables de tensión; lo anterior tampoco difiere del procedimiento que se utilizó antes con el análisis nodal.

Ensayemos este proceso en el circuito de la figura A1.5*a*, el cual contiene cuatro nodos y cinco ramas y cuya gráfica se muestra en la figura A1.5*b*.

EJEMPLO A1.1

Determine el valor de v_x en el circuito de la figura A1.5*a*.



■ **FIGURA A1.5** (*a*) Circuito utilizado como ejemplo para el análisis nodal general. (*b*) Gráfica del circuito dado. (*c*) La fuente de tensión y la tensión de control se colocan en el árbol, en tanto que la fuente de corriente se ubica en el coárbol. (*d*) El árbol se completa y se asigna la tensión entre los extremos de cada rama de árbol.

De acuerdo con los pasos 2 y 3 del procedimiento de elaboración de árboles, colocamos la fuente de tensión en el árbol y la fuente de corriente en el coárbol. En el paso 4, vemos que la rama v_x también puede situarse en el árbol, pues no forma ningún lazo que viole la definición de árbol. En estas condiciones, tenemos las dos ramas de árbol y el enlace individual que se muestra en la figura A1.5*c*; asimismo, se puede observar que todavía no se cuenta con un árbol, pues el nodo derecho no está conectado con los otros mediante una trayectoria que pase por las ramas del árbol. La única manera posible de completar el árbol se ilustra en la figura A1.5*d*. La tensión de la fuente de 100 V, la tensión de control v_x y la nueva variable de tensión v_1 se asignan a continuación a las tres ramas de árbol, tal como se indica.

Por lo tanto, tenemos dos incógnitas v_x y v_1, y es necesario obtener dos ecuaciones en términos de ellas. Hay cuatro nodos, pero la presencia de la fuente de tensión ocasiona que dos de ellos formen un solo supernodo. Se podría aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff a cualquiera de los tres nodos o supernodos restantes. Se resolverá primero el nodo derecho. La corriente que sale hacia la izquierda es $-v_1/15$, en tanto que la que sale hacia abajo corresponde a $-v_x/14$. De esta forma, la primera ecuación es

$$-\frac{v_1}{15} + \frac{-v_x}{14} = 0$$

El nodo central en la parte superior se ve más fácil que el supernodo, por lo que se iguala a cero la suma de la corriente hacia la izquierda ($-v_x/8$), la corriente hacia la derecha ($v_1/15$) y la corriente hacia abajo que pasa por la resistencia de 4 Ω. Esta última corriente está dada por la tensión en la resistencia dividida entre 4 Ω, aunque no hay tensión marcada en ese enlace. Sin embargo, cuando se construye

un árbol de acuerdo con la definición, existe una trayectoria a través de él, desde cualquier nodo hasta cualquier otro nodo. Entonces, puesto que a toda rama en el árbol se le asigna una tensión, ésta se expresaría en cualquier enlace en términos de las tensiones de rama del árbol. Esta corriente hacia abajo es, en consecuencia, $(-v_x + 100)/4$, con lo cual se tiene una segunda ecuación:

$$-\frac{v_x}{8} + \frac{v_1}{15} + \frac{-v_x + 100}{4} = 0$$

La ecuación simultánea de ambas ecuaciones nodales da como resultado:

$$v_1 = -60 \text{ V} \quad v_x = 56 \text{ V}$$

EJEMPLO **A1.2**

Proporcione los valores de v_x y v_y del circuito de la figura A1.6*a*.

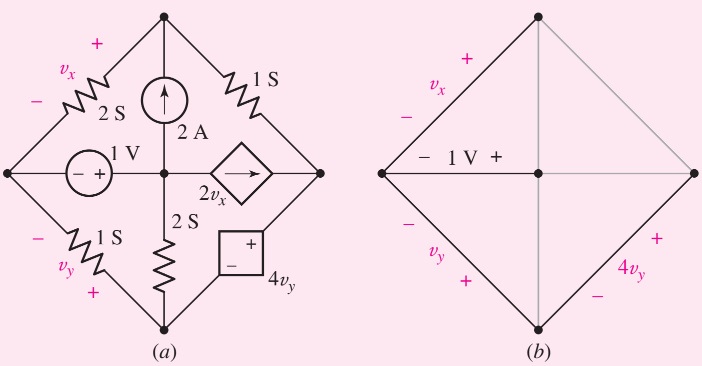


FIGURA A1.6 (*a*) Circuito con 5 nodos. (*b*) Se elige un árbol de manera que tanto las fuentes de tensión como las tensiones de control constituyan tres ramas.

Dibujamos un árbol de modo que las dos fuentes de tensión y ambas tensiones de control aparezcan como tensiones de rama del árbol, y en consecuencia como variables asignadas. Cuando esto ocurre, las cuatro ramas constituyen un árbol, figura A1.6*b*, y se eligen las tensiones de ramas de árbol v_x, 1, v_y y $4v_y$, como se muestra.

Ambas fuentes de tensión definen supernodos, así que se aplica dos veces la LCK, una vez en el nodo superior:

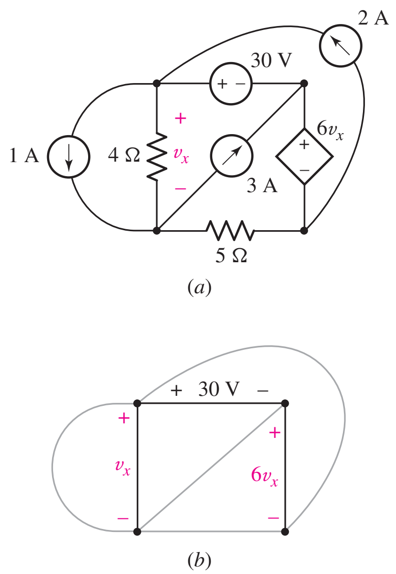
$$2v_x + 1(v_x - v_y - 4v_y) = 2$$

y luego en el supernodo compuesto por el nodo derecho, el nodo inferior y la fuente de tensión dependiente

$$1v_y + 2(v_y - 1) + 1\,(4v_y + v_y - v_x) = 2v_x$$

En vez de las cuatro ecuaciones que esperaríamos, si utilizamos las técnicas estudiadas antes, sólo tenemos dos; además, encontramos sin dificultad que $v_x = \frac{26}{9}$ V y $v_y = \frac{4}{3}$ V.

EJEMPLO A1.3



■ **FIGURA A1.7** (*a*) Circuito para el que sólo se requiere escribir una ecuación nodal general. (*b*) El árbol y las tensiones de rama de árbol que se utilizan.

Calcule el valor de v_x en el circuito de la figura A1.7*a*.

Las dos fuentes de tensión y la tensión de control establecen el árbol de tres ramas de la figura A1.7*b*. Dado que los dos nodos superiores y el nodo derecho inferior se unen para formar un supernodo, es necesario escribir sólo una LCK. Al elegir el nodo inferior izquierdo, se tiene

$$-1 - \frac{v_x}{4} + 3 + \frac{-v_x + 30 + 6v_x}{5} = 0$$

y se deduce que $v_x = -\frac{32}{3}$ V. A pesar de la aparente complejidad de este circuito, el uso del análisis nodal general dio como resultado una solución fácil. El uso de las corrientes de malla o de las tensiones de nodo con respecto a la referencia requeriría más ecuaciones y más esfuerzo.

En la sección siguiente analizaremos el problema para determinar el mejor esquema de análisis.

Si necesitamos conocer alguna otra tensión, corriente o potencia en el ejemplo anterior, un paso adicional proporcionaría la respuesta. Por ejemplo, la potencia que entrega la fuente de 3 A es

$$3\left(-30 - \tfrac{32}{3}\right) = -122 \text{ W}$$

Terminaremos con la explicación de la suficiencia del conjunto supuesto de tensiones de rama del árbol y la independencia de las ecuaciones nodales. Si tales tensiones de rama del árbol son suficientes, entonces la tensión a través de cualquier rama, ya sea en el árbol o en el coárbol, debe obtenerse del conocimiento de los valores de todas las tensiones de la rama del árbol. Lo anterior es realidad y se cumple en el caso de aquellas ramas del árbol. Para los enlaces, se sabe que cada uno se extiende entre dos nodos y, por definición, el árbol debe conectar también esos dos nodos. Por consiguiente, cada tensión de enlace también se establecería en términos de las tensiones de la rama del árbol.

En consecuencia, una vez que se conoce la tensión en los extremos de cualquier rama del circuito, se determinan todas las corrientes utilizando ya sea el valor dado de la corriente si la rama consiste en una fuente de corriente, mediante la ley de Ohm si se trata de una rama resistiva, o recurriendo a la LCK y a estos valores de corriente si la rama es una fuente de tensión. De tal modo, todas las tensiones y las corrientes están determinadas y la suficiencia demostrada.

Para demostrar la independencia, suponemos que las únicas fuentes de la red que son independientes son las de corriente. Como señalamos antes, las fuentes de tensión independientes del circuito dan lugar a menor número de ecuaciones, en tanto que las fuentes dependientes suelen necesitar un número mayor. Sólo con las fuentes de corriente independientes existirán precisamente $(N - 1)$ ecuaciones nodales escritas en términos de $(N - 1)$ tensiones de rama del árbol. Para demostrar que las $(N - 1)$ ecuaciones son independientes, considere la aplicación de la LCK a los $(N - 1)$ diferentes nodos. Cada vez que escribamos la ecuación de la LCK, hay una nueva rama del árbol implicada: la que conecta ese nodo con el resto del árbol. Dado que el elemento de circuito no apareció en ninguna ecuación anterior, debemos obtener una ecuación independiente. Lo anterior es válido para cada uno de los $(N - 1)$ nodos en turno y, en consecuencia, se tienen $(N - 1)$ ecuaciones independientes.

PRÁCTICA

A1.1 (*a*) ¿Cuántos árboles se pueden construir para el circuito de la figura A1.8, que se deduce a partir de las cinco sugerencias de dibujos de árbol que se presentaron anteriormente? (*b*) Dibuje un árbol adecuado, escriba dos ecuaciones con dos incógnitas y determine i_3. (*c*) ¿Qué potencia proporciona la fuente dependiente?

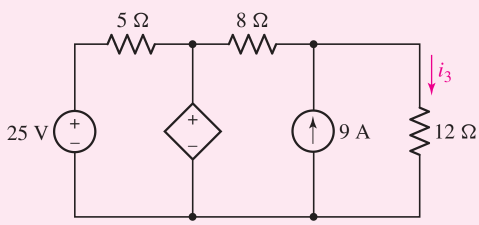


FIGURA A1.8

Respuestas: 1; 7.2 A; 547 W.

A1.2 ANÁLISIS DE ENLACES Y LAZOS

Consideremos ahora el uso de un árbol para obtener un conjunto apropiado de ecuaciones de lazo. En algunos aspectos este método es el *dual* del método de escritura de ecuaciones nodales. También en este caso debe señalarse que, si bien podemos garantizar que cualquier conjunto de ecuaciones que se escriban será tanto suficiente como independiente, no debemos esperar que con el método se obtenga de manera directa todo conjunto de ecuaciones posible.

Comenzamos de nuevo construyendo un árbol y se utiliza el mismo conjunto de reglas al que se recurrió en el análisis nodal general. El objetivo, ya sea para el análisis nodal o para el de lazo, consiste en poner tensiones en el árbol y corrientes en el coárbol; ésta es una regla obligatoria para fuentes, y deseable para cantidades de control.

Sin embargo, en lugar de asignar ahora una tensión a cada rama en el árbol, determinamos la corriente (incluyendo la flecha de referencia, desde luego) de cada elemento en el coárbol o de cada enlace. Si hubiera 10 enlaces, asignaríamos exactamente 10 corrientes de enlace. A cualquier enlace que contenga una fuente de corriente se le asocia esa fuente como a corriente de enlace. Observe que cada corriente de enlace también puede considerarse como una corriente de lazo, pues el enlace debe extenderse entre dos nodos específicos y debe existir una trayectoria entre ambos nodos a través del árbol. Por lo tanto, con cada enlace se asocia un solo lazo específico que incluye dicho enlace y una trayectoria única a través del árbol. Resulta evidente que la corriente asignada se podría considerar como una corriente de lazo o una corriente de enlace. La connotación de enlace es más útil en el momento en que se definen las corrientes, pues debe establecerse una para cada enlace; la interpretación del lazo resulta más conveniente en el momento de escribir la ecuación, pues aplicaremos la LVK a través de cada lazo.

Probemos este proceso para definir las corrientes de enlace considerando el circuito de la figura A1.9*a*. El árbol seleccionado es uno de varios que podrían construirse y para el cual la fuente de tensión está en la rama del árbol y la fuente de corriente se ubica en un enlace. Consideremos primero el enlace que contiene la fuente de corriente. El lazo asociado con este enlace es la malla del lado izquierdo, así que indicamos la corriente de enlace como si circulase en torno al perímetro de esta malla (figura A1.9*b*). Una elección evidente para el símbolo de la corriente de enlace es “7 A”. Recordemos que ninguna otra corriente puede circular por este enlace particular, por lo cual su valor debe ser exactamente la intensidad de la fuente de corriente.

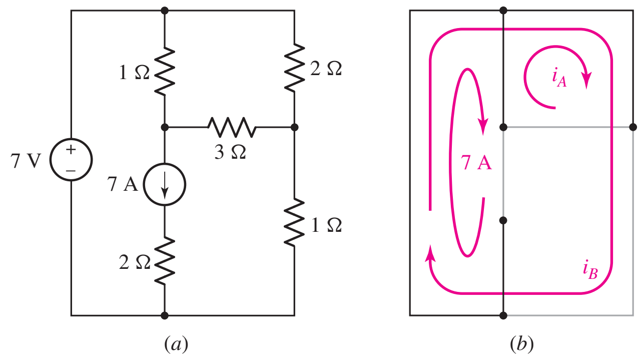


FIGURA A1.9 (*a*) Circuito simple. (*b*) Se elige el árbol de modo que la fuente de corriente sea un enlace y la fuente de tensión se encuentre en una rama del árbol.

A continuación dirigimos la atención hacia el enlace de la resistencia de 3 Ω. El lazo asociado con él es la malla superior del lado derecho, de modo que esta corriente de lazo (o malla) se define como i_A y también se presenta en la figura A1.9*b*. El último enlace es la resistencia inferior de 1 Ω pero la única trayectoria entre sus terminales a través del árbol se traza alrededor del perímetro del circuito. Esa corriente de enlace se denomina i_B, y la flecha que indica su trayectoria y su dirección de referencia aparece en la figura A1.9*b*. No es una corriente de malla.

Observe que cada enlace tiene sólo una corriente, aunque una rama del árbol quizá tenga cualquier número desde 1 hasta el número total de corrientes de enlace asignadas. El uso de flechas largas, casi cerradas, para indicar los lazos ayuda a señalar qué corriente de lazo fluye a través de cuál rama del árbol y cuáles son sus direcciones de referencia.

Ahora debemos escribir una ecuación LVK alrededor de cada uno de los lazos. Las variables que se usan son las corrientes de enlace asignadas. Dado que la tensión en los extremos de la fuente de corriente no puede expresarse en términos de la corriente de la fuente y, puesto que ya hemos empleado el valor de esta última como la corriente de enlace, descartamos cualquier lazo que contenga una fuente de corriente.

EJEMPLO A1.4

En el ejemplo de la figura A1.9, calcule los valores de i_A e i_B.

Primero recorremos al lazo de i_A en dirección de las manecillas del reloj desde su esquina inferior izquierda. La corriente que va en ese sentido en la resistencia de 1 Ω es $(i_A - 7)$, en el elemento de 2 Ω es $(i_A + i_B)$ y en el enlace simplemente i_B. Por lo tanto,

$$1(i_A - 7) + 2(i_A + i_B) + 3i_A = 0$$

En el enlace de i_B el recorrido en el sentido de las manecillas del reloj desde la esquina inferior izquierda lleva a

$$-7 + 2(i_A + i_B) + 1i_B = 0$$

El recorrido del lazo definido por el enlace 7 A no se requiere. Despejando, tenemos $i_A = 0.5$ A, $i_B = 2$ A, también en este caso. Obtuvimos la solución ¡con una ecuación menos que antes!

EJEMPLO **A1.5**

Calcule i_1 en el circuito que se muestra en la figura A1.10*a*.

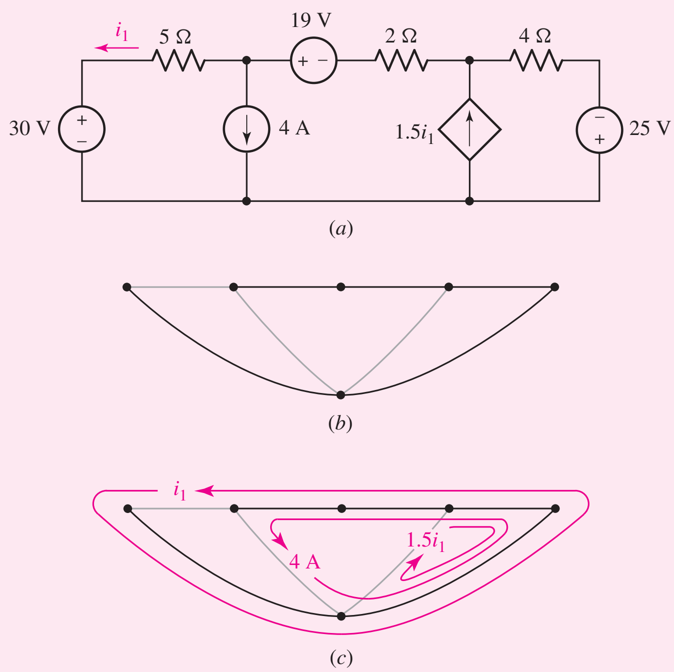


FIGURA A1.10 (*a*) Circuito para el que se podría determinar i_1 con una ecuación utilizando el análisis de lazo general. (*b*) Único árbol que satisface las reglas señaladas en la sección A1.1. (*c*) Se muestran las tres corrientes de enlace con sus lazos.

Este circuito contiene seis nodos y su árbol debe tener, por lo tanto, cinco ramas. Dado que hay ocho elementos en la red, existen tres enlaces en el coárbol. Si ponemos las tres fuentes de tensión en el árbol y las dos fuentes de corriente y el control de corriente en el coárbol, resulta el árbol que se presenta en la figura A.1.10*b*. La corriente de la fuente de 4 A define un lazo como se ilustra en la figura A1.10*c*. La fuente dependiente establece la corriente de lazo y $1.5i_1$ alrededor de la malla derecha, mientras que la corriente de control i_1 produce la corriente de lazo restante alrededor del perímetro del circuito. Observemos que las tres corrientes fluyen por la resistencia de 4 Ω.

Sólo tenemos una cantidad desconocida, i_1, así que después de descartar los lazos definidos por las dos fuentes de corriente, aplicamos LVK alrededor del exterior del circuito:

$$-30 + 5(-i_1) + 19 + 2(-i_1 - 4) + 4(-i_1 - 4 + 1.5i_1) - 25 = 0$$

Además de las tres fuentes de tensión, en este lazo hay tres resistencias. La resistencia de 5 Ω incluye una corriente de lazo, puesto que también constituye un enlace; la resistencia de 2 Ω contiene dos corrientes de lazo y el de 4 Ω tiene tres. Se requiere un conjunto de corrientes de lazo dibujado con todo cuidado, si se quiere evitar errores al saltar corrientes, utilizar algunas de más o errar al elegir la dirección correcta. Sin embargo, se garantiza la ecuación anterior y con ella se obtiene $i_1 = -12$ A.

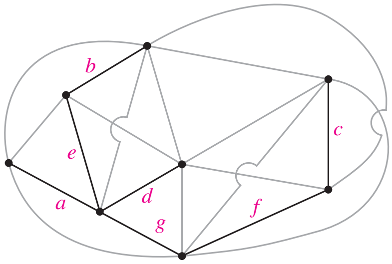


FIGURA A1.11 Árbol que se emplea como ejemplo para ilustrar la suficiencia de las corrientes de enlace.

¿Cómo demostraríamos la suficiencia? Imaginemos un árbol sin lazos, en el cual se incluyan por lo menos dos nodos, y en cada uno de ellos sólo se conecta una rama de árbol. La corriente en ambas ramas se obtiene con facilidad a partir de las corrientes conocidas del enlace mediante la LCK. Si hay otros nodos en los que sólo se conecta una rama del árbol, tales corrientes de rama del árbol también se calcularían de manera inmediata. De este modo, en el árbol que se presenta en la figura A1.11 se han encontrado las corrientes en las ramas **a**, **b**, **c** y **d**. Uno se mueve ahora a lo largo de las ramas del árbol y se determinan las corrientes en las ramas del árbol **e** y **f**; el proceso podría continuar hasta que se determinen todas las corrientes de rama. Por lo tanto, las corrientes de enlace resultan suficientes para obtener todas las corrientes de rama. Resulta útil considerar la situación donde se ha dibujado un "árbol" incorrecto que contiene un lazo. Incluso si todas las corrientes de enlace fueran cero, aún podría circular una corriente en torno a este "lazo de árbol". Por consiguiente, la corriente de enlace no podría determinarse a dicha corriente, así que no representarían un conjunto suficiente. Por definición, un "árbol" de estas características es imposible.

Para demostrar la independencia, se debe quedar satisfecho suponiendo que las únicas fuentes de la red son fuentes de tensión independientes. Como ya se señaló, las fuentes de corriente independientes del circuito originan un número menor de ecuaciones, en tanto que las dependientes casi siempre necesitan un número mayor de ecuaciones. Si sólo se hallan fuentes de tensión independientes, en ese caso habrá precisamente $(B - N + 1)$ ecuaciones de lazo escritas en términos de las corrientes de lazo $(B - N + 1)$. Para demostrar que las $(B - N + 1)$ ecuaciones de lazo son independientes, sólo se requiere señalar que cada una representa la aplicación de la LVK alrededor del lazo que contiene un enlace que no aparece en cualquier otra ecuación. Se podría visualizar una resistencia diferente $R_1, R_2, \ldots, R_{B-N+1}$ en cada uno de los enlaces y en ese caso es claro que nunca puede obtenerse una ecuación de las otras, dado que cada una contiene un coeficiente que no aparece en las demás.

En consecuencia, las corrientes de enlace son suficientes para permitir que se obtenga una solución completa, y el conjunto de ecuaciones de lazo que se utiliza para determinar las corrientes de enlace constituye un conjunto de ecuaciones independiente.

Luego de haber considerado tanto el análisis nodal general como el análisis de lazo, se deben considerar ahora las ventajas y desventajas de cada método, de modo que se elija de manera inteligente un plan de ataque pudiendo ser aplicado a un problema de análisis dado.

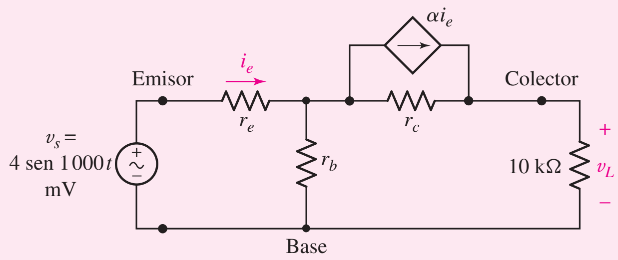
El método nodal requiere en general $(N - 1)$ ecuaciones, aunque se reduce en 1 por cada fuente de tensión independiente o dependiente en una rama de árbol, y se incrementa en 1 por cada fuente dependiente que se controla por tensión mediante una tensión de enlace, o por corriente.

El método de lazo implica básicamente $(B - N + 1)$ ecuaciones. Sin embargo, cada fuente de corriente independiente o dependiente, en un enlace, reduce este número en 1, en tanto que cada fuente dependiente que se controla por corriente mediante una corriente de rama de árbol, o que se controla por tensión, incrementa el número en 1.

Como gran final de esta explicación, se inspeccionará el modelo del circuito equivalente en T de un transistor que se muestra en la figura A1.12, el cual se conecta a una fuente senoidal, 4 sen 1 000t mV, y una carga de 10 kΩ.

EJEMPLO **A1.6**

Determine la corriente de entrada (emisor) i_e y la tensión de carga v_L en el circuito de la figura A1.12, suponiendo valores característicos de la resistencia de emisor $r_e = 50\ \Omega$; la resistencia de base $r_b = 500\ \Omega$; la resistencia del colector $r_c = 20\ \text{k}\Omega$, y la relación de transferencia base común/corriente directa es $\alpha = 0.99$.



■ **FIGURA A1.12** Una fuente de tensión senoidal y una carga de 10 kΩ se conectan al circuito equivalente T de un transistor. La conexión común entre la entrada y la salida está en la terminal de la base del transistor, por lo que el arreglo recibe el nombre de configuración de *base común*.

Si bien se piden los detalles en los problemas de práctica que siguen, debemos ver sin ninguna dificultad que el análisis de este circuito podría llevarse a cabo dibujando árboles que requieren tres ecuaciones nodales generales generales $(N - 1 - 1 + 1)$ o dos ecuaciones de lazo $(B - N + 1 - 1)$. También debemos observar que se necesitan tres ecuaciones en términos de las tensiones de nodo con respecto a una referencia, pues son tres ecuaciones de malla.

Sin que importe el método que elijamos, los siguientes resultados se obtienen para este circuito específico:

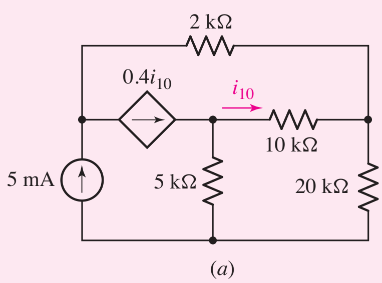
$$i_e = 18.42 \text{ sen } 1\,000t \qquad \mu\text{A}$$

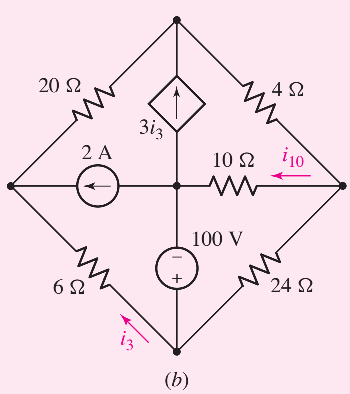
$$v_L = 122.6 \text{ sen } 1\,000t \qquad \text{mV}$$

y, por lo tanto, observamos que este circuito de transistor proporciona una ganancia de tensión (v_L/v_s) de 30.6, una ganancia de corriente $(v_L/10\,000 i_e)$ de 0.666, y una ganancia de potencia igual al producto $30.6(0.666) = 20.4$. Se garantizarían ganancias superiores si este transistor se operase en una configuración de emisor común.

PRÁCTICA

A1.2 Dibuje un árbol adecuado y aplique el análisis de lazo general para determinar i_{10} en el circuito: (*a*) de la figura A1.13*a* escribiendo sólo una ecuación con i_{10} como la variable; (*b*) de la figura A1.13*b* escribiendo sólo dos ecuaciones con i_{10} e i_3 como las variables.





■ **FIGURA A1.13**

(*continúa*)

PRÁCTICA

A1.3 En el caso del circuito equivalente de amplificador transistorizado que se presenta en la figura A1.12, sean $r_e = 50\ \Omega$, $r_b = 500\ \Omega$, $r_c = 20\ \text{k}\Omega$ y $\alpha = 0.99$, determine tanto i_e como v_L dibujando un árbol apropiado y utilizando: (*a*) dos ecuaciones de lazo; (*b*) tres ecuaciones nodales con un nodo de referencia común de la tensión; (*c*) tres ecuaciones nodales sin un nodo de referencia común.

A1.4 Determine los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton que se presentaron para la carga de $10\ \text{k}\Omega$ en la figura A1.12 y obtenga: (*a*) el valor en circuito abierto de v_L; (*b*) la corriente de cortocircuito (hacia abajo); (*c*) la resistencia equivalente de Thévenin. Todos los valores de circuito se indican en el problema de práctica A1.3.

Respuestas: A1.2: −4.00 mA; 4.69 A. A1.3: 18.42 sen 1 000t μA; 122.6 sen 1 000t mV. A1.4: 147.6 sen 1 000t mV; 72.2 sen 1 000t μA; 2.05 kΩ.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Considérese el sistema simple de ecuaciones:

$$7v_1 - 3v_2 - 4v_3 = -11 \qquad [1]$$

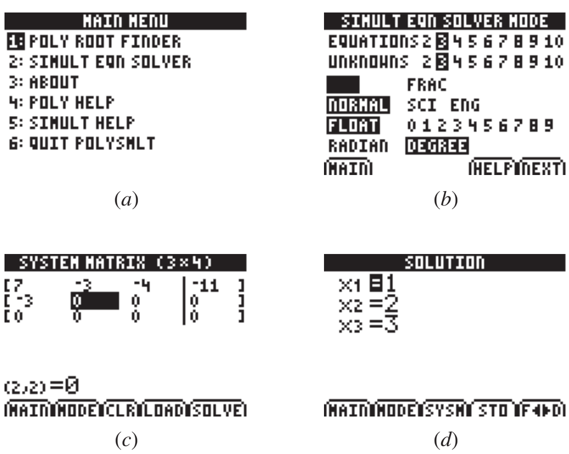
$$-3v_1 + 6v_2 - 2v_3 = 3 \qquad [2]$$

$$-4v_1 - 2v_2 + 11v_3 = 25 \qquad [3]$$

Este sistema *podría* resolverse mediante la eliminación sistemática de las variables. Sin embargo, tal procedimiento es prolongado y quizá nunca produzca respuestas si se efectúa de manera no sistemática con un gran número de ecuaciones simultáneas. Por fortuna, se dispone de muchas más opciones, algunas de las cuales se explorarán en este apéndice.

La calculadora científica

Quizá el método más directo cuando es necesario enfrentar un sistema de ecuaciones como el correspondiente a las ecuaciones [1] a [3], en el que tenemos coeficientes numéricos y sólo son de interés los valores específicos de las incógnitas (lo cual se opone a las relaciones algebraicas), consiste en emplear cualquiera de las diversas calculadoras científicas presentes ahora en el mercado. Por ejemplo, en una Texas Instruments TI-84 se puede utilizar el buscador de raíces de polinomios (Polynomial Root Finder) y el solucionador de ecuaciones simultáneas (Simultaneous Equation Solver). (Puede ser necesario que usted instale la aplicación usando TI Connect®.) Oprimiendo la tecla **APPS**, y buscando hacia abajo, encuentre la aplicación llamada **PLYSmlt2**. Ejecutando y continuando más allá de la pantalla de bienvenida, aparece el menú principal de la figura A2.1*a.* Al seleccionar la segunda partida del menú se obtiene la pantalla que



■ **FIGURA A2.1** Secuencia de pantalla para resolver las ecuaciones [1] a [3], como se ve en una TI-84 ejecutando la aplicación de solucionador de ecuaciones simultáneas (Simultaneous Equation Solver).

se muestra en la figura A2.1*b*, donde se han elegido tres ecuaciones con tres incógnitas. Después de oprimir **NEXT**, aparece una pantalla similar a la que se muestra en la figura A2.1*c*. Después de terminar de introducir todos los coeficientes, al oprimir el botón **SOLVE** se obtiene la pantalla **Solution** representada en la figura A2.1*d*. Como no se nombraron las variables, se necesita una ligera conversión mental para percatarse de que $X_1 = v_1$, $X_2 = v_2$, etcétera.

Debemos observar que cada calculadora capaz de resolver ecuaciones simultáneas tiene su propio procedimiento para introducir la información que se requiere; por lo tanto, no hay que deshacerse de nada que tenga el título "Manual del propietario" o "Instrucciones", sin que importe qué tan tentador pueda serlo.

Matrices

Otro método muy útil para solucionar un sistema de ecuaciones se basa en el concepto de matrices. Considérense las ecuaciones [1], [2] y [3]. El siguiente arreglo de los coeficientes constantes de las ecuaciones

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

recibe el nombre de ***matriz***; se eligió el símbolo **G** porque cada elemento de la matriz es un valor de conductancia. La propia matriz no tiene "valor", simplemente es un arreglo ordenado de elementos. Utilizamos negritas para representar una matriz y encerramos el propio arreglo mediante corchetes.

Una matriz que cuenta con m renglones y n columnas se denomina matriz de $(m \times n)$ (lo que se pronuncia "m por n"). De tal modo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

es una matriz de (2×3) y la matriz **G** del ejemplo corresponde a una matriz de (3×3). Una matriz de $(n \times n)$ es una ***matriz cuadrada*** de orden n.

Una matriz de $(m \times 1)$ se conoce como *matriz columna* o ***vector***. Así,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

es una matriz columna de (2×1) de tensiones fasoriales, e

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

es un vector de corriente fasorial de (2×1). Una matriz de $(1 \times n)$ se conoce como *vector renglón*.

Dos matrices de $(m \times n)$ son iguales si sus elementos correspondientes son iguales. De tal modo, si a_{jk} es un elemento de **A** localizado en el renglón j y la columna k y b_{jk} es el elemento en el renglón j y la columna k en una matriz **B**, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ *si y sólo si* $a_{jk} = b_{jk}$ para todo $1 \le j \le m$ y $1 \le k \le n$. De tal modo, si

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

entonces $\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$ y $\mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$.

Dos matrices de ($m \times n$) pueden sumarse, sumando los elementos correspondientes. De tal modo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

A continuación consideraremos el producto de matrices **AB** donde **A** es una matriz ($m \times n$) y **B** es una matriz de ($p \times q$). Si $n = p$, se dice que las matrices son *conformes* y que existe su producto. Esto es, la multiplicación de matrices se define sólo en el caso en el que el número de columnas de la primera matriz del producto sea igual al número de renglones de la segunda matriz.

La definición formal de una multiplicación de matrices establece que el producto de la matriz **A** de ($m \times n$) y de la matriz **B** de ($n \times q$) es una matriz de ($m \times q$) que tiene elementos c_{jk}, $1 \leq j \leq m$ y $1 \leq k \leq q$, donde

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}$$

Esto es, para encontrar el elemento en el segundo renglón y la tercera columna del producto, se multiplica cada uno de los elementos del segundo renglón de **A** por el elemento correspondiente en la tercera columna de **B** y luego se suman los n resultados. Por ejemplo, dada la matriz **A** de (2×3) y la matriz **B** de (3×2).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}) \end{bmatrix}$$

El resultado es una matriz de (2×2).

Como ejemplo numérico de multiplicación de matrices, tomamos

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 16 & -16 \end{bmatrix}$$

donde $6 = (3)(2) + (2)(-2) + (1)(4)$, $4 = (3)(3) + (2)(-1) + (1)(-3)$, etcétera.

La multiplicación de matrices no es conmutativa. Por ejemplo, dada la matriz **C** de (3×2) y la matriz **D** de (2×1) resulta evidente que el producto **CD** se podría calcular, aunque el producto **DC** ni siquiera está incluso definido.

Como ejemplo final, sea

$$\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que $\mathbf{t}_A\,\mathbf{t}_B$ y $\mathbf{t}_B\,\mathbf{t}_A$ están definidas. Sin embargo,

$$\mathbf{t}_A\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 21 & 2 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$$

mientras que:

$$\mathbf{t}_B\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

PRÁCTICA

A2.1 Dada $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$, encuentre: (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$; (b) $\mathbf{AB}$; (c) $\mathbf{BA}$; (d) $\mathbf{AV} + \mathbf{BC}$; (e) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$.

Respuestas: $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & -17 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} V_1 - 3V_2 + 170 \\ 3V_1 + 5V_2 - 10 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -8 & -18 \\ 18 & 16 \end{bmatrix}$.

Inversión de matrices

Si escribimos un sistema de ecuaciones utilizando la notación de matrices

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix} \qquad [4]$$

resolveríamos para el vector de tensión si se multiplican ambos lados de la ecuación [4] por la inversa de la matriz **G**:

$$\mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix} \qquad [5]$$

Este procedimiento utiliza la identidad $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G} = \mathbf{I}$, donde **I** es la matriz identidad, una matriz cuadrada del mismo tamaño que **G**, con ceros en todos lados excepto en la diagonal. Cada elemento de la diagonal de una matriz identidad es la unidad. Por lo tanto, la ecuación [5] se convierte en

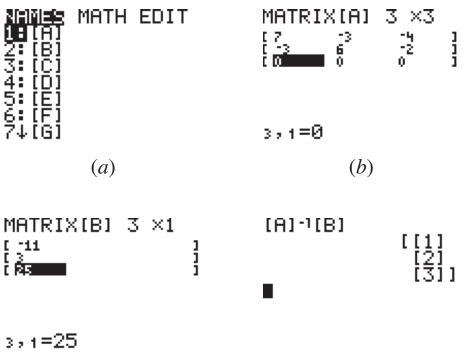
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

que es posible simplificar en

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

puesto que la matriz identidad multiplicada por cualquier vector es simplemente igual a ese vector (la prueba se deja al lector en un ejercicio de 30 segundos). De esta forma, la solución del sistema de ecuaciones se transforma en el problema de obtener la matriz inversa de **G**. Muchas calculadoras científicas proporcionan los medios para efectuar el álgebra de matrices.

Volviendo a la TI-84, se oprime **2ND** y **MATRIX** para obtener la pantalla que se muestra en la figura A2.2*a*. Desplazándose horizontalmente hasta **EDIT**, oprimimos la tecla **ENTER** y se selecciona una matriz de 3 × 3, lo cual produce una pantalla similar a la que se muestra en la figura A2.2*b*. Una vez que hemos terminado de introducir la matriz, oprimimos **2ND** y **QUIT**. Regresando al editor **MATRIX**, creamos un vector de 3 × 1 que se llama **B**, como se muestra en la figura A2.2*c*. Ahora (finalmente) ya se puede despejar el vector de solución. Oprimiendo **2ND** y **MATRIX**, bajo **NAMES** se selecciona **[A]** y oprimimos **ENTER** y en seguida la tecla $\boldsymbol{x^{-1}}$. Luego seleccionamos **[B]** del mismo modo (se podría haber oprimido la tecla de multiplicación entre las dos, pero no es necesario). El resultado de nuestro cálculo se muestra en la figura A2.2*d*, y concuerda con el ejercicio anterior.



(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

■ **FIGURA A2.2** Secuencia de pantallas para la solución de matrices: (*a*) Pantalla de editor de matrices; (*b*) introducción de los términos; (*c*) creación de vector derecho; (*d*) solución de ecuación matricial.

Determinantes

Aunque una matriz *en sí misma* no tiene "valor", el ***determinante*** de la matriz cuadrada *sí* lo tiene. Para ser precisos, debemos decir que el determinante de una matriz es un valor, aunque el uso común permite hablar del arreglo mismo y de su valor como determinante. Debemos simbolizar un determinante mediante Δ y emplear un subíndice adecuado para denotar la matriz a la que se refiere. De tal manera,

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{vmatrix}$$

Observe que se usan líneas verticales simples para encerrar el determinante.

El valor de cualquier determinante se obtiene al desarrollarla en términos de sus menores. Para realizar esta tarea se selecciona cualquier renglón *j* o cualquier columna *k*, se multiplica cada elemento de ese renglón o columna por su menor y por $(-1)^{j+k}$, y luego se suman los productos. El menor de los elementos que aparecen tanto en el renglón *j* como en la columna *k* es el determinante que se obtiene cuando se eliminan el renglón *j* y la columna *k*, lo cual se indica mediante Δ_{jk}.

Como un ejemplo, desarrollaremos el determinante Δ_G a lo largo de la columna 3. Multiplicamos primero el (−4) de la parte superior de esta columna por $(-1)^{1+3} = 1$ y luego por su menor:

$$(-4)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$$

luego se repite lo anterior para estos dos elementos en la columna 3 y se suman los resultados:

$$-4\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 11\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$$

Los menores contienen sólo dos renglones y dos columnas. Son de orden 2 y sus valores se determinan con facilidad expandiendo otra vez en términos de menores, lo que en este caso es una operación trivial. De tal modo, para el primer determinante, se desarrolla a lo largo de la primera columna multiplicando (-3) por $(-1)^{1+1}$ y su menor, que es meramente el elemento (-2), y luego se multiplica (-4) por $(-1)^{2+1}$ y por 6. De este modo,

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = (-3)(-2) - 4(-6) = 30$$

Suele ser más fácil recordar el resultado de un determinante de segundo orden como “el término izquierdo superior multiplicado por el derecho inferior, menos el derecho superior por el izquierdo inferior”. Por último,

$$\begin{aligned} \Delta_G &= -4[(-3)(-2) - 6(-4)] \\ &\quad + 2[(7)(-2) - (-3)(-4)] \\ &\quad + 11[(7)(6) - (-3)(-3)] \\ &= -4(30) + 2(-26) + 11(33) \\ &= 191 \end{aligned}$$

Para practicar, desarrollaremos este mismo determinante a lo largo del primer renglón:

$$\begin{aligned} \Delta_G &= 7\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 11 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 7(62) + 3(-41) - 4(30) \\ &= 191 \end{aligned}$$

El desarrollo por menores es válido para una determinante de cualquier orden.

Al repetir estas reglas para evaluar una determinante en términos más generales, podríamos afirmar que dada una matriz **a**,

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

se podría obtener Δ_a mediante el desarrollo en términos de menores a lo largo de cualquier renglón j:

$$\begin{aligned} \Delta_a &= a_{j1}(-1)^{j+1}\Delta_{j1} + a_{j2}(-1)^{j+2}\Delta_{j2} + \cdots + a_{jN}(-1)^{j+N}\Delta_{jN} \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_{jn}(-1)^{j+n}\Delta_{jn} \end{aligned}$$

o a lo largo de cualquier columna k:

$$\begin{aligned}\Delta_a &= a_{1k}(-1)^{1+k}\Delta_{1k} + a_{2k}(-1)^{2+k}\Delta_{2k} + \cdots + a_{Nk}(-1)^{N+k}\Delta_{Nk}\\ &= \sum_{n=1}^{N} a_{nk}(-1)^{n+k}\Delta_{nk}\end{aligned}$$

El cofactor C_{jk} del elemento que aparece tanto en el renglón j como en la columna k es simplemente $(-1)^{j+k}$ veces el menor Δ_{jk}. De tal manera, $C_{11}, = \Delta_{11}$, aunque $C_{12} = -\Delta_{12}$. Se escribiría ahora

$$\Delta_a = \sum_{n=1}^{N} a_{jn}C_{jn} = \sum_{n=1}^{N} a_{nk}C_{nk}$$

Como ejemplo, consideremos este determinante de cuarto orden:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 0\\ -1 & 4 & 2 & -3\\ -2 & -1 & 5 & -1\\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Observamos que

$$\begin{aligned}\Delta_{11} &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3\\ -1 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4(10+3) + 1(4+9) - 3(-2+15) = 26\\ \Delta_{12} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3\\ -2 & 5 & -1\\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1(10+3) + 2(4+9) + 0 = 13\end{aligned}$$

y $C_{11} = 26$, en tanto que $C_{12} = -13$. Al obtener el valor de Δ como práctica, tenemos

$$\begin{aligned}\Delta &= 2C_{11} + (-1)C_{12} + (-2)C_{13} + 0\\ &= 2(26) + (-1)(-13) + (-2)(3) + 0 = 59\end{aligned}$$

Regla de Cramer

A continuación consideramos la regla de Cramer, que permite determinar los valores de variables desconocidas. También resulta útil para solucionar sistemas de ecuaciones donde los coeficientes numéricos no se han especificado, lo que en consecuencia hace que las calculadoras se confundan. Consideraremos otra vez las ecuaciones [1], [2] y [3]; definimos el determinante Δ_1 como el que se obtiene cuando la primera columna de Δ_G se sustituye por las tres constantes de los lados de la derecha de las tres ecuaciones. En consecuencia,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & -3 & -4\\ 3 & 6 & -2\\ 25 & -2 & 11 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos a lo largo de la primera columna,

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -11\begin{vmatrix} 6 & -2\\ -2 & 11 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & -4\\ -2 & 11 \end{vmatrix} + 25\begin{vmatrix} -3 & -4\\ 6 & -2 \end{vmatrix}\\ &= -682 + 123 + 750 = 191\end{aligned}$$

La regla de Cramer establece entonces que

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_G} = \frac{191}{191} = 1 \text{ V}$$

y

$$v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_G} = \begin{vmatrix} 7 & -11 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ -4 & 25 & 11 \end{vmatrix} = \frac{581 - 63 - 136}{191} = 2 \text{ V}$$

y, por último,

$$v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_G} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & -11 \\ -3 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 25 \end{vmatrix} = \frac{1\,092 - 291 - 228}{191} = 3 \text{ V}$$

La regla de Cramer resulta aplicable a un sistema de N ecuaciones lineales simultáneas con N incógnitas; en el caso de la variable i-ésima v_i:

$$v_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_G}$$

PRÁCTICA

A2.2 Calcule

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;

(d) Encuentre i_2 si $5i_1 - 2i_2 - i_3 = 100$, $-2i_1 + 6i_2 - 3i_3 - i_4 = 0$, $-i_1 - 3i_2 + 4i_3 - i_4 = 0$, y $-i_2 - i_3 = 0$.

Respuestas: 4; 33; −411; 1.266.

UNA PRUEBA DEL TEOREMA DE THÉVENIN

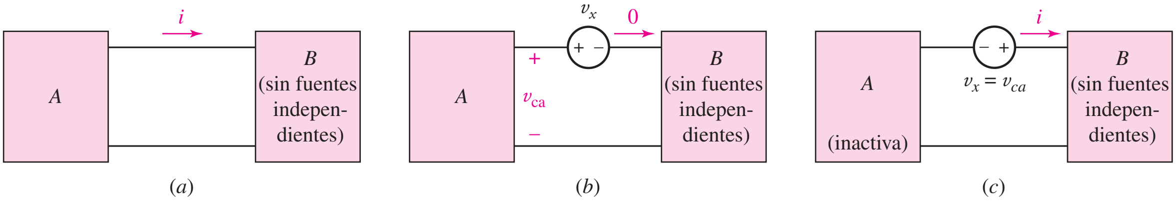
Demostraremos el teorema de Thévenin de la misma forma en la que se enunció en la sección 5.4 del capítulo 5:

> Dado cualquier circuito lineal, se reordena en la forma de dos redes y *A* y *B* conectadas mediante dos alambres. Se define una tensión v_{ca} como la tensión en circuito abierto que aparece en las terminales de *A* cuando se desconecta *B*. Entonces, todas las corrientes y las tensiones de *B* permanecerán invariables, si todas las fuentes de tensión y de corriente *independientes* de *A* se "suprimen" o "se hacen iguales a cero" y si se conecta una fuente de tensión independiente v_{ca} con la polaridad adecuada, en serie con la red *A* desconectada (inactiva).

Llevaremos a cabo la prueba demostrando que la red *A* original y el equivalente de Thévenin de la red *A* provocan que fluya la misma corriente hacia las terminales de la red *B*. Si las corrientes son las mismas, entonces las tensiones deben ser iguales; en otras palabras, si se aplica cierta corriente, que se podría considerar como una fuente de corriente, a la red *B* entonces la fuente de corriente y la red *B* constituyen un circuito que tiene una tensión de entrada específica como respuesta. Por lo tanto, la corriente determina la tensión. De manera alternativa, se podría, si así lo deseáramos, demostrar que la tensión en la terminal de *B* permanece sin cambio, debido a que la tensión determina también de manera única a la corriente. Si la tensión de entrada y la corriente hacia la red *B* no cambian, se concluye entonces que tampoco varían las corrientes y las tensiones *a lo largo* de la red *B*.

En primera instancia demostraremos el teorema para el caso en el que la red *B* está inactiva (sin fuentes independientes). Después de que este paso se haya cumplido, podríamos utilizar el principio de superposición para ampliar el teorema, de manera que incluya las redes *B* que contienen fuentes independientes. Cada red quizá contenga fuentes dependientes, siempre que sus variables de control estén en la misma red.

La corriente *i* que circula por el conductor superior desde la red *A* hasta la red *B* en la figura A3.1*a* se debe entonces por completo a las fuentes independientes que están



■ **FIGURA A3.1** (*a*) Redes lineales generales *A* y *B* que no contienen fuentes independientes. Los controles de las fuentes dependientes deben aparecer en la misma parte de la red. (*b*) La fuente de Thévenin se inserta en el circuito y se ajusta hasta que $i = 0$. Ninguna tensión aparece en la red *B* y por ello $v_x = v_{ca}$. Así, la fuente de Thévenin produce una corriente $-i$ mientras que la red *A* proporciona *i*. (*c*) La fuente de Thévenin está invertida y la red *A* suprimida. La corriente es, por lo tanto, igual a *i*.

en la red A. Suponga ahora que se suma una fuente de tensión adicional v_x, la cual se llamará la fuente de Thévenin, en el conductor en el que se mide i como se indica en la figura A3.1b, y luego se ajusta la variación en magnitud y en el tiempo de v_x hasta que la corriente se reduce a cero. Así, por definición de v_{ca}, la tensión en las terminales de A debe ser v_{ca}, puesto que $i = 0$. La red B no contiene fuentes independientes, ni entra corriente a sus terminales; por lo tanto, no hay tensión en las terminales de la red B y aplicando la ley de tensiones de Kirchhoff, la tensión de la fuente de Thévenin corresponde a v_{ca} volts, $v_x = v_{ca}$. Además, dado que la fuente de Thévenin y la red A no entregan de manera conjunta corriente a B, y en virtud de que la red A por sí sola entrega una corriente i, la superposición requiere que la fuente de Thévenin que actúa por su cuenta deba entregar una corriente de $-i$ a B. La fuente que actúa sola en una dirección invertida, como en la figura A3.1c, produce, por lo tanto, una corriente i en el hilo de conexión superior. Sin embargo, esta situación es la misma que la conclusión a la que se llegó mediante el teorema de Thévenin: la fuente v_{ca} de Thévenin que actúa en serie con la red A inactiva es equivalente a la red dada.

Consideremos el caso donde la red B puede ser una red activa. Pensamos que la corriente i, que fluye de la red A a la red B por el conductor superior, estuviera compuesta de dos partes, i_A e i_B, donde i_A es la corriente que produce A cuando actúa sola y la corriente i_B se debe sólo a B cuando actúa sola. La capacidad para dividir la corriente en estos dos componentes es una consecuencia directa de aplicar el principio de superposición a las dos redes *lineales*; la respuesta completa y las dos respuestas parciales se indican mediante los diagramas de la figura A3.2.

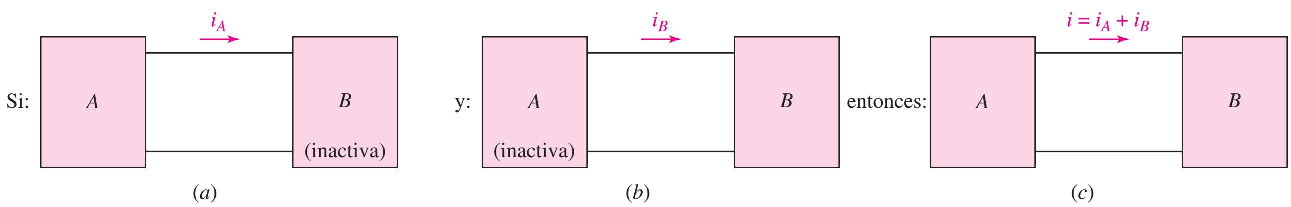


FIGURA A3.2 La superposición permite que la corriente i se considere como la suma de dos respuestas parciales.

La respuesta parcial i_A ya se consideró; si la red B está inactiva, se sabe que se puede sustituir la red A por la fuente de Thévenin y la red A inactiva. En otras palabras, de las tres fuentes que se deben tener presentes —la de A, la de B y la fuente de Thévenin— la respuesta parcial i_A ocurre cuando A y B están inactivas y la fuente de Thévenin se encuentra activa. Para prepararse para el uso de la superposición, se permite que A siga inactiva, aunque se activa B y se desactiva la fuente de Thévenin; por definición, se obtiene la respuesta parcial i_B. Si se superponen los resultados, la respuesta cuando A está inactiva y tanto la fuente de Thévenin como B se encuentran activas, corresponde $i_A + i_B$. Esta suma es la corriente i original, de modo que la situación en la que la fuente de Thévenin y B están activas pero A está inactiva es la que se desea en el circuito equivalente de Thévenin. De tal modo, se podría sustituir la red activa A por su fuente de Thévenin, la tensión en circuito abierto, en serie con la red A inactiva, sin que importe el estado de la red B, que puede estar activa o inactiva.

TUTORIAL DE PSpice®

SPICE es un acrónimo de Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis (Programa de simulación con énfasis en circuitos integrados). Es un poderoso programa y estándar en la industria que se utiliza en todo el mundo en una gran variedad de aplicaciones de análisis de circuitos. SPICE fue desrrollado originalmente a principios de los años setenta por Donald O. Peterson y sus colegas en la Universidad de California en Berkeley. Es interesante que Peterson permitiera la distribución libre y sin trabas del conocimiento creado en los laboratorios de la universidad, pues eligió provocar un impacto de conocimiento en lugar de sacar provecho económico. En 1984, MicroSim Corporation presentó una versión de SPICE para PC llamada PSpice®, la cual contaba con interfases gráficas intuitivas alrededor del núcleo de las rutinas de software de SPICE. Actualmente existen algunas variantes de SPICE disponibles en el mercado, así como productos de software que compiten con él.

El objetivo de este apéndice es presentar simplemente los fundamentos del análisis de circuitos asistido por computadora; se ofrecen más detalles en el texto así como en las referencias que se presentan bajo el título de lecturas recomendadas. Los temas avanzados que cubren las lecturas complementarias incluyen cómo determinar la sensibilidad de una variable de salida a los cambios en el valor de un componente específico; cómo obtener gráficas de la salida *versus* un valor de la fuente; determinar la salida de ca como una función de la frecuecia de la fuente; métodos para llevar a cabo análisis de ruido y distorsión; modelos no lineales de componentes, y cómo modelar los efectos de la temperatura en ciertos tipos de circuitos.

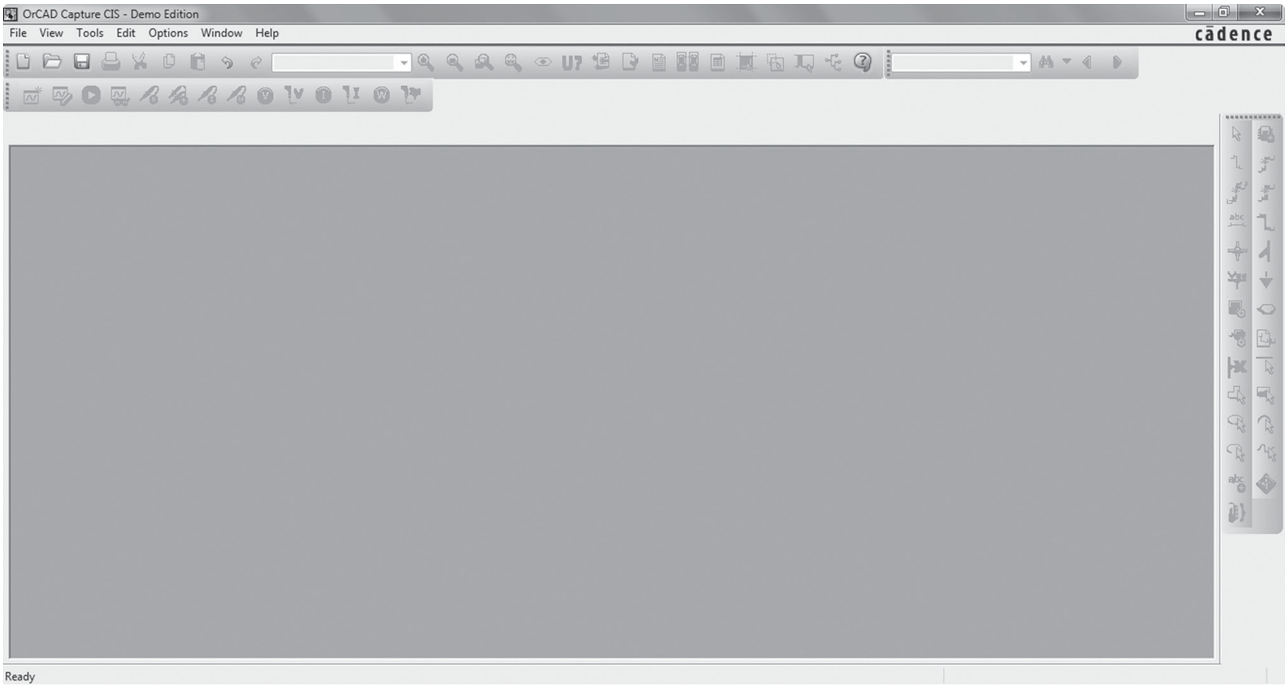
La adquisición de MicroSim por parte de OrCAD y la subsecuente adquisición de OrCAD por Cadence han generado muchos cambios en este popular paquete de simulación de circuitos. En el momento en el que se escribió este libro, OrCAD Capture CIS-Demo 16.3 es la versión profesional actual; una versión más modesta se encuentra disponible gratis en internet (www.cadence.com). Esta nueva versión reemplaza a la popular versión estudiantil 9.1 de PSpice y, aunque es ligeramente distinta, en particular en términos del editado de esquemas, su apariencia debe ser familiar a los usuarios de versiones anteriores de PSpice.

La documentación que acompaña el Demo de la versión OrCAD 16.3 presenta algunas restricciones que no se aplican a la versión profesional (disponible en el mercado). Lo más significativo es que sólo los circuitos que cuentan con 60 o menos partes pueden guardarse y simularse. Sin embargo, es posible ver y dibujar circuitos más grandes. Se ha seleccionado trabajar con el editor de esquemas OrCAD Capture, ya que la versión actual es muy similar al editor de captura de esquemas PSpice A/D. En la actualidad Cadence también ofrece la posibilidad de que PSpice A/D se baje de internet, pero ya no se le proporciona soporte técnico a éste.

Arranque de PSpice

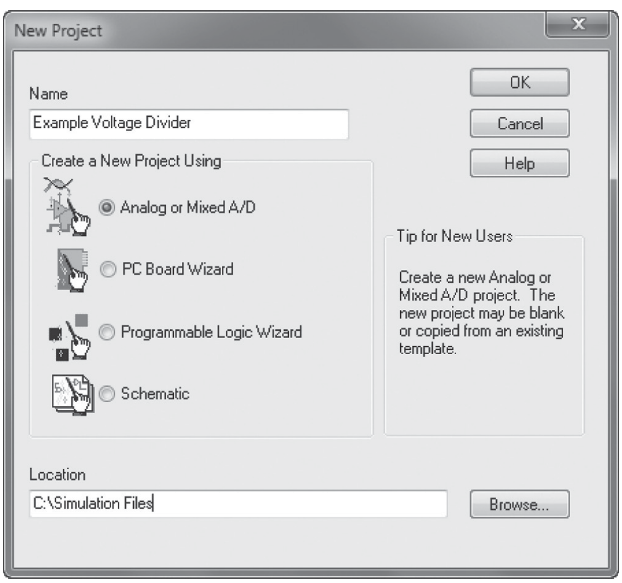
El análisis de circuitos asistido por computadora consta de tres pasos: 1) dibujo del esquema; 2) simulación del circuito, y 3) extracción de la información deseada de los resultados de la simulación. El editor de captura de esquemas de OrCAD arranca a través de la lista de programas de Windows que se encuentra en el menú 

; una vez que se selecciona Capture CIS Demo, el editor de esquemas se abre, como se ve en la figura A4.1.

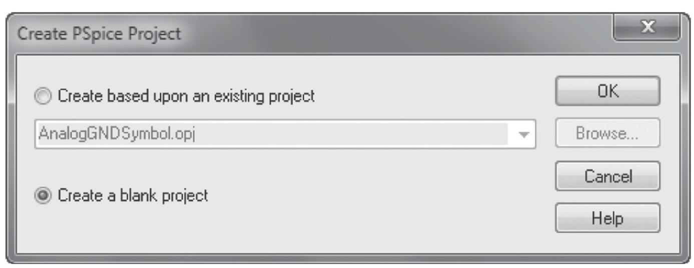


■ **FIGURA A4.1** Ventana de captura del demo CIS.

En el menú **File** seleccionar **New**, después **Project**; aparecerá la ventana de la figura A4.2*a.* Después de que se proporciona un nombre del archivo de simulación y una ruta del directorio, aparecerá la ventana de la figura A4.2*b* (simplemente, seleccione la opción "blank project"). En seguida aparecerá la ventana principal de edición de esquemas, como se muestra en la figura A4.3.

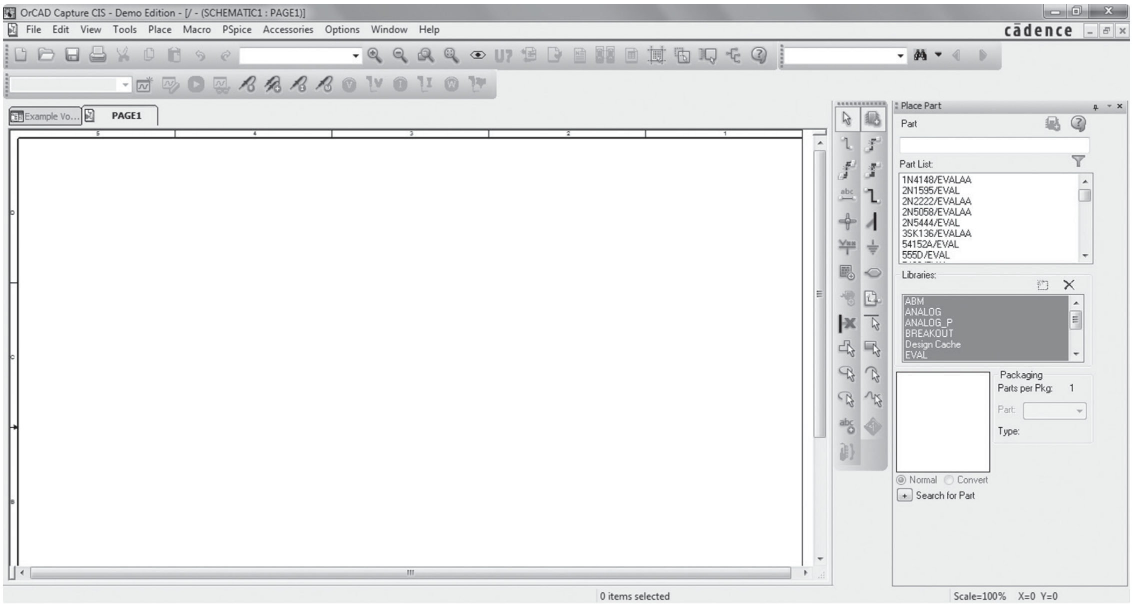


(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA A4.2** (*a*) Ventana New Project. (*b*) Ventana Create PSpice Project.



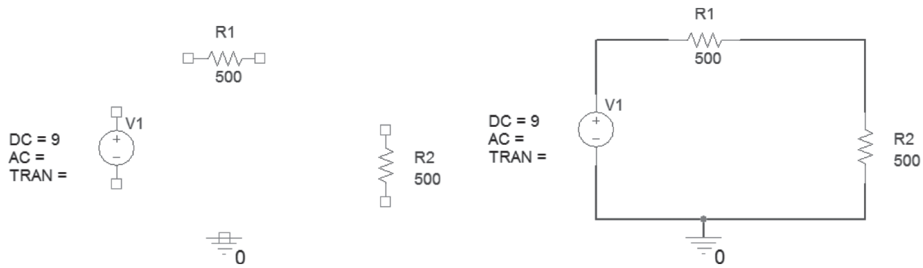
■ **FIGURA A4.3** Página principal de captura esquemática de CIS Demo.

A estas alturas, ya estamos listos para dibujar el circuito, por lo que haremos una prueba con el divisor de tensión para propósitos ilustrativos. Primero colocaremos los componentes necesarios en el enrejado y después los conectaremos.

Al desplegar el menú **Place**, elegimos **Part**. Al teclear una “r” minúscula como se muestra, hacemos clic en OK y esto permite ahora mover el símbolo de resistencia alrededor de la ventana esquemática usando el ratón. Un solo clic en el botón izquierdo coloca una resistencia (llamada R1) en la ubicación del ratón; un segundo clic coloca una segunda resistencia en el esquema (llamado R2). Un solo clic en el botón derecho y la selección de **End Mode** cancela colocaciones ulteriores de resistencias. La segunda resistencia no tiene la orientación adecuada, pero la podemos manipular fácilmente seleccionándola con un solo clic derecho y luego seleccionando **Rotate**. Si no sabemos el nombre del elemento que se desea, podemos explorar la biblioteca de partes que se proporciona. Si no deseamos resistencias de 1 kΩ, por ejemplo, quizá requerimos dos resistencias de 500 Ω, se cambian los valores predeterminados simplemente haciendo doble clic en el “1k” que está junto al símbolo adecuado.

Por supuesto, ningún circuito divisor de tensión está completo sin una fuente de tensión (**vsrc**). Haciendo doble clic en **DC=**, elegimos un valor de 9 V para la fuente. Se necesita otro componente: SPICE necesita que se especifique un nodo de referencia (o de tierra). Haciendo clic en el símbolo GND en el extremo derecho de la ventana esquemática, elegimos 0/Source entre las opciones. El progreso hasta aquí se muestra en la figura A4.4*a*; lo que resta por hacer es interconectar los componentes. Esto se logra seleccionando el ícono **Place wire (W)**. Las teclas izquierda y derecha del ratón controlan cada alambre (aquí se sugiere algo de experimentación; después, seleccione los segmentos de alambre no deseados y pulse la tecla Delete). El circuito final se muestra en la figura A4.4*b*. Vale la pena señalar que el editor permitirá al usuario cablear a través de una resistencia (eliminándolo así por cortocircuito), lo cual puede ser difícil de ver. Generalmente aparece un símbolo de advertencia antes de cablear en una ubicación incorrecta.

Antes de simular el circuito, guardamos haciendo clic en el ícono de guardar o seleccionando **Save** del menú **File**. Del menú **PSpice** se selecciona **New Simulation Profile**, y se teclea Voltage Divider en la caja de diálogo que aparece.



(*a*) (*b*)

FIGURA A4.4 (*a*) Elementos colocados en la cuadrícula. (*b*) Circuito totalmente cableado, listo para recibir el estímulo.

La caja de diálogo de ajustes de simulación (Simulation Settings) que aparece nos permite establecer diversos tipos de simulaciones; para el ejemplo actual necesitamos seleccionar **Bias Point** bajo el menú **Analysis type**. Desplegando nuevamente el menú **PSpice**, seleccionamos **Run**. Los resultados de la simulación se muestran en la figura A4.5.

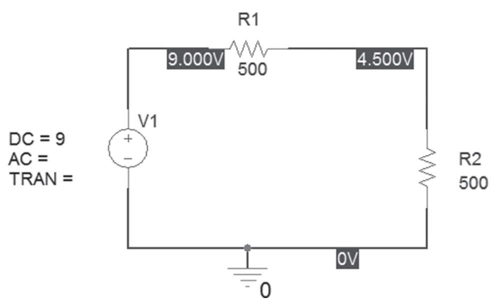


FIGURA A4.5 Resultados de la simulación.

Por fortuna, la simulación que realizamos nos proporciona los resultados esperados, e incluso nos permite dividir la tensión de la fuente a través de dos resistencias de igual valor. Asimismo, también podemos ver los resultados de la simulación seleccionando **View Output File** en el menú **PSpice**. Accediendo al final de este archivo, observamos las líneas siguientes:

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(N00109)	9.0000	(N00116)	4.5000

donde el nodo 109 es la referencia positiva de la fuente de tensión, y el nodo 116 es la unión de las dos resistencias. Esta información se encuentra disponible en la parte superior del archivo.

LECTURAS ADICIONALES

Dos libros muy buenos dedicados a la simulación en SPICE y PSpice son

Paul W. Tuinenga, *SPICE: A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSpice*, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, Prentice-Hall, 1995.

Roy W. Goody, *OrCAD PSpice for Windows Volume 1: DC and AC Circuits*, 3a ed., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, Prentice-Hall, 2001.

Una historia interesante acerca de los simuladores de circuitos, así como las contribuciones de Donald Peterson en este campo se pueden encontrar en

T. Perry, "Donald O. Peterson [electronic engineering biography]", *IEEE Spectrum* **35** (1998), 22-27.

NÚMEROS COMPLEJOS

Este apéndice incluye secciones que abarcan la definición de un número complejo, sus operaciones aritméticas básicas, la identidad de Euler y las formas exponencial y polar de los números complejos. Presentamos primero el concepto de número complejo.

A5.1 NÚMERO COMPLEJO

Nuestra preparación previa en matemáticas estuvo relacionada exclusivamente con números reales: 4, $-\frac{2}{7}$ y π entre otros. Sin embargo, de inmediato aparecen ecuaciones algebraicas como $x^2 = -3$, la cual no podría satisfacer ningún número real. Una ecuación de este tipo se resuelve sólo a través de la introducción de la *unidad imaginaria* o el *operador imaginario*, que se designará con el símbolo j. Por definición, $j^2 = -1$, y por ello, $j = \sqrt{-1}$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$, y así sucesivamente. El producto de un número real y del operador imaginario se denomina *número imaginario*; además, la suma de un número real y de un número imaginario se conoce como *número complejo.* De tal manera, un número que tiene la forma $a + jb$, donde a y b son números reales, es un número complejo.

Los matemáticos designan al operador imaginario mediante el símbolo *i*, pero en ingeniería eléctrica es costumbre utilizar *j* para evitar confusión con el mismo símbolo de la corriente.

La elección de las palabras *imaginaria* y *compleja* es desafortunada. Se utilizan aquí y en la literatura matemática como términos técnicos para designar una clase de números. Ni se justifica ni se intenta interpretar imaginario como "no pertenecer al mundo físico" o complejo como "complicado".

Designaremos un número complejo mediante un solo símbolo especial; en esa forma, $\mathbf{A} = a + jb$. La naturaleza compleja del número se indica mediante el uso del tipo de letra en negritas; en textos manuscritos, se acostumbra utilizar una barra sobre la letra. El número complejo **A** que acaba de mostrarse se describe como si tuviera una *componente real* o *parte real a* y una *componente imaginaria* o *parte imaginaria b*. Lo anterior se expresa también como

$$\text{Re}\{\mathbf{A}\} = a \qquad \text{Im}\{\mathbf{A}\} = b$$

La componente imaginaria de **A** *no* es jb. Por definición, la componente imaginaria es un número real.

Debe observarse que se podría considerar a todos los números reales como números complejos que tienen partes imaginarias iguales a cero. Por lo tanto, los números reales se incluyen en el sistema de los números complejos, de modo que podrían considerarse en esas condiciones como un caso especial. En consecuencia, cuando definimos las operaciones aritméticas fundamentales de los números complejos, debemos esperar que se reduzcan a las definiciones correspondientes de números reales, si la parte imaginaria de todo número complejo se hace igual a cero.

Dado que cualquier número complejo se expresa totalmente por medio de un par de números reales, como a y b en el ejemplo anterior, obtenemos cierto auxilio visual al representar gráficamente un número complejo sobre un sistema de coordenadas rectangular o cartesiano. Si tenemos un eje real y un eje imaginario, como en la figura A5.1, formamos un *plano complejo* o *diagrama de Argand*, sobre el cual cualquier número complejo puede representarse como un solo punto. Indicamos los números complejos $\mathbf{M} = 3 + j1$ y $\mathbf{N} = 2 - j2$. Es importante comprender que este plano complejo sólo es una ayuda visual; no es esencial en lo absoluto para los enunciados matemáticos que siguen.

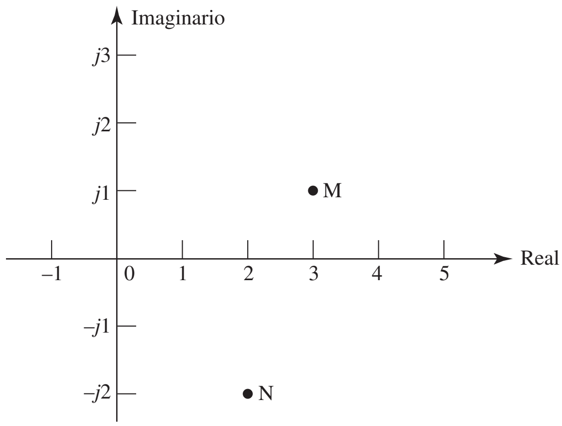


FIGURA A5.1 Los números complejos $\mathbf{M} = 3 + j1$ y $\mathbf{N} = 2 - j2$ se muestran en el plano complejo.

Definimos los números complejos como iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias también lo son. Gráficamente, entonces, para cada punto en el plano complejo corresponde sólo un número complejo, y de manera inversa, para cada número complejo corresponde sólo un punto en el plano complejo. De tal modo, suponemos que se dan dos números complejos:

$$\mathbf{A} = a + jb \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = c + jd$$

Entonces, si

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

es necesario que

$$a = c \qquad \text{y} \qquad b = d$$

Un número complejo expresado como la suma de un número real y de un imaginario, como $\mathbf{A} = a + jb$, se dice que está en forma *rectangular* o *cartesiana.* Otras formas de números complejos aparecerán un poco más adelante.

Definimos ahora las operaciones fundamentales de suma, resta, multiplicación y división de números complejos. La suma de dos números complejos se define como el número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales de los dos números complejos y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias de los dos números complejos. Por lo tanto,

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + (b + d)$$

Por ejemplo

$$(3 + j4) + (4 - j2) = 7 + j2$$

La diferencia de dos números complejos se calcula de manera similar; por ejemplo,

$$(3 + j4) - (4 - j2) = -1 + j6$$

La suma y la resta de números complejos también se llevan a cabo gráficamente sobre el plano complejo. Cada número complejo se representa como un vector, o un segmento de recta orientado; la suma se obtiene completando el paralelogramo, que se ilustra en la figura A5.2*a*, o conectando la punta y la cola de los vectores, como se muestra en

la figura A5.2*b*. Un bosquejo gráfico muchas veces es útil para verificar una solución numérica más exacta.

El producto de dos números complejos se define mediante

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(bc + ad)$$

Este resultado quizá se obtenga con mayor facilidad mediante la multiplicación directa de dos términos binomiales, utilizando las reglas del álgebra de números reales y simplificando después el resultado al observar que $j^2 = -1$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(3 + j4)(4 - j2) &= 12 - j6 + j16 - 8j^2 \\ &= 12 + j10 + 8 \\ &= 20 + j10\end{aligned}$$

Es más fácil multiplicar los números complejos mediante este método, en particular si se sustituye de inmediato j^2 por -1, que sustituirlos en la fórmula general que define la multiplicación.

Antes de definir la operación de la división de números complejos, es necesario que definamos el conjugado de un número complejo. El *conjugado* del número complejo $\mathbf{A} = a + jb$ es $a - jb$ y se presenta como $\mathbf{A}^*$. El conjugado de cualquier número complejo, por lo tanto, se obtiene fácilmente con sólo cambiar el signo de la parte imaginaria del número complejo. De tal manera, si

$$\mathbf{A} = 5 + j3$$

entonces

$$\mathbf{A}^* = 5 - j3$$

Resulta evidente que el conjugado de cualquier expresión compleja complicada se encuentra sustituyendo cada término complejo en la expresión por su conjugado, el cual se obtiene al sustituir toda j en la expresión por $-j$.

Las definiciones de suma, resta y multiplicación confirman la validez de los siguientes enunciados: la suma de un número complejo y su conjugado es un número real; la diferencia de un número complejo y su conjugado es un número imaginario; el producto de un número complejo y su conjugado es un número real. También es evidente que si $\mathbf{A}^*$ es el conjugado de $\mathbf{A}$ entonces $\mathbf{A}$ es el conjugado de $\mathbf{A}^*$; en otras palabras, $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^*)^*$. Un número complejo y su conjugado se dice que forman un *par de números complejos conjugados.*

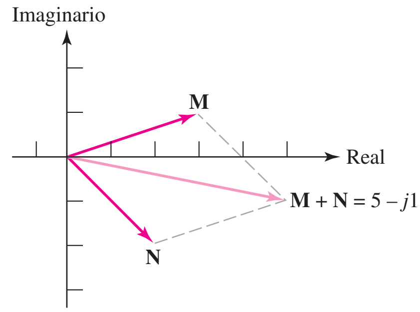
Ahora definimos el cociente de dos números complejos:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{(\mathbf{A})(\mathbf{B}^*)}{(\mathbf{B})(\mathbf{B}^*)}$$

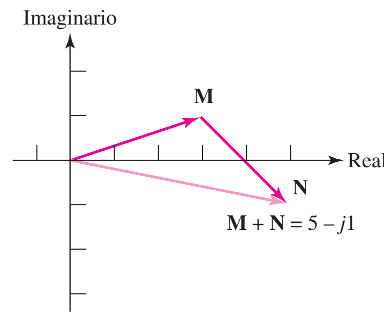
y por ello

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador para obtener un denominador real; este proceso se denomina *racionalizar el denominador.* Como un ejemplo numérico



(*a*)



(*b*)

FIGURA A5.2 (*a*) La suma de los números complejos $\mathbf{M} = 3 + j1$ y $\mathbf{N} = 2 - j2$ se obtiene construyendo un paralelogramo. (*b*) La suma de los dos mismos números complejos se determina mediante la combinación de la punta y la cola.

Inevitablemente, en un problema físico un número complejo se acompaña, de alguna forma, por su conjugado.

$$\frac{3+j4}{4-j2} = \frac{(3+j4)(4+j2)}{(4-j2)(4+j2)}$$

$$= \frac{4+j22}{16+4} = 0.2 + j1.1$$

La suma o resta de dos números complejos que se expresan en forma rectangular es una operación relativamente simple; sin embargo, la multiplicación o división de dos números complejos en forma rectangular es más bien un proceso improductivo. Se encontrará que estas dos últimas operaciones resultan mucho más simples cuando los números complejos se dan en forma exponencial o polar. Estas formas se presentarán en las secciones A5.3 y A5.4.

PRÁCTICA

A5.1 Sean $\mathbf{A} = -4 + j5$, $\mathbf{B} = 3 - j2$ y $\mathbf{C} = -6 - j5$, determine: (a) $\mathbf{C} - \mathbf{B}$; (b) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + 5\mathbf{C}$; ($c$) $j^5\mathbf{C}^2(\mathbf{A} + \mathbf{B})$; ($d$) $\mathbf{B}\ \text{Re}[\mathbf{A}] + \mathbf{A}\ \text{Re}[\mathbf{B}]$.

A5.2 Utilizando los mismos valores de **A**, **B** y **C** del problema anterior, encuentre: (a) $[(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*)(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*)^*]^*$; ($b$) $(1/\mathbf{C}) - (1/\mathbf{B})^*$; ($c$) $(\mathbf{B} + \mathbf{C})/(2\mathbf{BC})$.

Respuestas: A5.1: $-9 - j3$; $-47 - j9$; $27 - j191$; $-24 + j23$. A5.2: $-j60$; $-0.329 + j0.236$; $0.0662 + j0.1179$.

A5.2 IDENTIDAD DE EULER

En el capítulo 9 encontramos funciones del tiempo que contienen números complejos, así que es de interés la diferenciación e integración de tales funciones con respecto de la variable real t. Diferenciamos e integramos estas funciones respecto de t mediante los mismos procedimientos empleados para las funciones de tiempo reales. Esto es, las constantes complejas se tratan exactamente como si fueran constantes reales cuando se efectúan las operaciones de diferenciación o integración. Si $\mathbf{f}(t)$ es una función compleja del tiempo, tal como

$$\mathbf{f}(t) = a \cos ct + jb \operatorname{sen} ct$$

Entonces

$$\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} = -ac \operatorname{sen} ct + jbc \cos ct$$

y

$$\int \mathbf{f}(t)\, dt = \frac{a}{c} \operatorname{sen} ct - j\frac{b}{c} \cos ct + \mathbf{C}$$

donde la constante de integración **C** es un número complejo en general.

Algunas veces se requiere diferenciar o integrar una función de una variable compleja respecto de esa variable compleja. En general, el éxito de cualquiera de estas operaciones requiere que la función que se va a diferenciar o a integrar satisfaga ciertas

condiciones. Todas nuestras funciones las cumplen, así que la integración o la diferenciación con respecto a una variable compleja se obtienen a través de métodos idénticos a los usados para variables reales.

En este momento debemos utilizar una relación fundamental muy importante, que se conoce como identidad de Euler. Se demostrará esta identidad, pues resulta muy útil al representar un número complejo en otra forma que no sea la rectangular.

La prueba se basa en los desarrollos en series de potencia de cos θ, sen θ y e^z, que se dan en las contratapas de cualquier libro de cálculo universitario favorito del lector:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

o

$$\cos\theta + j\operatorname{sen}\theta = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

y

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

por lo que

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots$$

Se concluye que

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\operatorname{sen}\theta \qquad [1]$$

o, si $z = -j\theta$, se puede ver que

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\operatorname{sen}\theta \qquad [2]$$

Sumando y restando las ecuaciones [1] y [2], obtenemos las dos expresiones que usamos, sin demostrarlas, en el estudio de la respuesta natural subamortiguada de los paralelos y series de circuitos *RLC*,

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \qquad [3]$$

$$\operatorname{sen}\theta = -j\tfrac{1}{2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \qquad [4]$$

PRÁCTICA

A5.3 Recurra a las ecuaciones [1] a la [4] para calcular: (*a*) e^{-j1}; (*b*) e^{1-j1}; (*c*) $\cos(-j1)$; (*d*) $\operatorname{sen}(-j1)$.

A5.4 Calcule en $t = 0.5$: (*a*) $(d/dt)(3\cos 2t - j2\operatorname{sen} 2t)$; (*b*) $\int_0^t (3\cos 2t - j2\operatorname{sen} 2t)\,dt$; calcule $\mathbf{s} = 1 + j2$: (*c*) $\int_{\mathbf{s}}^{\infty} \mathbf{s}^{-3}\,d\mathbf{s}$; (*d*) $(d/d\mathbf{s})[3/(\mathbf{s}+2)]$.

Respuestas: A5.3: $0.540 - j0.841$; $1.469 - j2.29$; 1.543; $-j1.175$. A5.4: $-5.05 - j2.16$; $1.262 - j0.460$; $-0.06 - j0.08$; $-0.0888 + j0.213$.

A5.3 FORMA EXPONENCIAL

Emplearemos ahora la identidad de Euler

$$e^{j\theta} + \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta$$

y se multiplicará cada lado por el número real positivo C:

$$Ce^{j\theta} = C\cos\theta + jC\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad [5]$$

El lado derecho de la ecuación [5] consta de la suma de un número real y uno imaginario, por lo cual representa un número complejo en forma rectangular. Llamaremos a este número $\mathbf{A}$, donde $\mathbf{A} = a + jb$. Al igualar las partes reales,

$$a = C\cos\theta \qquad [6]$$

y las partes imaginarias

$$b = C\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad [7]$$

al elevar al cuadrado y sumar después las ecuaciones [6] y [7],

$$a^2 + b^2 = C^2$$

o

$$C = +\sqrt{a^2 + b^2} \qquad [8]$$

y dividiendo la ecuación [7] entre la ecuación [6]:

$$\frac{b}{a} = \tan\theta$$

o

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \qquad [9]$$

obtenemos las relaciones de las ecuaciones [8] y [9], que nos permiten determinar C y θ a partir del conocimiento de a y b, Por ejemplo, si $\mathbf{A} = 4 + j2$, entonces identificamos a a como 4 y a b como 2 y determinamos C y θ:

$$C = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.47$$
$$\theta = \tan^{-1}\tfrac{2}{4} = 26.6^\circ$$

Podemos utilizar esta nueva información para escribir $\mathbf{A}$ en la forma

$$\mathbf{A} = 4.47\cos 26.6^\circ + j4.47\,\mathrm{sen}\,26.6^\circ$$

pero es la forma del lado izquierdo de la ecuación [5] la que demuestra ser más útil:

$$\mathbf{A} = Ce^{j\theta} = 4.47e^{j26.6^\circ}$$

Un número complejo que se expresa de esta manera se dice que está en *forma exponencial*. El factor multiplicador positivo real C se conoce como *amplitud* o *magnitud*,

y la cantidad real θ que aparece en el exponente se denomina *argumento* o *ángulo*. Un matemático expresaría siempre θ en radianes y escribiría

$$\mathbf{A} = 4.47e^{j0.464}$$

aunque los ingenieros suelen trabajar en términos de grados. El uso del símbolo de grados (°) en el exponente hará imposible la confusión.

Para recapitular, si tenemos un número complejo que se da en forma rectangular

$$\mathbf{A} = a + jb$$

y deseamos expresarlo en forma exponencial

$$\mathbf{A} = Ce^{j\theta}$$

podríamos determinar C y θ mediante las ecuaciones [8] y [9]. Si está indicado el número complejo en forma exponencial, entonces encontraremos a y b a partir de las ecuaciones [6] y [7].

Cuando **A** se expresa en términos de valores numéricos, la transformación entre las formas exponencial (o polar) y rectangular se dispone como una operación integrada en la mayor parte de las calculadoras científicas de mano.

Aparecerá una pregunta al determinar el ángulo θ o utilizar la relación arcotangente de la ecuación [9]. Esta función es multivaluada, por lo que se requiere elegir un ángulo apropiado, entre varias posibilidades. Un método mediante el cual se podría efectuar la elección consiste en escoger un ángulo para el que el seno y el coseno tienen los signos apropiados para obtener los valores requeridos de a y de b de las ecuaciones [6] y [7]. Por ejemplo, convirtamos

$$\mathbf{V} = 4 - j3$$

en la forma exponencial. La amplitud es

$$C = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

y el ángulo corresponde a

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-3}{4} \qquad [10]$$

Se debe elegir un valor de θ con el que se obtiene un valor positivo de cos θ, pues $4 = 5 \cos \theta$, y un valor negativo para sen θ, puesto que $-3 = 5$ sen θ. Por lo tanto, se obtiene $\theta = -36.9°$, 323.1°, −396.9°, etc. Cualesquiera de estos ángulos es correcto, así que se suele elegir el más simple, en este caso −36.9°. Se debe advertir que la solución alternativa de la ecuación [10], $\theta = 143.1°$, no es correcta, en virtud de que cos θ es negativo y sen θ positivo.

Se dispone de un método más simple para seleccionar el ángulo correcto si representamos de manera gráfica el número complejo en el plano complejo. Seleccionamos primero un número complejo, dado en forma rectangular, $\mathbf{A} = a + jb$, que se ubica en el primer cuadrante del plano complejo, como se ilustra en la figura A5.3. Si dibujamos una línea desde el origen hasta el punto que representa el número complejo, se habrá construido un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es evidentemente la amplitud de la representación exponencial del número complejo. En otras palabras, $C = \sqrt{a^2 + b^2}$. Además, se observa que el ángulo en dirección contraria al de las manecillas del reloj, formado por la línea y el eje real positivo, corresponde al ángulo θ de la representación exponencial, debido a que $a = C \cos \theta$ y $b = C$ sen θ. Ahora bien, si nos indican la forma rectangular de un número complejo que se ubica en otro cuadrante, como $\mathbf{V} = 4 - j3$, que se muestra en la figura A5.4 el ángulo correcto resulta gráficamente evidente, ya sea −36.9° o 323.1° en este ejemplo. Muchas veces el dibujo puede visualizarse y no necesita dibujarse.

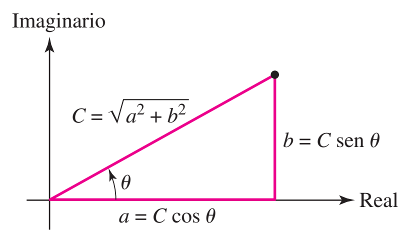


FIGURA A5.3 Un número complejo se representa mediante un punto en el plano complejo, con la elección de las partes real e imaginaria correctas a partir de la forma rectangular, o eligiendo la magnitud y el ángulo a partir de la forma exponencial.

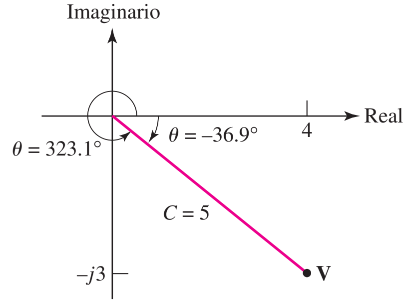


FIGURA A5.4 El número complejo $\mathbf{V} = 4 - j3 = 5e^{-j36.9°}$ se representa en el plano complejo.

Si la forma rectangular del número complejo tiene una parte real negativa, a menudo es más fácil trabajar con el negativo del número complejo, con lo cual se evitan ángulos de magnitud mayor que 90°. Por ejemplo, dado

$$\mathbf{I} = -5 + j2$$

se escribe

$$\mathbf{I} = -(5 - j2)$$

y se transforma entonces $(5 - j2)$ a la forma exponencial:

$$\mathbf{I} = -Ce^{j\theta}$$

donde

$$C = \sqrt{29} = 5.39 \qquad \text{y} \qquad \theta = \tan^{-1}\tfrac{-2}{5} = -21.8^\circ$$

Por lo tanto, tenemos

$$\mathbf{I} = -5.39e^{-j21.8^\circ}$$

Se eliminaría el signo negativo del número complejo si se incrementa o disminuye el ángulo en 180°, como se muestra mediante referencia a un dibujo en el plano complejo. De tal manera, el resultado se expresa en la forma exponencial como

$$\mathbf{I} = 5.39e^{j158.2^\circ} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{I} = 5.39e^{-j201.8^\circ}$$

Note que el uso de una calculadora electrónica en el modo de tangente inversa siempre produce ángulos que tienen magnitudes menores que 90°. Así, $\tan^{-1}[(-3)/4]$ y $\tan^{-1}[3/(-4)]$ dan como resultado $-36.9°$. Sin embargo, las calculadoras que proporcionan la conversión rectangular-polar muestran el ángulo correcto en todos los casos.

Es necesario señalar una última anotación en lo que respecta a la representación exponencial de un número complejo. Dos números complejos, escritos en forma exponencial, son iguales si y sólo si sus amplitudes son iguales y sus ángulos son equivalentes. Los ángulos equivalentes son los que difieren por múltiplos de 360°. Por ejemplo, si $\mathbf{A} = Ce^{j\theta}$ y $\mathbf{B} = De^{j\phi}$ entonces si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, se requiere que $C = D$ y $\theta = \phi \pm (360^\circ)n$, donde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

PRÁCTICA

A5.5 Exprese cada uno de los siguientes números complejos en forma exponencial utilizando el ángulo que está en el intervalo $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$; (*a*) $-18.5 - j26.1$; (*b*) $17.9 - j12.2$; (*c*) $-21.6 + j31.2$.

A5.6 Exprese cada uno de estos números complejos en forma rectangular: (*a*) $61.2e^{-j111.1^\circ}$; (*b*) $-36.2e^{j108^\circ}$; (*c*) $5e^{-j2.5}$.

Respuestas: A5.5: $32.0e^{-j125.3^\circ}$; $21.7e^{-j34.3^\circ}$; $37.9e^{j124.7^\circ}$. A5.6: $-22.0 - j57.1$; $11.19 - j34.4$; $-4.01 - j2.99$.

A5.4 FORMA POLAR

La tercera (y última) forma en la que representamos un número complejo es esencialmente la misma que la forma exponencial, salvo por una pequeña diferencia en

el simbolismo. Usamos un signo de ángulo ($\underline{/\ }$) para sustituir la combinación e^j. De tal modo, la representación exponencial de un número complejo **A**,

$$\mathbf{A} = Ce^{j\theta}$$

podría escribirse de una manera más concisa como

$$\mathbf{A} = C\underline{/\theta}$$

Se dice en estas condiciones que el número complejo se expresará en forma *polar*, un nombre que sugiere la representación de un punto en un plano (complejo) mediante el uso de coordenadas polares.

Resulta claro que la transformación de la forma rectangular a la polar, o de la polar a la rectangular, es básicamente lo mismo que la transformación entre la forma rectangular y la exponencial. La misma relación existe entre C, θ, a y b.

El número complejo

$$\mathbf{A} = -2 + j5$$

se escribe entonces en la forma exponencial como

$$\mathbf{A} = 5.39e^{j111.8^\circ}$$

y en forma polar como

$$\mathbf{A} = 5.39\underline{/111.8^\circ}$$

Para apreciar la utilidad de las formas exponencial y polar, consideraremos la multiplicación y la división de dos números complejos representada en forma exponencial o polar. Si tenemos

$$\mathbf{A} = 5\underline{/53.1^\circ} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = 15\underline{/-36.9^\circ}$$

entonces la expresión de estos dos números complejos en forma exponencial

$$\mathbf{A} = 5e^{j53.1^\circ} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = 15e^{-j36.9^\circ}$$

nos permite escribir el producto de un número complejo en forma exponencial, cuya amplitud es el producto de las amplitudes y cuyo ángulo es la suma algebraica de los ángulos, de acuerdo con las reglas normales de la multiplicación de dos cantidades exponenciales:

$$(\mathbf{A})(\mathbf{B}) = (5)(15)e^{j(53.1^\circ - 36.9^\circ)}$$

o

$$\mathbf{AB} = 75e^{j16.2^\circ} = 75\underline{/16.2^\circ}$$

De la definición de la forma polar, resulta evidente que

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = 0.333\underline{/90^\circ}$$

La suma y la resta de números complejos se consigue con mayor facilidad si se trabaja con los números complejos en forma rectangular; por lo tanto, la suma o resta de dos números complejos dada en forma exponencial o polar debe empezar con la conversión de los dos números complejos en la forma rectangular. Esta situación se aplica de manera inversa a la multiplicación y la división; dos números dados en forma rectangular deben transformarse a la forma polar, a menos que los números sean enteros

pequeños. Por ejemplo, si se desea multiplicar $(1 - j3)$ por $(2 + j1)$, es más fácil multiplicarlos como están y obtener $(5 - j5)$. Si los números se multiplican mentalmente, se desperdicia entonces el tiempo en transformarlos en la forma polar.

Ahora requerimos un esfuerzo para familiarizarnos con las tres diferentes formas en las que los números complejos se expresan, así como con la conversión rápida de una forma a otra. Las relaciones entre las tres formas parecen casi interminables, pero la larga ecuación siguiente resume las diferentes interrelaciones:

$$\mathbf{A} = a + jb = \text{Re}[\mathbf{A}] + j\text{Im}[\mathbf{A}] = Ce^{j\theta} = \sqrt{a^2 + b^2}e^{j\tan^{-1}(b/a)}$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2}\underline{/\tan^{-1}(b/a)}$$

La mayor parte de las conversiones de una forma a otra puede efectuarse con rapidez con la ayuda de calculadoras, y muchas de éstas pueden resolver ecuaciones lineales con números complejos.

Podremos observar que los números complejos son un artificio matemático conveniente que facilita el análisis de las situaciones físicas reales.

PRÁCTICA

A5.7 Exprese el resultado de cada una de estas manipulaciones de números complejos en forma polar, utilizando seis cifras significativas, sólo por disfrutar del cálculo: (a) $[2 - (1\underline{/-41^\circ})]/(0.3\underline{/41^\circ})$; ($b$) $50/(2.87\underline{/83.6^\circ} + 5.16\underline{/63.2^\circ})$; ($c$) $4\underline{/18^\circ} - 6\underline{/-75^\circ} + 5\underline{/28^\circ}$.

A5.8 Determine $\mathbf{Z}$ en forma rectangular si: (a) $\mathbf{Z} + j2 = 3/\mathbf{Z}$; ($b$) $\mathbf{Z} = 2\ln(2 - j3)$; ($c$) sen $\mathbf{Z} = 3$.

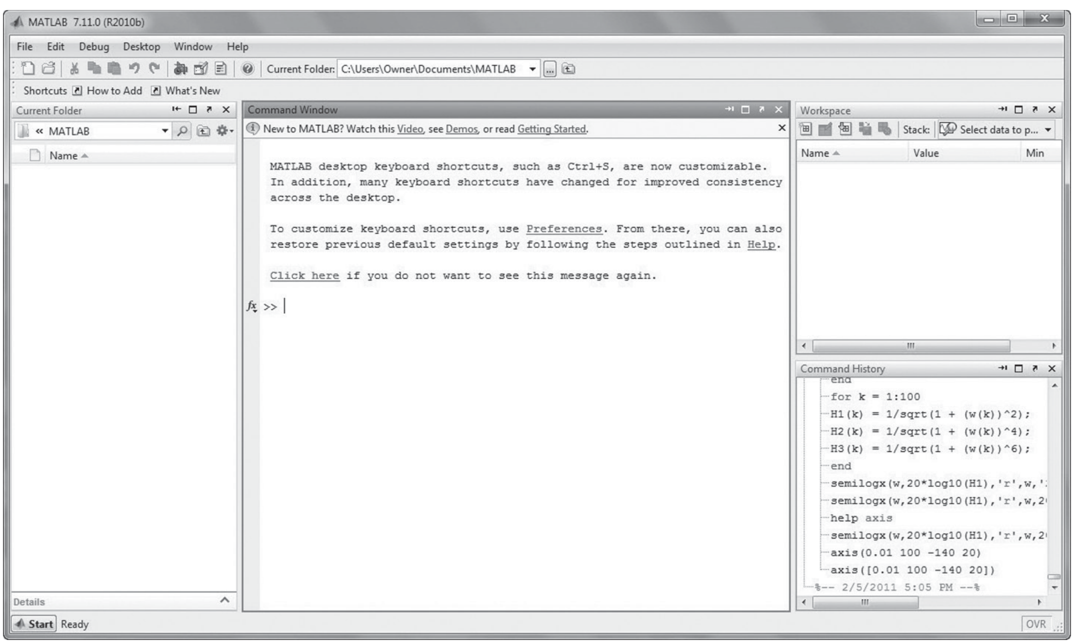
Respuestas: A5.7: $4.69179\underline{/-13.2183^\circ}$; $6.318\,33\underline{/-70.4626^\circ}$; $11.5066\underline{/54.5969^\circ}$.
A5.8: $\pm 1.414 - j1$; $2.56 - j1.966$; $1.571 \pm j1.763$.

UN BREVE TUTORIAL DE MATLAB®

La intención de este tutorial consiste en ofrecer una muy breve introducción relativa a algunos conceptos básicos necesarios para utilizar un programa de cómputo increíblemente poderoso conocido como MATLAB. Su uso es una parte totalmente optativa del material incluido en este libro de texto, pero como se ha convertido en una herramienta cada vez más común en todas las áreas de la ingeniería eléctrica, creemos que vale la pena dar oportunidad a los estudiantes para que empiecen a explorar algunas de las características de este programa, en particular la elaboración de gráficas de funciones en dos y tres dimensiones, la realización de operaciones con matrices, la solución de ecuaciones simultáneas y la manipulación de expresiones algebraicas. Muchas instituciones proporcionan ahora la versión completa de MATLAB a sus estudiantes, aunque en la época en que se escribió este texto se podría obtener una versión estudiantil a un costo bastante reducido en The MathWorks, Inc. (http://www.mathworks.com/academia/student_version/).

Antes de empezar

MATLAB se ejecuta por lo común al hacer clic en el ícono del programa; la ventana de apertura característica se muestra en la figura A6.1. Los programas se corren a partir de archivos o introduciendo de manera directa los comandos en la ventana. MATLAB cuenta también con amplios recursos de ayuda en línea, lo que resulta útil tanto para los principiantes como para los usuarios avanzados. Los programas característicos de MATLAB se asemejan mucho a los programas escritos en C, aunque de ninguna manera se requiere la familiaridad con este lenguaje.



■ **FIGURA A6.1** Ventana de comandos de MATLAB que aparece en el momento en el que se arranca.

Variables y operaciones matemáticas

MATLAB tiene más sentido luego de que el usuario se da cuenta de que todas las variables son matrices, aun cuando sean simplemente matrices de 1×1. Los nombres de las variables pueden tener hasta 19 caracteres de longitud, lo cual es de suma utilidad para construir programas con legibilidad adecuada. El primer carácter debe ser una letra, aunque el resto tiene la posibilidad de corresponder a cualquier letra o número; también se puede utilizar el carácter (_). Los nombres de las variables en MATLAB distinguen las mayúsculas. MATLAB incluye varias variables predefinidas; las más importantes, en cuanto al material presentado en texto, incluyen:

eps	Precisión de la máquina
realmin	Número de punto flotante más pequeño (positivo) que maneja la computadora
realmax	Número de punto flotante más grande que maneja la computadora
inf	Infinito (definido como 1/0)
NaN	Literalmente, "no es un número". Esto incluye situaciones tales como 0/0
pi	π (3.14159…)
i, *j*	Ambas se definen inicialmente como $\sqrt{1}$. El usuario puede asignarles otros valores.

Una lista completa de las variables definidas en la actualidad se obtiene mediante el comando *who*. Las variables se asignan utilizando un signo igual (=). Si el enunciado se termina con un punto y coma (;), entonces aparece otro indicador; si termina simplemente mediante un retorno de carro (es decir, oprimiendo la tecla Enter), entonces se repite la variable. Por ejemplo:

Se ha usado un color para diferenciar el texto generado por el programa del texto de aquel generado por el usuario, sólo para comodidad del lector. Se debe observar que las versiones más recientes de MATLAB usan el color para separar diferentes tipos de texto (funciones, variables, etc.) y para destacar errores tipográficos potenciales.

```
EDU» input_voltage = 5;
EDU» input_current = 1e−3
input_current =
1.0000e−003
EDU»
```

Las variables complejas se definen con facilidad en MATLAB; por ejemplo,

```
EDU» s = 9 + j*5;
```

crea una variable compleja **s** con valor $9 + j5$.

Una matriz distinta de la de 1×1 se define con corchetes. Por ejemplo, la matriz $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ en MATLAB la expresaríamos como:

```
EDU» t = [2    − 1; 3    0];
```

Note que los elementos de la matriz se introducen renglón por renglón; los elementos de renglón se separan mediante un espacio y los renglones mediante un punto y coma (;). Se dispone de las mismas operaciones aritméticas para matrices, por lo que podemos determinar $t + t$ como

```
EDU» t + t
ans =
     4   −2
     6    0
```

Los operadores aritméticos incluyen:

^	potencia	\	división izquierda
*	multiplicación	+	suma
/	división derecha (ordinaria)	−	resta

El orden de las operaciones es importante. El orden de precedencia es la potencia, luego la multiplicación y la división, después la suma y la resta.

```
EDU» x = 1 + 5 ^ 2  * 3
x =
  76
```

El concepto de división izquierda puede parecer en un principio extraño, aunque es muy útil en el álgebra de matrices. Por ejemplo,

```
EDU» 1/5
ans =
   0.2000
EDU» 1\5
ans =
   5
EDU» 5\1
ans =
   0.2000
```

Y, en el caso de la ecuación matricial **Ax** = **B**, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

encontramos **x** con

```
EDU» A = [2 4; 1 6];
EDU» B = [−1; 2];
EDU»  x = A\B
x =

  −1.7500
    0.6250
```

De manera alternativa, podemos escribir también

```
EDU» x = A^−1*B
x =
  −1.7500
    0.6250
```

o

```
EDU» inv(A)*B
ans =
  −1.7500
   0.6250
```

Cuando exista duda, el paréntesis quizá resulte de gran utilidad.

Algunas funciones útiles

Los requerimientos de espacio evitan que se presenten todas las funciones contenidas en MATLAB. Algunas de las más básicas incluyen:

abs(x)	$\|x\|$	log 10(x)	$\log_{10} x$		
exp(x)	e^x	sen(x)	sen x	asen(x)	$\text{sen}^{-1} x$
sqrt(x)	$\sqrt{x}$	cos(x)	$\cos x$	acos(x)	$\cos^{-1} x$
log(x)	$\ln x$	tan(x)	$\tan x$	atan(x)	$\tan^{-1} x$

Las funciones útiles para manejar variables complejas incluyen:

real(s)	Re{s}
imag(s)	Im{s}
abs(s)	$\sqrt{a^2 + b^2}$, donde $\mathbf{s} \equiv a + jb$
angle(s)	$\tan^{-1}(b/a)$, donde $\mathbf{s} \equiv a + jb$
conj(s)	complejo conjugado de **s**

Otro comando muy útil, que a menudo se olvida, es simplemente *help*.

En ocasiones requerimos de un vector, como cuando planeamos crear una gráfica. El comando *linspace*(mín, máx, número de puntos) resulta invaluable en esas situaciones:

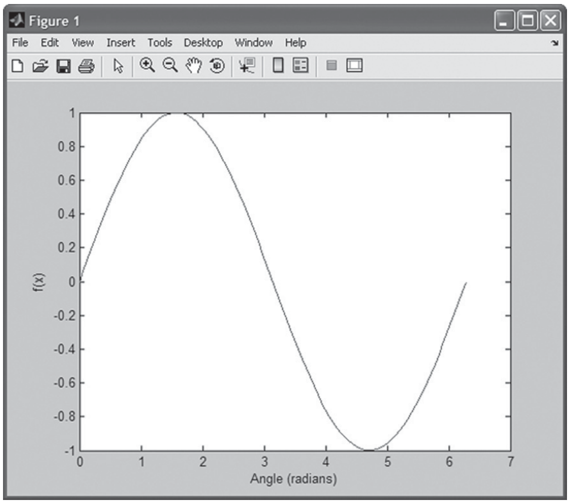
```
EDU» frequency = linspace(0,10,5)
frequency =
     0    2.5000    5.0000    7.5000    10.0000
```

Un pariente útil es el comando *logspace*().

Generación de gráficas

Graficar con MATLAB es muy sencillo. Por ejemplo, la figura A6.2 presenta el resultado de ejecutar el siguiente programa de MATLAB:

```
EDU» x = linspace(0,2*pi,100);
EDU» y = sen(x);
EDU» plot(x,y);
EDU» xlabel('Angle (radians)');
EDU» ylabel('f(x)');
```



■ **FIGURA A6.2** Ejemplo de una gráfica de sen(x), $0 < x < 2\pi$, generada utilizando MATLAB. La variable x es un vector compuesto por 100 elementos igualmente espaciados.

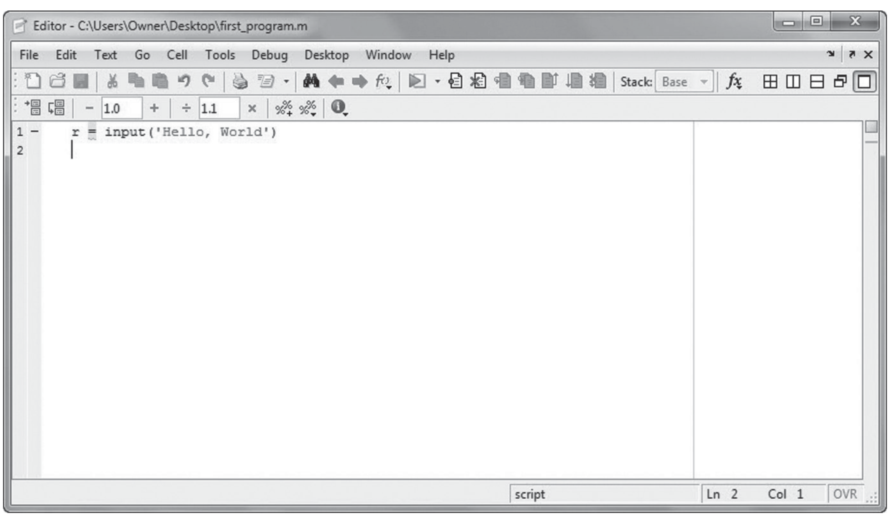
Escritura de programas

En este libro, aunque los ejemplos de MATLAB se presentan como líneas tecleadas en la ventana Command, es factible (y a menudo prudente, si la repetición es un problema) escribir un programa de tal forma que los cálculos sean más sencillos. Esto se lleva a cabo en MATLAB escribiendo lo que se conoce como m-file. Un m-file es simplemente un archivo de texto guardado con la extensión ".m" (por ejemplo, first_program.m). En respeto a Kernighan y Ritchie, se accede a **New Script** en el menú **File**, el cual abre el editor. (Obsérvese que se puede utilizar otro editor si se prefiere, por ejemplo el WordPad.)

Se teclea en

r = input('Hello, World')

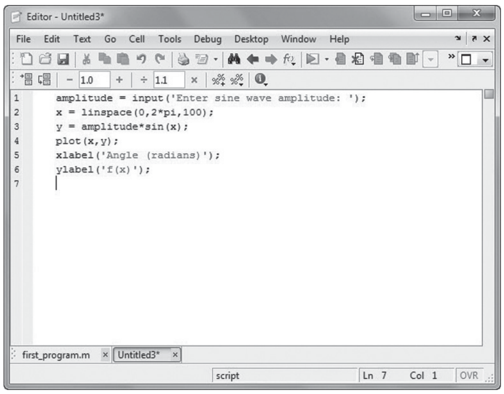
como se muestra en la figura A6.3.



■ **FIGURA A6.3** Ejemplo de un m-file creado en el editor de m-file.

En seguida guardamos como first_program en un directorio apropiado, teniendo cuidado de seleccionar MATLAB Files (*.m) bajo **File Type**. En el menú **File** se selecciona **Open**, y se busca el first_program.m. Lo anterior vuelve a abrir el editor (por lo que se pudo haber evitado cerrarlo antes). Se corre el programa oprimiendo la tecla F5 o seleccionando **Run** dentro del menú **Debug**. En la ventana Command se podrá ver el saludo; MATLAB está esperando una respuesta por parte del teclado, así que teclee el botón Intro.

Extendamos un ejemplo anterior para permitir que la magnitud sea seleccionable por parte del usuario, como en la figura A6.4. En este momento es posible que el usuario ingrese una amplitud arbitraria en la gráfica.



■ **FIGURA A6.4** Ejemplo de un m-file llamado example1.m para la generación de una gráfica de una onda senoidal.

Dejamos al lector que decida cuándo escribir una programa/m-file y cuándo utilizar simplemente la ventana Command directamente.

LECTURAS ADICIONALES

Existe un gran número de referencias excelentes acerca de MATLAB disponibles y nuevos títulos aparecen de forma regular. Dos que valen la pena son

D.C. Hanselman y B. Littlefield, *Mastering MATLAB 7*. Upper Saddle River, NJ.: Prentice Hall, 2005.

W.J. Palm, *Introduction to MATLAB 7 for Engineers,* 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 2005.

TEOREMAS ADICIONALES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En este apéndice presentamos, en forma abreviada, varios teoremas de la transformada de Laplace que se usan por lo común en situaciones más avanzadas, aparte de las que se describieron en el capítulo 14.

Transformadas de funciones de tiempo periódicas

El teorema de corrimiento (desplazamiento) del tiempo es muy útil para evaluar la transformada de funciones de tiempo periódicas. Supóngase que $f(t)$ es periódica con un periodo T para valores positivos de t. Como se sabe, el comportamiento de $f(t)$ para $t < 0$ no tiene efecto en la transformada de Laplace (unilateral). Por lo tanto, $f(t)$ se escribe como

$$f(t) = f(t - nT) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si definimos ahora una nueva función de tiempo distinta de cero, sólo en el primer periodo de $f(t)$,

$$f_1(t) = [u(t) - u(t - T)]f(t)$$

entonces la $f(t)$ original se representa como la suma de un número infinito de este tipo de funciones, retrasadas por múltiplos enteros de T. Esto es,

$$\begin{aligned} f(t) &= [u(t) - u(t - T)]f(t) + [u(t - T) - u(t - 2T)]f(t) \\ &\quad + [u(t - 2T) - u(t - 3T)]f(t) + \cdots \\ &= f_1(t) + f_1(t - T) + f_1(t - 2T) + \cdots \end{aligned}$$

o

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(t - nT)$$

La transformada de Laplace de esta suma es exactamente la suma de las transformadas

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{f_1(t - nT)\}$$

de modo que el teorema de desplazamiento en el tiempo da como resultado

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT\mathbf{s}} \mathbf{F}_1(\mathbf{s})$$

donde

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{f_1(t)\} = \int_{0^-}^{T} e^{-\mathbf{s}t} f(t)\, dt$$

Puesto que $\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$ no es una función de n, se elimina de la sumatoria, y $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ se convierte en

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{s})[1 + e^{-T\mathbf{s}} + e^{-2T\mathbf{s}} + \cdots]$$

Cuando aplicamos el teorema del binomio a la expresión entre corchetes, ésta se simplifica como $1/(1 - e^{-T\mathbf{s}})$. De tal modo, concluimos que la función periódica $f(t)$, tiene una transformada de Laplace expresada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{F}_1(\mathbf{s})}{1 - e^{-T\mathbf{s}}} \qquad [1]$$

donde

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) = \mathscr{L}\{[u(t) - u(t-T)]f(t)\} \qquad [2]$$

es la transformada del primer periodo de la función de tiempo.

Para ilustrar el uso de este teorema de transformada en el caso de funciones periódicas, aplicaremos el familiar tren de curso rectangular, figura A7.1. Podríamos describir esta función periódica de manera analítica:

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_0[u(t-nT) - u(t-nT-\tau)] \qquad t > 0$$

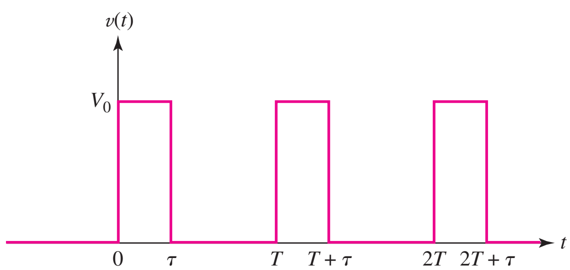


FIGURA A7.1 Tren periódico de pulsos rectangulares para el que $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = (V_0/\mathbf{s})(1 - e^{-\mathbf{s}\tau})/(1 - e^{-\mathbf{s}T})$.

Es simple calcular la función $\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$:

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{s}) = V_0 \int_{0^-}^{\tau} e^{-\mathbf{s}t}\, dt = \frac{V_0}{\mathbf{s}}(1 - e^{-\mathbf{s}\tau})$$

Ahora bien, para obtener la transformada deseada, sólo se divide entre $(1 - e^{-\mathbf{s}T})$:

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{V_0\,(1 - e^{-\mathbf{s}\tau})}{\mathbf{s}(1 - e^{-\mathbf{s}T})} \qquad [3]$$

Debemos observar la forma en que se manifiestan varios teoremas diferentes de la transformada en la ecuación [3]. El factor $(1 - e^{-\mathbf{s}T})$ en el denominador explica la periodicidad de la función, el término $e^{-\mathbf{s}\tau}$ en el numerador se debe al retardo del tiempo de la onda cuadrada negativa que anula al curso y el factor $V_0/\mathbf{s}$ es, desde luego, la transformada de las funciones escalón implicada en $v(t)$.

EJEMPLO **A7.1**

Determine la transformada de la función periódica de la figura A7.2.

Comenzamos escribiendo una ecuación que describa $f(t)$, una función compuesta por funciones impulso positivas y negativas alternadas.

$$f(t) = 2\delta(t-1) - 2\delta(t-3) + 2\delta(t-5) - 2\delta(t-7) + \cdots$$

Definiendo una nueva función f_1 y reconociendo un periodo $T = 4$ s,

$$f_1(t) = 2[\delta(t-1) - \delta(t-3)]$$

podemos utilizar la operación de periodicidad de tiempo, según se presenta en la tabla 14.2, a fin de obtener $\mathbf{F(s)}$

$$\mathbf{F(s)} = \frac{1}{1-e^{-T\mathbf{s}}}\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) \qquad [4]$$

donde

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) = \int_{0^-}^{T} f(t)e^{-\mathbf{s}t}\,dt = \int_{0^-}^{4} f_1(t)e^{-\mathbf{s}t}\,dt$$

Existen varias maneras de evaluar esta integral. La más fácil consiste en reconocer que su valor seguirá siendo el mismo si el límite superior se incrementa hasta ∞, lo que permite aplicar el teorema de corrimiento (o desplazamiento) en el tiempo. De tal modo,

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) = 2[e^{-\mathbf{s}} - e^{-3\mathbf{s}}] \qquad [5]$$

El ejemplo se concreta multiplicando la ecuación [5] por el factor indicado en la ecuación [4], por lo que

$$\mathbf{F(s)} = \frac{2}{1-e^{-4\mathbf{s}}}(e^{-\mathbf{s}} - e^{-3\mathbf{s}}) = \frac{2e^{-\mathbf{s}}}{1+e^{-2\mathbf{s}}}$$

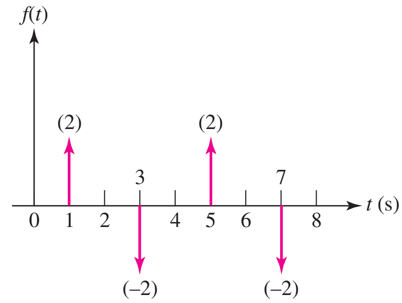


FIGURA A7.2 Función periódica basada en funciones de impulso unitario.

PRÁCTICA

A7.1 Determine la transformada de Laplace de la función periódica que se muestra en la figura A7.3.

Respuesta: $\left(\dfrac{8}{\mathbf{s}^2+\pi^2/4}\right)\dfrac{\mathbf{s}+(\pi/2)e^{-\mathbf{s}}+(\pi/2)e^{-3\mathbf{s}}-\mathbf{s}e^{-4\mathbf{s}}}{1-e^{-4\mathbf{s}}}$.

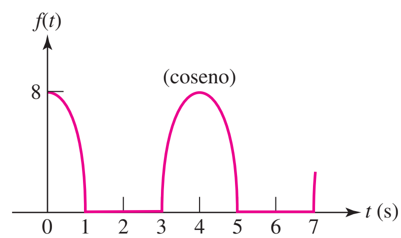


FIGURA A7.3

Desplazamiento en frecuencia

Este nuevo teorema establece una relación entre $\mathbf{F(s)} = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $\mathbf{F}(\mathbf{s}+a)$. Consideramos la transformada de Laplace de $e^{-at}f(t)$.

$$\mathscr{L}\{e^{-at}f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}e^{-at}f(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(\mathbf{s}+a)t}f(t)\,dt$$

Observando con cuidado el resultado, vemos que la integral de la derecha es idéntica a la que define a $\mathbf{F(s)}$ con una excepción: $(\mathbf{s}+a)$ aparece en lugar de $\mathbf{s}$. Por lo tanto,

$$e^{-at}f(t) \Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{s}+a) \qquad [6]$$

Podemos concluir que la sustitución de $\mathbf{s}$ por $(\mathbf{s} + a)$ en el dominio de la frecuencia corresponde a multiplicar por e^{-at} en el dominio del tiempo. Lo anterior se conoce como teorema de ***desplazamiento en frecuencia***. De inmediato se puede aprovechar para evaluar la transformada de la función coseno amortiguada exponencialmente, lo cual utilizamos mucho en el trabajo anterior. Empezando con la transformada conocida de la función coseno

$$\mathcal{L}\{\cos \omega_0 t\} = \mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 + \omega_0^2}$$

entonces la transformada de $e^{-at} \cos \omega_0 t$ puede ser $\mathbf{F}(\mathbf{s} + a)$:

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cos \omega_0 t\} = \mathbf{F}(\mathbf{s} + a) = \frac{\mathbf{s} + a}{(\mathbf{s} + a)^2 + \omega_0^2} \qquad [7]$$

PRÁCTICA

A7.2 Encuentre $\mathcal{L}\{e^{-2t} \operatorname{sen}(5t + 0.2\pi)u(t)\}$.

Respuesta: $(0.588\mathbf{s} + 4.05)/(\mathbf{s}^2 + 4\mathbf{s} + 29)$.

Diferenciación en el dominio de la frecuencia

Examinaremos las consecuencias de diferenciar $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ con respecto a $\mathbf{s}$. El resultado es

$$\frac{d}{d\mathbf{s}}\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{d}{d\mathbf{s}} \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t)\, dt$$
$$= \int_{0^-}^{\infty} -te^{-\mathbf{s}t} f(t)\, dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} [-tf(t)]\, dt$$

lo cual es simplemente la transformada de Laplace de $[-tf(t)]$. Por lo tanto, concluimos que la diferenciación con respecto a $\mathbf{s}$ en el dominio de la frecuencia origina la multiplicación por $-t$ en el dominio del tiempo, o

$$-tf(t) \Leftrightarrow \frac{d}{d\mathbf{s}}\mathbf{F}(\mathbf{s}) \qquad [8]$$

Supongamos ahora que $f(t)$ es la función rampa unitaria $tu(t)$, cuya transformada se sabe que es $1/\mathbf{s}^2$. Se recurre al recién estudiado teorema de diferenciación de frecuencia, a fin de determinar la transformada inversa de$1/\mathbf{s}^3$ como sigue:

$$\frac{d}{d\mathbf{s}}\left(\frac{1}{\mathbf{s}^2}\right) = -\frac{2}{\mathbf{s}^3} \Leftrightarrow -t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\mathbf{s}^2}\right\} = -t^2 u(t)$$

y

$$\frac{t^2 u(t)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}^3} \qquad [9]$$

Continuando con el mismo procedimiento, encontramos que

$$\frac{t^3}{3!}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}^4} \qquad [10]$$

y, en general,

$$\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}^n} \qquad [11]$$

PRÁCTICA

A7.3 Encuentre $\mathscr{L}\{t\,\text{sen}(5t + 0.2\pi)u(t)\}$.

Respuesta: $(0.588\mathbf{s}^2 + 8.09\mathbf{s} - 14.69)/(\mathbf{s}^2 + 25)^2$.

Integración en el dominio de la frecuencia

Se puede ilustrar el efecto sobre $f(t)$ cuando se integra $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ si se empieza una vez más con la definición

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t)\,dt$$

efectuando la integración de frecuencia desde $\mathbf{s}$ hasta ∞,

$$\int_{\mathbf{s}}^{\infty} \mathbf{F}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{s}}^{\infty} \left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t)\,dt\right] d\mathbf{s}$$

intercambiando el orden de integración,

$$\int_{\mathbf{s}}^{\infty} \mathbf{F}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s} = \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{\mathbf{s}}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\,d\mathbf{s}\right] f(t)\,dt$$

y efectuando la integración interna,

$$\int_{\mathbf{s}}^{\infty} \mathbf{F}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s} = \int_{0^-}^{\infty} \left[-\frac{1}{t} e^{-\mathbf{s}t}\right]_{\mathbf{s}}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-\mathbf{s}t}\,dt$$

De tal modo,

$$\frac{f(t)}{t} \Leftrightarrow \int_{\mathbf{s}}^{\infty} \mathbf{F}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s} \qquad [12]$$

Por ejemplo, ya establecimos el par de transformadas

$$\text{sen}\,\omega_0 t u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{\mathbf{s}^2 + \omega_0^2}$$

Por lo tanto,

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\text{sen}\,\omega_0 t u(t)}{t}\right\} = \int_{\mathbf{s}}^{\infty} \frac{\omega_0\,d\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 + \omega_0^2} = \tan^{-1} \frac{\mathbf{s}}{\omega_0}\bigg|_{\mathbf{s}}^{\infty}$$

y tenemos

$$\frac{\text{sen}\,\omega_0 t u(t)}{t} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\mathbf{s}}{\omega_0} \qquad [13]$$

PRÁCTICA

A7.4 Encuentre $\mathscr{L}\{\text{sen}^2\,5tu(t)/t\}$.

Respuesta: $\frac{1}{4}\ln[(\mathbf{s}^2 + 100)/\mathbf{s}^2]$.

Teorema de ajuste en el tiempo

A continuación formulamos el teorema de ajuste en el tiempo de la teoría de la transformada de Laplace, al evaluar la transformada de $f(at)$, suponiendo que se conoce $\mathscr{L}\{f(t)\}$. El procedimiento es muy simple:

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(at)\, dt = \frac{1}{a}\int_{0^-}^{\infty} e^{-(\mathbf{s}/a)\lambda} f(\lambda)\, d\lambda$$

donde se empleó el cambio de variable $at = \lambda$. La última integral se reconoce como $1/a$ veces la transformada de Laplace de $f(t)$, excepto porque $\mathbf{s}$ se sustituye por $\mathbf{s}/a$ en la transformada. Se desprende que

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a}\mathbf{F}\left(\frac{\mathbf{s}}{a}\right) \qquad [14]$$

Como un ejemplo elemental del uso de este teorema de ajuste en el tiempo, considérese la determinación de la transformada de una onda coseno de 1 kHz. Suponiendo que conocemos la transformada de una onda coseno de 1 rad/s,

$$\cos t u(t) \Leftrightarrow \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+1}$$

el resultado es

$$\mathscr{L}\{\cos 2\,000\pi t u(t)\} = \frac{1}{2\,000\pi}\frac{\mathbf{s}/2\,000\pi}{(\mathbf{s}/2\,000\pi)^2+1} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+(2\,000\pi)^2}$$

PRÁCTICA

A7.5 Encuentre $\mathscr{L}\{\text{sen}^2\, 5t\, u(t)\}$.

Respuesta: $50/[\mathbf{s}(\mathbf{s}^2+100)]$.

ÍNDICE ANALÍTICO

La *n* después de un número de página indica que la referencia se encuentra en las notas.

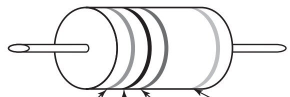
D

R

T

Código de colores de las resistencias

Color de la banda	Negro	Café	Rojo	Naranja	Amarillo	Verde	Azul	Violeta	Gris	Blanco
Valor numérico	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



1. Escriba el valor numérico correspondiente a la primera banda desde la izquierda.
2. Escriba el valor numérico correspondiente a la segunda banda desde la izquierda.
3. Escriba el número de ceros que indica la banda multiplicadora, la cual representa una potencia de 10 (negro = sin ceros adicionales, café = 1 cero, etc.). Una banda multiplicadora de color oro indica que el decimal se corre un lugar hacia la izquierda; una banda multiplicadora de plata indica que el decimal se corre dos lugares hacia la izquierda.
4. La banda de tolerancia representa la precisión. Así que, por ejemplo, no sería una sorpresa encontrar una resistencia de 100 Ω con una tolerancia de 5% cuyo valor medido se encuentre en algún punto dentro del rango de 95 a 105 Ω.

Ejemplo

Rojo Rojo Naranja Oro = 22 000 o 22×10^3 = 22 kΩ, 5% de tolerancia
Azul Gris Oro = 6.8 o 68×10^{-1} = 6.8 Ω, 20% de tolerancia

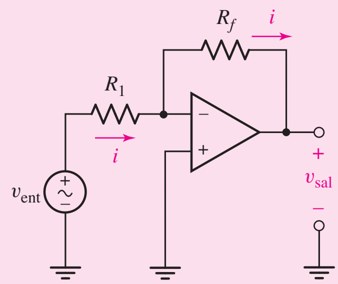
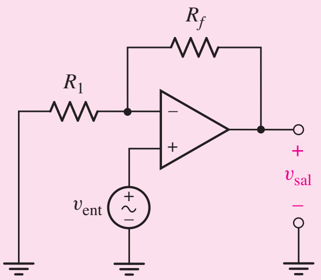
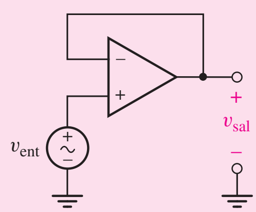
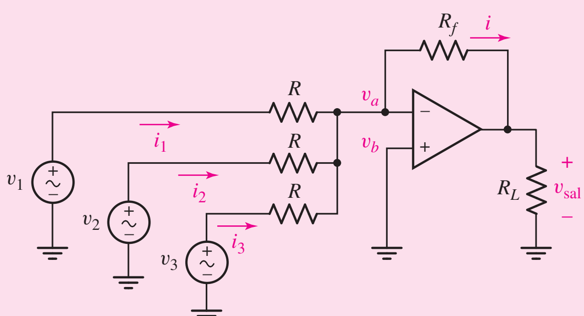
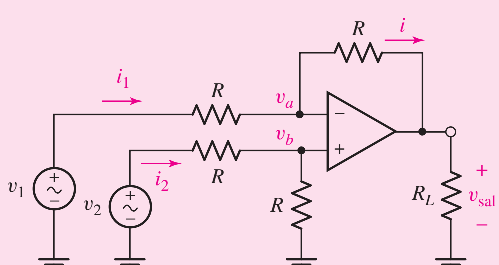
Valores estándar de resistencias con tolerancia de 5%

1.0	1.1	1.2	1.3	1.5	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.3	4.7	5.1	5.6	6.2	6.8	7.5	8.2	9.1	Ω
10.	11.	12.	13.	15.	16.	18.	20.	22.	24.	27.	30.	33.	36.	39.	43.	47.	51.	56.	62.	68.	75.	82.	91.	Ω
100	110	120	130	150	160	180	200	220	240	270	300	330	360	390	430	470	510	560	620	680	750	820	910	Ω
1.0	1.1	1.2	1.3	1.5	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.3	4.7	5.1	5.6	6.2	6.8	7.5	8.2	9.1	kΩ
10.	11.	12.	13.	15.	16.	18.	20.	22.	24.	27.	30.	33.	36.	39.	43.	47.	51.	56.	62.	68.	75.	82.	91.	kΩ
100	110	120	130	150	160	180	200	220	240	270	300	330	360	390	430	470	510	560	620	680	750	820	910	kΩ
1.0	1.1	1.2	1.3	1.5	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.3	4.7	5.1	5.6	6.2	6.8	7.5	8.2	9.1	MΩ

TABLA 14.1 Pares de transformadas de Laplace

$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\}$	$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\}$	$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathscr{L}\{f(t)\}$
$\delta(t)$	1	$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})u(t)$	$\frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)(\mathbf{s}+\beta)}$
$u(t)$	$\frac{1}{\mathbf{s}}$	$\text{sen}\ \omega t\ u(t)$	$\frac{\omega}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$
$tu(t)$	$\frac{1}{\mathbf{s}^2}$	$\cos \omega t\ u(t)$	$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t),\ n = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{\mathbf{s}^n}$	$\text{sen}\ (\omega t + \theta)\, u(t)$	$\frac{\mathbf{s}\ \text{sen}\ \theta + \omega \cos\theta}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{\mathbf{s}+\alpha}$	$\cos(\omega t + \theta)\, u(t)$	$\frac{\mathbf{s}\cos\theta - \omega\ \text{sen}\ \theta}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$
$te^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)^2}$	$e^{-\alpha t}\ \text{sen}\ \omega t\ u(t)$	$\frac{\omega}{(\mathbf{s}+\alpha)^2+\omega^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t),\ n = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)^n}$	$e^{-\alpha t}\cos\omega t\ u(t)$	$\frac{\mathbf{s}+\alpha}{(\mathbf{s}+\alpha)^2+\omega^2}$

TABLA 6.1 Resumen de los circuitos básicos de amp op

Nombre	Esquema del circuito	Relación entrada-salida
Amplificador inversor		$v_{sal} = -\dfrac{R_f}{R_1} v_{ent}$
Amplificador no inversor		$v_{sal} = \left(1 + \dfrac{R_f}{R_1}\right) v_{ent}$
Seguidor de voltaje (también conocido como amplificador de ganancia unitaria)		$v_{sal} = v_{ent}$
Amplificador sumador		$v_{sal} = -\dfrac{R_f}{R}(v_1 + v_2 + v_3)$
Amplificador diferencia		$v_{sal} = v_2 - v_1$

Breve tabla de integrales

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int x \operatorname{sen} ax\,dx = \frac{1}{a^2}(\operatorname{sen} ax - ax \cos ax)$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} ax\,dx = \frac{1}{a^3}(2ax \operatorname{sen} ax + 2\cos ax - a^2x^2 \cos ax)$$

$$\int x \cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax \operatorname{sen} ax)$$

$$\int x^2 \cos ax\,dx = \frac{1}{a^3}(2ax \cos ax - 2\operatorname{sen} ax + a^2x^2 \operatorname{sen} ax)$$

$$\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)};\ a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx\,dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)};\ a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos ax \cos bx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)};\ a^2 \neq b^2$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$

$$\int x^2 e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bx - b\cos bx)$$

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\, dx = \begin{cases} \tfrac{1}{2}\pi; & a > 0 \\ 0; & a = 0 \\ -\tfrac{1}{2}\pi; & a < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0;\ m \neq n \text{ y } m \text{ enteros}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0; & m - n \text{ par} \\ \dfrac{2m}{m^2 - n^2}; & m - n \text{ impar} \end{cases}$$

Breve tabla de identidades trigonométricas

$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

$\cos(\alpha \pm 90^\circ) = \mp \operatorname{sen}\alpha$

$\operatorname{sen}(\alpha \pm 90^\circ) = \pm \cos\alpha$

$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta)$

$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$

$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$

$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{j2}$

$\cos\alpha = \dfrac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$

$e^{\pm j\alpha} = \cos\alpha \pm j \operatorname{sen}\alpha$

$A\cos\alpha + B\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\left(\alpha + \tan^{-1}\dfrac{-B}{A}\right)$